# Teorija analitičkih funkcija

2. kolokvij, 2. 2. 2006.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Ime i prezime: ______________________________

(20) 1. Neka je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ funkcija zadana formulom

$$f(z) := e^z + 3z^8.$$

Odredite broj nultočki od $f$ na krugu $K(0,1)$ i dokažite da su sve one jednostruke.

(20) 2. Neka je $f$ funkcija zadana formulom

$$f(z) := \frac{3z^4 + 2z + 1}{8z^5 + 5z^2 + 2}.$$

Označimo sa $S$ skup svih singulariteta od $f$ u (neproširenoj) kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$.

(a) Izračunajte sumu

$$\sum_{s \in S} \operatorname{Res}(f; s).$$

(b) Izračunajte integral

$$\oint_{S(0,1)} f(z)\, dz.$$

(20) 3. Odredite opći oblik Möbiusove transformacije $w = f(z)$ koja zatvoreni krug $\overline{K}(0,1)$ preslikava na donju poluravninu $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

(20) 4. Konstruirajte Riemannov izomorfizam područja $\varphi : \Omega \to K(0,1)$ za kojeg je $f(1) = 0$ i $f'(1) > 0$, pri čemu je $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{4}\}$.

(20) 5. Neka je $G$ podgrupa od $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ definirana sa

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ (|a|^2 + |d|^2) \cdot (|b|^2 + |c|^2) = 0,\ ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Dokažite da je grupa holomorfnih automorfizama punktirane kompleksne ravnine, $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}^*)$, izomorfna kvocijentnoj grupi $G/D$, gdje je

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \ \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$$

(20) **6.** Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna holomorfna funkcija na otvorenom skupu $\Omega$ koji sadrži zatvoreni krug $\overline{K}(0,1)$ i pretpostavimo da je $f(S(0,1)) \subseteq S(0,1)$. Dokažite da postoji $n \in \mathbb{N}$, kompleksni brojevi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K(0,1)$ i $\theta \in \langle -\pi, \pi]$ takvi da je

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{z - \alpha_i}{1 - \overline{\alpha}_i z}, \ \forall z \in \Omega.$$

**Rezultati:** sutra u 14 h.

Ilja Gogić