MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 22. travnja 2016.

Zadatak 1

(a) (3 boda) Definirajte Brownovo gibanje.

(b) (3 boda) Definirajte Gaussovski proces, njegovu funkciju očekivanja $m(t)$ i kovarijacijsku funkciju $\gamma(s,t)$.

(c) (5 bodova) Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ neprekidni Gaussovski proces s funkcijom očekivanja $m(t) = 0$ i kovarijacijskom funkcijom $\gamma(s,t) = s \wedge t$. Dokažite da je X Brownovo gibanje.

(d) (3 boda) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i $a > 0$. Ispitajte je li slučajni proces definiran s $Y_t = B_{t+a} - B_a$ Brownovo gibanje.

Rješenje:

(a) Slučajni proces $B = \{B_t : t \geq 0\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ je Brownovo gibanje ako vrijedi

(i) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.;

(ii) za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ su prirasti

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

nezavisne slučajne varijable;

(iii) za sve $0 \leq s \leq t$ prirast $B_t - B_s$ ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$, tj. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$;

(iv) trajektorije slučajnog procesa B su $\mathbb{P}$-g.s. neprekidne funkcije, tj.

$$\mathbb{P}(t \mapsto B_t \text{ je neprekidna funkcija}) = 1\,.$$

(b) Slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ je Gaussovski ako je za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ normalni slučajni vektor. Funkcija očekivanja je definirana s $m(t) = \mathbb{E}\, X_t$, a kovarijacijska funkcija $\gamma(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}\,[X_s X_t] - m(s)m(t)\,.$

(c) Primijetimo da odmah iz $\mathbb{E}\, X_0^2 = \gamma(0,0) = 0$ slijedi da je $X_0 = 0$ g.s. Dokažimo prvo normalnost i stacionarnost prirasta. Neka je $0 \leq s < t$. Tada je

$$B_t - B_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} (B_s, B_t)^\tau$$

normalna slučajna varijabla kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora i vrijedi

$$\mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] = 0 \quad \text{te} \quad \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[B_t^2\right] - 2\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] + \mathbb{E}\left[B_s^2\right] = t - 2s + s = t - s\,,$$

odakle slijedi da je $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$. Ako umjesto $X_t - X_s$ promatramo $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$ dobijemo da je $X_{t-s} \sim N(0, t-s)$. Dakle prirasti su stacionarni i $X_t \sim N(0,t)$. Dokažimo nezavisnost prirasta. Neka je $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Tada je

$$\begin{bmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} - X_{t_1} \\ X_{t_3} - X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{bmatrix}$$

pa je $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ normalni slučajni vektor s očekivanjem 0. Budući je za $i < j$

$$\mathrm{Cov}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) = \mathbb{E}\left[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right] = t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1} = 0\,,$$

odakle slijedi da je kovarijacijska matrica slučajnog gornjeg normalnog slučajnog vektora dijagonalna pa su mu komponente nezavisne slučajne varijable.

ILI: Dokaz Teorema 1.6. s predavanja.

(d) Putevi od Y su očito g.s. neprekidni i vrijedi $Y_0 = B_a - B_a = 0$. Za $0 < t_1 < \cdots < t_n$ promatramo priraste $Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$ koji su jednaki $B_{t_1+a} - B_a, B_{t_2+a} - B_{t_1+a}, \ldots, B_{t_n+a} - B_{t_{n-1}+a}$. Budući da B ima nezavisne priraste, i prirasti od Y su nezavisni. Konačno, za $0 < s < t$, $Y_t - Y_s = B_{t+a} - B_{s+a} \sim N(0, (t+a) - (s+a)) = N(0, t-s)$. Dakle, Y je Brownovo gibanje.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 22. travnja 2016.

Zadatak 2 Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

(a) (3 boda) Dokažite da je slučajni proces $M_t = e^{\vartheta B_t - \frac{\vartheta^2}{2}t}$, $t \geq 0$ martingal.

(b) (5 bodova) Neka je $\tau = \inf\{t > 0 : B_t \notin (-1, 2)\}$. Izračunajte $\mathbb{E}\,[e^{-\tau} 1_{\{B_\tau = -1\}}]$.

Rješenje:

(a)

$$\mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\vartheta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \cdots = e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t} < \infty.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t} | \mathcal{F}_s] &= e^{-\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\mathbb{E}\,[e^{\vartheta(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s] e^{\vartheta B_s} \\ &= e^{\vartheta B_s - \frac{1}{2}\vartheta^2 t}\mathbb{E}\,[e^{\vartheta(B_t - B_s)}] = e^{\vartheta B_s - \frac{1}{2}\vartheta^2 t} e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 (t-s)} = e^{\vartheta B_s - \frac{1}{2}\vartheta^2 s}.\end{aligned}$$

(b) Za M iz (a) dijela, po teoremu o opc. zaustavljanju vrijedi $\mathbb{E}\, M_t^\tau = \mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_{t\wedge\tau} - \frac{\vartheta^2}{2} t\wedge\tau}] = 1$. Budući da je $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$, vrijedi:

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_{t\wedge\tau} - \frac{\vartheta^2}{2} t\wedge\tau}] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\,[(e^{\vartheta B_{t\wedge\tau} - \frac{\vartheta^2}{2} t\wedge\tau}) 1_{\{\tau<\infty\}}]\mathbb{P}(\tau < \infty) = \text{(LTDK)} \\ &= \mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_\tau - \frac{\vartheta^2}{2}\tau}] = \mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_\tau - \frac{\vartheta^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau = -1\}}] + \mathbb{E}\,[e^{\vartheta B_\tau - \frac{\vartheta^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau = 2\}}] \\ &= e^{-\vartheta}\mathbb{E}\,[e^{-\frac{\vartheta^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau=-1\}}] + e^{2\vartheta}\mathbb{E}\,[e^{-\frac{\vartheta^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau=2\}}].\end{aligned}$$

Uz oznake $x = \mathbb{E}\,[e^{-\frac{\vartheta^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau=-1\}}]$, $y = \mathbb{E}\,[e^{-\frac{\vartheta^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau=2\}}]$, te zamijenimo li ϑ s $-\vartheta$, imamo sustav:

$$1 = e^{-\vartheta}x + e^{2\vartheta}y, \quad 1 = e^{\vartheta}x + e^{-2\vartheta}y.$$

Rješenje tog sustava je $x = \frac{sh(2\vartheta)}{sh(3\vartheta)}$, $y = \frac{sh(\vartheta)}{sh(3\vartheta)}$.

Posebno, za $\vartheta = \sqrt{2}$ imamo $\mathbb{E}\,[e^{-\frac{\sqrt{2}^2}{2}\tau} 1_{\{B_\tau=-1\}}] = \mathbb{E}\,[e^{-\tau} 1_{\{B_\tau=-1\}}] = \frac{sh(2\sqrt{2})}{sh(3\sqrt{2})}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 22. travnja 2016.

Zadatak 3

(a) (4 boda) Definirajte jednostavni proces te Itôv integral jednostavnog slučajnog procesa u odnosu na Brownovo gibanje.

(b) (4 boda) Dokažite da je Itôv integral iz (a) martingal.

(c) (3 boda) Definirajte Itôv proces.

(d) (3 boda) Iskažite Itôvu formulu za Itôv proces.

(e) (3 boda) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i

$$X_t = tB_t \quad \text{i} \quad Y_t = \int_0^t e^{-s}\, dX_s \,, t \geq 0 \,.$$

Izračunajte kvadratnu kovarijaciju procesa X i Y.

Rješenje: (a) Slučajni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ je jednostavan ako je

$$H_t(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(\omega) 1_{[t_{j-1},t_j)}(t), \; 0 \leq t \leq T \,,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ je particija segmenta $[0, T]$, a ϕ_j su F_{t_j}-izmjerive slučajne varijable za $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Itôv integral slučajnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B je slučajni proces $(H \bullet B) = \{(H \bullet B)_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$(H \bullet B)_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(B_{t\wedge t_j} - B_{t\wedge t_{j-1}}) \,, \; 0 \leq t \leq T \,.$$

(b) Neka je $H_t(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(\omega) 1_{[t_{j-1},t_j)}(t)$. Neprekidnost i adaptiranost slijede iz definicije. Budući da su ϕ_j omeđeni, slijedi da je $\mathbb{E}\,|(H \bullet B)_t| < \infty$ za sve $0 \leq t \leq T$. Preostaje dokazati da je $\mathbb{E}\,[(H \bullet B)_t|\mathcal{F}_s] = (H \bullet B)_s$, za sve $0 \leq s < t$. Promatramo tri slučaja.

Ako su $s, t \in \{t_0, \ldots, t_n\}$, $(H \bullet B)_{t_k} = \sum_{j=1}^{k} \phi_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ je martingalna transformacija martingala u diskretnom vremenu pa je i sama martingal. Ako je $s, t \in [t_{j-1}, t_j]$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$, vrijedi

$$\mathbb{E}\,[(H \bullet B)_t - (H \bullet B)_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\,[\phi_{j-1}(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = \phi_{j-1}\mathbb{E}\,[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = 0.$$

Ako je $s \in [t_{j-1}, t_j]$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $1 \leq j < k \leq n$, koristeći prethodne slučajeve vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(H \bullet B)_t | \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(H \bullet B)_t | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] | \mathcal{F}_{t_j}\right] | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(H \bullet B)_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_j}\right] | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(H \bullet B)_{t_j} | \mathcal{F}_s\right] = (H \bullet B)_s.
\end{aligned}$$

(c) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$. Slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ je Itôv proces ako postoje $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni procesi $V = \{V_t : t \geq 0\}$ i $H = \{H_t : t \geq 0\}$ takvi da je

$$\int_0^t |V_s| \, ds < \infty \ \mathbb{P} - \text{g.s.} \quad \text{i} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, ds\right] < \infty \quad \text{za sve} \ \ t > 0$$

i

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s \, ds + \int_0^t H_s dB_s \quad \text{za} \ \ t \geq 0 \, .$$

(d) Ako je $f \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ i X Itôv proces, onda vrijedi

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) \, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \, d\langle X \rangle_s \, .$$

(e) Iz Itôve formule slijedi

$$dX_t = B_t \, dt + t \, dB_t$$

pa je

$$dY_t = e^{-t} B_t dt + t e^{-t} \, dB_t \, .$$

Dakle,

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t s^2 e^{-s} \, ds = 2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2) \, .$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 22. travnja 2016.

Zadatak 4 Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje.

(a) (4 boda) Neka je $a > 0$ i $T = T_a \wedge T_{-a}$. Izračunajte

$$\mathbb{E} \int_0^T B_t^4 \, dt \,.$$

(b) (4 boda) Dokažte ili opovrgnite: slučajni proces

$$\frac{t^3}{3} + 2 \int_0^t s B_s^2 \, ds - t^2 B_t^2, \ t \geq 0$$

je martingal.

(c) (3 boda) Odredite $k \in \mathbb{N}$ takav da slučajni proces $X_t = \left(a^{1/3} + \frac{1}{3} B_t\right)^k$ rješava

$$dX_t = \frac{1}{3} X_t^{1/3} \, dt + X_t^{2/3} dB_t; \quad X_0 = a \,.$$

Rješenje:

(a) Iz Itôve formule slijedi

$$B_t^6 = 6 \int_0^t B_s^5 \, dB_s + 15 \int_0^t B_s^4 ds$$

odakle dobijemo da je

$$M_t = B_t^6 - 15 \int_0^t B_s^4 \, ds = 6 \int_0^t B_s^5 dB_s$$

martingal kao Itôv integral. Iz teorema o opcionalnom zaustavljanju slijedi da je i $M_{t \wedge T}$, $t \geq 0$ martingal, odakle dobijemo

$$0 = \mathbb{E}\, M_{t \wedge T} = \mathbb{E}\, B_{t \wedge T}^6 - 15 \mathbb{E} \int_0^{T \wedge t} B_s^4 \, ds \,.$$

Dakle,

$$\mathbb{E} \int_0^{T \wedge t} B_s^4 \, ds = \frac{1}{15} \mathbb{E}\, B_{t \wedge T}^6 \,.$$

Stoga je

$$\mathbb{E} \int_0^T B_s^4 \, ds = \lim_{t \to \infty} \mathbb{E} \int_0^{T \wedge t} B_s^4 \, ds = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{15} \mathbb{E}\, B_{t \wedge T}^6 = \frac{1}{15} \mathbb{E}\, [B_T^6] = \frac{a^6}{15} \,,$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji, a u trećoj Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, budući je $|B_{t \wedge T}| \leq a$.

(b) Iz Itôve formule slijedi

$$t^2 B_t^2 = \int_0^t 2sB_s^2\, ds + \int_0^t s^2 2B_s\, dB_s + \int_0^t s^2\, ds\,,$$

odakle dobijemo da je

$$t^2 B_t^2 - \int_0^t 2sB_s^2\, ds - \frac{t^3}{3} = \int_0^t s^2 2B_s\, dB_s$$

martingal kao Itôv integral.

(c) Neka je $f(x) = \left(a^{1/3} + \frac{1}{3}x\right)^k$. Tada je $\frac{df}{dx} = \frac{k}{3}\left(a^{1/3} + \frac{1}{3}x\right)^{k-1}$ i $\frac{df}{dx} = \frac{k(k-1)}{9}\left(a^{1/3} + \frac{1}{3}x\right)^{k-2}$. Iz Itôve formule slijedi:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{k}{3}\left(a^{1/3} + \frac{1}{3}x\right)^{k-1} dB_t + \frac{k(k-1)}{9}\left(a^{1/3} + \frac{1}{3}x\right)^{k-2} dt = \\ &= \frac{k}{3}X_t^{(k-1)/3} dB_t + \frac{k(k-1)}{9}X_t^{(k-2)/3} dt = \frac{1}{3}X_t^{1/3}\, dt + X_t^{2/3} dB_t, \end{aligned}$$

iz čega vidimo da mora vrijediti $k = 3$.