TRIK S VJEŽBI. Neka je X slučajna varijabla s konačnim očekivanjem i s vrijednostima u skupu $\mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X > k\right).$$

RJEŠENJE. Po definiciji matematičkog očekivanja vrijedi

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\left(X = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X = n\right),$$

pri čemu smo iskoristili $n\mathbb{P}\left(X = n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X = n\right)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dobili smo dvostruku sumu s nenegativnim sumandima koja konvergira (jer je očekivanje od X konačno), stoga smijemo zamijeniti poredak sumacije. Primijetimo pritom da sumiramo po skupu $\{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n\}$, što naravno možemo gledati i obratno, odnosno kao $\{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : n \geq k\}$; obrnuti zapis će nam pomoći pri određivanju indeksacije u sumi prilikom promjene poretka. Sada dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X = n\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = n\right) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{X = n\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X \geq k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X > k-1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X > k\right).
\end{aligned}$$

Pritom smo u $(*)$ koristili σ-aditivnost mjere $\mathbb{P}$ i činjenicu da je $\{\{X = n\} : n \geq k\}$ familija međusobno disjunktnih skupova.

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Mario Stipčić