*5. Zadatak.* Neka je $V$ konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$ operator takav da je $\mathrm{r}(A) = k > 0$. Pokažite da postoje ortonormiran skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ i vektori $f_1, f_2, \ldots, f_k$ u $V$ takvi da vrijedi

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \langle x, f_i \rangle e_i, \quad \forall x \in V.$$

*Rješenje.* Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ ONB za sliku operatora $A$, $\operatorname{Im} A$ (ovdje koristimo činjenicu da svaki netrivijalan kon.dim. unitaran prostor ima ONB; $\operatorname{Im} A$ je u našem slučaju netrivijalan zbog pretpostavke $\mathrm{r}(A) = k > 0$). Sada je

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, \quad \forall x \in V,$$

pri čemu skalari $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ovise o $x$.

Ako ovu jednakost skalarno pomnožimo s $e_j$, za bilo koji $j = 1, 2, \ldots, k$, dobivamo, zbog $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$,

$$\langle Ax, e_j \rangle = \lambda_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k.$$

Koristeći svojstvo adjungiranog operatora, to možemo pisati u obliku

$$\langle x, A^* e_j \rangle = \lambda_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k.$$

Sad je jasno: ako označimo vektore $A^*e_1, A^*e_2, \ldots, A^*e_k$ kao $f_1, f_2, \ldots, f_k$, onda početna jednakost prelazi u

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \langle x, f_i \rangle e_i, \quad \forall x \in V.$$