Teorija skupova

Druga školska zadaća

Rješenja

1. Gledamo skupove

$$S = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \triangle \mathbb{Q} \text{ je konačan}\}$$
$$T = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ je prebrojiv}\}.$$

Kako je

$$A \triangle \mathbb{Q} = (A \setminus \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \setminus A),$$

vidimo da su za $A \in S$ skupovi $A \setminus \mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q} \setminus A$ konačni. Zbog konačnosti prvog skupa vidimo da je A najviše prebrojiv, a zbog konačnosti drugog skupa vidimo da A ne može biti konačan. Dakle A je prebrojiv. Sada imamo da je $S \subseteq T$, pa je $k(S) \leq k(T)$.

Svaki element skupa T slika je nekog niza u $\mathbb{R}$ (vidjeti vježbe), tako da vrijedi $k(T) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = c$.

S druge strane, funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to S$, $f(x) = \{x\} \cup \mathbb{Q}$ je dobro definirana injekcija, pa vrijedi $c = k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \leq k(S)$.

Sada iz

$$c \leq k(S) \leq k(T) \leq c$$

zaključujemo da oba skupa imaju kardinalnost c.

2. Skup S svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ čija je slika otvoren interval podskup je skupa ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, pa je $k(S) \leq k({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = 2^c$.

S druge strane, funkcija $F :{}^{[0,+\infty\rangle} \langle 0,1\rangle \to S$ definirana s

$$F(g)(x) = \begin{cases} g(x), \ x \in [0,+\infty\rangle \\ -x, \ x \in \langle -1,0\rangle \\ \frac{1}{2}, \ \text{inače} \end{cases}$$

je dobro definirana ($F(g)$ ima sliku $\langle 0,1\rangle$) i injekcija je pa je $2^c = k({}^{[0,+\infty\rangle}\langle 0,1\rangle) \leq k(S)$. Zaključujemo da je kardinalnost od S jednaka 2^c.

3. (a) Tvrdimo da je skup minimalnih elemenata M zapravo skup svih nizova koji imaju točno jedan član jednak jedan, tj.

$$M = \{a \in^{\mathbb{N}} \{0,1\} \mid (\exists! n \in \mathbb{N})\ a_n = 1\}.$$

Ako je x minimalan i ima 1 na barem dva mjesta, tada za y koji na jednom od tih mjesta ima 0, a na ostalima se podudara s x vrijedi $y \preceq x$ i $y \neq x$, pa vidimo da x ne može biti minimalan. S druge strane, jedini niz strogo manji od niza s točno jednom jedinicom je $(0,0,0,\ldots)$ koji nije u S.

Funkcija $f : \mathbb{N} \to M$,

$$f(m)(n) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

očito je bijekcija.

(b) Kada bi postojao najmanji element, on bi bio jedan od prebrojivo mnogo minimalnih elemenata. No to je nemoguće jer bi taj element trebao biti manji od svih minimalnih elemenata, a ti elementi su neusporedivi.

(c) Očito je niz $(0,0,0,\ldots)$ donja međa skupa S. Budući da S nema najmanji element, niti jedna donja međa za S ne može biti u S. Sada zbog $S =^{\mathbb{N}} \{0,1\} \setminus \{(0,0,\ldots)\}$ vidimo da je $(0,0,0,\ldots)$ jedina donja međa od S, pa je onda i infimum od S.