Parcijalne diferencijalne jednadžbe
skripta

Braslav Rabar

27. listopada 2008.

KLASIFIKACIJA PARCIJALNIH DIFERNCIJALNIH JEDNADŽBI

Def 1 *Linearna PDJ je jednadžba u kojoj se parcijalne derivacije nepoznate funkcije javljaju linearno uz koeficijente koji mogu ovisti o varijablama.*

Def 2 *Polulinearna ili semilinearna PDJ je jednadžba u kojoj se parcijalne derivacije nepoznate funkcije najvišeg reda javljaju linearno uz koeficijente koji mogu ovisiti o varijablama.*

Def 3 *Kvazilinearna PDJ je jednadžba u kojoj se parcijalne derivacije nepoznate funkcije najvišeg reda javljaju linearno uz koeficijente koji mogu ovisiti o varijablama, funkciji i parcijalnim derivacijama nižeg reda.*

Def 4 *Nelinearna PDJ je svaka PDJ koja nije linearna, polulinearna ili kvazilinearana.*

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOGA REDA

Teorem 1 *Ako je $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ onda postoji jedinstveno rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & na\ \mathbb{R}^2 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

dano formulom $u(t,x) = u_0(x - ct)$

Dokaz. Formula je očito rješenje Cauchyjeve zadaće, a jedinstvenost slijedi iz činjenice da je rješenje konstantno u smjeru vektora $(1, c)$ pa je $u(t, x) = u(t + s, x + cs) = u(0, x - ct) = u_0(x - ct)$

Q.E.D.

Na prostoru $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definiramo metriku $d(f, g) = \sup\{\min\{1, |\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l}(f - g)(x)| : l \in \{0, \ldots, k\}, i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}\} : x \in \mathbb{R}^n\}$

Sada imamo da je preslikavanje $L : C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ dano sa $L(u_0) = u$ očito neprekidno i linearno.

Def 5 *Funkcija je analitička u točki ako postoji okolina te točke na kojoj je jednaka svom Taylerovom razvoju. Funkcija je analitička na otvorenom skupu ako je analitička u svakoj točki toga skupa.*

Teorem 2 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i neka je $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ako funkcija $u \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ zadovoljava $u_t + cu_x = 0$ na Ω tada je u analitička na Ω.*

Dokaz. Za općeniti $c_1 + ic_2 = c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ imamo $c_2 \neq 0$. Neka je $u = v + iw$ tada imamo $v_t + c_1 v_x - c_2 w_x = 0$ i $w_t + c_2 v_x + c_1 w_x = 0$

Definiram regularan linearan operator $\varphi(a, b) = (a, c_1 a + c_2 b)$ koji promatram kao preslikavanje sa $\varphi^{-1}(\Omega)$ na Ω. Sada definiram $f = u \circ \varphi = g + ih$.

Sada imamo $g_a = v_t + c_1 v_x$, $h_b = c_2 v_x$, $g_b = c_2 v_x$ i $h_a = w_t + c_1 w_x$ pa je $g_a = h_b$ i $g_b = -h_a$ odnosno funkcija $a + ib \mapsto f(a, b)$ je holomorfna pa je analitička. Imamo da je tada i $u = f \circ \varphi^{-1}$ isto analitička.

Q.E.D.

Teorem 3 *(Picard, dokaz u Obične diferencijelne jednadžbe, Alić) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup, $(t_0, \mathbf{x_0}) \in \Omega$ i neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija koja je i lokalno Lipschitzova po $\mathbf{x}$ (po zadnjih n varijabli). Tada Cauchyjeva zadaća $\begin{cases} d\mathbf{x}/dt = f(t, \mathbf{x}) & \text{na } \Omega \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \end{cases}$ ima jedinstveno neproširivo rješenje čije je područje definicije otvoren interval.*

Ukoliko je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ iz kalse C^1 po $\mathbf{x}$ (po zadnjih n varijabli) tada je f lokalno Lipschitzova po $\mathbf{x}$.

Teorem 4 *(Gronwallova lema, dokaz u Obične diferencijalne jednadžbe, Alić) Neka je J interval, neka je $w \in C(J, [0, +\infty\rangle)$ te neka su α, β, γ nenegativni cijeli brojevi. Ukoliko je tada za $t_0 \in J$*

$$w(t) \leq \alpha + \beta|t - t_0| + \gamma \left| \int_{t_0}^{t} w(\tau) d\tau \right|$$

za $t \in J$ onda je

$$w(t) \leq (\alpha + \beta|t - t_0|) e^{\gamma|t-t_0|}$$

za $t \in J$.

Teorem 5 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $(t_0, x_0) \in \Omega$ onda je $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$ rješenje Cauchyjeve zadaće $\begin{cases} dx/dt = a(t, x) & \text{na } \Omega \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ klase C^1 po svim argumentima.*

Dokaz. Kako je $x(t, t_0 - s, x_0) = x(t + s, t_0, x_0)$ imamo da je to rješenje klase C^1 po prvom i drugom argumentu.

Sustav

$$\begin{cases} dx/dt = a(t, x) & \text{na } \Omega \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

možemo prevesti u autonomni ako stavimo $y = (x, \tau)$, $b(y) = a(\tau, x)$, $y_0 = (x_0, t_0)$. Autonomni sustav tada glasi

$$\begin{cases} dy/dt = b(y) & \text{na } \Omega \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Primjetimo da rješenje ovisi samo o (t_0, x_0) pa gledamo $y = y(t, t_0, x_0)$. Definiramo

$$r_i(t, t_0, x_0, h) = y(t, t_0, x_0 + he_i) - y(t, t_0, x_0)$$

tada je $r_i(t_0, t_0, x_0, h) = he_i$ što zajedno s

$$\partial_t r_i(t, t_0, x_0, h) = b(y(t, t_0, x_0 + he_i) - b(y(t, t_0, x_0))$$

daje

$$r_i(t, t_0, x_0, h) = he_i + \int_{t_0}^{t} (b(y(s, t_0, x_0 + he_i)) - b(s, t_0, x_0))ds$$

Sada po teoremu o srednjoj vrijednosti postoji $M > 0$ takav da je

$$\|r_i(t, t_0, x_0, h)\| \leq |h| + M \left| \int_{t}^{t_0} \|r_i(s, t_0, x_0, h)\| ds \right|$$

Koristeći Gronwallovu lemu dobivamo

$$\|r_i(t, t_0, x_0, h)\| \leq |h| e^{M|t-t_0|}$$

iz čega slijedi da funkcija $y = y(t, t_0, x_0)$ ovisni neprekidno o x_0. Postavimo sustav

$$\begin{cases} \dot{w}_i(t) = Db(y(t, t_0, x_0))w_i(t) \\ w_i(t_0) = e_i \end{cases}$$

Nije teško pokazati da $w_i = w_i(t, t_0, x_0)$ ovisi neprekidno o t_0, x_0. Sada imamo

$$\partial_t(r_i(t, t_0, x_0, h) - hw_i(t)) =$$

$$Db(y(t, t_0, x_0)(r_i(t, t_0, x_0, h) - hw_i(t)) + o(\|r(t, t_0, x_0, h)\|)$$

Kako je $o(\|r(t, t_0, x_0, h)\|) = o(|h|)$ i $r_i(t_0, t_0, x_0, h) - hw_i(t_0) = 0$ zbog neprekidnosti od $Db(y(t, t_0, x_0))$ postoji $N > 0$ takav da je

$$\|r_i(t, t_0, x_0, h) - hw_i(t)\| \leq N \left| \int_{t_0}^{t} \|r_i(s, t_0, x_0, h) - hw_i(s)\| ds \right| + o(|h|)$$

Sada po Gronwallovoj lemi imamo $\|r_i(t,t_0,x_0,h) - hw_i(t)\| \leq o(|h|)e^{N|t-t_0|}$ Odnosno $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_i(t,t_0,x_0,h)-hw_i(t)}{h} = 0$ odnosno

$$\lim_{h\to 0} \frac{r_i(t,t_0,x_0,h)}{h} = w_i(t,t_0,x_0)$$

pa je $y = y(t,t_0,x_0)$ klase C^1 po x_0. Kako je $y = (x,\tau)$ imamo da je $x = x(t,t_0,x_0)$ klase C^1 po x_0.

Q.E.D.

Def 6 *Neka je $k \geq 1$. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $f \in C^k(\Omega,\mathbb{R})$ ako je skup $M = f^{-1}(c)$ za $c \in \mathbb{R}$ neprazan onda M zovemo glatkom hiperplohom klase C^k ukoliko za $x \in M$ vrijedi $\nabla f(x) \neq 0$. Za hiperplohu tangencijalni prostor u točki $p \in M$ je ortogonalni komplement od $\nabla f(p)$.*

Def 7 *Neka je $k \geq 1$. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren skup, injektivnu funkciju $\varphi \in C^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ takvu da joj je diferencijal u svakoj točki maksimalnog ranga zovemo parametrizirana m-ploha klase C^k u $\mathbb{R}^n$. Ako je još $m = n-1$ zovemo je parametrizirana hiperploha. Tangencijalni prostor T_pM na $M = \varphi(\Omega)$ u točki $p \in M$ je slika od diferencijala preslikavanja φ u točki $\varphi^{-1}(p)$ to jest* $\operatorname{Im} D\varphi(\varphi^{-1}(p))$

Neka je S hiperploha ili parametrizirana hiperploha u $\mathbb{R}^n$ klase C^1. Neka je $u_0 : S \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Sa $S^* = \{(x,u_0(x)) : x \in S\}$ označimo graf od u_0. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvorena okolina od S^*. Neka je $a \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ te $b \in C^1(U,\mathbb{R})$. Promatramo kvazilinearnu jednadžbu prvog reda

$$a(x,u(x))\nabla u(x) = b(x,u(x))$$

sa početnim uvijetom $u|_S = u_0$. Pretpostavimo da imamo rješenje na nekom otvorenom skupu $\Omega \supseteq S$. Vrijedi da je $(\nabla u(x), -1)$ normala na graf od u. Da to vidimo graf od u shvatimo kao nivo skup funkcije $f(x,y) = u(x) - y$. Normala na taj nivo skup je $\nabla f(x,y) = (\nabla u(x), -1)$ pa je to i normala na graf od u.

Def 8 *Kažemo da je hiperploha ili parametrizirana hiperploha S karakteristična u točki $x \in S$ s obzirom na kvazilinearnu jednadžbu prvog reda*

$$a(x,u(x))\nabla u(x) = b(x,u(x))$$

sa početnim uvijetom $u|_S = u_0$ ako je $a(x,u_0(x))$ tangencijalno na S u točki x. Ako S nije karakteristična niti u jednoj svojoj točki kažemo da je nekarakteristična.

Spomenutu kvazilinearnu jednadžbu možemo pisati kao

$$\begin{pmatrix} a(x,u(x)) \\ b(x,u(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla u(x) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

odnosno polje $\begin{pmatrix} a(x,u(x)) \\ b(x,u(x)) \end{pmatrix}$ je tangencijalno na graf od u.

Promatramo sljedeće jednadžbe karakteristika

$$\begin{cases} dx/dt = a(x,y) \\ dy/dt = b(x,y) \end{cases}$$

zajedno s početnim uvijetima u t_0 kroz točku $P = (x_0, u(x_0))$.

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = u(x_0) \end{cases}$$

Teorem 6 *Neka je točka $P = (x_0, u(x_0))$ točka grafa rješenja u jednadžbe $a(x,u(x))\nabla u(x) = b(x,u(x))$. Ako je $t \mapsto (x(t), y(t))$ karakteristika koja u t_0 prolazi kroz točku P onda ona u cijelosti leži u grafu od u.*

Dokaz. Definiramo $z(t) = y(t) - u(x(t))$. Vrijedi $z(t_0) = 0$. Računamo

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{d}{dt}y(t) - \nabla u(x(t))\frac{d}{dt}x(t) =$$

$$b(x(t), z(t) + u(x(t))) - \nabla u(x(t)) a(x(t), z(t) + u(x(t)))$$

uz početni uvijet $z(t_0) = 0$ imamo jedinstveno rješenje, a jedno očito rješenje je $z(t) = 0$ pa je teorem dokazan.

Q.E.D.

Teorem 7 *Neka je S hiperploha ili parametrizirana hiperpoloha klase C^1 u $\mathbb{R}^n$, $a \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $b \in C^1(U, \mathbb{R})$ i $u_0 \in C^1(S, \mathbb{R})$ pri čemu je $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ okolina grafa S^* funkcije u_0. Postoji rješenje u klase C^1 problema*

$$\begin{cases} a(x,u(x))\nabla u(x) = b(x,u(x)) \\ u|_S = u_0 \end{cases}$$

definirano na nekoj okolini Ω od S ako je S nekarakteristična.

Dokaz. Uzmimo da je S parametrizirna hiperploha to jest neka je S zadana parametarski $S = \{g(s) : s \in O \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Ako je S hiperploha onda svakako lokalno možemo nači okolinu takvu da ta ploha bude zadana parametarski zbog teorema o implicitnoj funkciji.

Promatramo jednadžbe karakteristika definiranih preko Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} dx/dt = a(x,y) \\ dy/dt = b(x,y) \\ x(0) = g(s) \\ y(0) = u_0(g(s)) \end{cases}$$

Neka je rješenje dano sa $h(t,s) = (\tilde{x}(t,s), \tilde{y}(t,s))$. Ono je klase C^1 po oba argumenta.

Računamo

$$\nabla\tilde{x}(0,s) = (\partial_t\tilde{x}(0,s), \nabla_s\tilde{x}(0,s)) = (a(g(s), u_0(g(s))), \nabla g(s))$$

pa kako je S nekarakteristična to je $\nabla\tilde{x}(0,s)$ regularan pa postoji okolina U točke $g(s)$ i okolina V točke $(0,s)$ takve da je $\tilde{x}\colon V \to U$ difeomorfizam

Definiramo funkciju u na U sa $u(x) = \tilde{y}(s,t) = \tilde{y}(\tilde{x}^{-1}(x))$. Kako karakteristike leže na grafu rješenja imamo da je u lokalno rješenje. Vidimo da je na U jednstveno određen u. Sada rješenje na okolini od S je unija lokalnih rješenja.

Q.E.D.

Promatramo jednadžbu

$$a_1(x,y,u)\partial_x u + a_2(x,y,u)\partial_y u = b(x,y,u)$$

i pridružene joj karakteristike

$$\begin{cases} dx/dt = a_1(x,y,u) \\ dy/dt = a_2(x,y,u) \\ du/dt = b(x,y,u), \end{cases}$$

Ako je $a_1 \neq 0$ u nekoj točki onda prema teoremu o inverznoj funkciji odnos $x = x(t)$ daje odnos $t = t(x)$ pa u okolini polazne točke imamo $dt/dx = 1/a_1(x,y,u)$ sada imamo da na nekoj okolini $y = y(x)$ pa imamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{a_2}{a_1}$$

Što nas navodi da promatramo subsidijarne jednadžbe

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b}$$

Rješavanjem toga sustava dobijemo

$$v(x, y, u) = c_1$$
$$w(x, y, u) = c_2$$

Tvrdimo da rješenje u možemo zapisati implicitno za proizvoljnu funkciju F klase C^1 kao $F(v(x, y, u), w(x, y, u)) = 0$

Ako je u nekoj točki $P_0 = (x_0, y_0, u_0)$ vrijedi $\partial_1 F \partial_u v + \partial_2 F \partial_u w \neq 0$ tada postoji okolina U točke (x_0, y_0) da na njoj vrijedi ta nejednakost i na njoj definirana glatka klase C^1 funkcija $u = f(x, y)$ takava da

$$F(v(x, y, f(x, y)), w(x, y, f(x, y))) = 0$$

za $(x, y) \in U$

Ako deriviramo tu formulu po x dobijemo

$$\partial_1 F(\partial_x v + \partial_u v \partial_x f) + \partial_2 F(\partial_x w + \partial_u w \partial_x f) = 0$$

Ukoliko je deriviramo po y dobijemo

$$\partial_1 F(\partial_y v + \partial_u v \partial_y f) + \partial_2 F(\partial_y w + \partial_u w \partial_y f) = 0$$

Imamo $\begin{pmatrix} \partial_x v + \partial_u v \partial_x f & \partial_x w + \partial_u w \partial_x f \\ \partial_y v + \partial_u v \partial_y f & \partial_y w + \partial_u w \partial_y f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F \\ \partial_2 F \end{pmatrix} = 0$

Kako je $\begin{pmatrix} \partial_1 F \\ \partial_2 F \end{pmatrix} \neq 0$ imamo da je determinanta gornje matrice 0 pa slijedi

$$(\partial_x v + \partial_u v \partial_x f)(\partial_y w + \partial_u w \partial_y f) - (\partial_x w + \partial_u w \partial_x f)(\partial_y v + \partial_u v \partial_y f) = 0$$

kada se to sredi dobije se

$$\left|\frac{\partial(v, w)}{\partial(u, y)}\right| \partial_x f + \left|\frac{\partial(v, w)}{\partial(x, u)}\right| \partial_y f = \left|\frac{\partial(v, w)}{\partial(y, x)}\right|$$

Pretpostvaimo da su v, w funkcijonalno nezavisne to jest da je Jacobijeva matrica $\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y,u)}$ punog ranga. BSO pretpostavimo da je $\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}$ regularna.

Ako imamo krivulju $t \mapsto (x(t), y(t), u(t))$ koja rješava

$$\begin{cases} v(x, y, u) = c_1 \\ w(x, y, u) = c_2 \end{cases}$$

onda imamo

$$v(x(t),y(t),u(t)) = c_1$$
$$w(x(t),y(t),u(t)) = c_2$$

Kada deriviramo to po t dobijemo

$$\partial_x v\frac{dx}{dt} + \partial_y v\frac{dy}{dt} + \partial_u v\frac{du}{dt} = 0$$
$$\partial_x w\frac{dx}{dt} + \partial_y w\frac{dy}{dt} + \partial_u w\frac{du}{dt} = 0$$

Što je jednako zbog jednadžbi karakteristka sa

$$\partial_x v a_1 + \partial_y v a_2 + \partial_u v b = 0$$
$$\partial_x w a_1 + \partial_y w a_2 + \partial_u w b = 0$$

pretpostavimo da $b \neq 0$ pa slijedi

$$\frac{-a_1}{b}\left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\right|\partial_x f + \frac{-a_2}{b}\left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\right|\partial_y f = -\left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\right|$$

odnosno $a_1 f_x + a_2 f_y = b$

VALNA JEDNADŽBA

Jednadžbu oblika

$$\partial_{tt}u - c^2\triangle u = f(x,t)$$

gdje je $\triangle u = \partial_{x_1x_1}u + \ldots\partial_{x_nx_n}u$ operator Laplacea zovemo valnom jednadžbom, ako je $f(t,x) = 0$ onda je jednadžba homogena. Prvo ćemo promatrati homogenu valnu jednadžbu sa jednom prostornom dimenzijom.

Problem $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ možemo zapisati $(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0$ pa se problem svodi na rješavanje sustava

$$\begin{cases} (\partial_t - c\partial_x)q = 0 \\ (\partial_t + c\partial_x)u = q \end{cases}$$

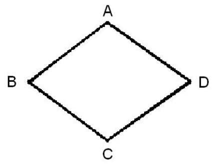
Znamo da je $q(t,x) = g(x+ct)$ za neku C^1 funkciju g.

Neka je G primitivna funkcija funkcije $\frac{g}{2c}$ pa računamo $(\partial_t + c\partial_x)G(x+ct) = G'(x+ct)c + cG'(x+ct) = 2cG'(x+ct) = g(x+ct)$ pa je $(\partial_t + c\partial_x)(u(t,x) - G(x+ct)) = 0$ pa je $u(t,x) - G(x+ct) = F(x-ct)$ odnosno $u(t,x) = G(x+ct) + F(x-ct)$

Ako je u klase C^2 onda je i F klase C^2 jer je G klase C^2. Pokazli smo

Teorem 8 *Funkcija u klase C^2 zadovoljava homogenu valnu jednadžbu $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ ako i samo ako postoje funkcije F i G klase C^2 takve da je $u(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$*

Teorem 9 *Neka je u klase C^2 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada je ekvivalentno*
(a) u zadovoljeva homogenu valnu jednadžbu na Ω
(b) za svaki paralelogram $ABCD$ unutar Ω čije su stranice paralene sa pravcima $x = ct$ odnosno $x = -ct$ vrijedi $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$
(c) za svaki romb $ABCD$ unutar Ω čije su stranice paralelne pravcima $x = ct$ i $x = -ct$ vrijedi $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$



Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Znamo da postoje funckcije F i G takve da je $u(t,x) = F(x-ct)+G(x+ct)$. Kako A i B leže na istom pravcu $x-ct = const$ imamo da je $F(A) = F(B)$ sa slike vidimo ostatak to jest da je $F(C) = F(D)$, $G(A) = G(D)$ i $G(C) = G(B)$. Kada zbrojimo tih 4 jednakosti dobijemo $F(A) + G(A) + F(C) + G(C) = F(B) + G(B) + F(D) + G(D)$ odnosno $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$
$(b) \Rightarrow (c)$ je očito.
$(c) \Rightarrow (a)$ Neka je $(t,x) \in \Omega$ tada postoji dovoljno mali $h > 0$ takav da je konveksna ljuska točaka A, B, C, D sadržana u Ω gdje je $A = (x, t+h)$, $B = (x-ct, t)$, $C = (x, t-h)$ i $D = (x+ct, t)$. Po pretpostavci je
$u(x,t+h) + u(x,t-h) = u(x-ch,t) + u(x+ch,t)$ $(*)$

Ako je $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase C^2 onda postoji $\varepsilon \in \langle 0,1\rangle$ takav da je $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\varepsilon h)$ $(**)$

Iz $(*)$ i $(**)$ sada slijedi da postoje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \langle 0,1\rangle$ takvi da je

$$\begin{gathered} u(t,x) + h\partial_t u(x,t) + \frac{h^2}{2}\partial_{tt}u(x,t+\varepsilon_1 h) + \\ u(x,t) - h\partial_t u(x,t) + \frac{h^2}{2}\partial_{tt}u(x,t-\varepsilon_2 h) = \\ u(x,t) - ch\partial_x u(x,t) + \frac{(ch)^2}{2}\partial_{xx}u(x-\varepsilon_3 ch,t) + \\ u(x,t) + ch\partial_x u(x,t) + \frac{(ch)^2}{2}\partial_{xx}u(x+\varepsilon_4 ch,t) \end{gathered}$$

Iz čega slijedi kada se h pusti u 0

$$\partial_{tt}u(x,t) = c^2\partial_{xx}u(x,t)$$

Q.E.D.

Promotrimo početnu (Cauchyjevu) zadaću za homogenu valnu jednadžbu:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0, \\ u(.,0) = u_0, \\ \partial_t u(.,0) = u_1, \end{cases}$$

Imamo opće rješenje homogene valne jednadžbe

$$u(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

Probajmo zadovoljiti početne uvijete

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = u_0(x)$$

$$\partial_t u(x,0) = -cF'(x) + cG'(x) = u_1(x)$$

Drugu jednadžbu integriramo pa dobijemo

$$-F(x) + G(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x u_1(\xi)d\xi + A$$

u kombinaciji s prvom imamo

$$G(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(\xi)d\xi + \frac{A}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(\xi)d\xi - \frac{A}{2}$$

pa konačno imamo d'Alambertovu formulu

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi$$

Teorem 10 *Jedinstveno rješenje zadaće*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t,x) - c^2\partial_{xx}u(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

je zadano formulom

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct)+u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\xi)d\xi ds$$

Dokaz. 1. metoda... Rješavamo sustav

$$\partial_t u - c\partial_x u = v$$
$$\partial_t v + c\partial_x v = f$$

metodom karakteristika.

$$\begin{cases} (t,x)(0) = (0, x_0) \\ y(0) = v(0, x_0) \\ \frac{d}{d\eta}(t,x) = (1, c) \\ dy/d\eta = f(t,x) \end{cases}$$

imamo da je $(t(\eta), x(\eta)) = (\eta, c\eta + x_0)$ te imamo $y(\eta) = \int_0^\eta f(t(s), x(s))ds + v(0, x_0)$

Prvo za (t,x) pronađemo pripadan $x_0 = x - ct$ zatim za taj x_0 riješimo gornji problem karakteristika. Slijedi da je $v(t,x) = \int_0^t f(s, x - ct + cs)ds + v(0, x - ct)$

Pogledajmo početni uvijet za v

$$v = \partial_t u - c\partial_x u$$

pa je

$$v(x, 0) = u_1(x) - cu_0'(x)$$

dakle

$$v(t,x) = \int_0^t f(s, x - ct + cs)ds + u_1(x - ct) - cu_0'(x - ct)$$

Nastavljemo sa metodom karakteristika za funkciju u

$$\begin{cases} (t,x)(0) = (0, x_0) \\ y(0) = u_0(x_0) \\ \frac{d}{d\zeta}(t,x) = (1, -c) \\ dy/d\zeta = v(t,x) \end{cases}$$

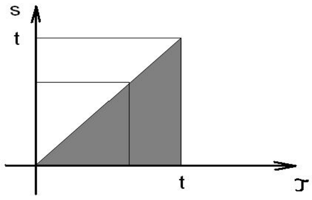
Imamo $(t(\zeta), x(\zeta)) = (\zeta, -c\zeta + x_0)$ te $y(\zeta) = \int_0^\zeta v(t(\tau), x(\tau))d\tau + u_0(x_0)$

Prvo za (t,x) pronađemo pripadan $x_0 = x + ct$ zatim za taj x_0 riješimo gornji problem karakteristika. Slijedi da je $u(t,x) = \int_0^t v(\tau, x + ct - c\tau)d\tau + u_0(x + ct)$. Uvrstimo li formulu za v dobivamo

$$u(t,x) = A(t,x) + B(t,x) + C(t,x) + u_0(x + ct)$$

gdje je

$$A(t,x) = \int_0^t \int_0^\tau f(s, x + ct - c\tau - c\tau + cs) ds d\tau =$$



$$= \int_0^t \int_s^t f(s, x + ct - c\tau - c\tau + cs) d\tau ds = \left| \begin{array}{c} \xi = x + ct - 2c\tau + cs \\ d\xi = -2cd\tau \\ s \to x + ct - cs \\ t \to x - ct + cs \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+ct-cs}^{x-ct+cs} f(s,\xi) d\xi ds = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\xi) d\xi ds$$

$$B(t,x) = \int_0^t u_1(x + ct - c\tau - c\tau) d\tau = \left| \begin{array}{c} \xi = x + ct - 2c\tau \\ d\xi = -2c\tau \\ 0 \to x + ct \\ t \to x - ct \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2c} \int_{x+ct}^{x-ct} u_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi$$

$$C(t,x) = -c \int_0^t u_0'(x + ct - c\tau - c\tau) d\tau = \left| \begin{array}{c} \xi = x + ct - 2c\tau \\ d\xi = -2cd\tau \\ 0 \to x + ct \\ t \to x - ct \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x+ct}^{x-ct} u_0'(\xi) d\xi = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) - u_0(x + ct))$$

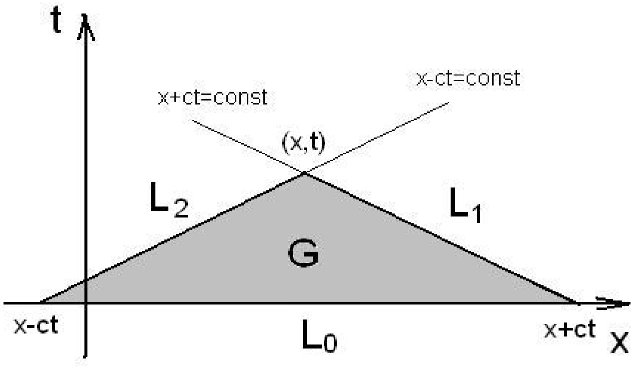
Q.E.D.

Pokažimo prošli teorem drugom metodom to jest pomoću Greenove formule.

Teorem 11 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ klase C^1, $\Gamma \subseteq \Omega$ pozitivno orjentirana PDG kontura takva da je njeno unutrašnje područje G sadržano u Ω tada vrijedi*

$$\int_G \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \int_\Gamma F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

Formulu $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = f$ integriramo po G (trokut sa slike)



Imamo $\int_G \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = \int_G f$. Stavimo $F = (F_1, F_2) = (c^2\partial_x u, \partial_t u)$ te vidimo da je $\partial_1 = \partial_t$ i $\partial_2 = \partial_x$. Promatramo sada

$$\begin{bmatrix} \partial_1 F_2 \\ -\partial_2 F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{tt}u \\ -c^2\partial_{xx}u \end{bmatrix}$$

Imamo $\int_G \partial_{tt}u - c^2 u_{xx} = \int_{\partial G} c^2\partial_x u dt + \partial_t u dx$.

Integral po Γ je u pozitivnom smjeru što je zbog inverzije t i x (na slici je x apscisa, a t ordinata, a u funkciji prvo dolazi t pa x) na slici to smjer u kojem se kreču kazaljke na satu.

Na L_0 imamo parametrizaciju $r(\tau) = (0, \tau)$. Tada je $\dot{r}(\tau) = (0, 1)$ pa je $\int_{L_0} c^2\partial_x u dt + \partial_t u dx = \int\limits_{x+ct}^{x-ct} \partial_t u(0,\tau) d\tau = -\int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tau) d\tau$

Na L_1 imamo parametrizaciju $r(\tau) = (t - \tau, x + c\tau)$.Tada je $\dot{r}(\tau) = (-1, c)$.

Imamo $\int_{L_1} c^2\partial_x u dt + \partial_t u dx = -c\int\limits_0^t (c\partial_x u(r(\tau)) - \partial_t u(r(\tau)))d\tau = -c\int\limits_0^t \langle u(r(\tau))|\dot{r}(\tau)\rangle d\tau =$ $-c(u(0,x-ct)-u(t,x)) = c(u(t,x)-u(0,x-ct))$

Na L_2 analogno dobijemo $\int_{L_2} c^2\partial_x u dt + \partial_t u dx = c(u(t,x)-u(0,x-ct))$

Po Fubiniju imamo $\int_G f = \int\limits_0^t \int\limits_{x-ct+cs}^{x+ct-cs} f(s,\xi)d\xi ds$ S druge strane $\int_G f = -\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi + c(u(t,x)-u_0(x+ct)) + c(u(t,x)-u_0(x-ct))$. Pa smo dokazali da ako rješenje postoji ima oblik koji teorem tvrdi, treba provjeriti da rješenje postoji to jest provjeriti da formula koju smo dobili stvarno rješenje. No to ne moramo raditi jer je prva metoda kojom smo dokazli teorem je dala da je dana formula zbilja rješenje.

Neka je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ glatka kontura i neka je G njeno unutarnje područje. Neka je $\tau \mapsto r(\tau) = (r_1(\tau), r_2(\tau))$ parametrizacija te konture čija derivacija ne isčezava. Tada je vanjska normala dana sa $n(\tau) = (n_1(\tau), n_2(\tau)) = (\dot{r_2}(\tau), -\dot{r_1}(\tau))$

Računamo $\int_G \partial_1 f = \int_{\partial G} f dx_2 = \int\limits_a^b f(r(\tau))\dot{r_2}(\tau)d\tau = \int\limits_a^b f(r(\tau))n_1(\tau)d\tau =$

$$\int\limits_a^b f(r(\tau))\frac{n_1(\tau)}{\|\dot{r}(\tau)\|}\|\dot{r}(\tau)\|d\tau = \int\limits_a^b f(r(\tau))\frac{n_1(\tau)}{\|n_1(\tau)\|}\|\dot{r}(\tau)\|d\tau =$$

$\int\limits_a^b f(r(\tau))\nu_1(r(\tau))\|\dot{r}(\tau)\|d\tau = \int_{\partial G} f\nu_1 ds$ (krivuljni integral prve vrste) gdje je $\nu_1(r(\tau)) = \frac{n_1(\tau)}{\|n_1(\tau)\|}$. Slično je $\int_G \partial_2 f = \int_{\partial G} f\nu_2 ds$. Pa imamo $2D$ tvrdnju teorema o divergenciji

$$\int_G \operatorname{div} F = \int_{\partial G} F\cdot\nu ds$$

Promotrimo sljedeće probleme i rješenja...

$$\left.\begin{matrix} \dot{u} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u(t) = e^{-At}u_0 = h(t)u_0 \;\text{ gdje je } h(0) = I$$

$$\left.\begin{matrix} \dot{u} + Au = f \\ u(0) = u_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u(t) = e^{-At}u_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds = h(t)u_0 + \int\limits_0^t h(t-s)f(s)ds$$

Primjetimo da ako imamo operator koji nam za početne uvijete daje rješenje homogene jednadžbe s nehomogenim početnim uvijetom $t \mapsto h(t)$

onda je rješenje nehomogene jednadžbe s homogenim početnim uvijetom dano sa $t \mapsto \int\limits_0^t h(t-s)f(s)ds$. Taj princip se naziva Duhamelov princip.

Sada pokažimo tvrdnju prošlog teorema trećom metodom pomoću Duhamelovog principa.

Uvedimo pomoćnu funkciju v

$$\begin{aligned} \partial_t u &= v \\ \partial_t v &= c^2 \partial_{xx} u + f \end{aligned}$$

Stavimo $W := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ pa imamo $\dot{W} + AW = F$ gdje je $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix}$ i $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$. Ovdje je $F(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(s,.) \end{pmatrix}$

Problem $\begin{cases} \dot{W} + AW = 0, \\ W(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ ima rješenje $W(t) = h(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

Koje je po d'Alambertovoj formuli

$$h(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi \\ \frac{c}{2}(u_0'(x+ct) - u_0'(x-ct)) + \frac{1}{2}(u_1(x+ct) + u_1(x-ct)) \end{pmatrix}$$

Sada pomoću Duhamelovog principa imamo da je rješenje problema $\begin{cases} \dot{W} + AW = F, \\ W(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ dano sa $t \mapsto \int\limits_0^t h(t-s)F(s)ds$

Odnosno

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} \int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\xi) d\xi ds \\ \frac{1}{2}(f(s, x+c(t-s)) - f(s, x-c(t-s))) \end{pmatrix}$$

Pa je tvrdnja pokazana.

Neka je $\Omega = \{(t,x) : t \geq 0, x \geq 0\}$. Promatramo početno rubnu zadaću

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = 0 & \text{na } \Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & x \geq 0 \\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Ideja riješenja je da se u_0 i u_1 prošire neparno na $\mathbb{R}$ dakle

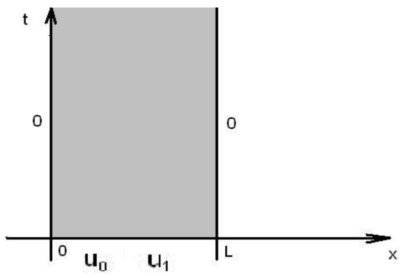
$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & x \geq 0 \\ -u_0(-x) & x \leq 0 \end{cases} \text{ te } \tilde{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x) & x \geq 0 \\ -u_1(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

pa je rješenje dano d'Alambertovom formulom

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+ct) + \tilde{u}_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \tilde{u}_1(\xi)d\xi$$

Neka je $\Omega = \{(t,x) : t \geq 0, x \in [0,L]\}$. Promatramo početno rubnu zadaću

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0 & \text{na } \Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,L] \\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) & x \in [0,L] \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



Ideja rješenja je slična. Proširimo u_0 i u_1 na sljedeći način.

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x-kL) & x \in [kL,(k+1)L], k \in 2\mathbb{Z} \\ u_0((k+1)L - x) & x \in [kL,(k+1)L], k \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$\tilde{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x-kL) & x \in [kL,(k+1)L], k \in 2\mathbb{Z} \\ u_1((k+1)L - x) & x \in [kL,(k+1)L], k \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

pa je rješenje dano d'Alambertovom formulom

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+ct) + \tilde{u}_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \tilde{u}_1(\xi)d\xi$$

Pretpostavimo da se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ može prikazati u obliku $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi^-(x') < x_n < \Phi^+(x'), x' \in \Omega_n\}$ gdje je $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\Omega_n \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ i $\Phi^+, \Phi^- \in C^1(\Omega_n)$.

Neka je $h_+(x') = (x', \Phi^+(x'))$, $h_-(x') = (x', \Phi^-(x'))$ tada je $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_n} = \int_{\Omega_n} \left(\int_{\Phi^-(x')}^{\Phi^+(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dV' = \int_{\Omega_n} (f \circ h_+ - f \circ h_-)(x') dV'$

Neka je $k \leq n$, neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren skup i neka je $h \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ takvo preslikavenje da je matrica

$$h'(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1}(q) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial q_k}(q) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial q_1}(q) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial q_k}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_1} \dots \frac{\partial h}{\partial q_k} \end{bmatrix}$$

punog ranga za sve $q \in \mathcal{O}$. Neka je $S = h(\mathcal{O})$ i neka je $f \colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija definiramo $\int_S f ds = \int_{\mathcal{O}} (f \circ h)(q) Gh(q) dq$ gdje je $Gh(q) = \sqrt{\det h'(q)^T h'(q)}$. Znamo da je $Gh(q)$ volumen koji razapinju vektori $\frac{\partial h}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial q_k}$

Neka je $k = n - 1$ tada je S hiperploha. Definiramo vektor

$$N(q) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ \frac{\partial h_1}{\partial q_1}(q) & \frac{\partial h_2}{\partial q_1}(q) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial q_1}(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial q_{n-1}}(q) & \frac{\partial h_2}{\partial q_{n-1}}(q) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial q_{n-1}}(q) \end{vmatrix}$$

Imamo da je $\langle N(q) | x \rangle$ volumen koji razapinju vektori $\frac{\partial h}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial q_{n-1}}, x$. Kako imamo $\|N(q)\| = \langle N(q) | \frac{N(q)}{\|N(q)\|} \rangle$ i kako je $N(q)$ okomit na $\frac{\partial h}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial q_{n-1}}$ slijedi da je $\|N(q)\|$ volumen koji razapinju vektori $\frac{\partial h}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial q_{n-1}}$ pa imamo $\|N(q)\| = Gh(q)$

Vektor

$$\nu(x) = \frac{(N \circ h^{-1})(x)}{\|(N \circ h^{-1})(x)\|}$$

je jedinična normala hiperplohe S u točki x.

Neka je Γ rub od Ω, Γ^+ odnosno Γ^- neka su grafovi od h_+ odnosno h_-. Sada imamo

$$\int_{\Omega_n} (f \circ h_+ - f \circ h_-)(x') dV' = \int_{\Gamma^+} \frac{1}{\|N \circ h_+^{-1}\|} f dS - \int_{\Gamma^-} \frac{1}{\|N \circ h_-^{-1}\|} f dS$$

Pokažimo to. $\int\limits_{\Gamma^+} \frac{1}{\|N \circ h_+^{-1}\|} f dS = \int\limits_{\Omega_n} \frac{1}{\|N(x')\|} (f \circ h_+)(x') Gh_+(x') dV' =$
$= \int\limits_{\Omega_n} (f \circ h_+)(x') dV'$ jer je $Gh_+(x') = \|N(x')\|$.

Iz oblika funkcija h_+ odnosno h_- dobivamo da je $(N \circ h_-^{-1})_n = 1$ odnosno $(N \circ h_+^{-1})_n = 1$ imamo da je $\nu_n = \frac{1}{\|N \circ h_+^{-1}\|}$ na Γ^+ i $\nu_n = \frac{-1}{\|N \circ h_-^{-1}\|}$ na Γ^-

Ako $\Gamma \setminus (\Gamma^+ \cup \Gamma^-)$ nije zanemariv nije problem jer je $\nu_n = 0$ na tom dijelu od Γ. Konačno imamo $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_n} dV = \int_{\Gamma^+} f \nu_n dS + \int_{\Gamma^-} f \nu_n dS = \int_\Gamma f \nu_n dS$

Ako je Ω takvo područje gdje prošli račun možemo napraviti za svaki x_i onda imamo teorem o divergenciji

$$\int_\Omega \operatorname{div} f dV = \int_\Gamma f \cdot \nu dS$$

Promatramo homogenu valnu jednadžbu $\partial_{tt} u - c^2 \triangle u = 0$ u više prostornih dimenzija.

Def 9 *Konus prošlosti* $C(t_0, x_0) = \{(t, x) \in [0, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq c|t - t_0|\}$

Baza konusa prošlosti je $\overline{K}(x_0, ct_0) \times \{0\}$

Teorem 12 *Ako u zadovoljava* $\partial_{tt} u - c^2 \triangle u = 0$ *na* $C(t_0, x_0)$, $u(0, x) = 0$, $\partial_t u(0, x) = 0$ *na* $\overline{K}(x_0, ct_0)$ *onda je* $u = 0$ *na* $C(t_0, x_0)$

Dokaz. Pomoću energetske metode. Definiramo

$$E(t) = \int\limits_{K(x_0, c(t_0 - t))} \left((\partial_t u)^2 + c^2 \|\nabla u\|^2 \right) dV$$

Operatori ∇ i $\triangle$ djeluju samo po x. Želimo pokazati da je $E(t) = 0$ za $t \in [0, t_0\rangle$ tada je $\partial_t u = 0$, $\nabla u = 0$ na $C(t_0, x_0)$ pa je $u = const$ na $C(t_0, x_0)$ što zbog početnog uvijeta daje $u = 0$ na $C(t_0, x_0)$

Počnimo sa dokazom tvrdnje $\frac{d}{dr} \int\limits_{K(x_0, r)} f(x) dx = \int\limits_{\partial K(x_0, r)} f ds$. Definirajmo $\Phi(x, r) = r(x - x_0) + x_0$. Imamo da je $\partial_r \Phi(x, r) = x - x_0$ i $\nabla \Phi(x, r) = rI$

Računamo

$$\frac{d}{dr} \int\limits_{K(x_0, r)} f(x) dx = \frac{d}{dr} \int\limits_{\Phi(K(x_0, 1), r)} f(x) dx =$$

$$\frac{d}{dr} \int\limits_{K(x_0, 1)} f(\Phi(X, r)) |\det \nabla \Phi(X, r)| dX = \frac{d}{dr} \int\limits_{K(x_0, 1)} f(\Phi(X, r)) r^n dX =$$

$$\int\limits_{K(x_0, 1)} \left(\nabla f(\Phi(X, r)) \partial_r \Phi(X, r) r^n + f(\Phi(X, r)) n r^{n-1} \right) dX =$$

$$\int\limits_{K(x_0,r)} \left(\nabla f(x)\partial_r\Phi(\Phi^{-1}(x,r),r) + \frac{1}{r}f(x)n\right)dx =$$

$$\frac{1}{r}\int\limits_{K(x_0,r)} (\nabla f(x)\cdot(x-x_0) + nf(x))dx =$$

$$\left|\begin{array}{c} x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ x_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0) \\ F(x)=(f(x)(x_1-x_1^0),\ldots,f(x)(x_n-x_n^0)) \end{array}\right| = \frac{1}{r}\int\limits_{K(x_0,r)} \operatorname{div} F = \frac{1}{r}\int\limits_{\partial K(x_0,r)} F\cdot\nu ds =$$

$$\left|\frac{F(x)}{r} = f(x)\frac{(x-x_0)}{r} = f(x)\nu\right| = \int\limits_{\partial K(x_0,r)} f\|\nu\|^2 ds = \int\limits_{\partial K(x_0,r)} fds$$

Iz dokazane tvrdnje slijedi $\int\limits_{K(x_0,R)} fdV = \int\limits_0^R \left(\int\limits_{\partial K(0,r)} fds\right)dr$

Kako je $E(t)\geq 0$ i $E(0)=0$ dovoljno je pokazati $\frac{d}{dt}E(t)\leq 0$ to jest da funkcija E ne raste.

Računamo

$$\frac{dE}{dt}(t) = -c\int\limits_{\partial K(x_0,c(t_0-t))} ((\partial_t u)^2 + c^2\|\nabla u\|^2)ds +$$

$$\int\limits_{K(x_0,c(t_0-t))} (2\partial_t u\partial_{tt}u + 2c^2\nabla u\cdot\partial_t\nabla u)dV =$$

$$-c\int\limits_{\partial K(x_0,c(t_0-t))} ((\partial_t u)^2 + c^2\|\nabla u\|^2)ds + 2c^2\int\limits_{K(x_0,c(t_0-t))} (\partial_t u\triangle u + \nabla u\cdot\partial_t\nabla u) =$$

$$-c\int\limits_{\partial K(x_0,c(t_0-t))} ((\partial_t u)^2 + c^2\|\nabla u\|^2)ds + 2c^2\int\limits_{K(x_0,c(t_0-t))} \operatorname{div}(\partial_t u\nabla u) =$$

$$-c\int\limits_{\partial K(x_0,c(t_0-t))} ((\partial_t u)^2 + c^2\|\nabla u\|^2)ds + 2c^2\int\limits_{\partial K(x_0,c(t_0-t))} \partial_t u\nabla u\cdot\nu ds =$$

Zbog

$$\partial_t u\nabla u\cdot\nu \leq |\partial_t u\nabla u\cdot\nu| \leq |\partial_t u|\|\nabla u\|\|\nu\| \leq \frac{1}{2c}(\partial_t u)^2 + \frac{c}{2}\|\nabla u\|^2$$

tvrdnja teorema je dokazana.

Q.E.D.

Korolar 1 *Rješenje zadaće*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\triangle u = f & na\ \langle 0, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^n \\ u(0,.) = u_0 \\ \partial_t u(0,.) = u_1 \end{cases}$$

je jedinstveno

Promatramo valnu jednadžbu u tri prostorne dimenzije...

Lema 1 *Neka je* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *i neka je*

$$U_\varphi(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial K(x,ct)} \varphi ds$$

tada je $U_\varphi \in C^2(\langle 0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^3)$ *i vrijedi* $\partial_{tt}U_\varphi - c^2\triangle U_\varphi = 0$ *na* $\langle 0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^3$ *i vrijedi* $\lim\limits_{t\to 0+} U_\varphi(t,x) = 0$ *te* $\lim\limits_{t\to 0+} \partial_t U_\varphi(t,x) = \varphi(x)$

Dokaz. Imamo $U_\varphi(t,x) = \frac{c^2t^2}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(0,1)} \varphi(x+ct\nu)ds = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{\partial K(0,1)} \varphi(x+ct\nu)ds$

$\partial_t U_\varphi(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial K(0,1)} \varphi(x+ct\nu)ds + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{\partial K(0,1)} \nabla\varphi(x+ct\nu)\cdot c\nu ds = \frac{1}{t}U_\varphi(t,x) + \frac{(ct)^2}{4\pi}\int_{K(0,1)} \triangle\varphi(x+cty)dy = \frac{1}{t}U_\varphi(t,x) + \frac{1}{4\pi ct}\int\limits_{K(x,ct)} \triangle\varphi(z)dz$. Računamo $\partial_{tt}U_\varphi(t,x) = -\frac{1}{t^2}U_\varphi(t,x) + \frac{1}{t}\partial_t U_\varphi(t,x) - \frac{1}{4\pi ct^2}\int\limits_{K(x,ct)} \triangle\varphi(z)dz + \frac{c}{4\pi ct}\int\limits_{\partial K(x,ct)} \triangle\varphi ds = -\frac{1}{t^2}U_\varphi(t,x) + \frac{1}{t^2}U_\varphi(t,x) + \frac{1}{4\pi ct^2}\int\limits_{K(x,ct)} \triangle\varphi(z)dz - \frac{1}{4\pi ct^2}\int\limits_{K(x,ct)} \triangle\varphi(z)dz + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial K(x,ct)} \triangle\varphi ds = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} \triangle\varphi ds$. Računamo $\triangle U_\varphi(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} \triangle\varphi ds$. Pa imamo $\partial_{tt}U_\varphi - c^2\triangle U_\varphi = 0$

Vidimo da je $\lim\limits_{t\to 0+} U_\varphi(t,x) = 0$ te da je $\lim\limits_{t\to 0+} \partial_t U_\varphi = \varphi(x)$

Q.E.D.

Lema 2 *Neka je* $\varphi \in \mathbb{R}^3$ *i* $V_\varphi = \partial_t U_\varphi$ *gdje je* U_φ *iz predhodne leme. Tada je* $V_\varphi \in C^2(\langle 0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^3)$ *i vrijedi*

$$\partial_{tt}V_\varphi - c^2\triangle V_\varphi = 0 \ na\ \langle 0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^3$$

$$\lim_{t\to 0+} V_\varphi(t,x) = \varphi(x)$$

$$\lim_{t\to 0+} \partial_t V_\varphi(t,x) = 0$$

Dokaz.

$$\partial_{tt}V_\varphi = \partial_t\partial_{tt}U_\varphi = \partial_t\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} \triangle\varphi ds\right) = \partial_t\left(\frac{c^2t^2}{4\pi t}\int\limits_{\partial K(0,1)} \triangle\varphi(x+ct\nu)ds\right) =$$

$$\frac{c^2}{4\pi}\int\limits_{\partial K(0,1)} \triangle\varphi(x+ct\nu)ds + \frac{c^2t}{4\pi}\int_{\partial K(0,1)} \nabla\triangle\varphi(x+ct\nu)\cdot c\nu ds =$$

$$\frac{c^2}{t}\triangle U_\varphi(t,x) + \frac{c^2t}{4\pi}\int_{\partial K(0,1)} \nabla\triangle\varphi(x+ct\nu)\cdot c\nu ds =$$

Računamo

$$\triangle V_\varphi(t,x) = \triangle(\partial_t U_\varphi)(t,x) = \frac{1}{t}\triangle U_\varphi(t,x) + \frac{ct}{4\pi}\triangle\int\limits_{\partial K(0,1)} \nabla\varphi(x+ct\nu)ds =$$

$$\frac{1}{t}\triangle U_\varphi(t,x) + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{\partial K(0,1)} \nabla\triangle\varphi(x+ct\nu)\cdot c\nu ds$$

Pa imamo $\partial_{tt}V_\varphi - c^2\triangle V_\varphi = 0$
Imamo $\lim\limits_{t\to 0+} V_\varphi(t,x) = \lim\limits_{t\to 0+} \partial_t U_\varphi(t,x) = \varphi(x)$
Također imamo

$$\lim_{t\to 0+}\partial_t V_\varphi = \lim_{t\to 0+}\partial_{tt}U_\varphi(t,x) = \lim_{t\to 0+}\frac{c^2t}{4\pi}\int\limits_{\partial K(0,1)} \triangle\varphi(x+ct\nu)ds = 0$$

Q.E.D.

Iz ove dvije leme slijedi sljedeći teorem:

Teorem 13 *Neka je $u_0, u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tada je rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\triangle u = 0 & na\ \langle 0,+\infty\rangle\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,.) = u_0 \\ \partial_t u(0,.) = u_1 \end{cases}$$

je dano KIRCHHOFFOVOM formulom

$$u(t,x) = \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} u_0 ds\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} u_1 ds$$

Primijetimo da na rješenje u točki (x,t) utječu samo početni podaci od u_0 i u_1 na sferi $\partial K(x,ct)$ što zovemo HUYGENSOV princip

Nehomogenu zadaću rješavamo Duhamelovim principom.

Promatramo valnu jednadžbu u dvije prostorne dimenzije...

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\triangle u = 0 \quad \text{na } \langle 0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^2 \\ u(0,.) = u_0 \\ u(0,.) = u_1 \end{cases}$$

toj zadaći pridružimo $3D$ zadaću

$$\tilde{u}_0(x_1,x_2,x_3) = u_0(x_1,x_2)$$
$$\tilde{u}_1(x_1,x_2,x_3) = u_1(x_1,x_2)$$

ona ima rješenje prema Kirchhoffovoj formuli

$$\tilde{u}(t,x) = \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} \tilde{u}_0 ds\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} \tilde{u}_1 ds$$

Neka je $x=(x_1,x_2,x_3)$. Neka je $S=\partial K(x,ct)\subseteq \mathbb{R}^3$ i neka je S^+ gornja hemisfera. Definiramo $f(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1,\xi_2,\sqrt{(ct)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2})$. Neka je $K\subseteq\mathbb{R}^2$ kugla oko (x_1,x_2) radiusa ct.

Imamo $\int_S \tilde{u}_0 ds = 2\int_{S^+}\tilde{u}_0 ds = 2\int_K (\tilde{u}_0\circ f)(\xi_1,\xi_2)Gf(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 =$

$$2ct\int_K \frac{u_0(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{(ct)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}d\xi_1 d\xi_2$$

Dokazali smo sljedeći teorem:

Teorem 14 *Neka su $u_0,u_1\in C^2(\mathbb{R}^2)$ tada je rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\triangle u = 0 \quad \textit{na } \langle 0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^2 \\ u(0,.) = u_0 \\ \partial_t u(0,.) = u_1, \end{cases}$$

Dano POISSONOVOM formulom

$$u(t,x) = \partial_t\left(\frac{1}{2\pi c}\int\limits_{K(x,ct)} \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{(ct)^2-\|x-\xi\|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi c}\int_{K(x,ct)}\frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{(ct)^2-\|x-\xi\|^2}}$$

Primjetimo da ne vrijedi Huygenssov princip.

FOURIEROVI REDOVI

Pokušajmo sada rješiti problem

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{na } \langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, l\rangle \\ u(.,0) = 0 \\ u(.,l) = 0 \\ u(0,.) = u_0 \\ \partial_t u(0,.) = u_1 \end{cases}$$

pretpostavljajući rješenje u separiranom obliku $u(t,x) = T(t)X(x)$. Ubacimo li to u jednadžbu dobivamo

$$XT'' - c^2 X'' T = 0$$

odnosno

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

gdje je λ konstanta. Imamo tri mogućnosti

1. $\lambda = 0$ daje $X'' = 0$ pa imamo $X(x) = ax + b$. Rubni uvijeti $X(0) = X(l) = 0$ daju $X(x) = 0$

2. $\lambda > 0$ daje $X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Rubni uvijeti $X(0) = X(l) = 0$ daju $A = B = 0$ to jest $X(x) = 0$

3. $\lambda = -\beta^2$. Imamo $X'' + \beta^2 X = 0$ odnsono $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$. Rubni uvijet $X(0) = 0$ daje $A = 0$, a $X(l) = 0$ daje $B\sin(\beta l) = 0$ pa imamo $\beta = \frac{n\pi}{l}$. Stavimo $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Za taj n imamo $T'' + c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0$ pa imamo $T_n(t) = a_n\cos(\frac{n\pi c}{l}t) + b_n\sin(\frac{n\pi c}{l}t)$. Za taj n funkcija $u_n(t,x) = (a_n\cos(\frac{n\pi c}{l}t) + b_n\sin(\frac{n\pi c}{l}t))\sin(\frac{n\pi}{l}x)$ zadovoljava valnu jednadžbu i rubne uvijete. Proizvoljna linearna kombinacija takvih funckija (za različite n) isto zadovoljava valnu jednadžbu i rubne uvijete. Ako želimo zadovoljiti početne uvijete to možemo samo za usku klasu funkcija početnih uvijeta. Ideja je da prijeđemo na redove trigonometrijskih funkcija.

Ako red funkcija $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)\right)$ konvergira na $\mathbb{R}$ onda predstavlja periodičku funkciju s periodom $2l$ pa je dovoljno promatrati tu funkciju na $[-l,l]$.

Funkcije $1, \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ su ortogonalne uz skalarni produkt $\langle f|g\rangle = \int\limits_{-l}^{l} f(x)g(x)dx$ također možemo integrirati i od $a-l$ do $a+l$ za svaki $a \in \mathbb{R}$ zbog periodičnosti i opet će biti definiran skalarni produkt.

Imamo da je

$$\int\limits_{-l}^{l} 1^2 dx = 2l, \quad \int\limits_{-l}^{l} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = l, \quad \int\limits_{-l}^{l} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = l$$

Pretpostvimo da se funkcija $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ može zapisati u obliku $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)\right)$
dobivamo

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \text{ za } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \text{ za } n = 1, 2, 3, \ldots$$

i time smo funkciji f pridružili Furijerove koeficijente $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

Definiramo $S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right)$ takozvani trigonometrijski polinom.

Kažemo da je realna funkcija f po dijelovima neprekidna na $[a, b]$ ako je definirana i neprekidna na $[a, b]$ osim eventualno u konačno mnogo točaka te u svakoj točki $x \in \langle a, b \rangle$ postoje i konačni su limesi s lijeva $f(x-)$ i s desna $f(x+)$ te postoje i konačni su limesi $f(a+)$ i $f(b-)$. Za funkciju f koja je po djelovima neprekidna na $[a, b]$ dobro je definiran $\int_a^b f(x)dx$ iako funkcija f možda nije definirana u svim točkama od $[a, b]$.

Lema 3 *Ako je $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna onda*

$$\int\limits_{-l}^{l} (f(x) - S_k(x))^2 dx = \int\limits_{-l}^{l} f(x)^2 dx - l \left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)\right)$$

Dokaz.

$$\int\limits_{-l}^{l} (f(x) - S_k(x))^2 dx = \int\limits_{-l}^{l} f(x)^2 dx - 2 \int\limits_{-l}^{l} f(x) S_k(x) dx + \int\limits_{-l}^{l} S_k(x)^2 dx =$$

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)^2 dx - 2l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)\right) + l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)\right)$$

Q.E.D.

Korolar 2 *Ako je $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna i neka su $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ Furierovi koeficijenti pridruženi funkciji f onda vrijedi Besselova nejednakost*

$$l\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) \leq \int\limits_{-l}^{l} f(x)^2 dx$$

posebno red $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ konvergira. Pa za Furierove koeficijente vrijedi $a_n \to 0$ i $b_n \to 0$ kada $n \to \infty$.

Pokažimo tvrdnju da za svaki $\varphi \in \mathbb{R}$ za kojeg je $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$ vrijedi

$$1/2 + \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi) = \frac{\sin((n + 1/2)\varphi)}{2\sin(\varphi/2)}$$

Pomnožimo izraz $1/2 + \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi)$ sa $\sin(\varphi/2)$ tada koristeći formule pretvorbe umnoška u zbroj dobijemo

$$\begin{array}{lll}
1/2\sin(\varphi/2) & & \\
 & +1/2\sin((1 + 1/2)\varphi) & +1/2\sin((1/2 - 1)\varphi) \\
 & +1/2\sin((2 + 1/2)\varphi) & +1/2\sin((1/2 - 2)\varphi) \\
 & \vdots & \\
 & +1/2\sin((n + 1/2)\varphi) & +1/2\sin((1/2 - n)\varphi)
\end{array}$$

Kada se to sredi dobije se da je to jednako $1/2\sin((n + 1/2)\varphi)$ i tvrdnja je dokazana.

Definiramo k-tu Diricletovu funkciju

$$\begin{aligned}
D_k(x) &= 1/2 + \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + \ldots + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\
&= \begin{cases} \frac{\sin(k+1/2)\frac{\pi x}{l}}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}, & \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \neq 0 \\ k + 1/2, & \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Lema 4 *Neka je $h \in C^1([-l, l])$ tada je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} D_k(x)h(x)dx = h(0)$$

Dokaz.

$$\int_{-l}^{l} D_k(x)dx = \int_{-l}^{l} \left(1/2 + \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right) dx = l$$

Iz čega slijedi $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_k(x)dx = 1$ i $h(0) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_k(x)h(0)dx$

Računamo

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_k(x)h(x) - h(0) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_k(x)(h(x) - h(0))dx =$$

Imamo da je

$$D_k(x) = \frac{\sin(k + 1/2)\frac{\pi x}{l}}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad \text{za } x \neq 0$$

Neka je $\Psi(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}(h(x) - h(0))$. Jedina problematična točka te funkcije je $x = 0$.

Pomoću L'Hopitalovog pravila računamo

$$\lim_{x\to 0} \Psi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h'(x)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\frac{\pi}{2l}}} = \frac{2l}{\pi}h'(0)$$

Pa imamo da je Ψ po dijelovima neprekidna iz čega slijedi

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\Psi(x)dx \to 0 \text{ kada } k \to \infty$$

Također imamo da

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)(h(0) - h(x))dx \to 0 \text{ kada } k \to \infty$$

Pa je tvrdnja dokazana.

Q.E.D.

Teorem 15 *Neka je $f \in C^1([-l,l])$ te $f(-l) = f(l)$ i $f'(-l) = f'(l)$. Tada za svaki $x \in [-l,l]$ vrijedi*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right)$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ Furijerovi koeficijenti funkcije f.

Dokaz. Proširimo periodički funkciju $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ do funkcije $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zbog pretpostavka funkcije u točkama $-l$ i l imamo da je to proširenje glatko klase C^1.

Promatramo za $x \in [-l,l]$

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) =$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \left[\frac{f(y)}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(f(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + f(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \right] dy =$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y) \left[\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{l}(y-x)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{l}(y-x)\right) + \ldots + + \cos\left(\frac{k\pi}{l}(y-x)\right) \right] =$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y) D_k(y-x) dy = \left| \begin{array}{c} y - x = z \\ dy = dz \end{array} \right| = \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l+x} f(z+x) D_k(z) dz =$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} \tilde{f}(z+x) D_k(z) dz =$$

zbog periodičnosti od $\tilde{f}$ i D_k

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \tilde{f}(z+x) D_k(z) dz$$

zbog predhodne leme

$$\to \tilde{f}(0+x) = f(x)$$

kada $k \to \infty$

Q.E.D.

Lema 5 *Neka su h i h' po djelovima neprekidne funkcije na $[-l,l]$. Tada je* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} D_k(x)h(x)dx = \frac{1}{2}(h(0-)+h(0+))$

Dokaz.

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} D_k(x)h(x)dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} D_k(x)h(x)dx + \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} D_k(x)h(x)dx$$

Tvrdimo da

$$\frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} D_k(x)h(x)dx \to h(0+)/2$$

i

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} D_k(x)h(x)dx \to h(0-)/2$$

Pokažimo prvu tvrdnju jer druga ide analogno. Definiramo

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{h(x)-h(0+)}{\mathrm{tg}(\pi x/2l)}, & x \in \langle 0,l] \\ 0 & x \in [-l,0] \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} h(x)-h(0+) & x \in \langle 0,l] \\ 0 & x \in [-l,0] \end{cases}$$

Sada samo upotrebimo modificirano L'Hopitalovo pravilo koje promatra limese i derivacije samo jednog smjera da dobivamo da su Ψ i φ po dijelovima neprekidne. Sada imamo

$$\frac{1}{l}\int_0^l D_k(x)h(x) - h(0+)/2 =$$

$$\frac{1}{l}\int_0^l D_k(x)(h(x)-h(0+))dx =$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^l (\sin(\frac{k\pi x}{l})\Psi(x) + \cos(\frac{k\pi x}{l})\varphi(x))dx \to 0$$

kada $k\to\infty$.

Q.E.D.

Teorem 16 *Neka su f i f' po dijelovima neprekide na $[-l,l]$. Tada Furijerov red funckije f konvergira u svakoj točki funkciji*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) & x \in \langle -l, l\rangle \\ \frac{1}{2}(f((-l)+) + f(l-)) & x \in \{-l, l\} \end{cases}$$

Dokaz. Funkcija $\hat{f}$ se razlikuje od f u eventualno konačno mnogo točaka pa se Furierovi redovi podudaraju. Proširimo periodički funkciju f do funkcije $\tilde{f}$ definiranoj na $\mathbb{R}$

Promatramo za $x \in [-l,l]$

$$S_k(x) = \ldots = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \tilde{f}(y) D_k(y-x)dy = \left| \begin{array}{c} y - x = z \\ dy = dz \end{array} \right| = \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} \tilde{f}(z+x) D_k(z) dz =$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} \tilde{f}(z+x) D_k(z) dz =$$

zbog periodičnosti od $\tilde{f}$ i D_k

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \tilde{f}(z+x) D_k(z) dz =$$

zbog predhodne leme

$$\to \frac{1}{2}(\tilde{f}((0+x)+) + \tilde{f}((0+x)-)) = \hat{f}(x)$$

kada $k \to \infty$

Q.E.D.

Def 10 *Niz funkcija $f_n : Q \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno prema f ukoliko $\sup\limits_{x \in Q} |f(x) - f_n(x)| \to 0$ kada $n \to \infty$*

Teorem 17 *Neka je f neprekidna na $[-l,l]$ i zadovoljava $f(-l) = f(l)$ te neka je f' po dijelovima neprekidna tada Furierov red funkcije f konvergira uniformno prema f.*

Dokaz. Označimo sa $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ Furierove koeficijente funkcije f, a sa $A_0, A_1, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ Furierove koeficijente funkcije f'

Neka je $n \in \mathbb{N}$ Imamo

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \left| \begin{array}{c} u(x) = f(x), v'(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ u'(x) = f'(x), v(x) = \frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = -\frac{l}{n\pi}B_n$$

Sada imamo $\sum\limits_{n=1}^{k}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{k}\frac{l}{n\pi}|B_n| \leq \frac{l}{\pi}\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n^2}$ pa $\sum|a_n|$ konvergira

Analogno $\sum|b_n|$ konvergira pa je u Furierov redu

$$\frac{a_0}{2} + \sum\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$$

n-ti član majoriziran sa $|a_n|+|b_n|$ pa taj red konvergira apsolutno i uniformno.

Q.E.D.

Pretpostavimo da imamo po dijelovima neprekidnu funkciju na $[0,l]$, ako ju proširimo neparno na $[-l,l]$ tada su koeficijenti uz kosinuse 0, a koeficijenti uz sinuse $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$

Teorem 18 *Ako su f i f' po djelovima neprekidne na $[0,l]$ onda će Furierov red funckije f po sinusima konvergirati na $[0,l]$ prema*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & x \in \langle 0, l\rangle \\ 0 & x \in \{0, l\} \end{cases}$$

Ako je još f neprekidna i $f(0) = f(l) = 0$ onda Fourierov red po sinusima teži prema f uniformno i apsolutno.

Pretpostavimo da imamo po dijelovima neprekidnu funkciju na $[0,l]$, ako ju proširimo parno na $[-l,l]$ tada su koeficijenti uz sinuse 0, a koeficijenti uz cosinuse $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$

Teorem 19 *Ako su f i f' po djelovima neprekidne na $[0,l]$ onda će Furierov red funckije f po cosinusima konvergirati na $[0,l]$ prema*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) & x \in \langle 0,l\rangle \\ f(0+) & x=0 \\ f(l-) & x=l \end{cases}$$

Ako je još f neprekidna onda Fourierov red po cosinusima teži prema f uniformno i apsolutno.

Sa $\mathrm{PDN}([a,b])$ označimo skup svih po dijelovima neprekidnih funkcija na $[a,b]$. Na tom prostoru definiramo produkt funkcija $f,g \in \mathrm{PDN}([a,b])$ kao $\langle f|g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, ta funkcija ima svojstva skalarnog produkta osim stroge definitnosti. Sada imamo da funkcija $f \to \|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ ima svojstva norme osim stroge definitnosti.

Za funkciju $\varphi \in \mathrm{PDN}([a,b])$ kažemo da je netrivijalna ako je $\|\varphi\| \neq 0$. Za niz netrivijalnih funkcija $(\varphi_n)_n$ u $\mathrm{PDN}([a,b])$ kažemo da je ortogonalan ako $\langle \varphi_i|\varphi_j\rangle = 0$ za $i \neq j$

Za $f \in \mathrm{PDN}([a,b])$ definiramo Furierove koeficijente $a_n = \frac{\langle f|\varphi_n\rangle}{\|\varphi\|^2}$ i Furierov red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$

Definiramo k-tu sumu kao $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n\varphi_n$

Teorem 20 *Za Furierov red funkcije $f \in \mathrm{PDN}([a,b])$ vrijedi BESSELOVA jednakost*

$$\|f - S_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{k} a_n^2\|\varphi_n\|^2$$

Dokaz. $\|f-S_k\|^2 = \langle f-S_k|f-S_k\rangle = \|f\|^2 - 2\langle f|S_k\rangle + \|S_k\|^2$

$$\|S_k\|^2 = \langle \sum_{n=1}^{k} a_n\varphi_n | \sum_{n=1}^{k} a_n\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} a_n^2\|\varphi_n\|^2$$

$$\langle f|\varphi_n\rangle = a_n\|\varphi_n\|^2$$

$$\langle f|S_k\rangle = \langle f| \sum_{n=1}^{k} a_n\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} a_n^2\|\varphi_n\|^2$$

Q.E.D.

Korolar 3 *Ako je $f \in \mathrm{PDN}([a,b])$ i $a_1, a_2, \ldots$ Furierovi koeficijenti od f onda vrijedi Besselova nejednakost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

Def 11 *Kažemo da je ortogonalni niz $(\varphi_n)_n$ potpun ako za svaki $f \in \mathrm{PDN}([a,b])$ Furierov red funkcije f teži prema f u smislu*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^{k} a_n \varphi_n\| = 0$$

Teorem 21 *Za $f \in \mathrm{PDN}([a,b])$ funkcija $E_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \|f - \sum\limits_{n=1}^{k} \alpha_n \varphi_n\|$ poprima minimum u točki $(a_1, \ldots, a_k)$ gdje su $a_1, \ldots, a_k$ Fourierovi koeficijenti od f.*

Dokaz. $\|f - \sum\limits_{n=1}^{k} \alpha_n \varphi_n\| = \|f - S_k + \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n - \alpha_n)\varphi_n\|^2 = \|f - S_k\|^2 + 2\langle f - S_k | \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n - \alpha_n)\varphi_n\rangle + \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n - \alpha_n)^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f - S_k\|^2 + \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n - \alpha_n)^2 \|\varphi_n\|^2$
jer je $\langle f|\varphi_n\rangle = \langle S_k|\varphi_n\rangle = a_n \|\varphi_n\|^2$

Q.E.D.

Teorem 22 *Neka je f neprekidna na $[-l, l]$. Tada vrijedi*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-l}^{l} (f(x) - S_k(x))^2 dx = 0$$

Dokaz. Kako je f neprekidna na $[-l, l]$ to je i uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takva da ako je $|x - x'| < \delta$ onda je $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Uvedimo sada razdiobu $-l = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = l$ segmenta $[-l, l]$ takvu da je $|x_1 - x_0| < \varepsilon^2$ i $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ za $k = 1, \ldots, p-1$. Neka je g funkcija čiji graf afino spaja točke $(x_0, f(l)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_p, f(x_p))$.

Imamo da je g neprekidna, g' po dijelovima neprekidna i $g(-l) = g(l)$ pa trigonometijski red funkcije g konvergira uniformno prema g to jest postoji n_0 takav da za sve $n \geq n_0$

$$|g(x) - S_n^g(x)| < \varepsilon \text{ za } x \in [-l, l]$$

Stavimo $M = \sup\limits_{x\in[-l,l]} |f(x)|$ tada je također $\sup\limits_{x\in[-l,l]} |g(x)| \leq M$ pa imamo $|f(x) - g(x)| \leq 2M$ dok na $[x_1, l]$ imamo da je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pa imamo

$$\int\limits_{-l}^{l} (f(x) - g(x))^2 dx \leq 4M^2\varepsilon^2 + \varepsilon^2 2l$$

Računamo primjenjujući predhodni teorem

$$\sqrt{\int\limits_{-l}^{l} (f(x) - S_n^f(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int\limits_{-l}^{l} (f(x) - S_n^g(x))^2 dx} =$$

$$= \|f - S_n^g\| \leq \|f - g\| + \|g - S_n^g\|$$

Prvo pustimo $n \to \infty$ pa vidimo da traženi izraz proizvoljno malen.

Q.E.D.

Teorem 23 *Neka je f neprekidna na $[a, b]$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i polinom T_n stupnja n takav da je $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ za $x \in [a, b]$*

Dokaz. Neka je $l > 0$ takav da je $[a, b] \subseteq [-l, l]$ takav da $l > \max\{|a|, |b|\}$. Funkciju f proširimo afino na $[-l, l]$ tako da za proširenje koje isto ožnačimo sa f vrijedi $f(l) = f(-l) = 0$. Funkcija f je uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takav da ako je $|x - x'| < \delta$ onda je $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/3$. Izaberemo razdiobu $-l = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = l$ segmenta $[-l, l]$ takvu da je $|x_{k+1} - x_k| < \delta$. Neka je funkcija g takava da joj graf afino spaja točke $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_p, f(x_p))$

Imamo da je $|g(x) - f(x)| < \varepsilon/3$

Kako je g neprekidna, g' po dijelovima neprekidna i $g(-l) = g(l)$ imamo da Furijerov red funkcije g konvergira uniformno prema g to jest postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|S_n^g(x) - g(x)| < \varepsilon/3$. Kako je $S_{n_0}^g$ analitička to Taylerov red oko 0 funkcije $S_{n_0}^g$ konvergra uniformno prema $S_{n_0}^g$ to jest postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|T_n(x) - S_{n_0}^g(x)| < \varepsilon/3$ za $x \in [-l, l]$ i $n \geq m_0$

Q.E.D.

Teorem 24 *Ortogonalan sustav $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ je potpun ako i samo ako za svaki $f \in \mathrm{PDN}([a, b])$ vrijedi Parsefalova jednakost $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|\varphi_n\|^2$*

Dokaz. Iz Besselove nejednakosti $\|f - S_k\|^2 = \|f\| - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^2 \|\varphi_n\|^2$. Imamo da je φ_n potpun ako i samo ako $\|f - S_k\| \to 0$, a to je ako i samo ako $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|\varphi_n\|^2$

Q.E.D.

STURM-LIOUVILLEOV PROBLEM

Separacija u PDJ vodi na ODJ

$$-(au')' + bu = \lambda \rho u \text{ na } \langle 0, l \rangle$$

Gdje su a, b, ρ zadane funkcije. Uzimamo da vrijedi $a \in C^1([0,l])$ i $a > 0$ na $[0,l]$, $b \in C([0,l])$, $\rho \in C([0,l])$ i $\rho > 0$ na $[0,l]$, $f \in C([0,l])$

Rubni uvijeti su

$$\begin{cases} \alpha u'(0) - \beta u(0) = 0 & (\alpha, \beta) \neq (0,0) \\ \gamma u'(l) + \delta u(l) = 0 & (\gamma, \delta) \neq (0,0) \end{cases} \quad (R.U.)$$

Uzimamo da je $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$

Realan broj λ za koji postoji ne nul funkcija u takva da vrijedi jednadžba i rubni uvijeti nazivamo svojstvena vrijednost, a pripadnu funkciju nazivamo svojstvena funkcija.

Rubna zadaća $-(au')' + bu = f$ uz gornje pretpostavke na a, b, ρ i uz R.U. ima jedinstveno rješenje ukoliko je $b \neq 0$ ili bar jedan od $\beta, \delta \neq 0$ jer onda postoji Greenova funkcija $G : [0,l]^2 \to \mathbb{R}$ pa je rješenje dano kao

$$u(x) = \int_0^l G(x,s) f(s) ds$$

Na $C^2([0,l])$ definiramo diferencijalni operator $Lu = (-au')' + bu$. Taj operator je linearan no zanimljivo je da ako uzmamo $u, v \in C^2([0,l])$ takve da zadovoljavaju R.U. onda

$$\int_0^l (Lu)v = \int_0^l -(au')'v + \int_0^l buv = -au'v|_0^l + \int_0^l au'v' + \int_0^l buv =$$

$$-au'v|_0^l + av'u|_0^l - \int_0^l (av')u + \int_0^l buv$$

kada se to sredi imamo

$$\int_0^l (Lu)v - \int_0^l (Lv)u = a(v'u - u'v)|_0^l$$

što je zbog R.U. jednako 0. Pa je L simetičan operator na kalasi funkcija koje zadovoljevaju R.U. uz skalarni produkt $\langle f|g\rangle = \int_0^l fg$

Zbog ρ umijetsto L promatramo operator $A = \frac{1}{\rho}L$. Svojstveni problem sada glasi $Au = \lambda u$. Uvodimo skalarni produkt na $C([0,l])$ sa $\langle f|g\rangle = \int_0^l \rho fg$

Definramo operator $B : C([0,l]) \to C([0,l])$ koji funkciji f pridružuje rješenje problema $-(au')' + bu = \rho f$ uz R.U. Ako je $Au = \lambda u$ onda je $B(\lambda u) = u$

Imamo u sklarnom produktu s težinom ρ

$$\langle Bf|g\rangle = \langle Bf|Av\rangle = \int_0^l \rho Bf\frac{1}{\rho}Lv = \int_0^l LBfv = \int_0^l \rho\frac{1}{\rho}LBfv = \langle ABf|v\rangle$$

$$= \langle f|Bg\rangle$$

Teorem 25 *Sve svojstvene vrijednosti problema $Au = \lambda u$ uz R.U. su nenegativne.*

Dokaz. $\langle Au|u\rangle = \lambda\|u\|^2$. S druge strane $\langle Au|u\rangle = \int_0^l \rho\frac{1}{\rho}(Lu)u = \int_0^l(-(au')' + bu)u = -au'u|_0^l + \int_0^l(a(u')^2 + bu^2)$. Iz R.U. slijedi da je $u'(0)$ i $u(0)$ su istog predznaka dok su $u'(l)$ i $u(l)$ suprotnog predznaka. Slijedi $\lambda\|u\|^2 \geq 0$ odnosno $\lambda \geq 0$

Q.E.D.

Teorem 26 *Svakoj svojstvenoj vrijednosti S-L problema odgovara (do na faktor) jedinstvena svojstvena funkcija.*

Dokaz. Neka je $\lambda > 0$ svojstvena vrijednost, a u i v pripadne svojstvene funkcije tada

$$-(au')' + bu = \lambda\rho u$$

$$-(av')' + bv = \lambda\rho v$$

pa u i v zadovoljavaju homogenu ODJ

$$-(au')' + (b - \lambda\rho)u = 0$$

i vrijedi $u(0)v'(0) - u'(0)v(0) = 0$, $u(l)v'(l) - u'(l)v(l) = 0$ to jest Wronskijan $W(x) = \det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$ funkcija u, v je jednak 0 u točkama 0 i l pa su u, v linearno zavisne

Q.E.D.

Teorem 27 *Svojstvene funkcije koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno ortogonalne uz skalarni produkt s težinom ρ*

Dokaz. Neka su (u, λ) i $(v, \tilde{\lambda})$ dva svojstvena para.

Imamo

$$\langle Au|v\rangle = \langle \lambda u|v\rangle = \lambda\langle u|v\rangle$$

$$\langle Au|v\rangle = \langle u|Av\rangle = \langle u|\tilde{\lambda}v\rangle = \tilde{\lambda}\langle u|v\rangle$$

Pa imamo $(\lambda - \tilde{\lambda})\langle u|v\rangle = 0$ slijedi da je $\langle u|v\rangle = 0$

Q.E.D.

Teorem 28 *(Dokaz u Funkcionalna Analiza, S. Kurepa str* 210*) Neka je X unitaran prostor i B kompaktan simetričan operator na X beskonačnog ranga. Tada postoji ortonormiran niz $(e_n)_n$ u X i niz $(\lambda_n)_n$ realnih brojeva takvih da je*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots > 0$$

i

$$Bx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x|e_i\rangle e_i$$

Teorem 29 *Skup svih svojstvenih vrijednosti S-L problema je prebrojiv bez gomilišta $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$. Pripadni niz svojstvenih funkcija čini potpun ortogonalni sustav funkcija na $(C([0, l]), \|.\|)$ gdje je $\|.\|$ norma dobivena iz skalarnog produkta s težinom ρ*

Dokaz. Pretpostavimo da $b \neq 0$ ili barem jedan od $\beta, \delta \neq 0$ tada je operator B koji je inverz od A dan formulom $Bf(x) = \int_0^l G(x, s)\rho(s)f(s)ds$. To je simetrican kompaktan (vidi Normirani, Guljaš, str 107) operator beskonačnog ranga (vidi Normirani, Guljaš str 109) na $C([0,l])$. Lako se vidi da 0 nije svojstvena vrijednost. Znamo od prije da razliciti svojstveni vekori pripadaju razlicitim svojstvenim funkcijama. Sada imamo $Bf = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle f|e_i\rangle e_i$ sada računamo $ABf = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle f|e_i\rangle Ae_i$. Iz toga slijedi $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f|e_i\rangle e_i$ jer svojstvene vrijednosti od A su $1/\mu_i$ za $i = 1, 2, \ldots$, pa niz svojstvenih funkcija čini potpun ortogonolani sustav funkcija odnosno teorem slijedi.

Q.E.D.

KLASIFIKACIJA I KANONSKI OBLIK PDJ-a 2. REDA

Neka je dan operator

$$L = a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy} + d\partial_x + e\partial_y$$

Neka su $a = a(x,y)$, $b = b(x,y)$ $c = c(x,y)$, $d = d(x,y)$ i $e = e(x,y)$ Provodimo zamijenu varijabli $\xi = \varphi(x,y)$ i $\eta = \psi(x,y)$ Operator L u novim varijablama je $L = A\partial_{\xi\xi} + 2B\partial_{\xi\eta} + C\partial_{\eta\eta} + D\partial_\xi + E\partial_\eta$ gdje je

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{pmatrix}$$

odnosno

$$A = a(\varphi_x)^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c(\varphi_y)^2$$
$$B = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y) + c\psi_y\varphi_y$$
$$C = a(\psi_x)^2 + 2b\psi_x\psi_y + c(\psi_y)^2$$

te $D = L\varphi$ i $E = L\psi$

U slučaju $b^2 - ac > 0$ proamtramo dva ODJ-a

$$y'(x) = \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right)(x, y(x))$$

$$y'(x) = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right)(x, y(x))$$

Neka je rješenje prvoga dano implicitno $\varphi(x, y(x)) = const$, a rješenje drugoga dano implicitno $\psi(x, y(x)) = const$ tada imamo

$$\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{\varphi_x(x, y(x))}{\varphi_y(x, y(x))}$$

i

$$\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} = -\frac{\psi_x(x,y(x))}{\psi_y(x,y(x))}$$

što daje $A = C = 0$

U slučaju $b^2 - ac = 0$ imamo da je $B^2 - AC = 0$ promatramo jedan ODJ

$$y'(x) = \frac{b}{a}(x,y(x))$$

Neka je njegovo rješenje dano implicitno $\varphi(x,y(x)) = const$ tada je $A = 0$ no onda je i $B = 0$ Funkciju $\psi(x,y(x)) = const$ biramo tako da bude nezavsina sa φ

U slučaju $b^2 - ac < 0$ promatramo dva ODJ-a

$$y'(x) = \left(\frac{b+i\sqrt{ac-b^2}}{a}\right)(x,y(x))$$

$$y'(x) = \left(\frac{b-i\sqrt{ac-b^2}}{a}\right)(x,y(x))$$

No dovoljno je promatrati samo prvi jer iz drugoga ne slijedi nista novo. Neka je $\varphi(x,y(x)) + i\psi(x,y(x)) = const$ prvi integral. Tada slijedi

$$\partial_x\varphi = -\frac{b}{a}(\partial_y\varphi - \frac{\sqrt{ac-b^2}}{b}\partial_y\psi)$$

$$\partial_x\psi = -\frac{b}{a}(\partial_y\psi + \frac{\sqrt{ac-b^2}}{b}\partial_y\varphi)$$

Sada dobivamo $A = C$ i $B = 0$

JEDNADŽBA PROVOĐENJA.

Teorem 30 *Inicijalno rubna zadaća*

$$\partial_t u = \kappa\partial_{xx}u + f$$

$$\alpha u(0,t) - \beta\partial_x u(0,t) = g(t)$$

$$\gamma u(l,t) + \delta\partial_x u(l,t) = h(t)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

gdje su $\alpha,\beta,\gamma,\delta \geq 0$ *i* $|\alpha|+|\beta| > 0$ *i* $|\gamma|+|\delta| > 0$ *te* $\kappa > 0$ *ima najviše jedno rješenje u* $C^2([0,l] \times [0,\infty\rangle)$

Dokaz. Pretpostavimo da imamo dva rješenja u_1 i u_2. Definiramo $w = u_1 - u_2$. Imamo da w zadovoljava homogenu jednadžbu

$$\partial_t w = \kappa \partial_{xx} w$$

homogene rubne uvijete

$$\alpha w(0,t) - \beta \partial_x w(0,t) = 0$$

$$\gamma w(l,t) + \delta \partial_x w(l,t) = 0$$

i homogeni početni uvijet

$$w(x,0) = 0$$

Pomnožimo homogenu jednadžbu sa w i integriramo od 0 do l. Imamo

$$\int_0^l w \partial_t w dx = \kappa \int_0^l \partial_{xx} w w dx$$

Parcijelno integriramo i dobijemo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l w^2(x,t) + \kappa \int_0^l (\partial_x w(t,x))^2 dx \leq 0$$

Sada integriramo od 0 do T te dobijemo

$$\frac{1}{2} \int_0^l w^2(x,T) dx - \frac{1}{2} \int_0^l w^2(x,0) dx + \kappa \int_0^T \int_0^l (\partial_x w(t,x))^2 dx dt \leq 0$$

Pa imamo da je $w = 0$ na $[0,l] \times [0,T]$ za proizvoljan T.

Q.E.D.

Pogledajmo problem u više prostornih dimenzija.
Jednadžba provođenja

$$\partial_t u - \kappa \triangle u = f$$

na $Q = \Omega \times \langle 0, +\infty \rangle$ gdje je Ω otvoren omeđen skup sa glatkim rubom. Rubni uvijet $u(x,t) = g(x,t)$ na $\partial\Omega \times \langle 0, +\infty \rangle$ zovemo Diricletov dok $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = h(x,t)$ gdje je ν jedinična vanjska normala zovemo Neumanov.

Teorem 31 *Početna rubna zadaća*

$$\partial_t u - \kappa \triangle u = f \ \ na \ Q$$

$$u = u_0 \ \ na \ \Omega \times \{0\}$$

Uz rubni uvijet Diricletovog ili Neumanovog tipa ima najviše jedno rješenje u $C^2(\overline{Q})$

Dokaz. Neka su $u_1, u_2 \in C(\overline{Q})$ rješenja zadaće. Razlika $w = u_1 - u_2$ zadovoljava $\partial_t w - k\triangle w = 0$ na Q te $w = 0$ na $\Omega \times \{0\}$ i homogene rubne uvijete. Pomnožimo jednađbu s w i integriramo po Ω

$$\int\limits_{\Omega} \partial_t w(t,x) w(t,x) dx = \kappa \int\limits_{\Omega} w(t,x) \nabla w(t,x) dx$$

te iskoristimo $\operatorname{div}(w\nabla w) = \|\nabla w\|^2 + w\triangle w$ pa imamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w^2(t,x)dx = -\kappa \int\limits_{\Omega} \|\nabla w(t,x)\|^2 dx + \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(w(t,x)\nabla w(t,x))dx$$

Kako je

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(w\nabla w)dx = \int\limits_{\partial\Omega} w\nabla w \nu ds = 0$$

zbog rubnih uvijeta jer je $w = 0$ (Diricletov) ili je $\nabla w\nu = 0$ (Neumanov). Sada imamo da je $\phi(t) = \int\limits_{\Omega} w^2(t,x)dx \geq 0$, $\phi'(t) \leq 0$ i $\phi(0) = 0$ pa slijedi da je $\phi(t) = 0$ tako da je $w = 0$.

Q.E.D.

Teorem 32 *(Princip maksimuma) Neka je $\Omega = \langle 0, l\rangle$, $Q = \Omega \times \langle 0, +\infty\rangle$, $Q_T = \Omega \times \langle 0, T\rangle$ te $P_T = \partial Q_T \setminus \Omega \times \{T\}$ parabolička granica. Neka $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ zadovoljava jednadžbu provođenja $\partial_t u - \kappa \partial_{xx} u = 0$ na Q. Tada ona svoje ekstreme na $\overline{Q_T}$ postiže upravo na P_T.*

Dokaz. Pokažimo tvrdnju za maksimum. Neka je $M = \max\{u(t,x) : (t,x) \in \overline{Q_T}$ i $m = \max\{u(t,x) : (t,x) \in P_T$. Pretpostavimo da je $m < M$. Neka je $u(t_0, x_0) = M$ tada $(t_0, x_0) \notin P_T$. Definiramo $v(t,x) = u(t,x) + (M-m)(t-t_0)/2T$ Kako je $v(t,x) \leq u(t,x) + (M-m)/2$ imamo da v sigurno ne poprima maksimum na P_T jer za $(t,x) \in P_T$ imamo $v(t,x) \leq (M+m)/2 < M$. Imamo da je $\partial_t v(t_0, x_0) \geq 0$, a da je $\partial_{xx} v(t_0, x_0) \leq 0$. Pa imamo $\partial_t v - \kappa\partial_{xx} v \geq 0$ no s druge strane $\partial_t v - \kappa \partial_{xx} v = \partial_t u - \kappa\partial_{xx} u - (M-m)/2T < 0$ pa smo dobili kontradikciju.

Q.E.D.

Teorem 33 *Početna rubna zadaća uz Diricletove R.U. ima najviše jedno rješenje u prostoru $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$*

Dokaz. Pretpostavimo dva rješenja u_1, u_2 tada gledamo njihovu razliku $w = u_1 - u_2$. Po principu maksimuma dobivamo da $\max\{w(t,x) : (t,x) \in \overline{Q_T}\} = \max\{w(t,x) : (t,x) \in P_T\} = 0$ pa je $w = 0$.

Q.E.D.

Teorem 34 *Početna zadaća*

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa \partial_{xx} u = f & na\ \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

ima najviše jedno rješenje u klasi ograničenih funkcija iz $C^2(\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty \rangle)$

Dokaz. Neka su u_1, u_2 rješenja zadaće takva da je $\sup\limits_{(t,x) \in \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle} |u_i(t,x)| \leq c$ za $i = 1, 2$. Definiramo $w = u_1 - u_2$ tada imamo $\sup\limits_{(t,x) \in \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle} |w(t,x)| \leq 2c$. Neka je $R > 0$. Definiramo $v_R(x,t) = \frac{4c}{R^2}(x^2/2 + \kappa t)$. Lako se provjeri da $\partial_t v_R - \kappa \partial_{xx} v_R = 0$ na $\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle$. Definiramo $Q_{R,T} = \langle -R, R \rangle \times \langle 0, T \rangle$, neka je $P_{R,T}$ pripadna parabolička granica. Imamo da je $v_R \geq |w|$ na $P_{R,T}$ pa je $v_R \geq |w|$ na $\overline{Q_{R,T}}$. Sada za vrijedi $|w(t,x)| \leq \frac{4c}{R^2}(x^2/2 + \kappa t)$ za $|x| < R$ pa imamo da je $|w(t,x)| \leq 0$ za $x \in \mathbb{R}$

Q.E.D.

Teorem 35 *Neka je* $u_0 \in C(\mathbb{R})$ *ograničena. Tada je rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa \partial_{xx} u = 0 & na\ \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

jedinstveno i dano Poissonoviom formulom

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,x,\xi) u_0(\xi) d\xi$$

pri čemu je $G(t,x,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}}$

Dokaz. Prvo provjerimo da je integral dobro definiran. Pretpostavimo da je $|u_0(x)| \leq c$ za $x \in \mathbb{R}$ tada imamo

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(t,x,\xi) u_0(\xi) d\xi \right| \leq c \int_{-\infty}^{\infty} G(t,x,\xi) \leq \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = c$$

Neka je $u_n(t,x) = \int\limits_{-n}^{n} G(t,x,\xi)u_0(\xi)d\xi$ tada je u_n neprekidna funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$. Računamo

$$\|u_n - u\| = \sup_{(t,x)} |\int\limits_{|\xi|>n} G(t,x,\xi)u_0(\xi)d\xi| \to 0$$

kada $n \to \infty$ pa je u neprekidna kao uniformni niz neprekidnih.

Tvrdnja 1 *(Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, dokaz u Mjera i integral, Antonić-Vrdoljak) Neka je f_n niz izmjerivih funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$ koji skoro svuda konvergira izmjerivoj funkciji f. Ako postoji integrabilna funkcija g koja dominira $|f_n|$ onda je i funkcija f integrabilna i vrijedi*

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Tvrdnja 2 *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, pretpostavimo da funkcija $G\colon \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*
a) Postoji zanemariv skup Z u X takav da $G(.,\xi)$ je diferencijabilna za $\xi \in Z^c$.
b) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $G(x,.)$ je μ-izmjeriva.
c) Postoji integrablina funkcija g takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ dominira funkciju $\partial_x G(x,.)$
d) Postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x_0,.)$ integrabilna
Tada je za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $G(x,.)$ integrabilna, dok je funkcija $x \to \int_X G(x,.)d\mu$ diferencijabilna i njezina derivacija je $x \to \int_X \partial_x G(x,.)d\mu$

Dokaz. Uzmimo $\xi \in Z^c$. Neka je $x \neq x_0$ Imamo da postoji $\eta(x)$ takav da

$$\left|\frac{G(x_0,\xi) - G(x,\xi)}{x_0 - x}\right| = |\partial_x G(\eta(x),\xi)|$$

pa slijedi da je $\xi \to G(x,\xi)$ integrabilna za svaki $x \in \mathbb{R}$. Neka je $(h_n)_n$ proizvoljan niz koji ne sadrži 0 i konvergira prema 0. Definiramo $f_n(x,\xi) = \frac{G(x+h_n,\xi)-G(x,\xi)}{h_n}$. Tada za svaki n postoji η_n takav da niz η_n konvergira prema x i da je $f_n(x,\xi) = \partial_x G(\eta_n,\xi)$ iz čega slijedi da $f_n(x,\xi) \to \partial_x G(x,\xi)$ za $\xi \in Z^c$ i da g dominira funkciju $f_n(x,.)$. Sada računamo

$$\int_X \partial_x G(x,.)d\mu = \lim_n \int_X f_n(x,.)d\mu = \lim_n \frac{\int_X G(x+h_n,.)d\mu - \int_X G(x,.)d\mu}{h_n} =$$

iz čega zbog proizvoljnosti od $(h_n)_n$ imamo $= \frac{d}{dx}\int_X G(x,.)d\mu$

Q.E.D.

Tvrdnja 3 *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, pretpostavimo da funkcija $G\colon \mathbb{R}\times X \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*
a) Postoji zanemariv skup Z u X takav da je $G(.,\xi)$ klase C^k za $\xi \in Z^c$.
b) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $G(x,.)$ je μ-izmjeriva.
c) Za svaki $n \in 1,\dots,k$ postoji integrablina funkcija g_n takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ dominira funkciju $\partial_x^n G(x,.)$
d) Postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x_0,.)$ integrabilna
Tada je za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $G(x,.)$ integrabilna, dok je funkcija $x \to \int_X G(x,.)d\mu$ klase C^k i njezina n-ta derivacija je $x \to \int_X \partial_x^n G(x,.)d\mu$

Dokaz. Primjenjujemo predhodnu tvrdnju k puta.

Q.E.D.

Proizvoljna derivacija po t i x funkcije $(t,x,\xi) \to G(t,x,\xi)u_0(\xi)$ je majorizirana integrabilnom funkcijom jer eksponencijalni dio nadvlada u integralu. Funkcija $\xi \to G(t,x,\xi)u_0(\xi)$ je neprekidna pa i μ-izmjeriva. Slijedi da je u klase C^∞. Direktnom provjerom se dobije da je $\partial_t G(t,x,\xi) - \kappa\partial_{xx}G(t,x,\xi) = 0$ tako da imamo

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\partial_{xx}u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_t G(t,x,\xi) - \kappa\partial_{xx}G(t,x,\xi)\right) u_0(\xi)d\xi = 0$$

pa u zadovoljava homogenu jednadžbu provođenja. Računamo

$$|u(t,x) - u_0(x_0)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,x,\xi)u_0(\xi)d\xi - u_0(x_0) \right| = \left| \begin{array}{c} \eta = \frac{\xi - x}{\sqrt{4\kappa t}} \\ d\eta = \frac{d\xi}{\sqrt{4\kappa t}} \end{array} \right| =$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}(u_0(x + \eta\sqrt{4\kappa t}) - u_0(x_0)d\eta \right|$$

Sada imamo $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x_0)} |u(t,x) - u_0(x_0)| = 0$. Da to pokažemo uzmimo proizvoljan niz $x_n \to x_0$ i $t_n \to 0$ tada imamo da je $f_n(\eta) = e^{-\eta^2}u_0(x_n + \sqrt{4\kappa t_n})$ μ-izmjeriva jer je neprekidna i $f_n(\eta) \to e^{-\eta^2}u_0(x_0)$. Kako je f_n majorizirana integrabilnom funkcijom slijedi $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} u(t_n, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\eta^2}u_0(x_0)d\eta = u_0(x)$. Tvrdnja slijedi iz proizvoljnosti niza (t_n, x_n)

Q.E.D.

Ako stavimo $\phi(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}$ rješenje početne zadaće iz prošlog teorema je dano sa $u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(t, x-\xi) u_0(\xi) d\xi$. Funkciju ϕ zovemo elementarno ili fundamentalno rješenje.

Teorem 36 *Neka je $u_0 \in C([0,1])$ takva da je $u_0' \in \mathrm{PDN}([0,1])$. Početno rubna zadaća*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 \quad na\ \langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, 1\rangle \\ u(0,.) = u_0 \\ u(.,0) = u(.,1) = 0 \end{cases}$$

ima rješenje ako i samo ako $u_0(0) = u_0(1) = 0$

Dokaz. Nužnost je očita pokažimo dovoljnost. Pretpostavimo rješenje u separiranom obliku $u(t,x) = T(t)X(x)$ tada dobivamo za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo rješenje rubne zadaće $u_k(t,x) = A_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$ gdje je A_k poizvoljna konstanta. Pretpostavimo rješenje početno rubne zadaće u obliku $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$. Ako želimo zadovoljiti početni uvijet zbog uvjeta $u_0(0) = u_0(1) = 0$ i jer je u_0 neprekidna i u_0' po dijelovima neprekidna možemo uzeti za A_k Fourierove koeficijente od u_0 pa red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)$ konvergira uniformno i apsolutno prema $u_0(x)$ odnodno početni uvijet je zadovoljen. Kako je $|A_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)| \leq |A_k|$ i red $\sum |A_k|$ konvergira imamo da je $u(t,x)$ dobro definrana. Kako sumu možemo shvatiti kao integral na prostoru mjere $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ gdje je $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$. Imamo da je $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ pa sve tvrdnje koje smo pokazali za integrale možemo primjeniti. Jedini zanemariv skup u $\mathbb{N}$ je $\emptyset$. Funkcija u_k je klase C^∞ za sve $k \in N$. Funkcija $k \to u_k(t,x)$ je μ-izmjeriva jer je pripadna σ-algebra maksimalna to jest jednaka je partitivnom skupu od $\mathbb{N}$. Neka je $t \geq t_0 > 0$ tada imamo $|\partial_t u_k(t,x)| \leq A_k \pi^2 k^2 e^{-k^2\pi^2 t_0} \leq C\pi^2 k^2 e^{-k^2\pi^2 t_0} = g_k$. Imamo da $\sum g_k$ konvergira po D'Alambertovom kriteriju jer

$$g_{k+1}/g_k = \frac{(k+1)^2}{k^2} e^{-(2k+1)\pi^2 t_0} \to 0$$

Tako da za svaki $(t,x) \in \langle t_0, +\infty\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ imamo integrabilnu funkciju $k \to g_k$ (red $\sum g_k$ konvergira) koja majorizira $\partial_t u_k(t,x)$ na $\langle t_0, +\infty\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. $u_k(t,x)$ je integrabilna za svako $(t,x) \in \langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ odnosno $\sum u_k(t,x)$ je konačan. Tada je $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t,x)$ za $(t,x) \in \langle t_0, +\infty\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ diferencijabilna i njezina derivacija je $u_t(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \partial_t u_k(t,x)$. Sada $\sum \partial_t u_k(t,x)$

lokalno uniformno konvergira. Kako je t_0 proizvoljno malen dobivamo da je $u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \partial_t u_k(t,x)$ na $\langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Na sličan način dobivamo rezultate za proizvoljne derivacije od u po t i x pa je u klase C^∞. Sada slijedi da u zadovoljava homogenu zadaću jer $\partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\partial_t u_k(t,x) - \partial_{xx} u_k(t,x)) = 0$

Q.E.D.

LAPLACEOVA I POISSONOVA JEDNADŽBA

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup sa kada treba glatkom granicom. Jednadžbu obilika $-\triangle u = f$ na Ω zovemo Poissonovom dok za homogen slucaj $f = 0$ koristimo naziv Laplaceova.

Rubni uvjeti su:

1) Diricletov rubni uvijet: $u = g$ na $\partial\Omega$
2) Neumannov rubni uvijet: $\nabla u \nu = g$ na $\partial\Omega$
3) Robinov rubni uvijet: $\nabla u \nu + cu = g$ na $\partial\Omega$ gdje je $c \geq 0$

Lema 6 *(1. Greenova formula) Za $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ vrijedi*

$$\int_\Omega v \triangle u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \nu v ds - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

Dokaz.

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \nu v ds = \int_\Omega \operatorname{div}(v \nabla u) dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega v \triangle u dx$$

Q.E.D.

Korolar 4 *Za $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vrijede jednakosti*

$$\int_\Omega \triangle u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \nu ds$$

$$\int_\Omega u \triangle u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \nu u ds - \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx$$

Korolar 5 *(2. Greenova formula) Za $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ vrijedi*

$$\int_\Omega (v \triangle u - u \triangle v) dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \nu v - \nabla v \nu u) ds$$

Teorem 37 *Rubna zadaća $-\triangle u = f$ na Ω uz Diricletov, Neumannov ili Robinov rubni uvijet ima jedinstveno rješenje u prostoru $C^2(\overline{\Omega})$*

Dokaz. Neka su u_1, u_2 rješenja. Stavimo $w = u_1 - u_2$. Sada iz rubnih uvjeta slijedi $\int_{\partial\Omega} \nabla w \nu w ds \leq 0$. Imamo

$$0 = \int_\Omega w \triangle w = \int_{\partial\Omega} \nabla w \nu w ds - \int_\Omega \|\nabla w\|^2 dx$$

Pa slijedi da je $\nabla w = 0$ odnosno $w = const$ pa iz rubnih uvjeta slijedi da je $w = 0$.

Q.E.D.

Def 12 *Fundamentalno rješenje Laplaceove jednadžbe je $\Psi_n \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dano formulom*

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{1}{\|x\|}) & n = 2 \\ \frac{1}{|S_n|(n-2)} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

Teorem 38 *Za fundamentalno rješenje Laplaceove jednadžbe vrijedi*

$$\int_{\partial K(0,R)} \nabla \Psi_n \nu ds = -1$$

$$\triangle \Psi_n = 0 \ na\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Dokaz. Računamo $\nabla \Psi_2(x)\nu(x) = -\frac{1}{2\pi\|x\|}$. Tako da je integral iz teorema -1. Uzmimo sada da je $n \geq 3$. Računamo $\nabla \Psi_n(x)\nu(x) = \frac{-1}{|S_n|\|x\|^{n-1}}$. Tako da je integral iz teorema -1. Drugu tvrdnju pokazujemo direktnom provjerom.

Q.E.D.

Teorem 39 *(Dokaz u Linearne diferencijalne jednadžbe, Aganović-Veselić, str 64.) Za funkciju $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vrijedi integralna reprezentacija*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Psi_n(\|x-y\|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi_n(\|x-y\|) dS_y \right) +$$

$$+ \int_\Omega \triangle u(y) \Psi(\|x-y\|) dV_y$$

Def 13 *Uzmimo fiksan $x \in \Omega$. Definiramo funkciju*

$$G(x,y) = \Psi_n(\|x-y\|) + w(x,y)$$

pri čemu w zadovoljava $\triangle_y w(x,y) = 0$ na Ω i $w(x,y) = -\Psi_n(\|x-y\|)$ za $y \in \partial\Omega$. Tada G zovemo Greeenova funkcija za područje Ω.

Teorem 40 *(Dokaz u Linearne diferencijalne jednadžbe, Aganović-Veselić, str 66.) Ako postoji Greenova funkcija G tada za $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vrijedi integralna formula*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} G(x,y)u(y)dS_y - \int_{\Omega} G(x,y)\triangle u(y)dV_y$$

Korolar 6 *Ako je $u \in C^2(\overline{\Omega})$ rješenje Diricletovog problema $-\triangle u = f$ na Ω i $u = g$ na $\partial\Omega$ onda je*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} G(x,y)g(y)dS_y + \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dV_y$$

Def 14 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za funkciju kažemo da je harmoniska na Ω ako je $-\triangle u = 0$ na Ω*

Teorem 41 *(Teorem srednje vrijednosti za harmonijske funkcije) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Ako je funkcija u harmoniska na Ω, onda za svako $x \in \Omega$ i svaku kuglu $K(x,R)$ koja je kompaktno sadržana u Ω vrijedi:*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial K(x,R)|}\int_{\partial K(x,R)} udS = \frac{1}{|K(x,R)|}\int_{K(x,R)} udV$$

Dokaz. Pokažimo prvu jednakost. Definiramo $\phi(r) = \frac{1}{\partial K(x,r)}\int_{\partial K(x,r)} udS = \frac{1}{|S_n|}\int_{S_n} u(x+r\nu)ds$. Tada je

$$\phi'(r) = \frac{1}{|S_n|}\int_{S_n} \nabla u(x+r\nu)\nu dS = \frac{1}{|\partial K(x,r)|}\int_{\partial K(x,r)} \nabla u \nu dS =$$

$$\frac{1}{|\partial K(x,r)|}\int_{K(x,r)} \triangle u dV = 0$$

Sada imamo

$$\frac{1}{\partial K(x,R)}\int_{\partial K(x,r)} udS = \phi(R) = \lim_{r\to 0}\phi(r) = u(x)$$

Sada pokažimo drugu jednakost. Računamo

$$\frac{1}{|K(x,R)|}\int_{K(x,R)} udV = \frac{1}{|K(x,R)|}\int_0^R \int_{\partial K(x,r)} udsdr =$$

$$= \frac{1}{|K(x,R)|}\int_0^R |\partial K(x,r)|u(x)dr = u(x)$$

Q.E.D.

Teorem 42 *Ako je funkcija u harmonijska na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i različita od konstante onda ona na skupu Ω nema ekstrema.*

Dokaz. Dovoljno je promotriti slučaj maksimuma. Neka je $M = \sup\limits_{x \in \Omega} u(x)$. Definiramo $\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Pretpostvimo da je Ω_M neprazan tada je po definiciji zatvoren. Neka je $x \in \Omega_M$ i $K(x, R)$ neka je kompaktno sadržan u Ω. Funkcija $M - u$ je harmonijska pa prema teoremu srednje vrijednosti za harmonijske funkcije imamo

$$0 = M - u(x) = \frac{1}{|K(x,R)|} \int_{K(x,R)} (M - u(y)) dV$$

pa slijedi da je $u(y) = M$ za svako $y \in K(x, R)$. Prema tome skup Ω_M je otvoren pa je jednak Ω što je kontradikacija sa time da funkcija nije konstanta. Prema tome Ω_M je prazan.

Q.E.D.

Korolar 7 *(Strogi princip maksimuma) Ako je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonijska na omeđenom otvorenom skupu Ω, ona svoje ekstreme prima na $\partial\Omega$*

Korolar 8 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren omeđen skup. Diricletov problem $-\triangle u = f$ na Ω uz $u = g$ na $\partial\Omega$ ima najviše jedno rješenje u $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*

Teorem 43 *(Obrat teorema srednje vrijednosti za harmonijske funkcije) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka funkcija ima svojstvo srenje vrijednosti to jest za svaku $K(x, R)$ koja je kompaktno sadržana u Ω vrijedi*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial K(x,R)|} \int_{\partial K(x,R)} u dS$$

onda je u harmonijska na Ω

Dokaz. Pretpostvimo da postoji $x_0 \in \Omega$ takav da je $\triangle u(x_0) \neq 0$. BSO pretpostavimo da je $\triangle u(x_0) > 0$ tada postoji $R > 0$ takav da je $K(x_0, 2R)$ kompaktno sadržana u Ω i da za $y \in K(x_0, 2R)$ vrijedi $\triangle u(y) > 0$. Definiramo za $r \in \langle 0, 2R \rangle$ funkciju $\phi(r) = \frac{1}{|\partial K(x,r)|} \int_{\partial K(x,r)} u dS$. Kao i u dokazu teorema srednje vrijednosti za harmonijske funkcije dobivamo da je $\phi'(r) = \frac{1}{|\partial K(x,r)|} \int_{K(x,r)} \triangle u dV > 0$ pa je $u(x_0) = \lim\limits_{r \to 0} \phi(r) < \phi(R) = u(x_0)$. Zbog kontradikcije slijedi da je u harmonijska.

Q.E.D.

Def 15 *Neka je sa* $\mathcal{L}(R^n, \mathbb{C})$ *označen skup svih Lesbegue integrabilnih funkcija sa* $\mathbb{R}^n$ *na* $\mathbb{C}$

Lema 7 *Neka je* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{C})$ *tada je integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx$$

dobro definiran za svaki $\xi \in \mathbb{R}^n$

Dokaz. Imamo da je $\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$

Q.E.D.

Def 16 *Neka je* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. *Fourierova transformacija funkcije* f *je funkcija* $\mathcal{F}f$ *definirana kao*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx$$

Lako se vidi da je $\mathcal{F}f$ *neprekidna, a po Riemann-Lebegueovoj lemi koji nećemo dokazivati imamo da* $\mathcal{F}f$ *trne u beskonačno. Neprekidne funkcije koje trnu u beskonačno označimo sa* $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. *Imamo da je* $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Tvrdnja 4 *Neka je* $f(x) = e^{-\pi x^2}$ *tada je* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *i vrijedi* $\mathcal{F}(f) = f$.

Dokaz. Računamo $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\pi x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} dx_i = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$. Uzmimo $n = 1$. Računamo $(\mathcal{F}f)'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2} dx = \mathcal{F}(if')(\xi)$. Nadalje $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i\xi\mathcal{F}f(\xi)$ iz čega nakon množenja sa i slijedi $\mathcal{F}(if')(\xi) = -2\pi\xi\mathcal{F}f(\xi)$. Sada dobivamo ODJ $(\mathcal{F}f)'(\xi) = -2\pi\xi\mathcal{F}f(\xi)$. Početni uvijet je $(\mathcal{F}f)(0) = 1$ pa imamo $(\mathcal{F}f)(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. Pogledajmo sada slučaj $n > 1$. Računamo $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{-\pi x^2} dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_i \xi_i} e^{-\pi x_i^2} dx_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-\pi\xi_i^2} = e^{-\pi\xi^2}$

Q.E.D.

Def 17 *Schvartzove oznake:*
Neka je $n \in \mathbb{N}$. *Multindeks je svaki vektor* $\alpha \in N_0^n$.
Oznaka x^α *stoji za* $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.
Oznaka ∂^α *stoji za* $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$
Red multindeksa α *u oznaci* $|\alpha|$ *je* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Teorem 44 *Ako je* $x^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *za svaki multindeks* $\alpha \in N_0^n$ *takav da je* $|\alpha| \leq k$ *onda je*
a) $\mathcal{F}f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *i* $\partial^\alpha \mathcal{F}f = -2\pi i \mathcal{F}(x^\alpha f)$
b) Ako je $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *i za sve njene derivacije vrijedi* $\partial^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *gdje je* $|\alpha| \leq k$ *tada je* $\mathcal{F}\partial^\alpha f = 2\pi i \xi^\alpha \mathcal{F}f$

Dokaz. a) Dokaz ide indukcijom po $|\alpha|$. Računamo $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$
U uvjetima teorema možemo zamijeniti ∂^α sa integralom pa dobivamo $\partial^\alpha \mathcal{F}f(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} x^\alpha f(x) dx = -2\pi i \mathcal{F}(x^\alpha f)$
b) Računamo $\mathcal{F}\partial^\alpha f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi x \cdot \xi} \partial^\alpha f(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha (e^{-2\pi x \cdot \xi}) f(x) dx = 2\pi i \xi^\alpha \mathcal{F}f(\xi)$

Q.E.D.

Def 18 *Za* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *definiramo* $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ *tada je što se lako provjeri* $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Teorem 45 *Neka su* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *tada je* $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \mathcal{F}g$

Dokaz. Računamo $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} f(x-y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} g(y) dy dx = \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi)$

Q.E.D.

Def 19 *Za* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *definiramo* $\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$

Teorem 46 *(Teorem inverzije, vidjeti Folland Real Analysis) Ako su* f *i* $\mathcal{F}f$ *iz* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *tada vrijedi* $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ *skoro svuda.*

Def 20 *Schwartzov prostor* S *je prostor svih beskonačno derivabilnih funkcija takvih da produkt bilo koje njenje derivacije sa bilo kojim polinomom trne u beskonačnost. Ako je* $f \in S$ *onda je* $\mathcal{F}f \in S$ *i* $\overline{\mathcal{F}}f \in S$.

Korolar 9 *Funkcija* $\mathcal{F}\colon S \to S$ *je bijekcija sa inverzom* $\overline{\mathcal{F}}$