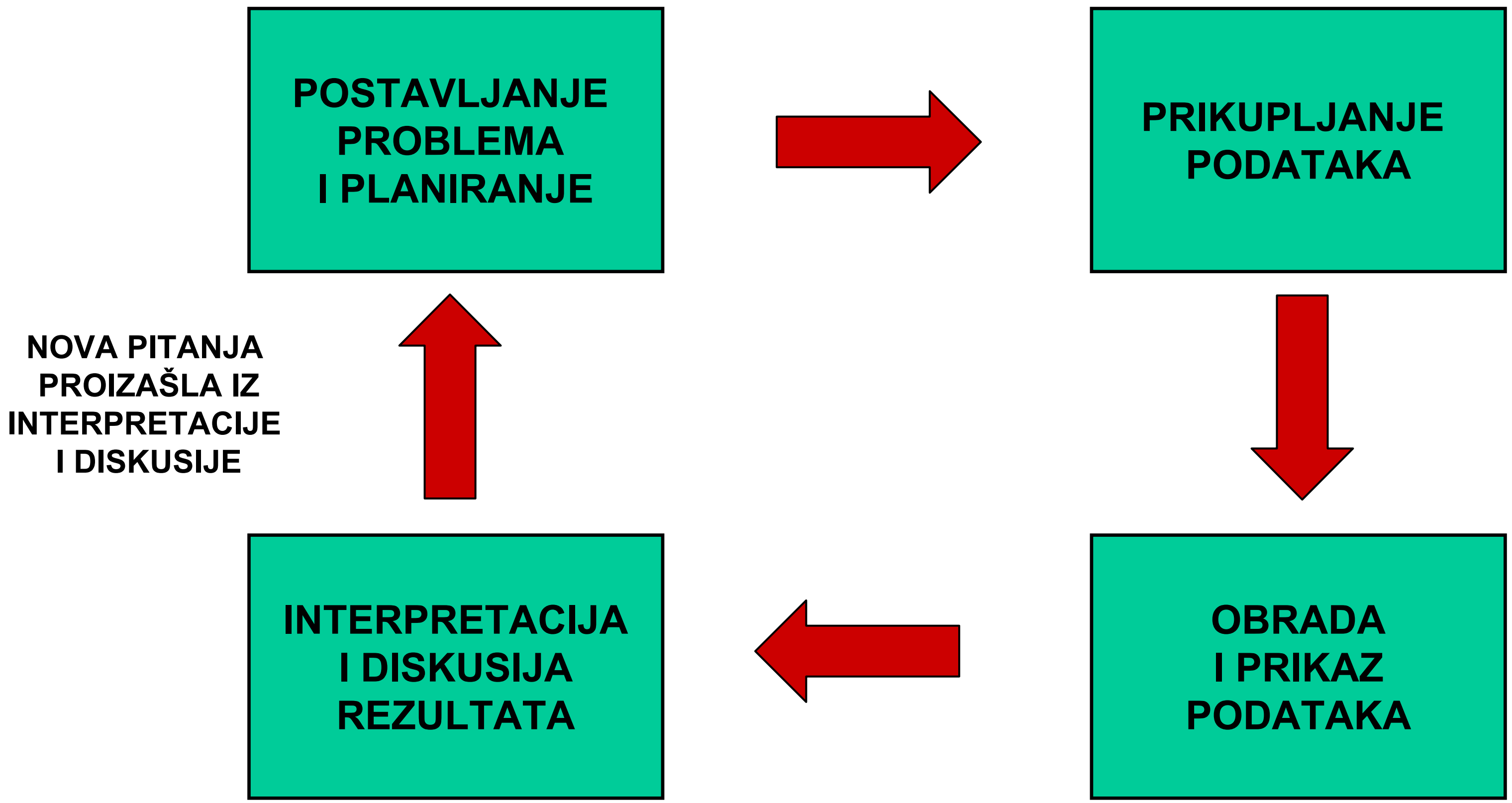
ICT U NASTAVI STATISTIKE

- alati za izradu proračunskih tablica -

PROBLEMSKI CIKLUS



PROBLEMSKI CIKLUS (2)

Četiri etape ciklusa rješavanja problema analizom podataka:

1. **postavljanje problema i plana njegovog rješavanja**
   - postavljanje pitanja koji su podaci potrebni
   - razmatranje koji se zaključci mogu izvući iz pojedinih podataka
   - odluka o tome koje podatke prikupiti (uključivo i određivanje veličine uzorka te formata podataka) i koja je statistička analiza potrebna
2. **prikupljanje podataka**
   - podaci iz raznovrsnih izvora, primarnih i sekundarnih

PROBLEMSKI CIKLUS (3)

3. **statistička obrada i prikaz podataka**
   - pretvaranje sirovih podataka u upotrebljive informacije koje pružaju bolji uvid u problem i njegovo razumijevanje
4. **interpretacija i diskusija rezultata**
   - rješenje problema i odgovor na postavljeno pitanje na temelju izvođenja zaključaka iz obrađenih podataka

KORISNI IZVORI PODATAKA

Neki korisni izvori statističkih podataka na internetu:

Republika Hrvatska – Državni zavod za statistiku

www.dzs.hr

Mape svijeta

www.sasi.group.shef.ac.uk/worldmapper

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE

PRIMJENA STATISTIČKE OBRADE PODATAKA

Učenike treba osposobiti za:

- rješavanje problema primjenom statističke analize podataka
  - izvođenje sve četiri etape ciklusa rješavanja problema primjenom statističke analize podataka
  - identificiranje koje su dodatne informacije potrebne za analizu pojedinog problema
  - odabir i organizaciju matematičkih i drugih resursa (npr. ICT) potrebnih za rješavanje problema
  - prezentiranje napredovanja u rješavanju problema, te provjeru i vrednovanje rezultata

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (2)

- komunikaciju
  - interpretiranje, diskusiju i sintetiziranje informacija prikazanih u različitim oblicima
  - komuniciranje matematičkim jezikom, upotrebu dijagrama i pripadnih tekstualnih podataka
  - kritički pristup izboru matematičke prezentacije problema vezanih uz obradu i analizu podataka te argumentaciju tog izbora

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (3)

- rasuđivanje (mišljenje)
  - primjenu matematičkog načina mišljenja, te argumentaciju svojih zaključaka
  - istraživanje povezanosti različitih matematičkih sadržaja te traženje uzroka i posljedica pri analizi podataka (pitanja: *Odakle? Zašto? Što ako?*)
  - prepoznavanje ograničenja svake postavljene pretpostavke (ulazni podaci i sl.) te utjecaja koji promjena pretpostavki može imati na rezultate i zaključke analize podataka

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (4)

POSTAVLJANJE PROBLEMA I PLANIRANJE

Učenike treba osposobiti za:

- razumijevanje nepredvidivosti slučajnih procesa
- identifikaciju pitanja na koja se može odgovoriti statističkim metodama
- diskusiju o utjecaju podataka na problem
  - identifikaciju mogućih izvora poteškoća i planiranje njihove minimizacije
- identifikaciju koje je podatke potrebno prikupiti i u kojem formatu
  - identifikaciju potrebe za grupiranjem podataka
- planiranje toka i postupka rješavanja problema

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (5)

PRIKUPLJANJE PODATAKA

Učenike treba osposobiti za:

- dizajniranje i upotrebu obrazaca za prikupljanje podataka u različitim oblicima
- prikupljanje podataka različitim metodama
  - iz primarnih izvora: praćenjem pojave, kontroliranim eksperimentom, bilježenjem podataka, upitnicima (anketama) i dr.
  - iz sekundarnih izvora: tablice, liste i dr.

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (6)

OBRADA I PRIKAZ PODATAKA

Učenike treba osposobiti za:

- crtanje i izradu, na papiru i uz pomoć ICT, kružnih, stupčastih, slikovnih, linijskih i drugih vrsta dijagrama koji na pravi način prikazuju podatke

- računanje aritmetičke sredine, raspona i medijana malog skupa podataka te velikog skupa grupiranih podataka

- razumijevanje i upotrebu koncepta vjerojatnosti (teorijski koncept – vjerojatnosna mjera; eksperimentalni koncept – relativne frekvencije)

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (7)

INTERPRETIRANJE I DISKUSIJA REZULTATA

Učenike treba osposobiti za:

- povezivanje dobivenih podataka s početnim postavljenim pitanjem
- čitanje i interpretaciju širokog raspona grafova i dijagrama te izvođenje zaključaka na temelju njih
- analizu podataka s ciljem uočavanja pravilnosti ili izuzetaka
- evaluaciju i provjeru rezultata, odgovaranje na postavljena pitanja, te izmjenu pristupa u slučaju potrebe

CILJEVI NASTAVE STATISTIKE (8)

- upotrebu vokabulara vezanog uz vjerojatnost, slučajnost i nepredvidivost
- usporedbu eksperimentom dobivenih podataka s teorijskim vjerojatnostima
- razumijevanje da ponavljanje slučajnog eksperimenta uglavnom daje drugačije rezultate te da veličina uzorka utječe na zaključke

UPOTREBA ICT

Iz navedenog se vide mogućnosti primjene ICT u nastavi statistike:

- ICT kao izvor podataka
  - *internetski servisi (www)*
- ICT alati kao sredstvo i pomoć pri spremanju i čitanju podataka
  - *proračunske tablice, baze podataka*
- ICT za statističku obradu i grafički prikaz prikupljenih podataka
  - *ICT alati za izradu proračunskih tablica*
- ICT kao medij za komuniciranje rezultata
  - *internetski servisi – www, e-mail; alati za izradu prezentacija*

CRTANJE DIJAGRAMA

Primjer 1.

U 7b. razredu među učenicima je provedena anketa o boji razrednih majica na maturalnom putovanju. Ponuđene su bile crvena, žuta, plava i zelena boja, a rezultati ankete dani su tablicom. Prikažite ih grafički.

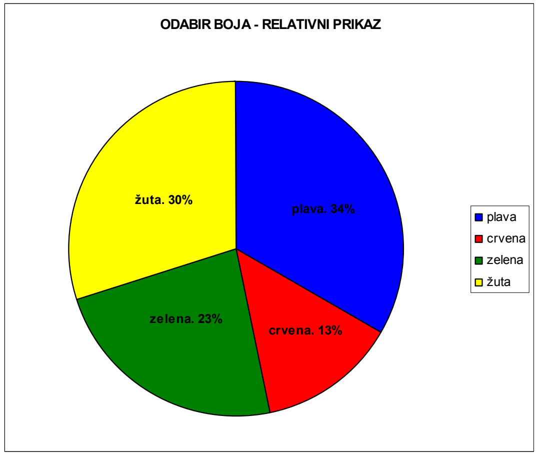
BOJA	plava	crvena	zelena	žuta
BROJ UČENIKA	10	4	7	9

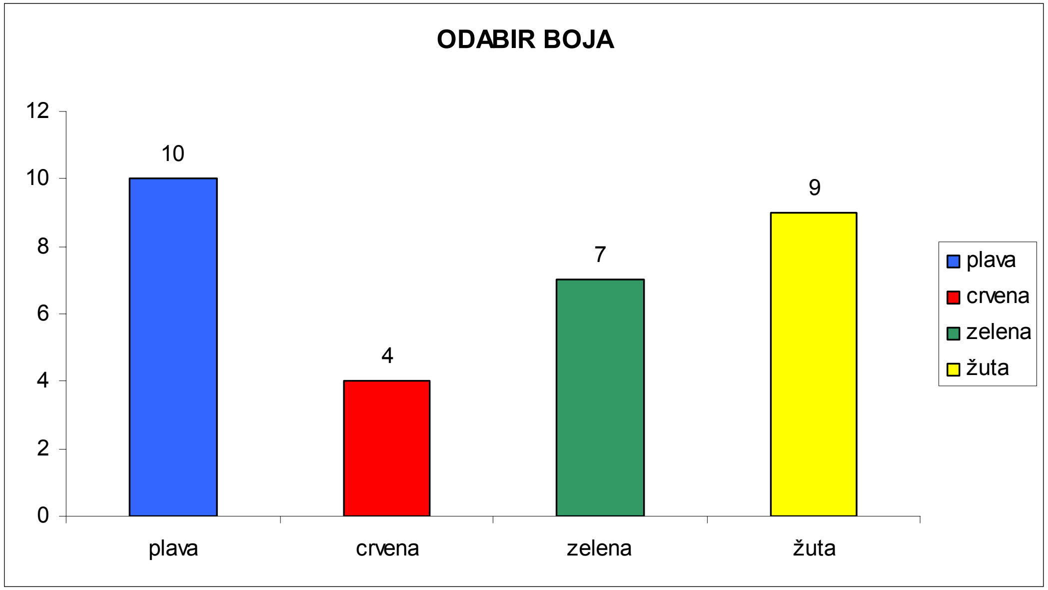
CRTANJE DIJAGRAMA (2)

Rješenje.

Moguća su dva adekvatna prikaza podataka:

- stupčastim dijagramom
- kružnim dijagramom





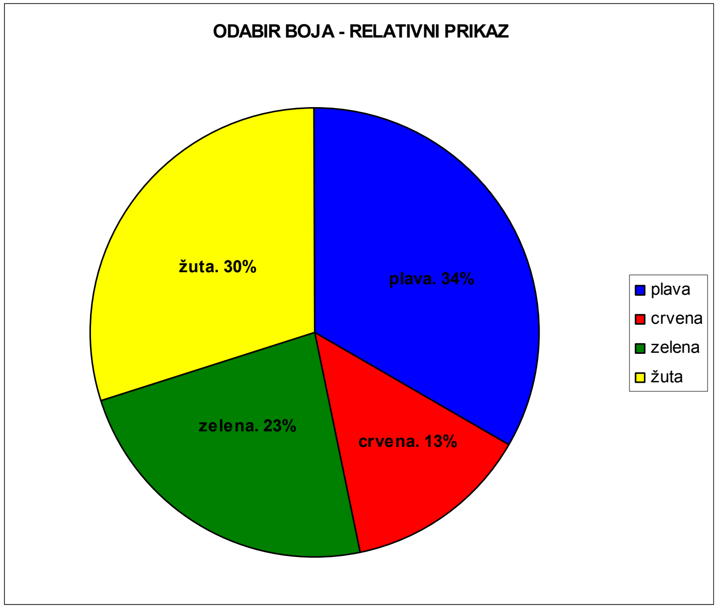
CRTANJE DIJAGRAMA (3)

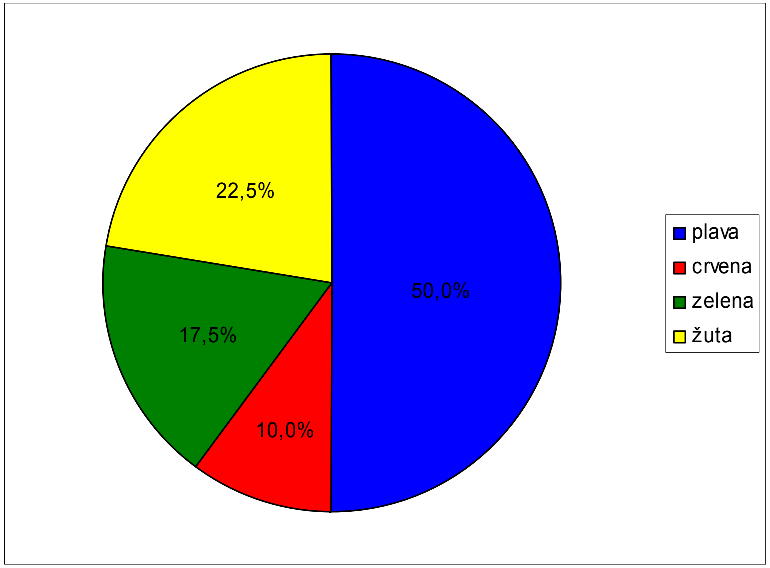
Daljnja pitanja za analizu i provjeru razumijevanja koncepta stupčastog i kružnog dijagrama:

- Što se dešava sa stupčastim dijagramom ukoliko udvostručimo broj učenika koji su odabrali plavu boju? Zašto?

CRTANJE DIJAGRAMA (4)

- Što se dešava s kružnim dijagramom u tom slučaju? Zašto?





CRTANJE DIJAGRAMA (5)

Daljnja pitanja za analizu i provjeru razumijevanja koncepta stupčastog i kružnog dijagrama:

- Što se sa svakim od dijagrama dešava ukoliko udvostručimo broj učenika kod svake boje? Zašto?
- Što se dešava ukoliko broj učenika kod svake boje upola smanjimo? Zašto?
- Što se dešava ukoliko broj učenika kod svake boje smanjimo za 3? Zašto?

Učenike nakon toga treba potaknuti da samostalno kreiraju pitanja oblika *Što će se s dijagramom dogoditi ako...?*

CRTANJE DIJAGRAMA (6)

Primjer 2.

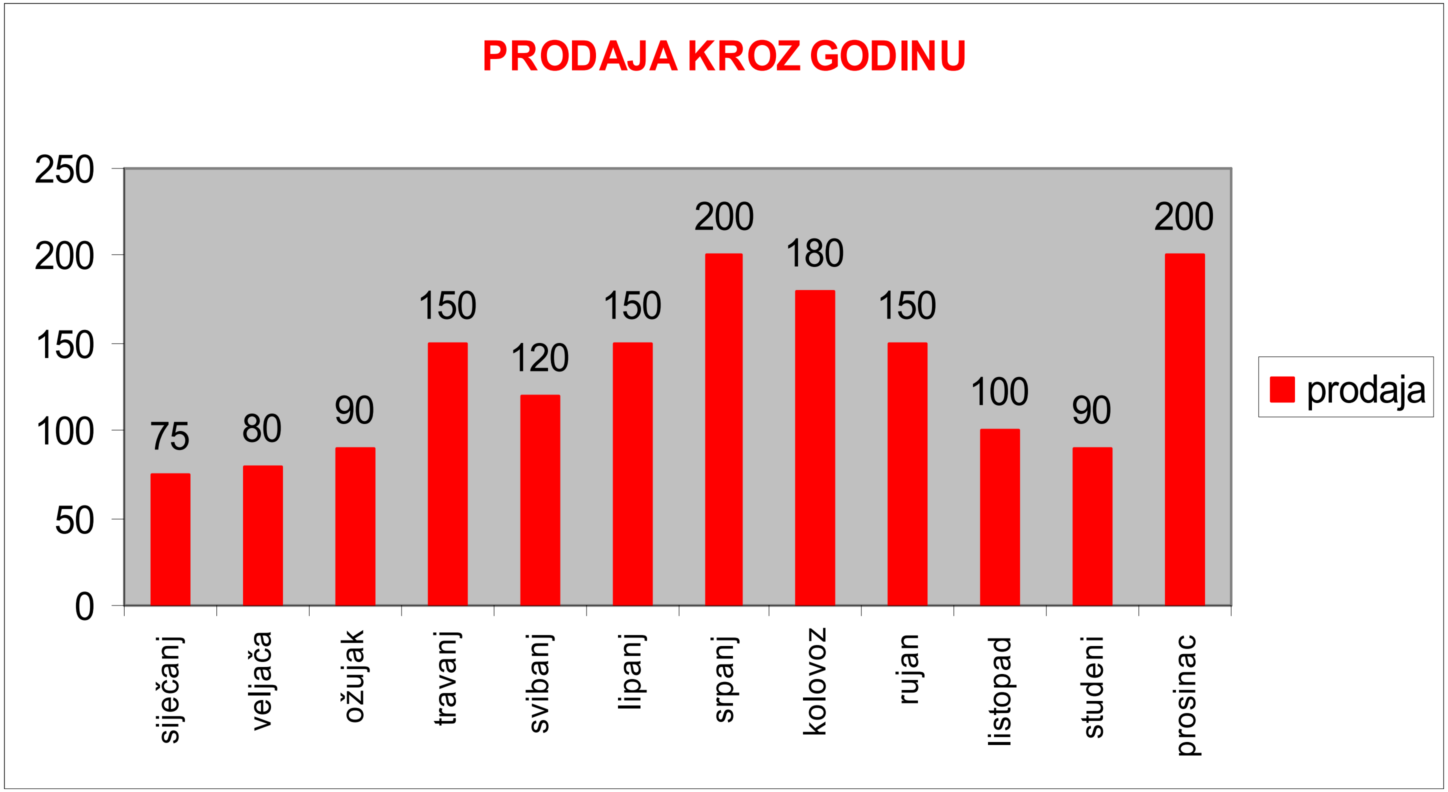
U tablici je dan pregled prodaje rashladnih uređaja u jednom velikom dućanu tokom godine. Prikažite ove podatke odgovarajućim grafikonom.

Što zaključujete?

MJESEC	PRODAJA
siječanj	75
veljača	80
ožujak	90
travanj	150
svibanj	120
lipanj	150
srpanj	200
kolovoz	180
rujan	150
listopad	100
studeni	90
prosinac	200

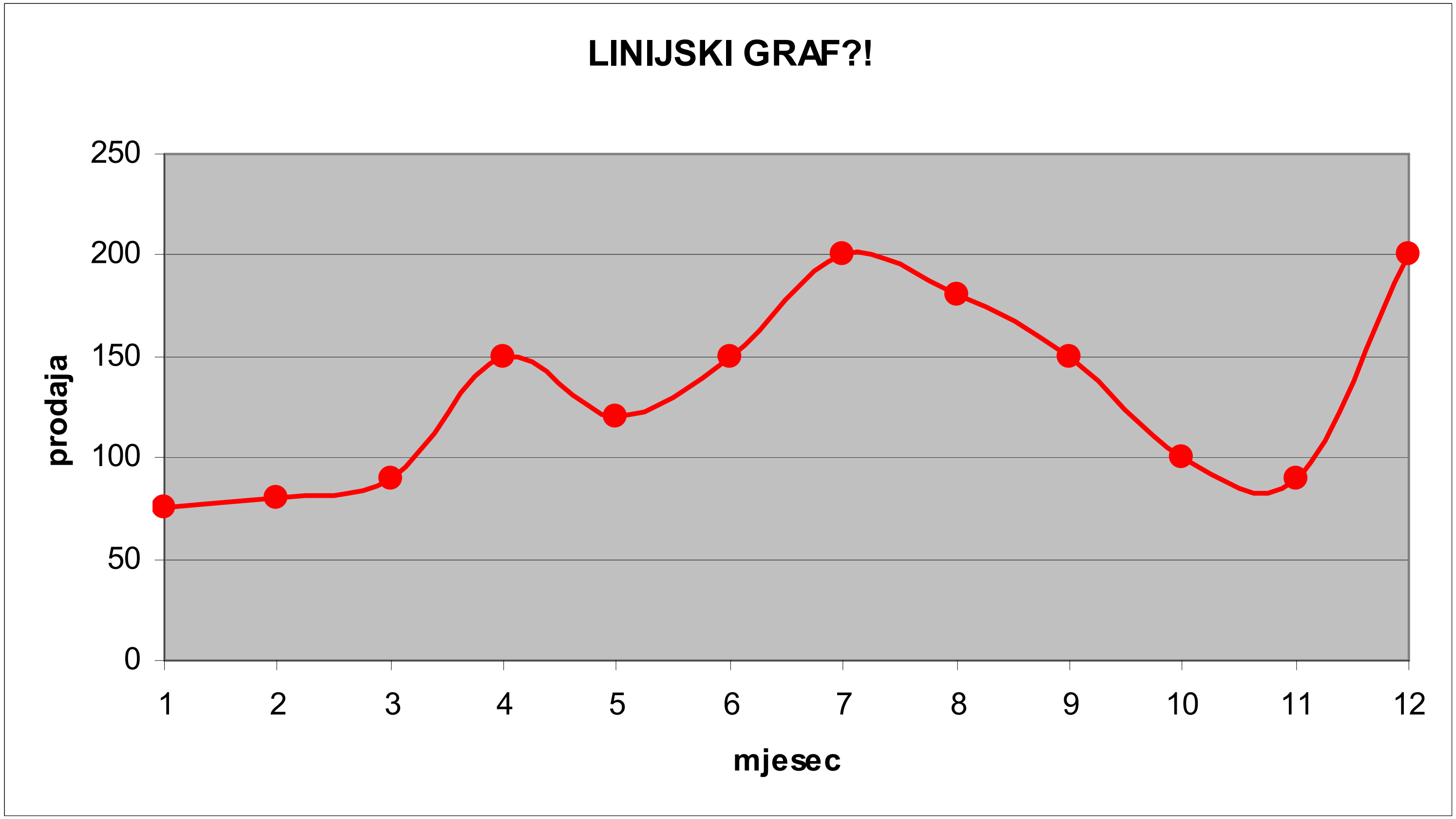
CRTANJE DIJAGRAMA (7)

Rješenje.



CRTANJE DIJAGRAMA (8)

U čemu je problem s ovakvim dijagramom u istom zadatku?



CRTANJE DIJAGRAMA (9)

Primjer 3.

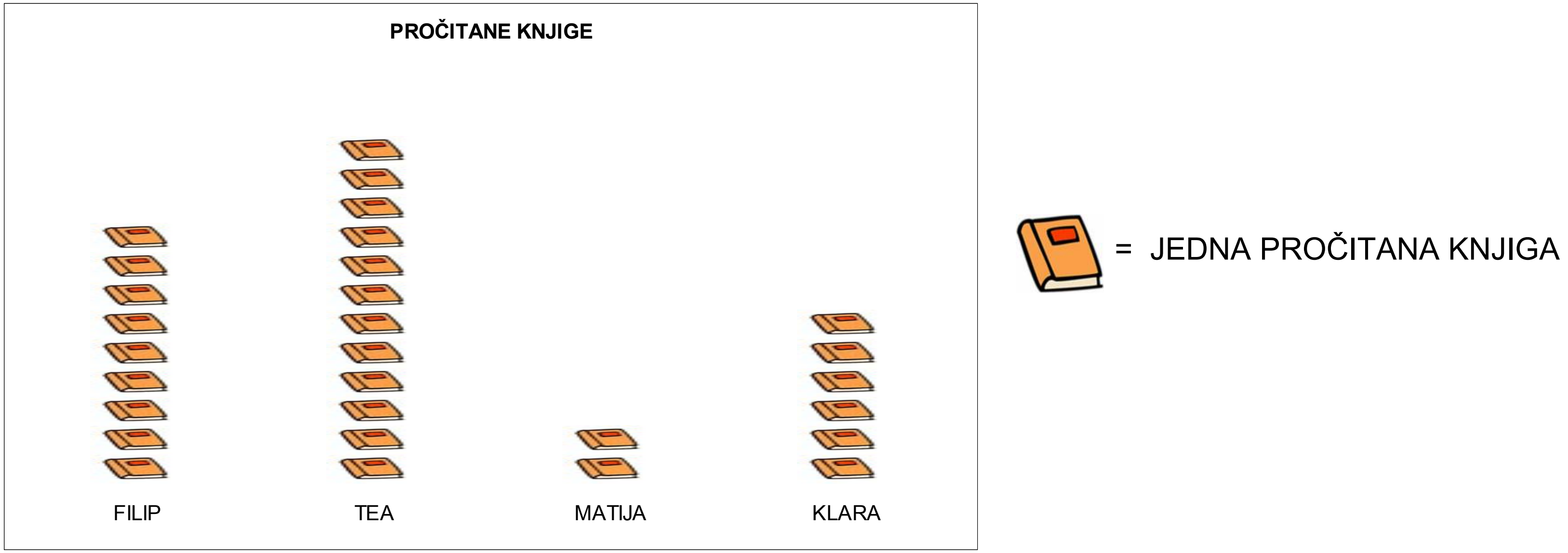
Na slici su prikazani podaci o broju pročitanih knjiga u prvom polugodištu. Pogledajte sliku i odgovorite na pitanja:

(a) Tko je pročitao najviše knjiga i koliko?

(b) Tko je pročitao najmanje knjiga i koliko?

(c) Koliko knjiga ste vi pročitali tokom ovog polugodišta?

(d) Koji su mogući razlozi da je neka osoba pročitala više ili manje knjiga?



CRTANJE DIJAGRAMA (10)

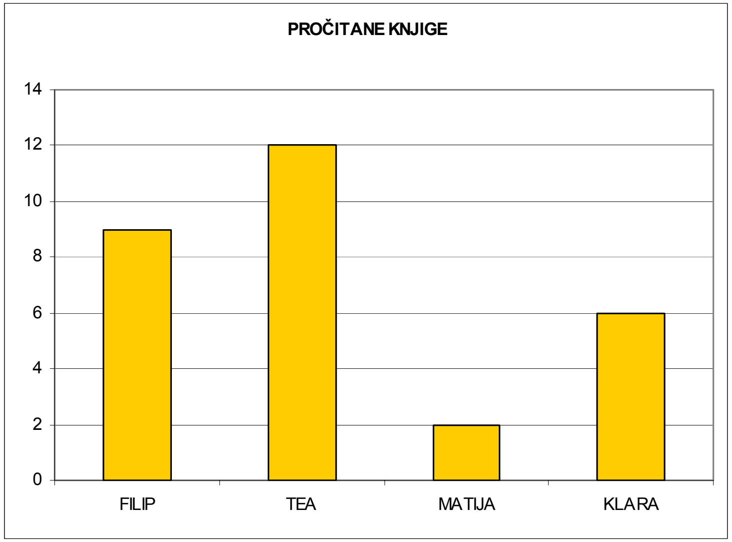
Rješenje.

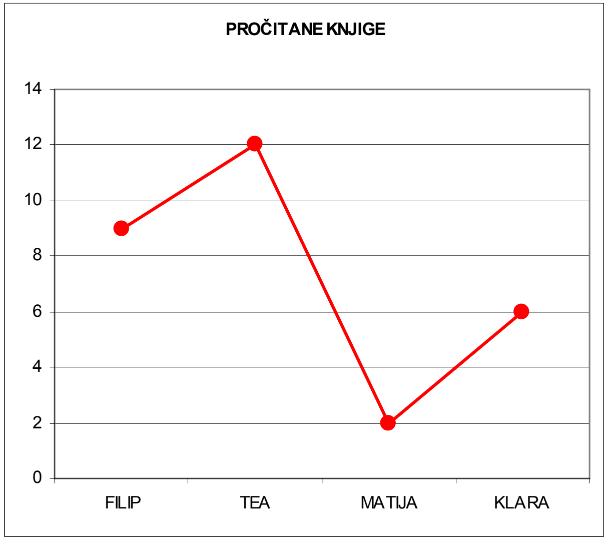
Ovakav grafički prikaz podataka zove se **piktogram** ili **slikovni dijagram**.

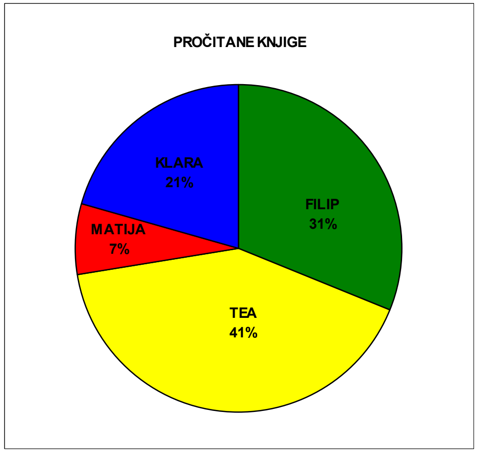
Učenici podatke prikazane piktogramom trebaju naučiti pretvoriti u tablicu i analizirati ih.

UČENIK/CA	FILIP	TEA	MATIJA	KLARA
BROJ PROČITANIH KNJIGA	9	12	2	6

Koji od danih grafičkih prikaza je pogodan za ove podatke?



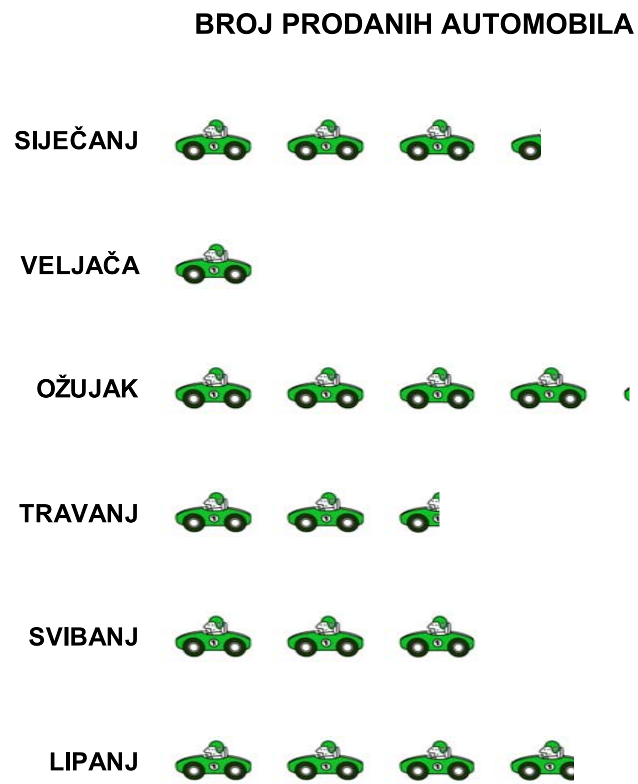




CRTANJE DIJAGRAMA (11)

Primjer 4.

Pogledajte sliku na kojoj se nalaze podaci o prodaji automobila u jednom autosalonu u prvoj polovini 2006. godine. Svaki nacrtani automobil  predstavlja 10 prodanih automobila. Nacrtajte pripadajuću tablicu i popunite ju te dopunite sljedeće rečenice:



U veljači je u autosalonu prodano ____ automobila, a u travnju njih ____. U mjesecu _________ prodano je najviše automobila, a u mjesecu _________ najmanje automobila.

Opet imamo **piktogram** ili **slikovni dijagram!**

CRTANJE DIJAGRAMA (12)

Rješenje.

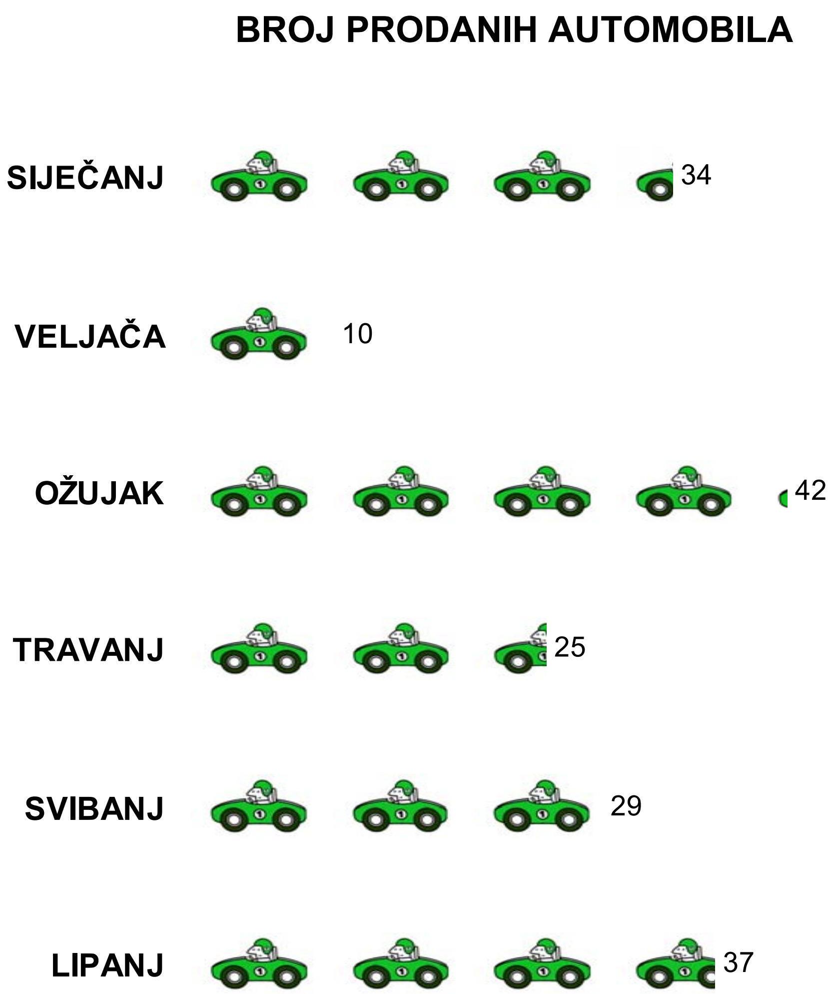
Iz piktograma se može **procijeniti** broj prodanih automobila u svakom mjesecu.
Učenike treba pustiti da podatke procijene samostalno!
U donjoj tablici dani su točni podaci (na temelju kojih je nacrtan piktogram).

MJESEC	SIJEČANJ	VELJAČA	OŽUJAK	TRAVANJ	SVIBANJ	LIPANJ
BROJ PRODANIH AUTOMOBILA	34	10	42	25	29	37

NAJLOŠIJA PRODAJA

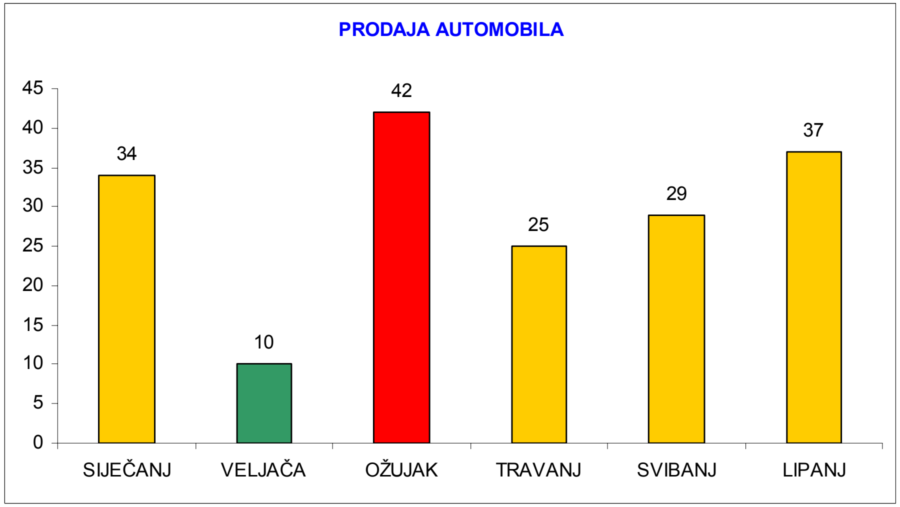
NAJBOLJA PRODAJA

CRTANJE DIJAGRAMA (13)

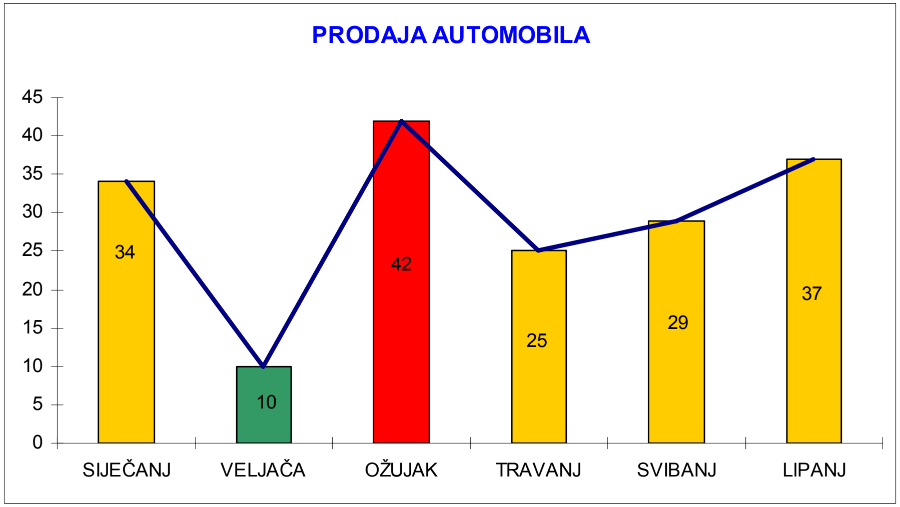


CRTANJE DIJAGRAMA (14)

Još neki prikladni grafički prikazi



STUPČASTI DIJAGRAM



MJEŠOVITI
STUPČASTO - LINIJSKI
DIJAGRAM

ANALIZA PODATAKA

Primjer 5. Imaju li Japanci dovoljno šuma?!

Japan je poznat kao zeleno otočje, što znači da je bogat šumom. Što mislite, je li ta tvrdnja točna usporedimo li podatke o pošumljenim površinama u Japanu, SAD i Francuskoj?! Poredajte države s obzirom na "dovoljnost" šuma.

	POVRŠINA POD ŠUMOM U km^2
JAPAN	247282
SAD	2651880
FRANCUSKA	145940

ANALIZA PODATAKA (2)

JAPAN

FRANCUSKA

ANALIZA PODATAKA (3)

SAD

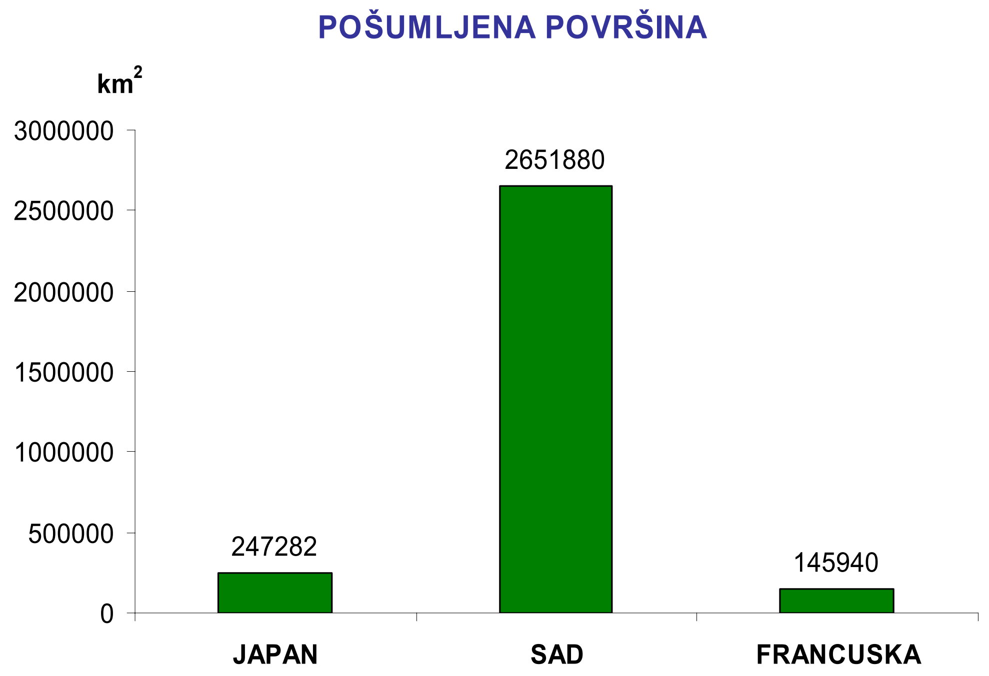
ANALIZA PODATAKA (4)

Rješenje.

Uočimo: Japan nema najviše šuma od ove tri zemlje!

S druge strane: Budući da je Japan mala zemlja, gotovo bi cijeli mogao biti pod šumama!

Učenici trebaju uočiti da sami podaci o pošumljenim površinama nisu dovoljni za razumijevanje problema!



ANALIZA PODATAKA (5)

Učenici trebaju pronaći (npr. putem interneta) dodatne podatke o navedenim državama, i prezentirati ih u obliku tablice.

Dajemo primjer dodatnih podataka!

	UKUPNA POVRŠINA U km^2	POVRŠINA POD ŠUMOM U km^2	STANOVNIŠTVO
JAPAN	372313	247282	119259000
SAD	9372614	2651880	233700000
FRANCUSKA	547026	145940	54346000

Uz ove podatke pitanje možemo postaviti opet:

Imaju li Japanci dovoljno šuma? Usporedite podatke o dane tri zemlje i poredajte ih prema dovoljnosti šuma.

ANALIZA PODATAKA (6)

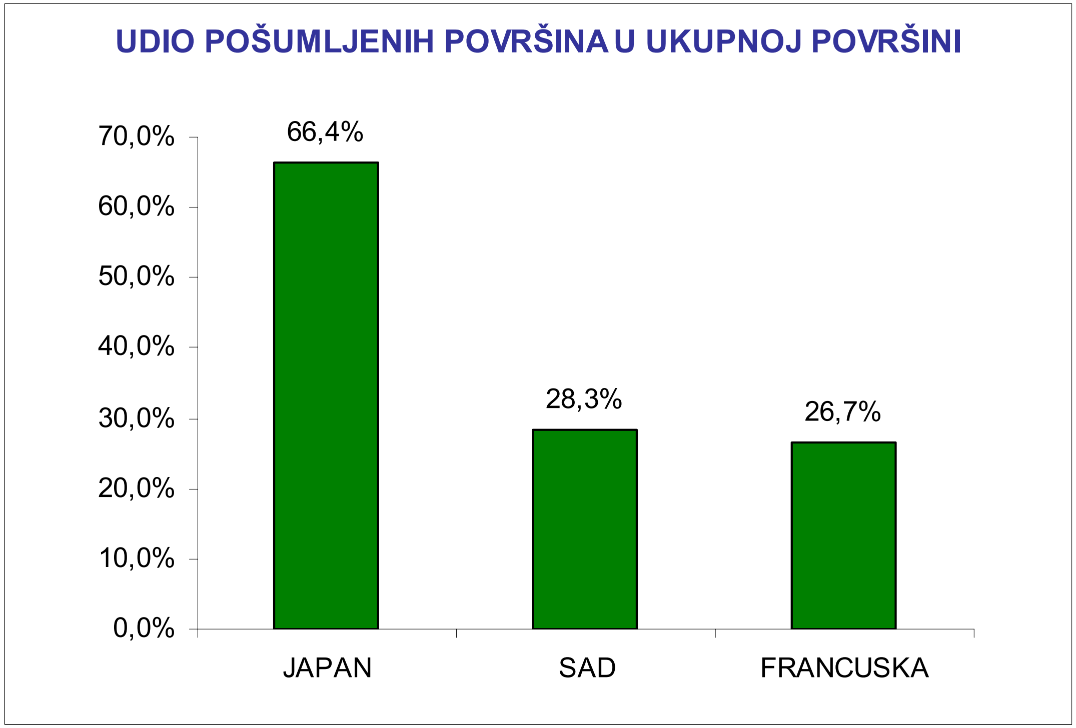
Prvi kriterij: usporedba s obzirom na udio pošumljene u ukupnoj površini

	UKUPNA POVRŠINA U km^2	POVRŠINA POD ŠUMOM U km^2	UDIO ŠUMA U UKUPNOJ POVRŠINI	UDIO NEPOŠUMLJENOG U UKUPNOJ POVRŠINI
JAPAN	372313	247282	66,4%	33,6%
SAD	9372614	2651880	28,3%	71,7%
FRANCUSKA	547026	145940	26,7%	73,3%

ANALIZA PODATAKA (7)

Poredak država prema prvom kriteriju:

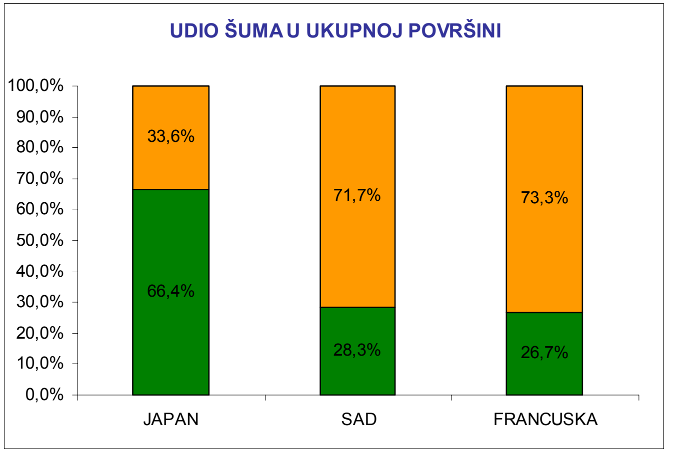
Japan (najbolji), SAD, Francuska

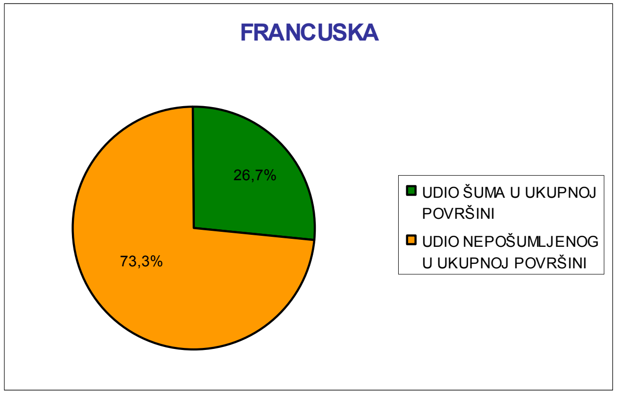


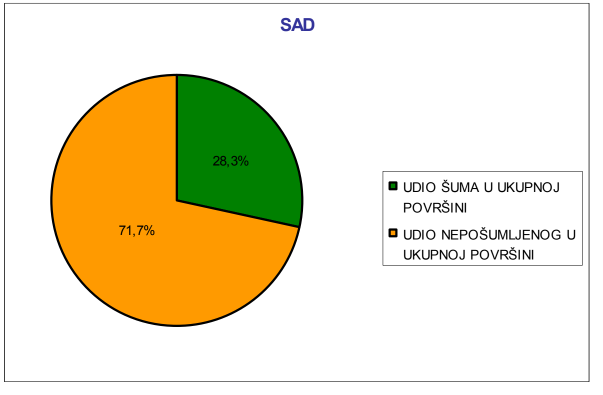
ANALIZA PODATAKA (8)

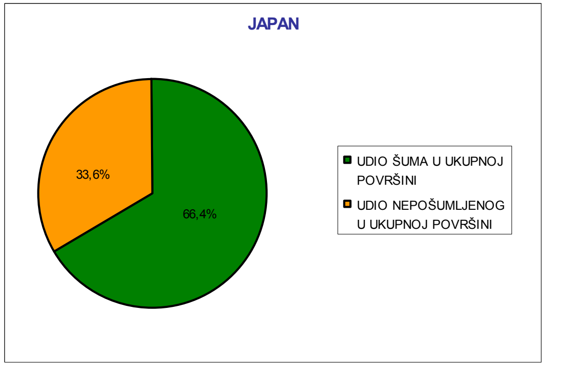
Usporedba prema prvom kriteriju:

još neki pogodni grafički prikazi









ANALIZA PODATAKA (9)

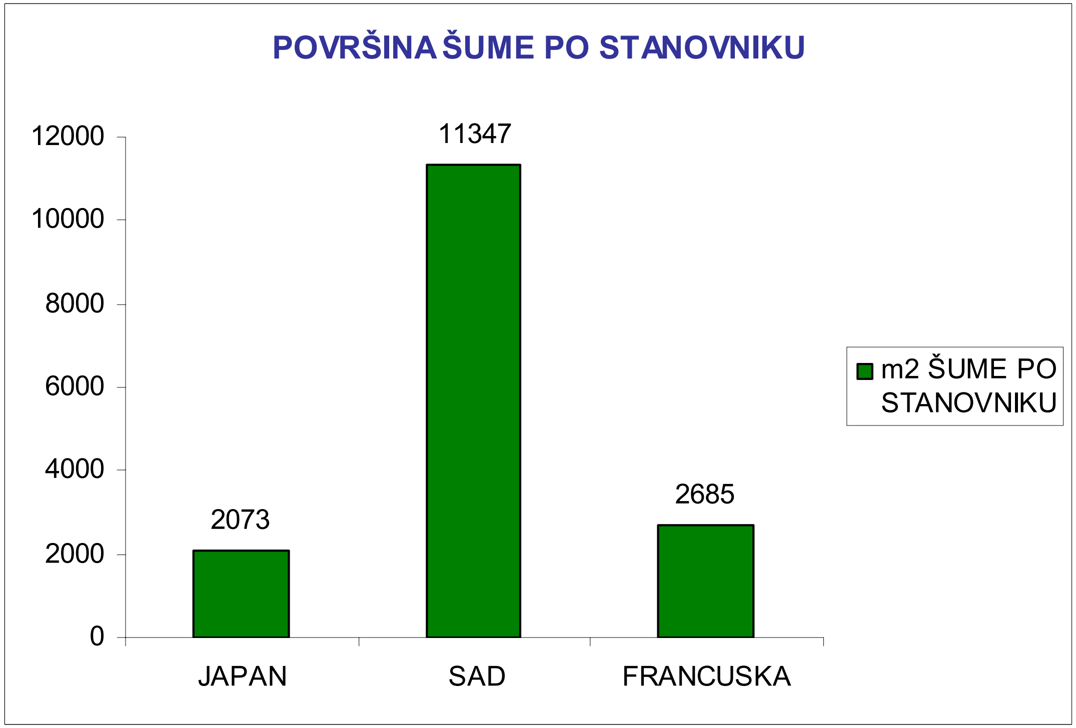
Drugi kriterij: usporedba s obzirom na pošumljenu površinu po stanovniku

	POVRŠINA POD ŠUMOM U km^2	STANOVNIŠTVO	m^2 ŠUME PO STANOVNIKU
JAPAN	247282	119259000	2073
SAD	2651880	233700000	11347
FRANCUSKA	145940	54346000	2685

ANALIZA PODATAKA (10)

Poredak država prema prvom kriteriju:

SAD (najbolji), Francuska, Japan

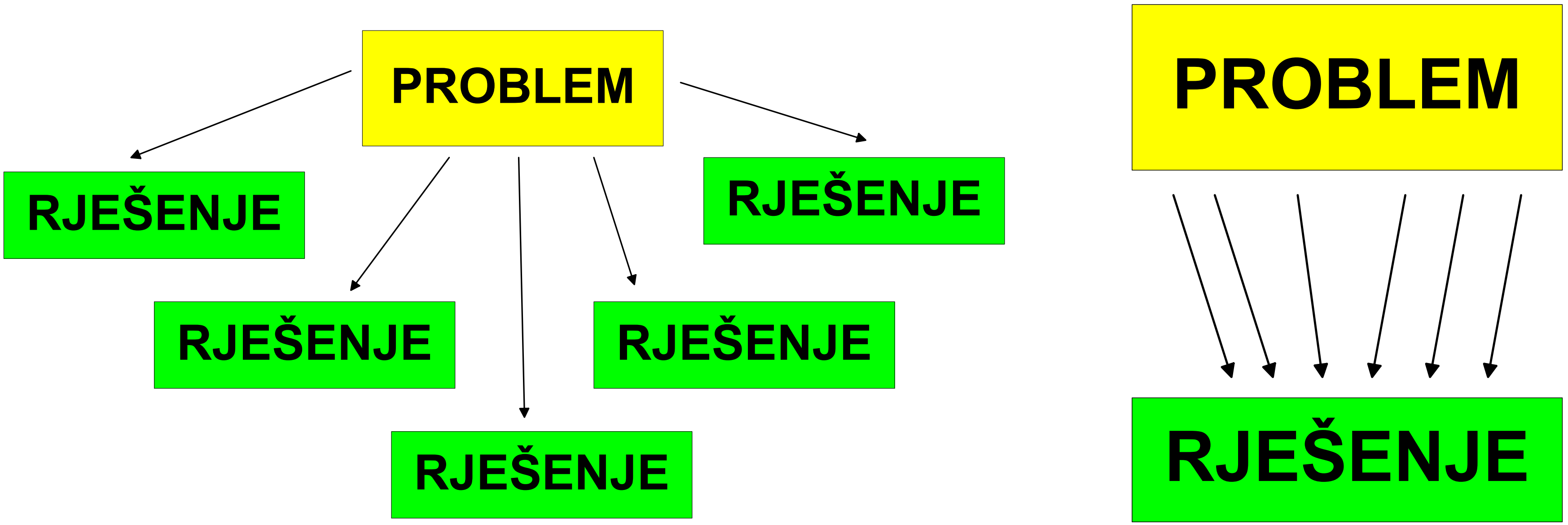


ANALIZA PODATAKA (11)

- Učenici mogu osmisliti i neke svoje, drukčije kriterije prema kojima će poredati ove tri države.
- Učitelj(ica) uspoređuje učenička rješenja i u njima otkriva ideje koje stoje iza njihovog načina razmišljanja.
- Važno je da učenici razumiju proces dolaska do rješenja i razloge zašto su se u diskusiji pojavila različita rješenja.
- Učitelj(ica) usustavljuje sve ideje za rješavanje ovog problema koje su predložili učenici.
- Domaća zadaća: Svaki učenik neka napiše kratki esej o tome što je naučio na ovom satu.

NAPOMENA: Ovo je primjer **zadatka otvorenog tipa** !

PROBLEM (ZADATAK) OTVORENOG TIPA je problemski zadatak koji ima više (nekoliko ili mnogo) rješenja i/ili više načina rješavanja.



STUPČASTI DIJAGRAM - SKALIRANJE

Primjer 6.

Sljedeća tablica prikazuje prosječnu godišnju plaću u kompaniji KOMPA d.o.o. u zadnjih 15 godina. Novinari Podnevnog lista zamolili su gđu Kompić, predsjednicu uprave ove kompanije, da za njihovu poslovnu kolumnu pripremi stupčasti dijagram koji prikazuje ove podatke. Da ste gđa Kompić, kako biste postavili vertikalnu skalu na dijagramu da naglasite:

(a) da prosječna plaća u kompaniji raste,

(b) stabilnost kompanije?

Kako biste vertikalnu skalu postavili da ste nepristrani novinar koji želi što preciznije prikazati promjenu prosječne plaće u kompaniji KOMPA d.o.o?

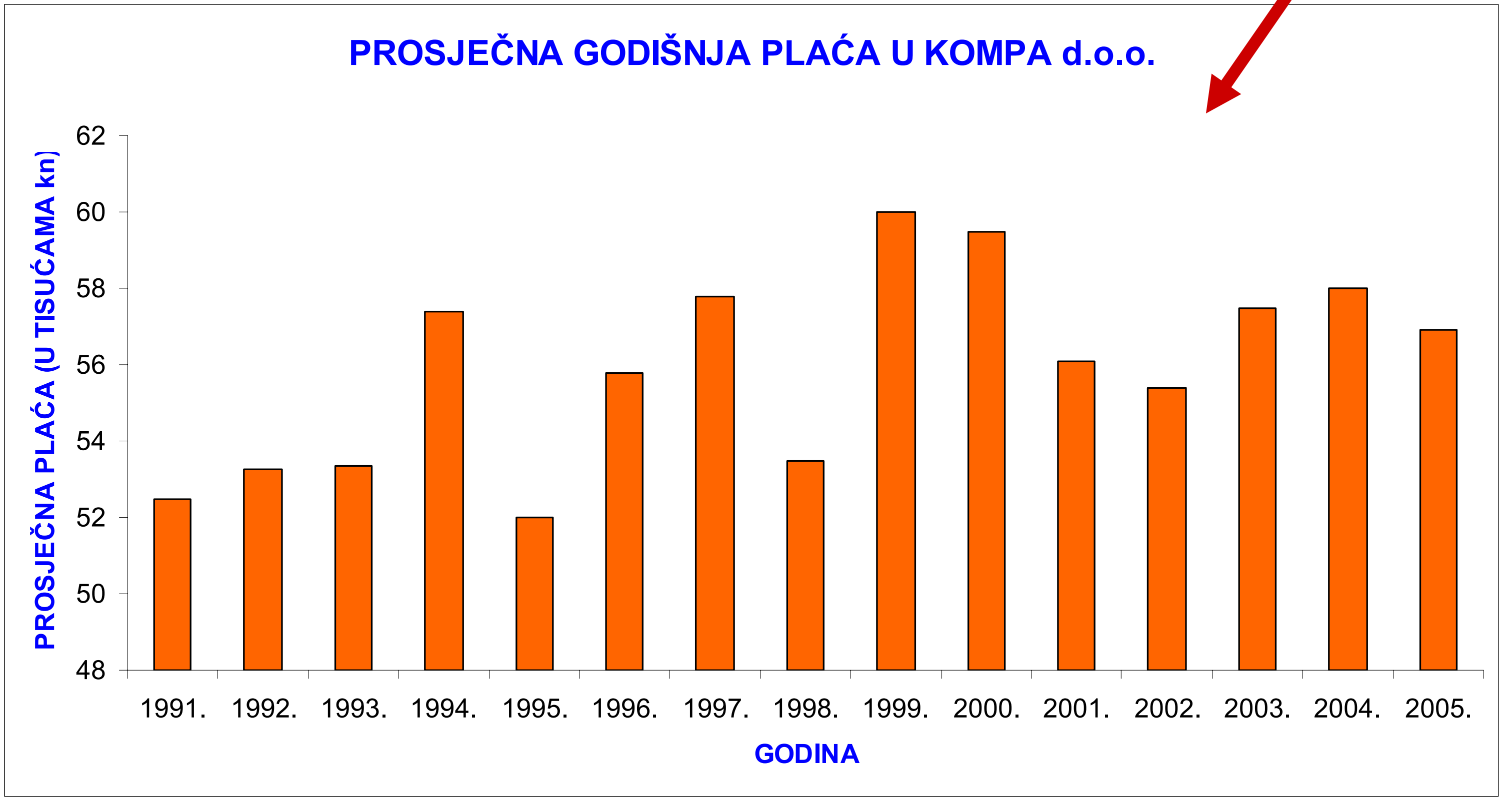
GODINA	PLAĆA (u tisućama kn)	GODINA	PLAĆA (u tisućama kn)	GODINA	PLAĆA (u tisućama kn)
1991.	52,5	1996.	55,8	2001.	56,1
1992.	53,25	1997.	57,8	2002.	55,4
1993.	53,35	1998.	53,48	2003.	57,5
1994.	57,4	1999.	60	2004.	58
1995.	52	2000.	59,5	2005.	56,9

STUPČASTI DIJAGRAM – SKALIRANJE (2)

Rješenje.

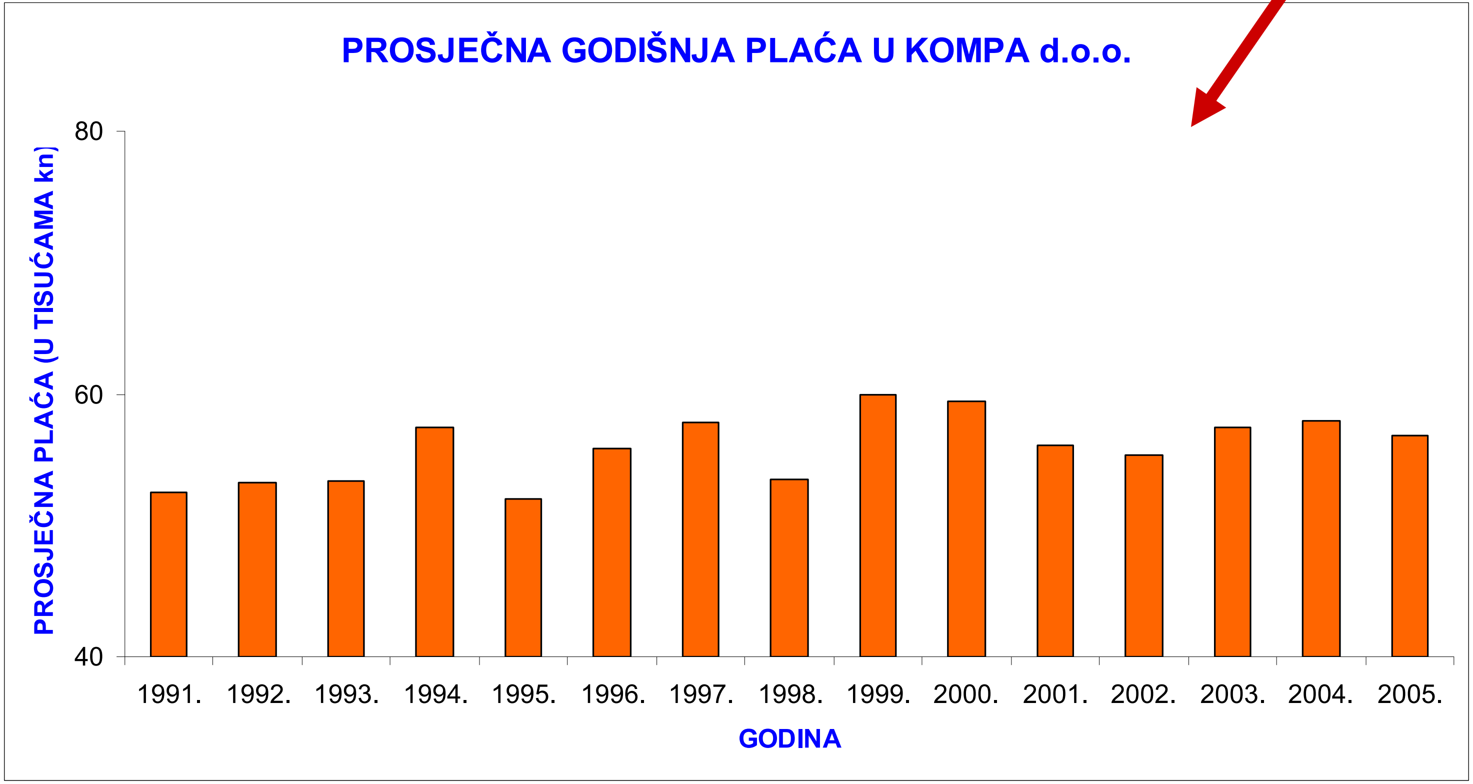
Vertikalnu skalu prilagođavamo zahtjevu.

dijagram nepristranog novinara („bez namještanja")



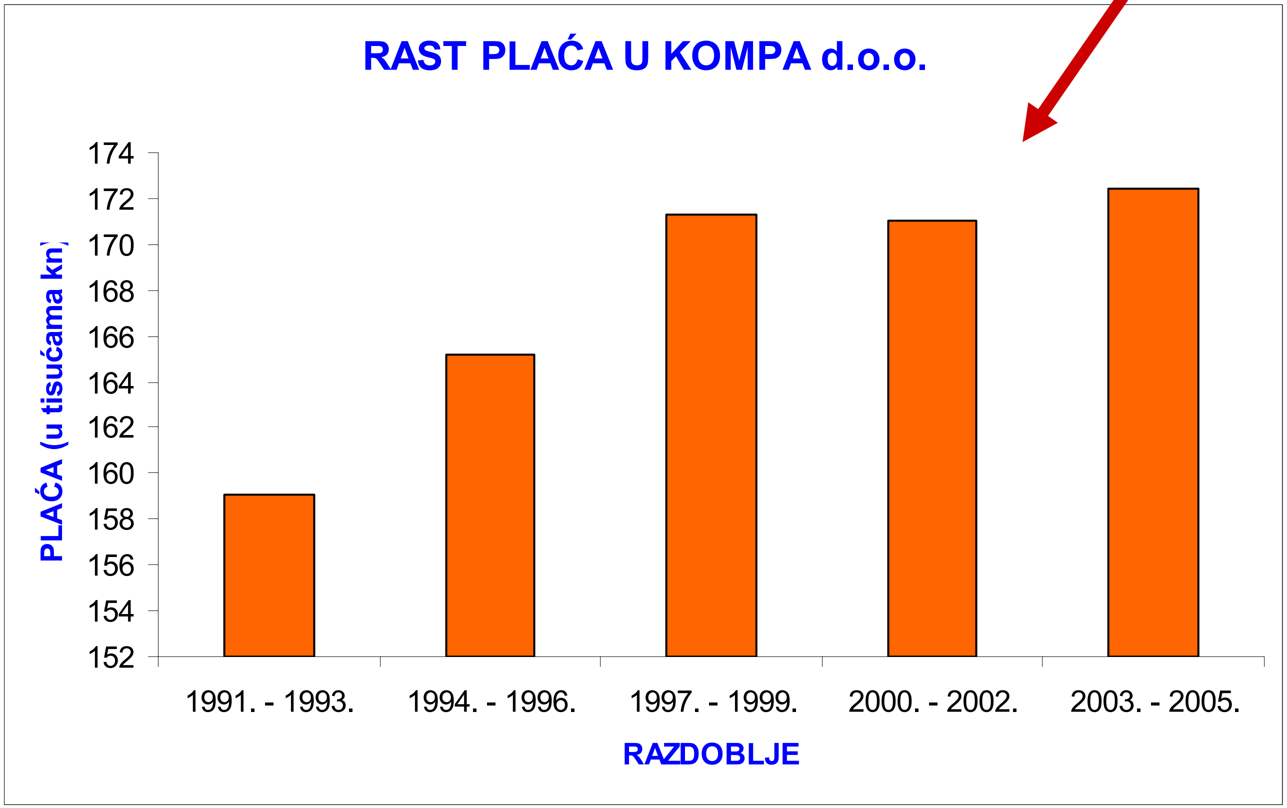
STUPČASTI DIJAGRAM – SKALIRANJE (3)

vertikalno skaliranje smanjuje razlike u visinama (stabilnost kompanije)



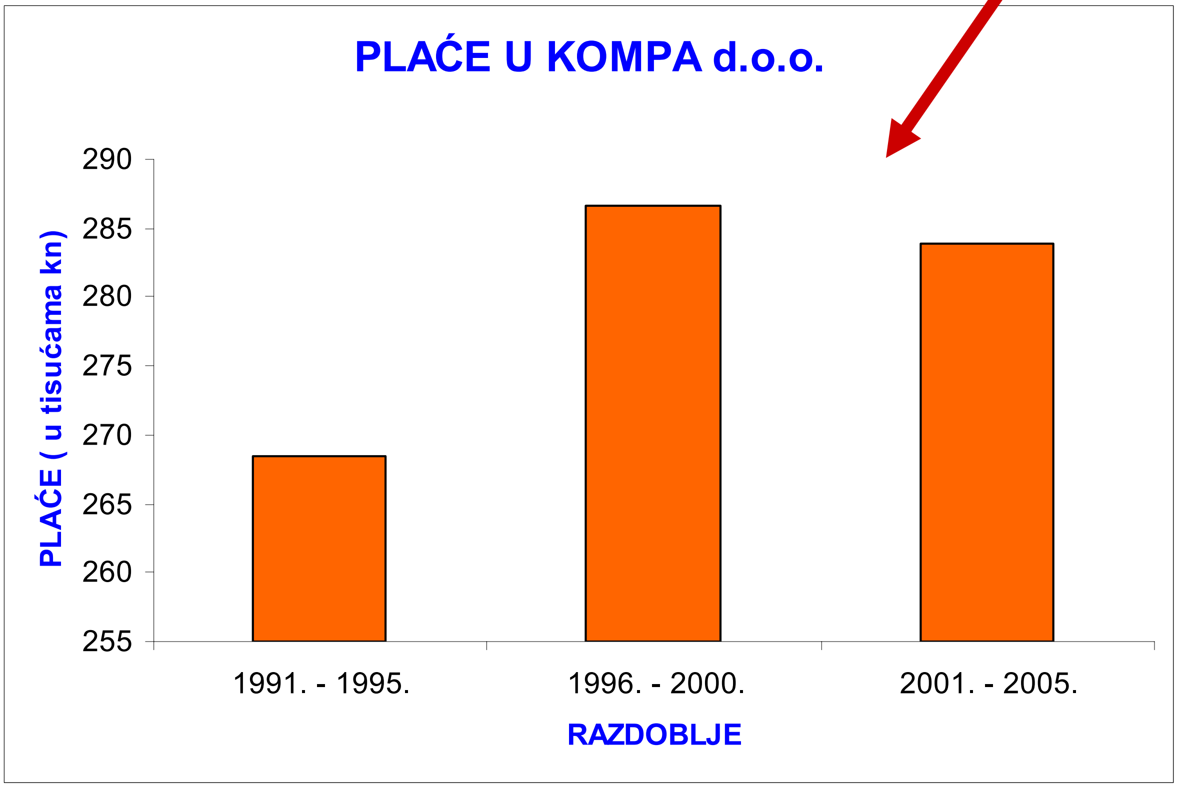
STUPČASTI DIJAGRAM – SKALIRANJE (4)

ovako plaće rastu (grupiranje podataka)



STUPČASTI DIJAGRAM – SKALIRANJE (5)

nije baš svako grupiranje poželjno



STUPČASTI DIJAGRAM – MANIPULIRANJE PODACIMA

Primjer 7.

Policijska uprava jedne županije želi pokazati efikasnost primjene zakona o sigurnosti u prometu (odredba o 0.0 promila). Kako da prikaže prikupljene podatke?

MJESEC	BROJ NESREĆA POD UTJECAJEM ALKOHOLA	MJESEC	BROJ NESREĆA POD UTJECAJEM ALKOHOLA
siječanj	2	srpanj	5
veljača	1	kolovoz	4
ožujak	1	rujan	1
travanj	3	listopad	2
svibanj	4	studeni	1
lipanj	5	prosinac	3

STUPČASTI DIJAGRAM – MANIPULIRANJE PODACIMA (2)

Rješenje.

Neke od mogućnosti su:

- skaliranje vertikalne osi
- grupiranje podataka (podaci po npr. tromjesečjima)
- prikazivanje selekcije podataka (npr. podatke za svaki treći mjesec)

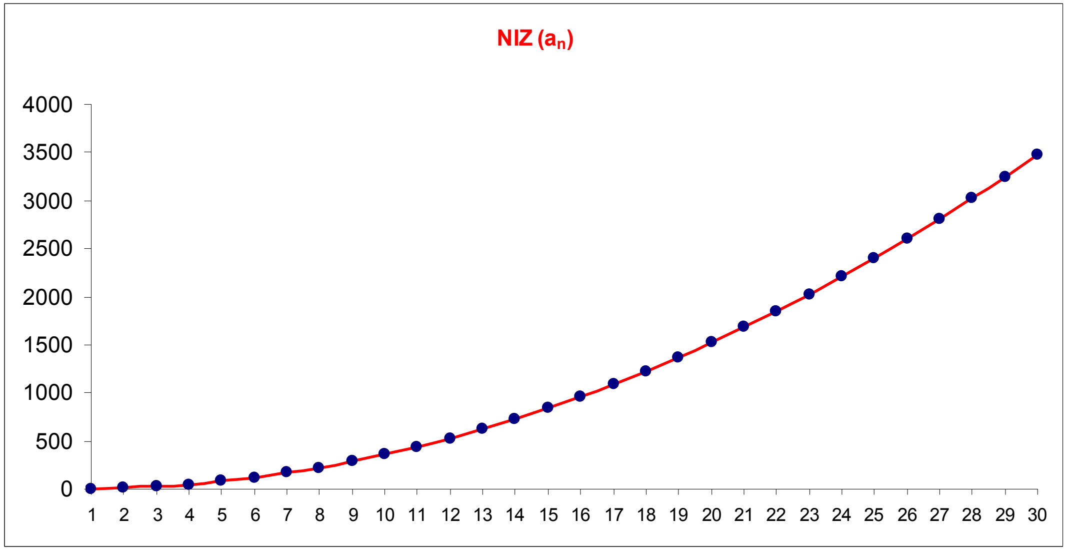
NIZOVI

Primjer 8.

Istražite niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *zadan* sa $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$, $n \in \mathbf{N}$, i prikažite ga grafički. Odredite eksplicitni izraz za a_n.

Rješenje.

$$a_{n+1} = (2n - 1)^2, \text{ n} = 1, 2, \dots .$$



NIZOVI (2)

Primjer 8. - nastavak

Odredite niz prvih i drugih podijeljenih razlika niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Što primjećujete?

Rješenje.

Dan je niz parova podataka $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots , n$. Niz prvih podijeljenih razlika dan je sa $(x_i, f\,[x_i, x_{i+1}])$, $i = 1, \ldots , n - 1$, gdje je

$$f\left[x_i , x_{i+1}\right] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Niz drugih podijeljenih razlika dan je sa $(x_i, f\,[x_i, x_{i+1}, x_{i+1}])$, $i = 1, \ldots , n - 2$, gdje je

$$f\left[x_i , x_{i+1}, x_{i+2}\right] = \frac{f\left[x_{i+1} , x_{i+2}\right] - f\left[x_i , x_{i+1}\right]}{x_{i+2} - x_i}.$$

NIZOVI (3)

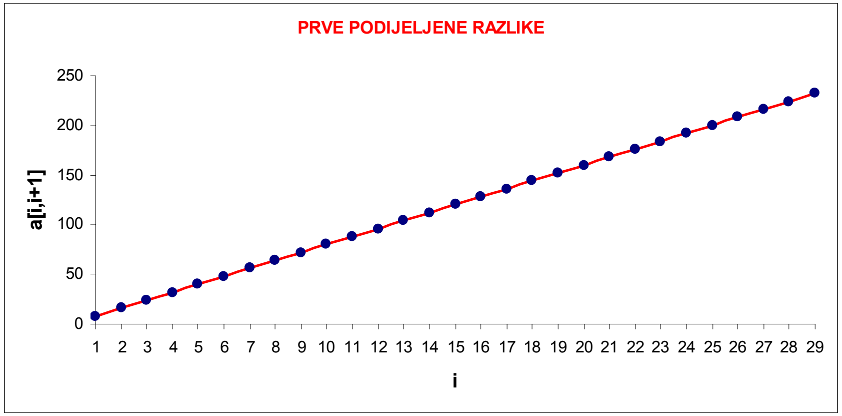
U našem je slučaju niz podataka (i, a_i), i = 1, 2, ...

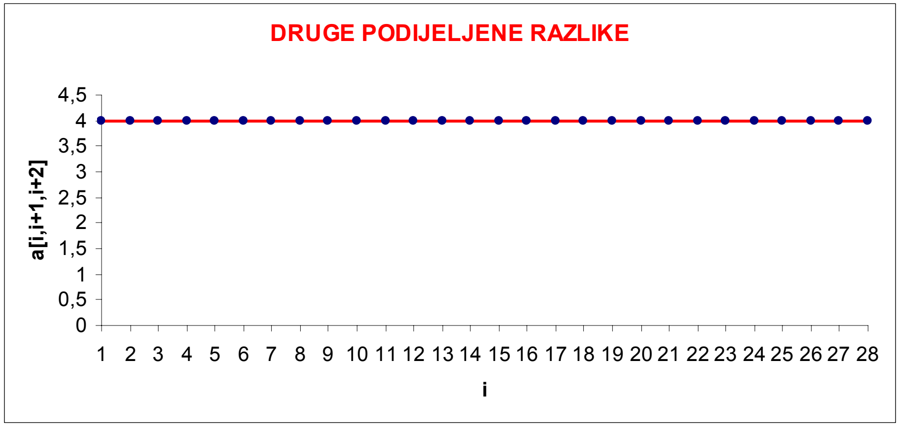
Prve podijeljene razlike:

$$a[i_i, i+1] = a_{i+1} - a_i.$$

Druge podijeljene razlike:

$$a[i_i, i+1, i+2] = \frac{a[i+1, i+2] - a[i, i+1]}{2}.$$





NIZOVI (4)

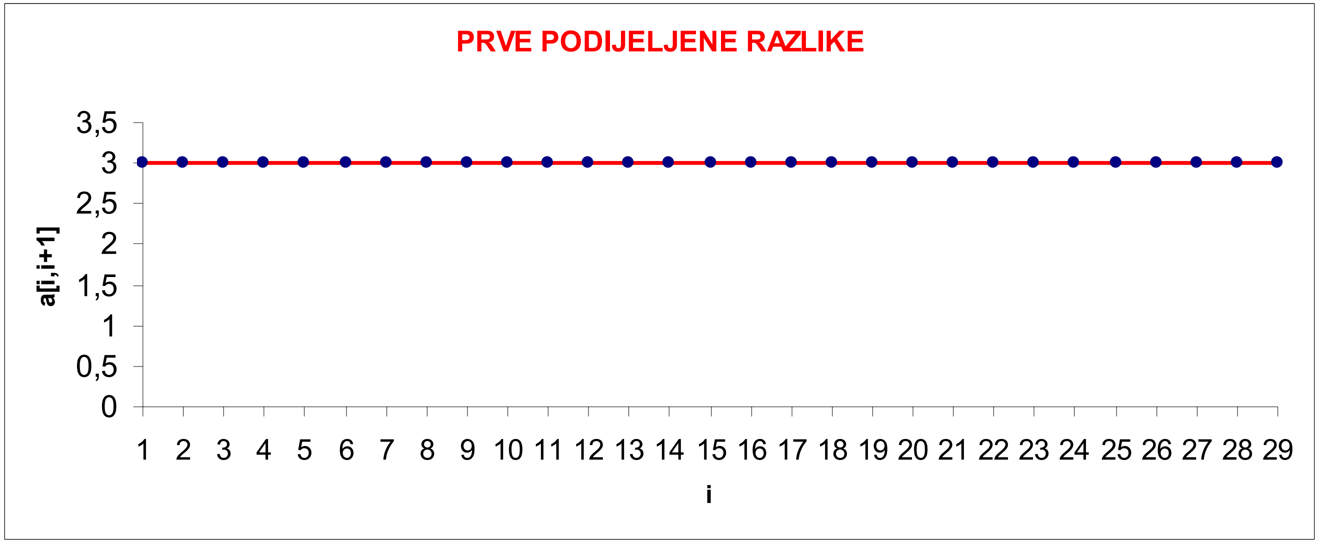
Primjer 9.

Istražite niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *zadan* sa $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \in \mathbf{N}$, i prikažite ga grafički. Odredite eksplicitni izraz za a_n.

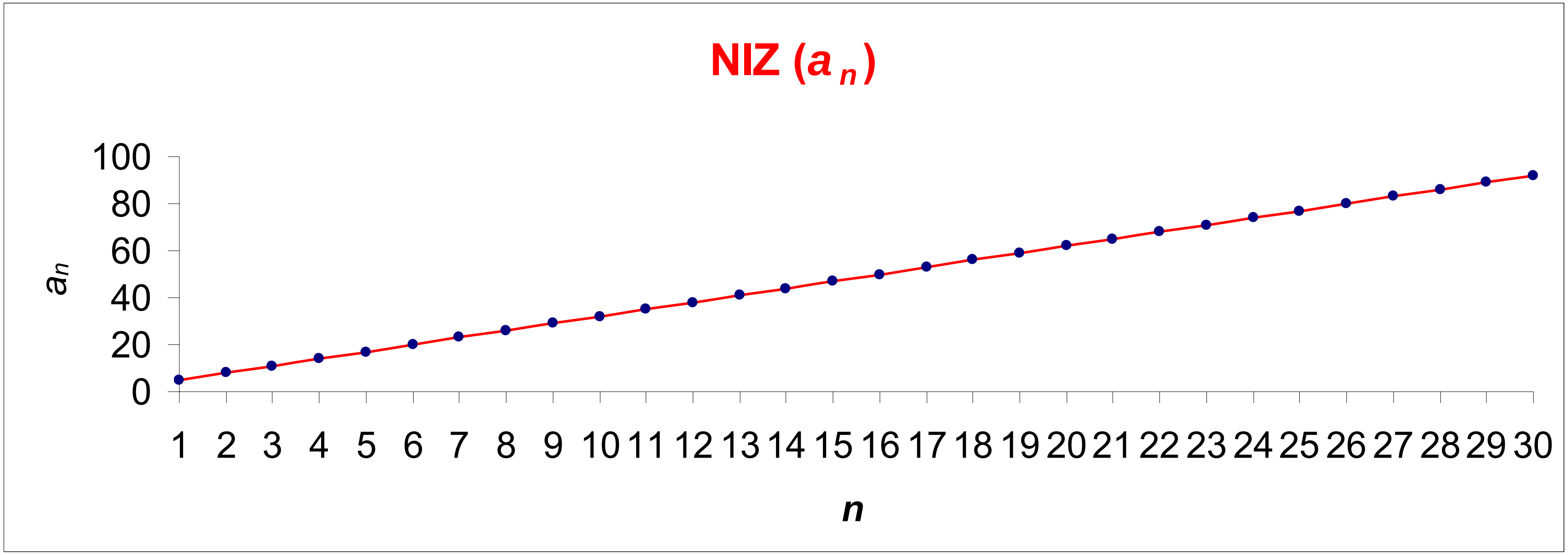
Rješenje.

Pogledajmo niz prvih podijeljenih razlika. Zaključujemo: niz ima linearni rast.

$$a_n = 3n + 2,\ \mathrm{n} = 1, 2, \ldots .$$



NIZOVI (5)



NIZ (a_n)
100
80
60
40
20
0
a_n
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
n

NIZOVI (6)

Primjer 10.

Istražite sljedeće nizove $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

(a) $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}, n = 1, 2, \ldots$

(b) $a_n = \dfrac{3-n^2}{n^2+1}, n = 1, 2, \ldots$

(c) $a_n = \dfrac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n}, n = 1, 2, \ldots$

(d) $a_n = \dfrac{\sin^2(n+2)}{n}, n = 1, 2, \ldots$

(e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}, n = 1, 2, \ldots$

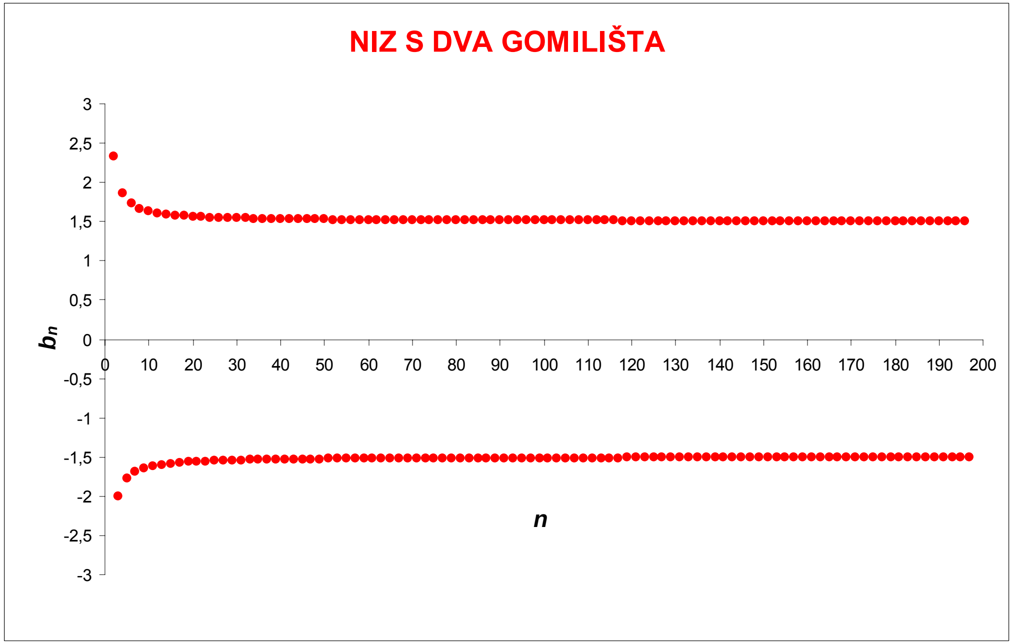
NIZOVI (7)

Primjer 11.

U prethodnom primjeru promatrali smo niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadan sa $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1},\ n = 1, 2, \ldots$

Od njega smo napravili niz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s dva gomilišta, 1.5 i -1.5, kao

$$b_n = (-1)^n \frac{3n+1}{2n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$



NIZOVI (7)

Pomoću istog niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ kreirajte niz sa:

(a) tri

(b) četiri

(c) deset

gomilišta.

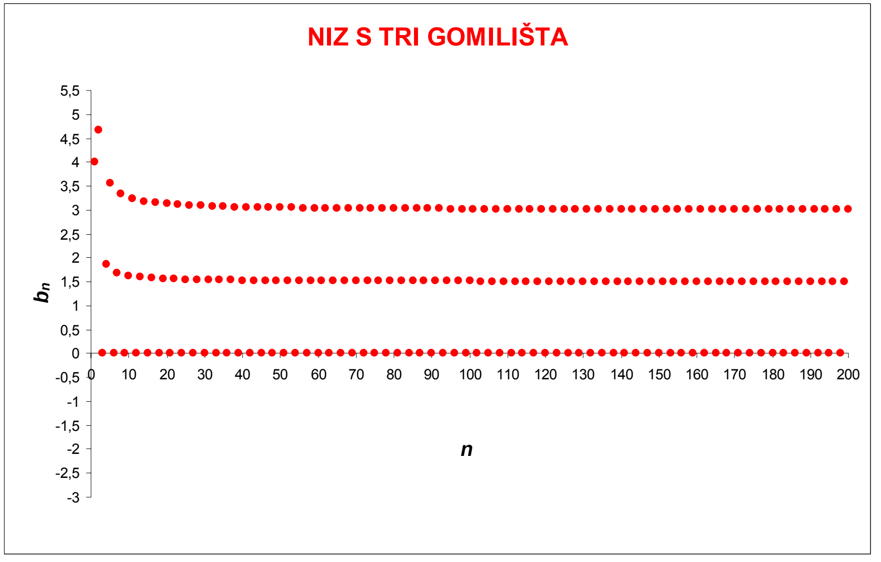
Rješenje.

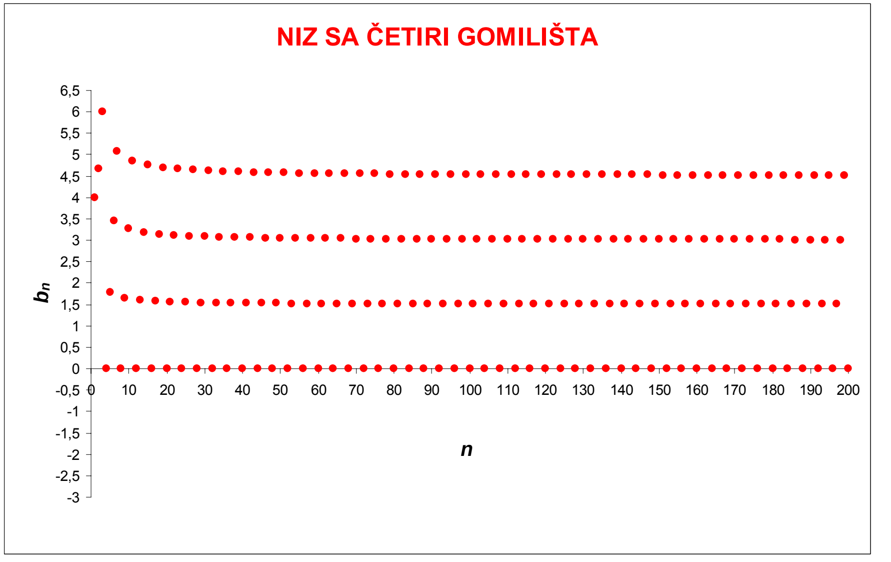
(a) $b_n = \dfrac{3n+1}{2n-1} \cdot (n \bmod 3)$, $n = 1, 2, \ldots$

(b) $b_n = \dfrac{3n+1}{2n-1} \cdot (n \bmod 4)$, $n = 1, 2, \ldots$

(c) $b_n = \dfrac{3n+1}{2n-1} \cdot (n \bmod 10)$, $n = 1, 2, \ldots$

NIZOVI (8)


NIZ S TRI GOMILIŠTA
b_n
n
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200


NIZ SA ČETIRI GOMILIŠTA
b_n
n
6,5
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200


NIZ SA DESET GOMILIŠTA
b_n
n
7,5
7
6,5
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
-3,5
-4
-4,5
-5

NIZOVI (9)

Primjer 12.

Proučite niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, zadan sa $x_{n+1} = kx_n^2 - 1,\ n = 1, 2, \ldots$ za različite $k \in [1,\ 2]$.

Rješenje.

Uzmite npr. $x_1 = 0.4$. Što primjećujete za različite k?

Primjer 13.

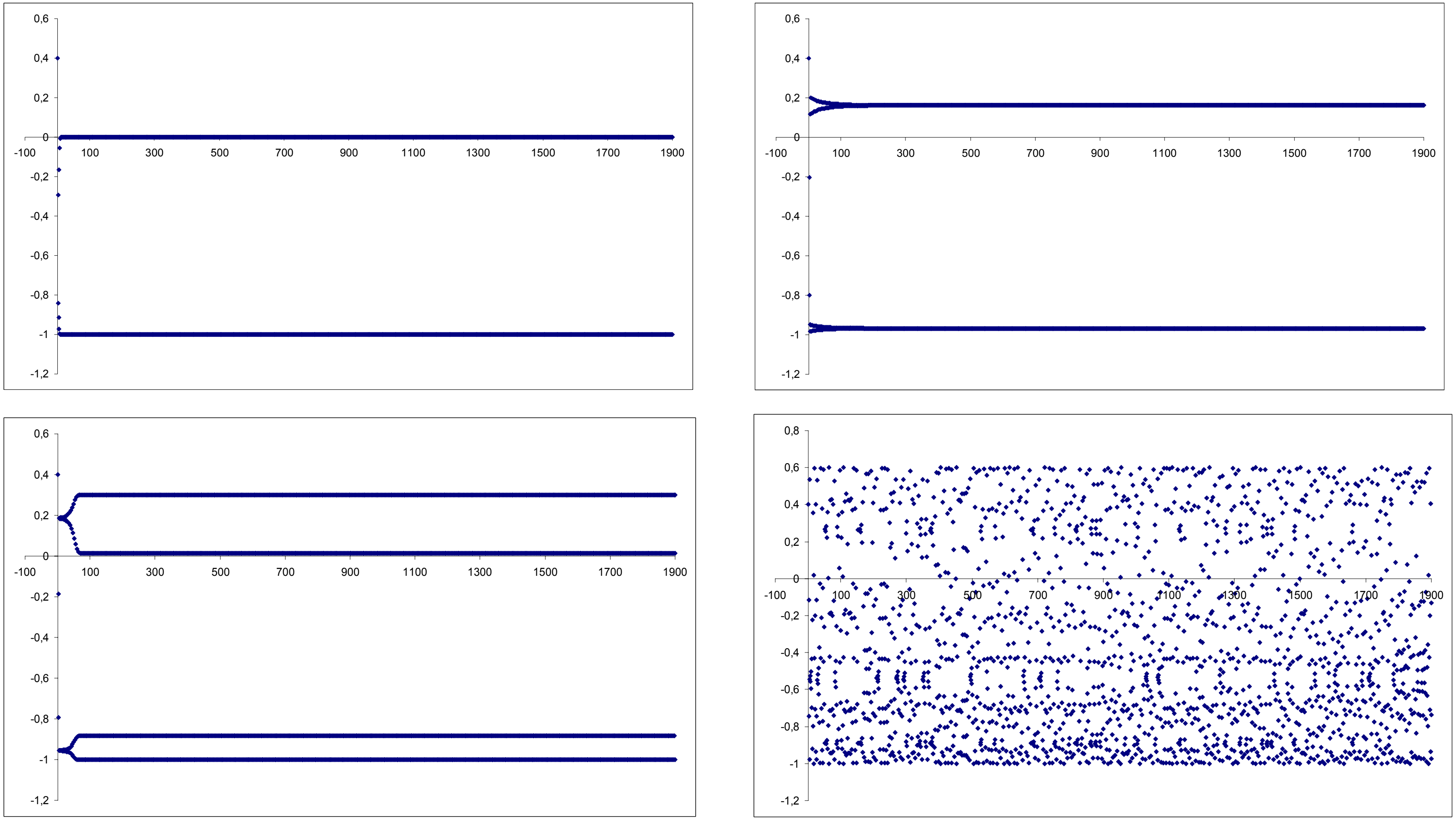
Proučite niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, zadan sa $x_{n+1} = kx_n(1 - x_n),\ n = 1, 2, \ldots$ za različite $k \in [1,\ 4]$.

Rješenje.

Uzmite npr. $x_1 = 0.4$. Što primjećujete za različite k?

NIZOVI (10)

Primjer 12. - kaotično ponašanje niza



PASCALOV TROKUT

Primjer 14. Pascalov trokut

(a) Generirajte prvih 100 redova Pascalovog trokuta.

(b) Iz dobivenog Pascalovog trokuta generirajte novi trokut u kojem se na mjestima članova Pascalovog trokuta nalaze njihovi ostatci pri dijeljenju s 3. Sve članove novog trokuta koji su jednaki 0 sakrijte (tj. obojite bijelom bojom). Što primjećujete?

(c) Što dobivamo sakrijemo li umjesto nula samo jedinice, a što sakrijemo li samo dvojke?

(d) Vrijedi li isto i za trokut ostataka pri dijeljenju sa 7? Što je s trokutima drugih ostataka?

PASCALOV TROKUT (2)

Rješenje.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

....

Pascalov trokut = trokut binomnih koeficijenata

$$\binom{n}{k}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

PASCALOV TROKUT (2)

Binomni koeficijenti = koeficijenti u razvoju po potencijama
od *a* i *b* izraza (a + b)^n

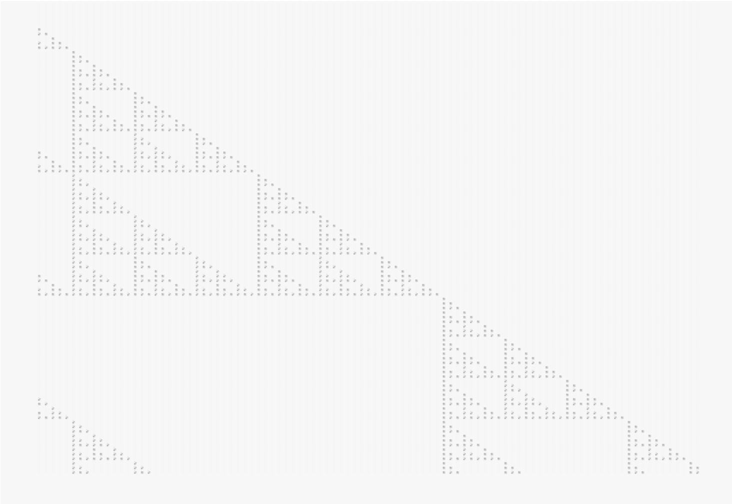
$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Vrijedi: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Dakle, imamo **dvočlanu rekurziju** za generiranje Pascalovog trokuta.

PASCALOV TROKUT (3)

1	0				
1	1	0			
1	2	1	0		
1	3	3	1	0	
1	4	6	4	1	0



FIBONACCIJEVI BROJEVI

Primjer 15. – prikladan uskršnji

Na pusti je otok donesen par novorođenih zečeva. Koliko će parova zečeva na otoku biti za godinu dana, ako par prvi podmladak dobije dva mjeseca nakon rođenja i nakon toga svakog mjeseca okoti novi par zečeva?

Rješenje.

- Problem je prvi postavio talijanski matematičar Leonardo iz Pise - Fibonacci (Bonaccijev sin = *figlio di Bonacci* = Fibonacci) u svojoj knjizi *Liber Abaci* iz 1202.
- Problem modeliramo dvočlanom rekurzijom Fibonaccijevih brojeva.
- Označimo:

F_n = broj parova zečeva na otoku na početku n – tog mjeseca

FIBONACCIJEVI BROJEVI (2)

Fibonaccijevi brojevi F_n, $n \in \mathrm{N}$

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Godina ima 12 mjeseci, dakle trebamo F_{13}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	**233**

FIBONACCIJEVI BROJEVI (3)

Primjer 16. – istražimo Fibonaccijeve brojeve

Pomoću MS Excela odredite:

(a) $F_1 + F_2 + ... + F_n$

(b) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1}$

(c) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2$

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

FIBONACCIJEVI BROJEVI (4)

Rješenje.

Dobijemo redom:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

omjer zlatnog reza

APROKSIMACIJA VERIŽNIM RAZLOMCIMA

Primjer 17.

Izračunajte približne vrijednosti sljedećih beskončnih verižnih razlomaka:

(a) $$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}$$

(b) $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

(c) $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

(d) $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\ldots}}}}}$$

APROKSIMACIJA VERIŽNIM RAZLOMCIMA (2)

Rješenje.

Osnovna ideja – krenuti računati odozdo prema gore!

(a) Dobijemo jednočlanu rekurziju $V_1 = 2$, $V_{n+1} = 2 + 1/V_n$, $n = 1, 2, \ldots$

U zadnjem koraku treba pripaziti: dodali smo 2 a treba 1!

Dakle, nakon iteracija, od rezultata treba oduzeti 1.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$

APROKSIMACIJA VERIŽNIM RAZLOMCIMA (3)

(b) Dobijemo jednočlanu rekurziju $V_1 = 1$, $V_{n+1} = 1 + 1/V_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Rješenje je omjer zlatnog reza!

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}} \approx 1.61803$$

APROKSIMACIJA VERIŽNIM RAZLOMCIMA (4)

(c) Paziti: ovdje mijenjamo vrijednost koju dodajemo u svakom koraku - ona je naizmjence 1 ili 2. Dakle, treba kreirati pomoćni niz $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jedinica i dvojki koje naizmjence dodajemo.

$$V_1 = 1,\ V_{n+1} = P_n + 1/V_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

U zadnjem koraku treba pripaziti što smo dodali (1 ili 2)!

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}$$

APROKSIMACIJA VERIŽNIM RAZLOMCIMA (5)

(d)

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}$$

Još jedan primjer:

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \ldots}}}}}}$$

MODELIRANJE SITUACIJE

Primjer 18.

Za kupovinu novog automobila Aleksandra je podigla zajam od 12000 €. Otplaćivat će ga u jednakim obrocima od 500 €, uz mjesečnu kamatu od 1.5% na neotplaćeni dio duga. Za koliko će mjeseci zajam biti otplaćen?

Proučite kako otplata duga teče za različite iznose:

(a) mjesečnog obroka,

(b) mjesečne kamate.

Što primjećujete?

MODELIRANJE SITUACIJE (2)

Jedna nova ideja:

Rješenje dobijemo jednočlanom rekurzijom.

Oznaka:

D_n = preostali dug nakon n mjeseci

$D_0 = 12000$

$D_{n+1} = D_n \cdot 1.015 - 500, \qquad n = 0,1,2...$

MODELIRANJE SITUACIJE (3)

Generalizacija:

Oznaka:

D_n = preostali dug nakon *n* mjeseci

D_0 = podignuti zajam

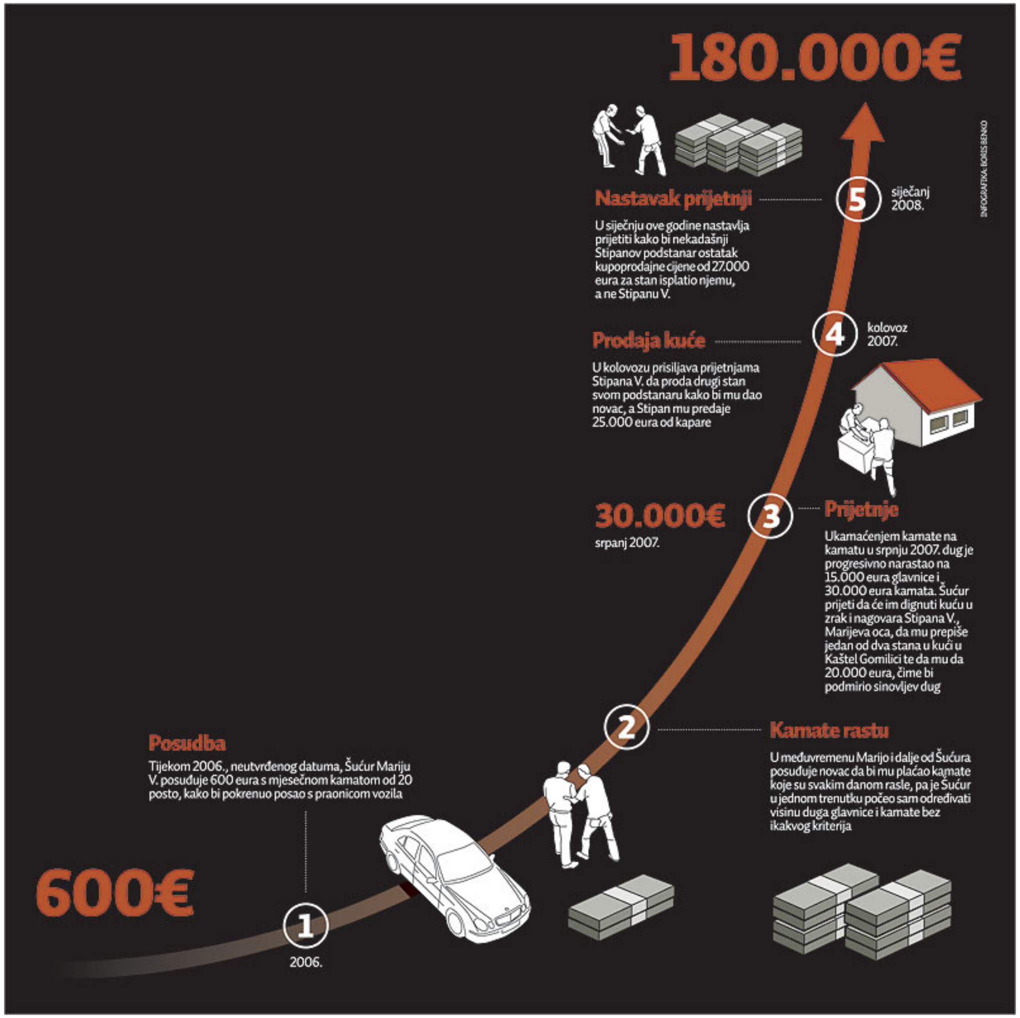
k = kamatnjak

r = mjesečni obrok

$D_{n+1} = (1+k)D_n - r, \qquad n = 0,1,2...$

MODELIRANJE SITUACIJE (4)

LIHVARSKE KAMATE!!!



MODELIRANJE SITUACIJE (5)

Primjer 19.

Telekomunikacijska tvrtka odlučila je na uzorku od 1000 korisnika isprobati svoja dva nova tarifna modela – TARIFA A i TARIFA B. Slobodnim izborom, 400 korisnika izabralo je TARIFU A, a njih 600 TARIFU B. Korisnici su tarifni model mogli slobodno promijeniti svaki tjedan. Pokazalo se da svaki tjedan 20% korisnika mijenja TARIFU A u TARIFU B, a njih 30% TARIFU B u TARIFU A. Koji će se tarifni model pokazati uspješnijim?

Analizirajte ovaj model za različite postotke prijelaza iz jedne tarife u drugu. Što primjećujete?

MODELIRANJE SITUACIJE (6)

I opet nova ideja:

Problem rješavamo sustavom od dvije jednočlane rekurzije.

Oznake:

A_n = broj korisnika TARIFE A u n-tom tjednu

B_n = broj korisnika TARIFE B u n-tom tjednu

$$A_1 = 400,\ B_1 = 600$$

$$A_{n+1} = 0.8A_n + 0.3\ B_n$$

$$B_{n+1} = 0.2\ A_n + 0.7\ B_n$$

MODELIRANJE SITUACIJE (7)

Generalizacija:

Oznake:

A_n = broj korisnika TARIFE A u n-tom tjednu

B_n = broj korisnika TARIFE B u n-tom tjednu

p_{AB} = prijelaz iz TARIFE A u TARIFU B

p_{BA} = prijelaz iz TARIFE B u TARIFU A

$A_{1,}$ B_1 su zadani

$$A_{n+1} = (1 - p_{AB})A_n + p_{BA} B_n$$

$$B_{n+1} = p_{AB}A_n + (1 - p_{BA})B_n$$

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST

Primjer 20.

Klara i Filip za domaću su zadaću dobili zadatak da 40 puta bacaju igraću kocku i za svako bacanje zabilježe koji se broj pojavio na gornjoj strani kocke. Tablica prikazuje njihove rezultate.

(a) Je li se svaki od brojeva 1, 2, ... , 6 pojavio isti broj puta?

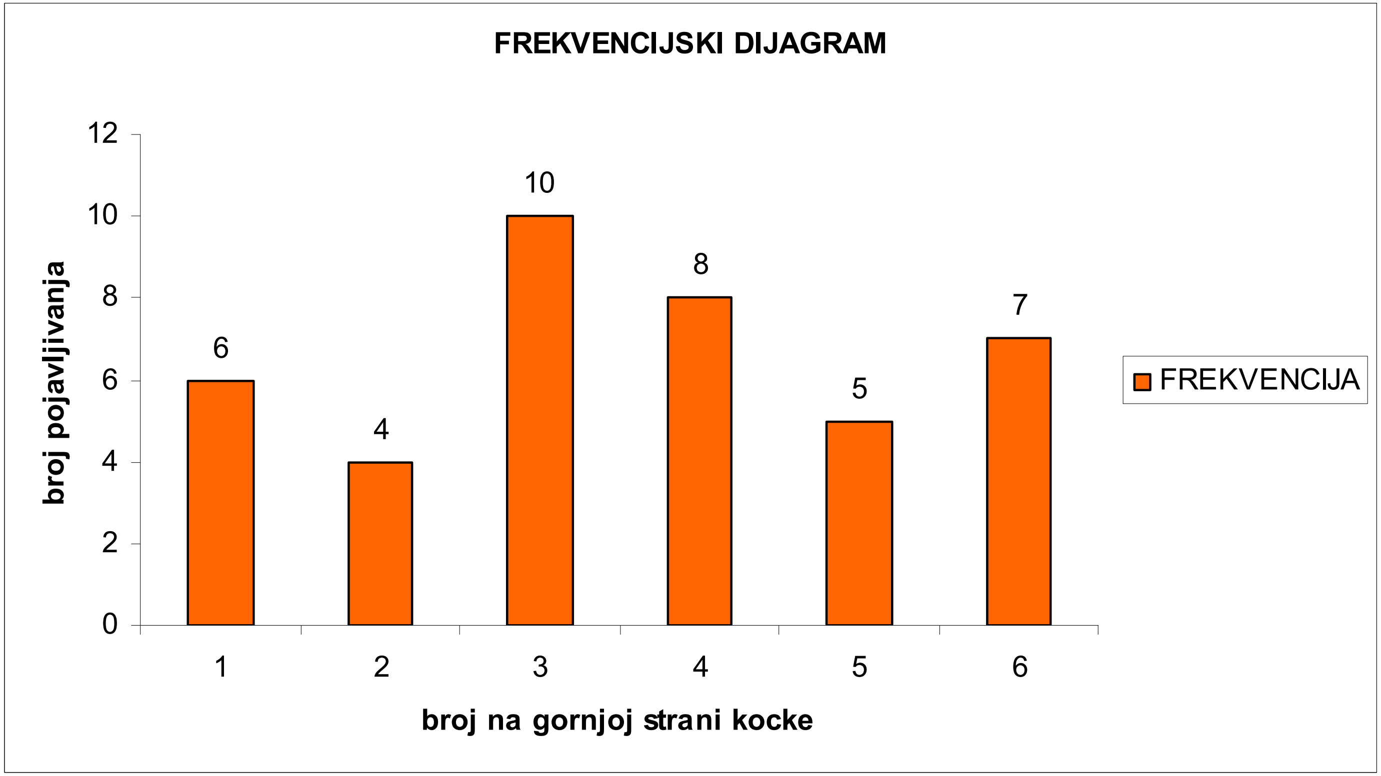
(b) Koliko se puta na gornjoj strani kocke pojavio broj 3?

(c) Nacrtajte odgovarajući dijagram za prikupljene podatke.

BROJ NA GORNJOJ STRANI KOCKE	FREKVENCIJA POJAVLJIVANJA
1	6
2	4
3	10
4	8
5	5
6	7

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (2)

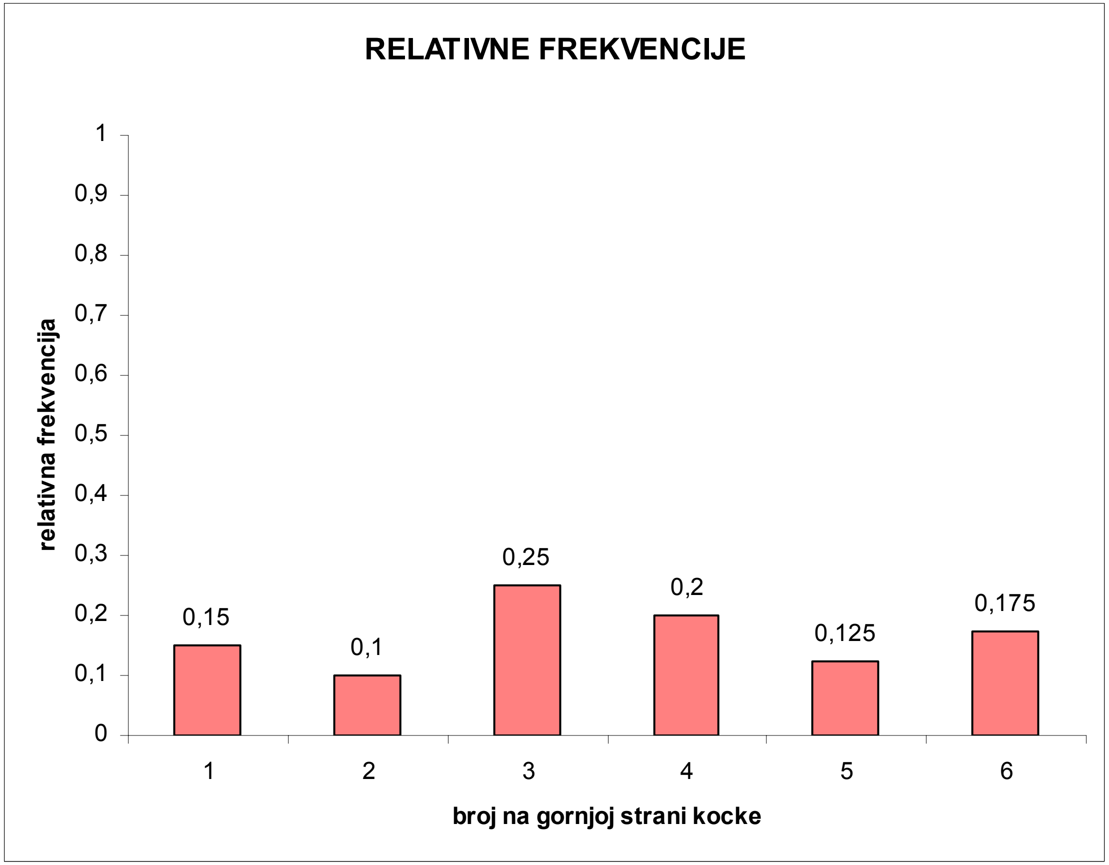
Rješenje.



Oprez! Uočite da frekvencije nisu jednake!

razlika između teorijskog i empirijskog koncepta

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (3)



MS Excel može poslužiti za lakše generiranje većeg broja slučajnih pokusa.

Ponovite ovaj slučajni pokus 1000 puta. Što primjećujete?

funkcije

RANDBETWEEN(1;6)

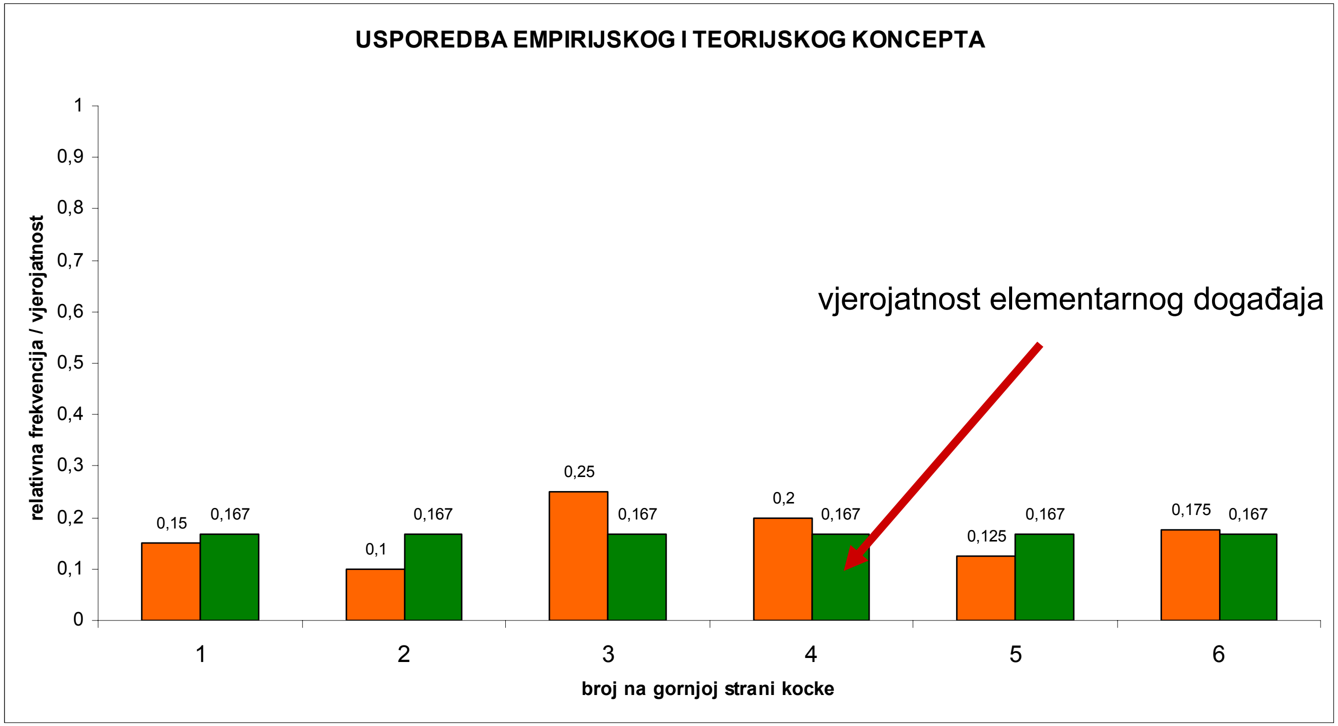
i

COUNTIF()

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (4)

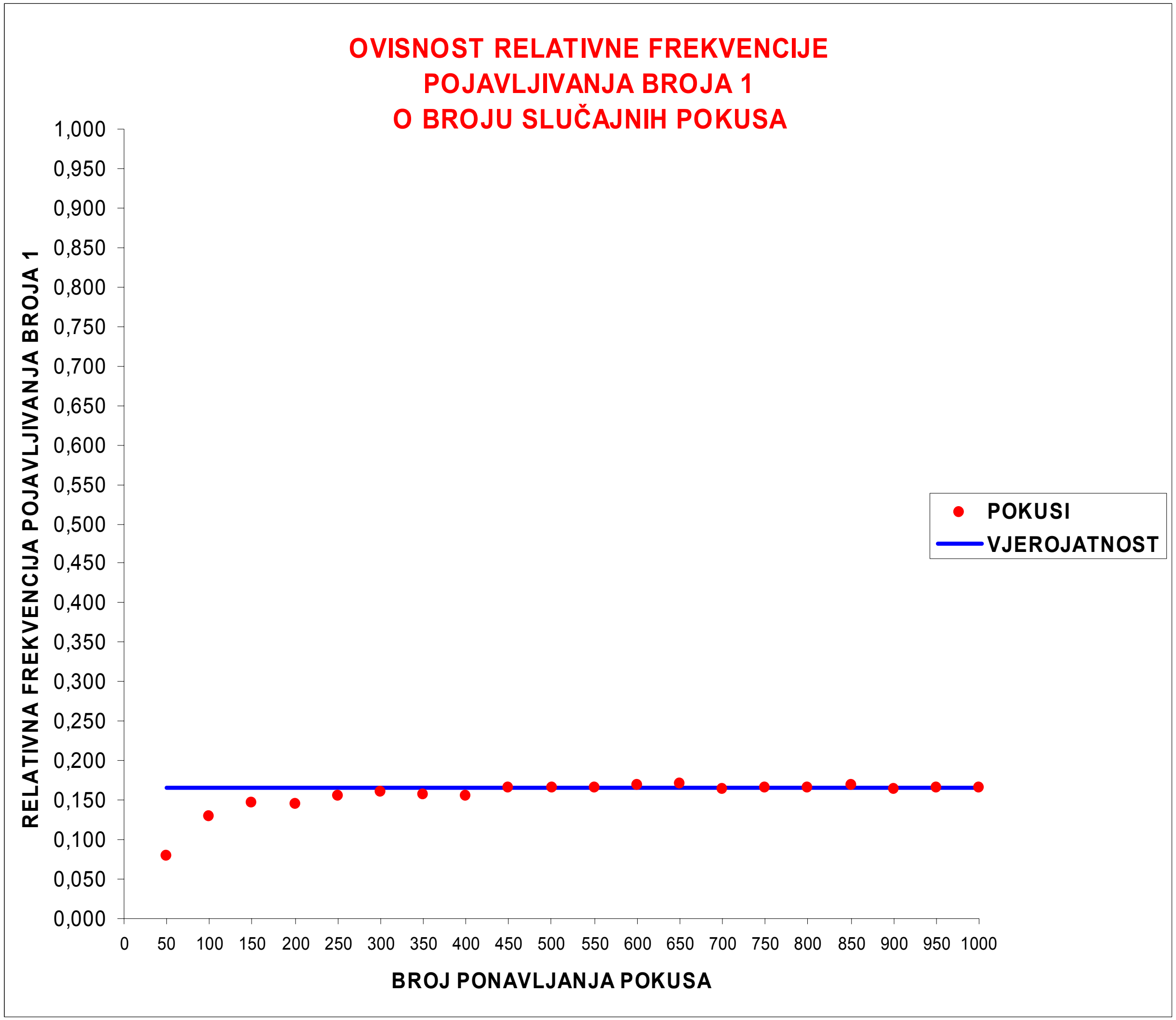
Teorijski koncept vjerojatnosti elementarnog događaja:

vjerojatnost da se na gornjoj strani kocke pojavi bilo koji od brojeva 1, 2, ..., 6 jednaka je 1/6 ≈ 0,167



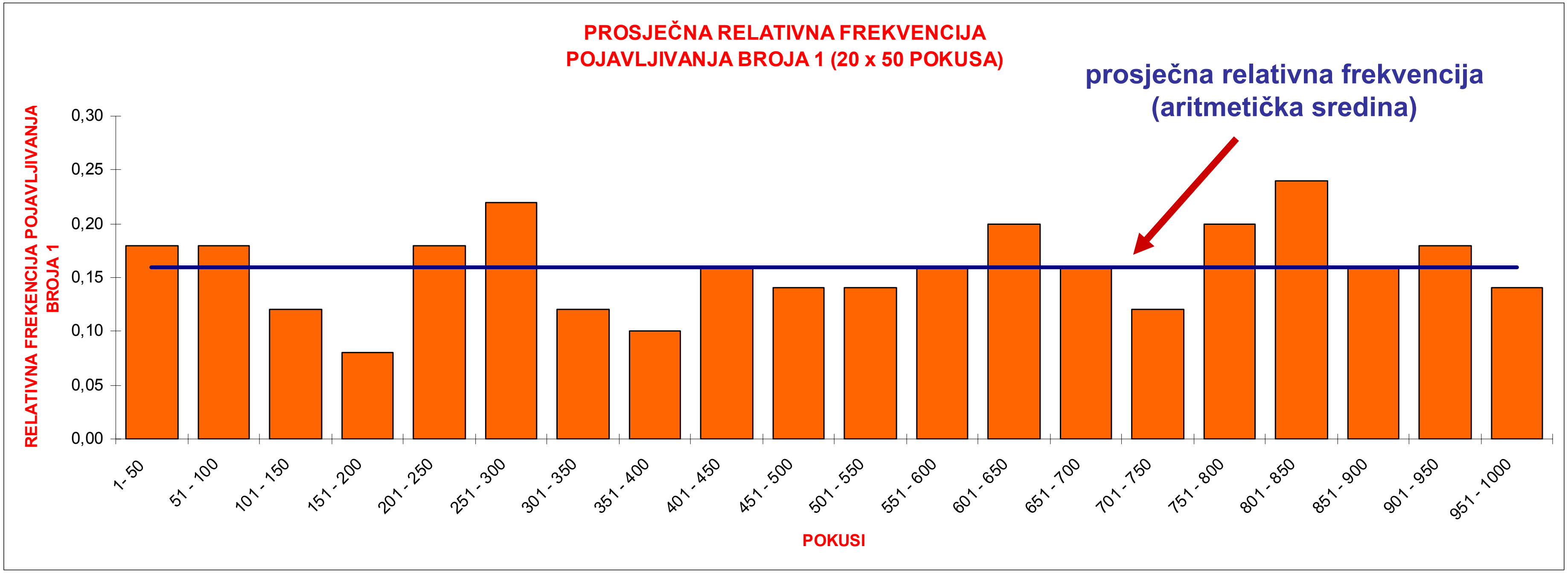
FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (5)

Što je veći broj ponovljenih pokusa, relativna frekvencija bliža je 1/6 ≈ 0,167.



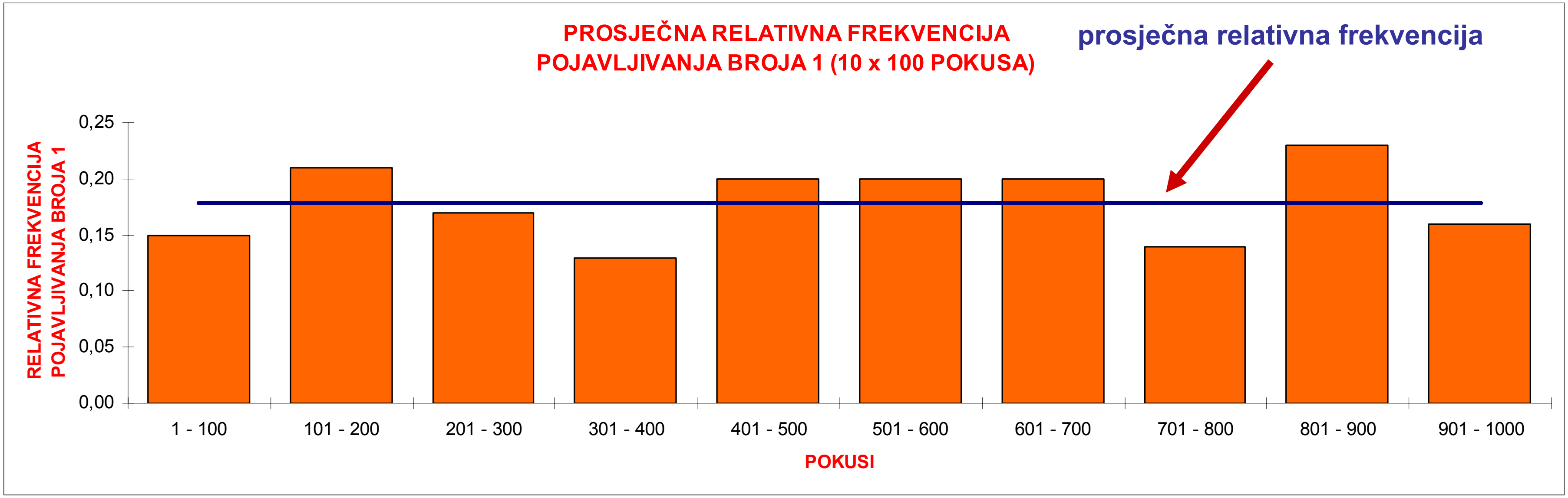
FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (6)

prosječna relativna frekvencija za 20 grupa od 50 nezavisnih pokusa



FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (7)

prosječna relativna frekvencija za 10 grupa od 100 nezavisnih pokusa



FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (8)

Primjer 21.

Bacajte 3 igraće kocke 40 puta i za svako bacanje zabilježite zbroj brojeva koji su se pojavili na gornjim stranama.

(a) Koje vrijednosti može poprimiti zbroj?

(b) Sastavite tablicu s frekvencijama pojavljivanja pojedinog zbroja.

(c) Nacrtajte pripadni frekvencijski dijagram i dijagram relativnih frekvencija.

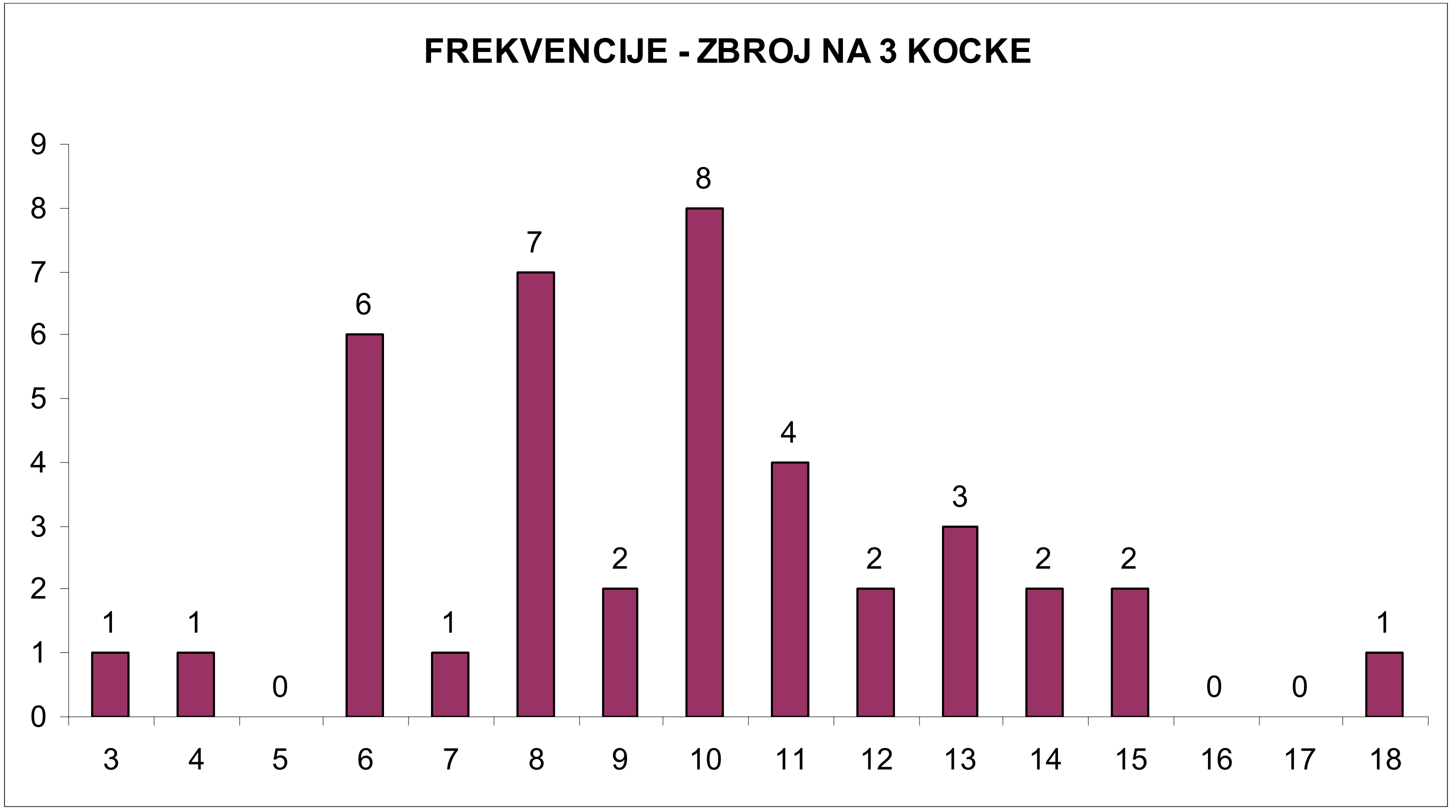
(d) Usporedite empirijske rezultate s teorijskim konceptom vjerojatnosti elementarnog događaja.

(e) Što primjećujete ponovite li bacanje 3 kocke 100 puta, a što kada pokus ponovite 1000 puta?

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (9)

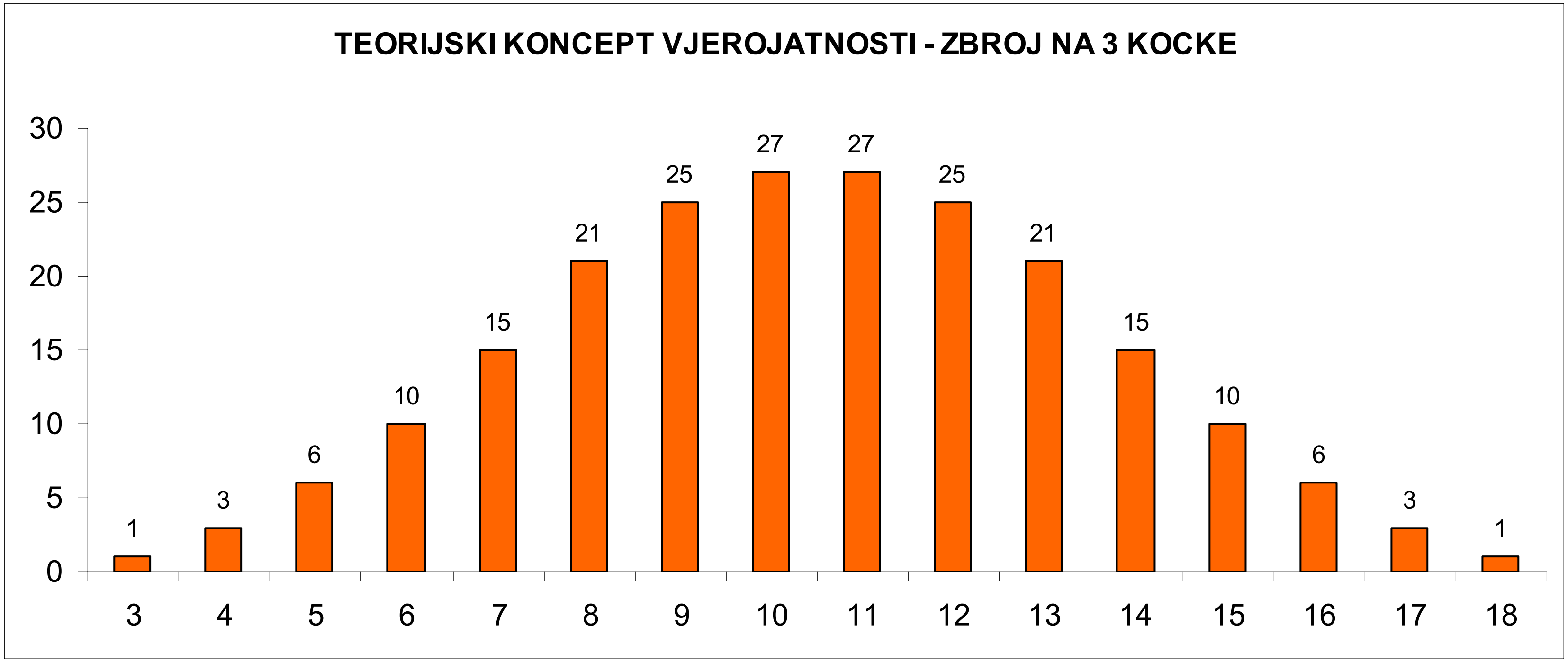
Rješenje.

Opet koristimo RANDBETWEEN(1;6) i COUNTIF() funkciju!



FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (10)

Teorijski izračun daje sljedeći frekvencijski dijagram:
(sustavna lista ili račun s elementarnim vjerojatnostima)



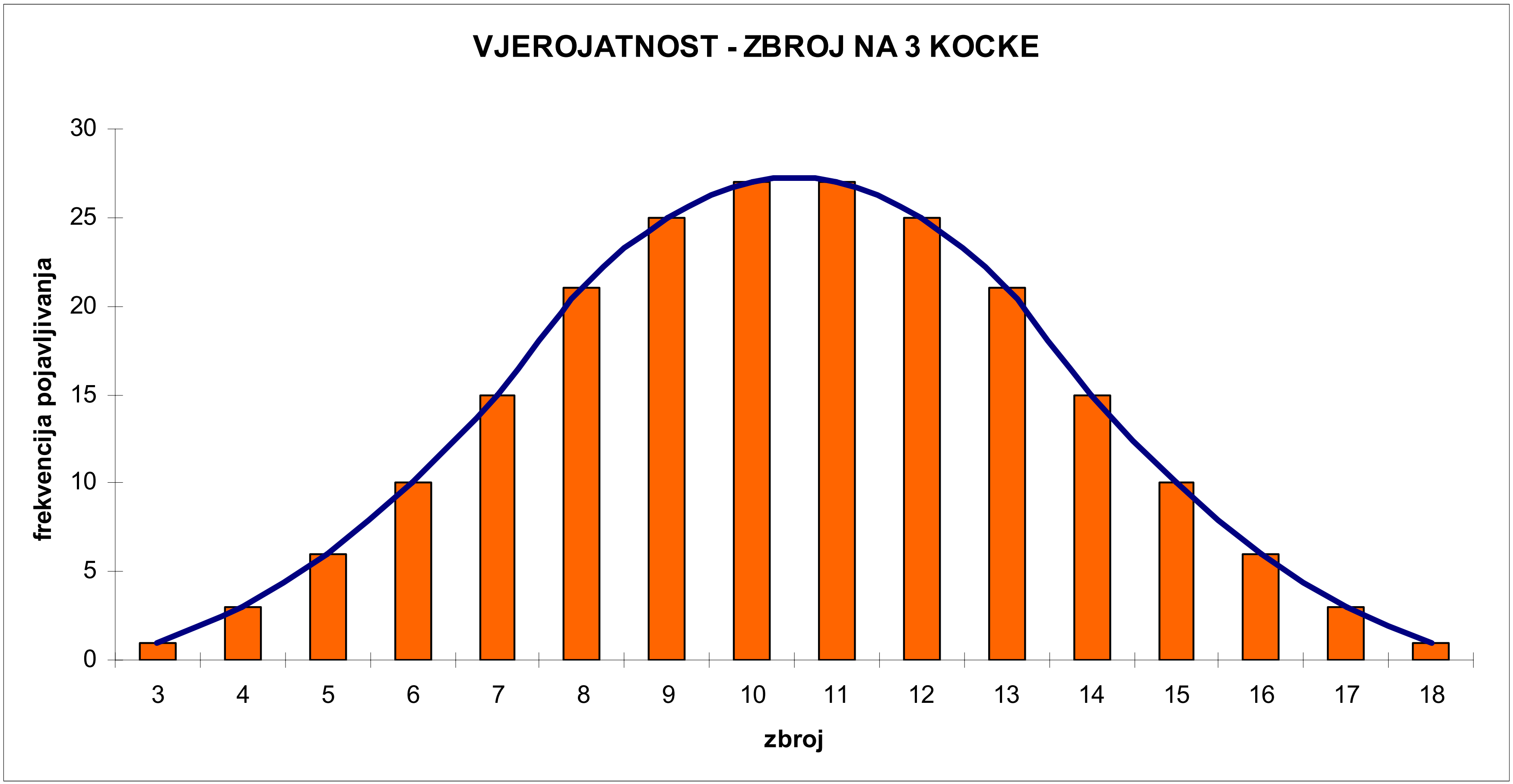
FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (11)

sustavna lista
(početak)

listu analogno
nastavljamo dalje

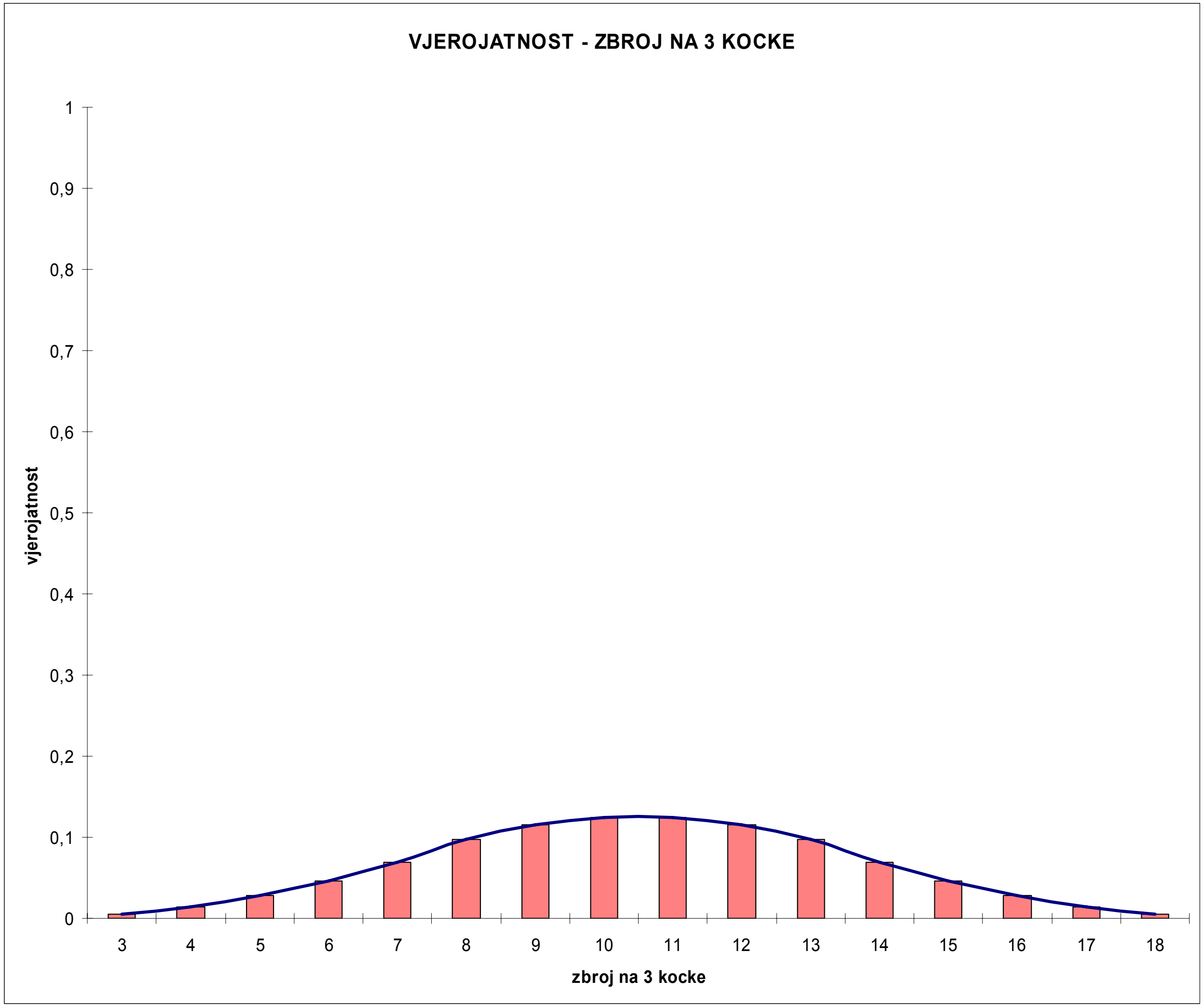
1. kocka	2. kocka	3. kocka	zbroj
1	1	1	3
1	1	2	4
1	1	3	5
1	1	4	6
1	1	5	7
1	1	6	8
1	2	1	4
1	2	2	5
1	2	3	6
1	2	4	7
1	2	5	8
1	2	6	9
1	3	1	5
1	3	2	6
1	3	3	7
1	3	4	8
1	3	5	9
1	3	6	10

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (12)



FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (13)

vjerojatnosti pojavljivanja pojedinog zbroja brojeva na gornjoj strani igraće kocke



FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (14)

Primjer 22.

U kutiji se nalaze kartice na kojima su napisana slova P, A, T, A, K. Kartice su ispremiješane i bez gledanja je izvučena jedna od njih. Odredite vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj je slovo:

(a) P,

(b) A,

(c) K.

Rješenje.

Opet možemo izvršiti slučajne pokuse (empirijski koncept) da uočimo pravilnost, a nakon toga ispisati listu mogućih događaja (teorijski koncept).

primjena LOOKUP funkcije

FREKVENCIJE I VJEROJATNOST (15)

Empirijski koncept - 1000 slučajnih pokusa

uočimo visinu stupca