Teorija analitičkih funkcija

1. kolokvij, 22. 12. 2005.

Ime i prezime: ______________________________

1	2	3	4	5	6	A	Σ

(20) 1. Za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da je *dvostruko-periodična* ako postoje kompleksni brojevi $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$, koji su linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{R}$ i takvi da vrijedi

$$f(z + w_0) = f(z + w_1) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cijela dvostruko-periodična funkcija, dokažite da je f konstantna funkcija.

(20) 2. (a) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $E \subseteq \Omega$ podskup od Ω sa svojstvom da je $E' \cap \Omega \neq \emptyset$ (tj. E ima gomilište koje je sadržano u Ω). Neka je $F : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija sa svojstvom da su funkcije $F(z, \cdot)$ i $F(\cdot, z)$ holomorfne na Ω, za svako $z \in \Omega$. Ako je $F_{|E \times E} = 0$, dokažite da je $F = 0$.

(b) Dokažite da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt^2 + 2wt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{\frac{w^2}{z}}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re} z > 0,$$

pri čemu $\sqrt{\cdot}$ u gornjem izrazu označava glavnu granu drugog korijena.

(20) 3. Dokažite da je sa

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-nz^2}$$

dobro definirana holomorfna funkcija na području $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{4}\}$.

(20) 4. Neka su $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < |b|$ i $n \in \mathbb{N}$. dokažite da je

$$\oint_{S(0,r)} \frac{dz}{(z - b)(z - a)^n} = \frac{2\pi i \cdot (-1)^{n-1}}{(a - b)^n}, \quad \forall r \in \langle |a|, |b| \rangle.$$

(20) 5. Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka su $c_0, c_1, \ldots, c_n$ kompleksni brojevi i neka je $c_n \neq 0$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa

$$f(\theta) := c_0 + c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{2i\theta} + \ldots + c_n e^{ni\theta}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da postoji $\theta \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(\theta)| > |c_0|$.

(40) **6.** Neka su f i g holomorfne funkcije na ograničenom području Ω i neprekidne na $\overline{\Omega}$. Dokažite da funkcija $z \mapsto |f(z)| + |g(z)|$ postiže svoj maksimum na rubu područja Ω.

Rezultati: odmah nakon kolokvija.

Ilja Gogić