EM1 - zadatak s demonstratura

Antonio Bjelčić,
Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu

10. studenoga 2017.

Zadatak: [1]

Na partitivnom skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ skupa prirodnih brojeva zadana je binarna relacija τ definirana sa:

$$A\tau B \iff A\cap B\neq\emptyset \ \wedge \ A\cup B=\mathbb{N}.$$

(a) Odredite je li relacija τ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna.
(b) Odredite najmanju relaciju ekvivalencije koja sadrži relaciju τ.
(c) Odredite najveću relaciju ekvivalencije koja je sadržana u relaciji τ.
Sve svoje tvrdnje dokažite.

Rješenje:

(a) Očito τ nije refleksivna jer npr. $(\{1\},\{1\})\notin\tau$. Jasno da je τ simetrična iz same definicije. Relacija τ nije antisimetrična jer $(\{1\},\mathbb{N})\in\tau$, $(\mathbb{N},\{1\})\in\tau$ i $\{1\}\neq\mathbb{N}$. Relacija τ nije niti tranzitivna jer npr. $(\{1\},\mathbb{N})\in\tau$ i $(\mathbb{N},\{2\})\in\tau$, ali $(\{1\},\{2\})\notin\tau$.

(b) Definirajmo relaciju ekvivalencije:

$$R:=\{(A,B)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}) : A,B\neq\emptyset\}\cup\{(\emptyset,\emptyset)\},$$

na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Nije teško vidjeti da je R doista relacija ekvivalencije (na kolokviju obavezno dokazati!). Dokažimo da je $\tau\subseteq R$. Neka je $(A,B)\in\tau$ proizvoljan, tada je specijalno $A\cap B\neq\emptyset$ pa su i $A,B\neq\emptyset$ što povlači da je $(A,B)\in R$. Dakle, doista je $\tau\subseteq R$, pa je R relacija ekvivalencije koja sadrži danu relaciju τ.

Dokažimo da je R najmanja (u smislu inkluzije) relacija ekvivalencije koja sadrži τ. Preciznije, dokažimo:

$$\forall R'\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \text{t.d. je } R' \text{ relacija ekvivalencije i } \tau\subseteq R' \implies R\subseteq R'.$$

Neka je R' jedna takva proizvoljna relacija. Kako je R' refleksivna (jer je relacija ekvivalencije), slijedi da je $(\emptyset,\emptyset)\in R'$. To dokazuje $\boxed{\{(\emptyset,\emptyset)\}\subseteq R'}$.

Neka su $A\subseteq\mathbb{N}$ i $B\subseteq\mathbb{N}$ proizvoljni takvi da je $A,B\neq\emptyset$. Tada su $(A,\mathbb{N})\in\tau$ i $(\mathbb{N},B)\in\tau$ po definiciji relacije τ. Kako je $\tau\subseteq R'$, tada vrijedi $(A,\mathbb{N})\in R'$ i $(\mathbb{N},B)\in R'$. Zbog toga što je R' tranzitivna, (jer je relacija ekvivalencije) vrijedi da je $(A,B)\in R'$. Obzirom da su $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{N}$ i $\emptyset\neq B\subseteq\mathbb{N}$ proizvoljni, time je dokazano da je $\boxed{\{(A,B)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}) : A,B\neq\emptyset\}\subseteq R'}$.

Konačno, zbog uokvirenih inkluzija, i definicije relacije ekvivalencije R, slijedi $R\subseteq R'$.

Q.E.D.

(c) Takva relacija ekvivalencije uopće niti ne postoji. Naime, kada bi postojala ρ relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ za koju je $\rho\subseteq\tau$, tada bi zbog toga što je ρ specijalno i refleksivna vrijedilo da je $(\{1\},\{1\})\in\rho$, pa bi zbog $\rho\subseteq\tau$ vrijedilo i $(\{1\},\{1\})\in\tau$ što je jasno kontradikcija.

Napomena 1: Zadatak iz druge grupe ima analogno rješenje.
Napomena 2: Ako uočite pogrešku, molim javiti na mail: `tony.bjelcic@gmail.com`

[1] Prvi kolokvij, 2016/2017, A grupa, zadatak 3.