OAA 2015/2016 – 1. kolokvij
rješenja

Zad 1.

(A) Broj izvršavanja naredbe $x = x+1$ je $S(n)$, gdje je

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=2^k \\ k \geq 0 \\ 2^k \leq i}} 1$$

Druga suma prolazi po svim potencijama od 2 (tj. po 2^k) za $k \geq 0$, s tim da je $2^k \leq i$, tj po skupu

$$P_2(i) = \{1, 2, 4, \ldots, 2^{m_i}\}$$

gdje je $2^{m_i} \leq i < 2^{m_i+1}$, a broj vrijednosti u tom skupu je $m_i + 1$. Onda je

$$m_i \leq \lg i < m_i + 1$$

$$\Rightarrow \quad m_i = \lfloor \lg i \rfloor$$

$$\Rightarrow \quad m_i + 1 = \lfloor \lg i \rfloor + 1.$$

Na kraju,

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} (\lfloor \lg i \rfloor + 1)$$

Za ocjenu ove sume koristimo

$$\lg i - 1 < \lfloor \lg i \rfloor \leq \lg i$$

pa je

$$\sum_{i=1}^{n} \lg i < S(n) \leq \sum_{i=1}^{n} \lg i + n$$

Treba još naći ocjenu za $\sum_{i=1}^{n} \lg i = \left(\lg x = \frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln i$

Funkcija $f(x) = \ln x$ je monotono rastuća, pa iz ocjene sume integralom izlazi

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

Za $f(x) = \ln x$ je

$$\int \ln dx = x \cdot \ln x - x.$$

Onda je donja ograda

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx = 0 + (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1$$

a gornja je

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1$$
$$= (n+1)\ln(n+1) - n$$

Izlazi

$$\frac{1}{\ln 2}(n\ln n - n + 1) \leq S(n) \leq \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{\ln 2} + n$$

odakle slijedi $\boxed{S(n) \in \Theta(n \lg n)}$

– Druga ocjena za $\sum_{i=1}^{n} \lg i$ ide preko faktorijela

$$\sum_{i=1}^{n} \lg i = \lg n!$$

$n! = (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdots\cdots$

i onda iskoristimo

$$n^{n/2} \leq n! \leq n^n \quad \backslash \lg$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{2}\lg n \leq \lg n! \leq n \cdot \lg n .$$

(B) Broj izvršavanja naredbe $x = x+1$ je $S(n)$, gdje je

$$S(n) = \sum_i \sum_{j=1}^{\lfloor n/i \rfloor} 1 = \sum_i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Vrijednosti od i se kvadriraju nakon svakog prolaska kroz petlju. Prije prvog prolaza je $i_1 = 2 = 2^{2^0}$ (i taj i_1 vrijedi za prvi prolaz. Nakon k-tog prolaza, novi i je

$$i_{k+1} = i_k^2$$

pa je

$$i_{k+1} = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}k \text{ puta} = 2^{2^k}, \quad k \geq 0$$

Dakle, u k-tom prolazu je $i_k = 2^{2^{k-1}}$, $k \geq 1$.

Onda je

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^{2^{k-1}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \dots$$

(možemo ostaviti i sumu do beskonačno!)

Za donju ogradu, očito je

$$S(n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n}{2} - 1 .$$

Za gornju ogradu, uočimo da je $2^{2^k} \geq 2^k$, za svaki $k \geq 1$ pa je

$$S(n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}}_{=1} = n$$

Onda je

$$\frac{n}{2} - 1 \leq S(n) \leq n$$

odakle slijedi

$$\boxed{S(n) \in \Theta(n)}$$

Zad 2.

Prvo rješavamo uvjetnu rekurziju

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + \log_3 n, \quad n = \text{potencija od } 3$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$.

Supstitucija je $n = 3^k$, $k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, ili $k = \log_3 n$.

Uz oznaku $t_k = T(3^k)$ izlazi

$$T(3^k) = 2 \cdot T(3^{k-1}) + k, \quad k > 0$$

$$t_k = 2 \cdot t_{k-1} + \underbrace{k}_{}, \quad k > 0$$

$p_1(k) \cdot 1^k$, p_1 stupnja 1

Karakteristična jednadžba pripadne homogenizirane rekurzije je

$$(x-2) \cdot (x-1)^2 = 0$$

pa opće rješenje homogenizirane rekurzije ima oblik

$$t_k = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 1^k + c_3 \cdot k \cdot 1^k$$

ili $\left(2^k = (3^{\log_3 2})^k = 3^{k \cdot \log_3 2} = n^{\log_3 2}\right)$

$$T(n) = c_1 \cdot n^{\log_3 2} + c_2 + c_3 \cdot \log_3 n$$

Konstante c_2 i c_3 dolaze uz dio rješenja koji je nastao iz nehomogenog člana polazne rekurzije, pa ih možemo odrediti uvrštavanjem općeg rješenja u polaznu nehomogenu rekurziju

$$\cancel{c_1 2^k} + c_2 + c_3 \cdot k = 2 \cdot \left(c_1 \cdot 2^{k-1} + c_2 + c_3 \cdot (k-1)\right) + k$$

$$= \cancel{c_1 2^k} + 2c_2 + 2c_3(k-1) + k$$

$$= 2c_2 - 2c_3 + (2c_3 + 1) \cdot k$$

Sredimo po potencijama od k

$$(c_2 - 2c_3) + (c_3 + 1) \cdot k = 0$$

Ovo vrijedi za $\forall k \in \mathbb{N}$, pa mora biti

$$c_3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_3 = -1}$$

$$c_2 - 2\underset{(-1)}{c_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = -2}$$

Opće rješenje polazne (uvjetne) nehomogene rekurzije je

$$t_k = c_1 \cdot 2^k - k - 2 \quad , k \geq 0$$

ili

$$T(n) = c_1 \cdot n^{\log_3 2} - \log_3 n - 2 \quad , n \text{ pot. od } 3.$$

Na kraju, konstantu c_1 računamo iz početnog uvjeta $T(1) = d > 0$. Zbog $\log_3 1 = 0$ imamo

$$T(1) = c_1 \cdot 1^{\log_3 2} - 0 - 2 = d$$

pa je

$$\boxed{c_1 = d + 2}$$

Rješenje polazne uvjetne rekurzije je

$$\boxed{T(n) = (d+2) \cdot n^{\log_3 2} - \log_3 n - 2 \quad , n \text{ pot. od } 3}$$

Zbog $d > 0$ izlazi $d + 2 > 2$ (tj. koef. uz $n^{\log_3 2}$ nije 0)

pa je

$$T(n) \sim (d+2) \quad n^{\log_3 2}$$

ili

$$\boxed{T(n) \in \Theta(n^{\log_3 2})} \Leftrightarrow \Theta(2^{\log_3 n})$$

— · —

Sad promatramo zadanu bezuvjetnu rekurziju

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + \log_3 n \quad , \text{za } n \geq 2$$

uz početne uvjete $T(0) = 0$ i $T(1) = d > 0$.

Znamo da vrijedi uvjetna asimptotska relacija

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_3 2}) \quad , \quad n = 3^k.$$

Za bezuvjetno proširenje treba pokazati

(a) T je asimptotski rastuća (bezuvjetno!)

(b) funkcija $g(n) = n^{\log_3 2}$ je 3-glatka (ili 2-glatka)

Prvo pokazujemo (b) dio za funkciju $g(n) = n^{\log_3 2}$.

zbog $\log_3 2 = 0.6309\ldots > 0$ (eksponent pozitivan), odmah slijedi da je g asimptotski rastuća (čak strogo rastuća na $\mathbb{R}_0^+$).

Treba još dokazati da je g b-glatka, tj

$$g(b\cdot n) \in \Theta(g(n)) \qquad \text{za } b=3 \quad (\text{ili } b=2)$$

Za $b=3$ imamo

$$g(3n) = (3n)^{\log_3 2} = \underbrace{3^{\log_3 2}}_{2} \cdot n^{\log_3 2} = 2\cdot n^{\log_3 2} = 2\cdot g(n)$$

(baš svagdje imamo jednakost), pa je

$$\boxed{g(3n) \in \Theta(g(n))}$$

Treba još dokazati da je T (bezuvjetno) asimptotski rastuća, što ide indukcijom iz bezuvjetne rekurzije. Treba samo paziti na izbor baze indukcije, tj. kako treba početi da smijemo koristiti pretpostavku indukcije u koraku.

Uzmimo da smo bazu indukcije pokazali izravnim uvrštavanjem do nekog $n = n_0$, tako da vrijedi

$$T(0) \le T(1) \le \ldots \le T(n_0)$$

(tj. da T raste za sve argumente, počev od 0). Stvarni n_0 koji nam treba – odredimo tako da korak prođe, a onda provjerimo bazu.

Uočiti da ovo već vrijedi za $n_0 = 1$, jer je $T(0) = 0 < d = T(1)$. No, možda će nam trebati i veći n_0.

Korak: usporedbom rekurzija za ~~[illegible]~~ $T(n)$ i $T(n+1)$ (što podrazumijeva $n \ge 2$)

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + \log_3 n$$

i

$$T(n+1) = T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil\right) + \log_3 (n+1)$$

vidimo da za nehomogeni član vrijedi

$$\log_3(n+1) > \log_3 n \qquad \forall n \ge 2 \ (\text{čak } \forall n \in \mathbb{N})$$

Dakle, za zaključak $T(n+1) > T(n)$, dovoljno je dokazati

$$(*) \quad T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor\right) \geq T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \quad \text{i} \quad T\left(\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil\right) \geq T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right)$$

(stroga nejednakost u $T(n+1) > T(n)$ izađe odmah zbog nehomogenog člana – koji strogo raste).

Za dokaz $(*)$, koristimo pretpostavku indukcije u obliku:

Neka je $n \geq n_0$ i pretpostavimo da za $\forall m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$m < n \Rightarrow T(m) \leq T(m+1)$$

što je ekvivalentno s

$$T(0) \leq T(1) \leq \ldots \leq T(n-1) \leq T(n)$$

(Za $n = n_0$, ovo treba eksplicitno dokazati u bazi indukcije).

Znamo da "dijeljenje s 3" (faktorom za "divide & conquer") u načelu smanjuje argumente (osim, eventualno za jako male argumente – i na to treba paziti). Dakle, sve što nam treba je da svi potrebni argumenti od T ulaze u "domenu" pokrivenu pretpostavkom indukcije.

Ostaje još vidjeti za koje potrebne argumente nam treba takav zaključak po pretpostavci indukcije.

– Za donje cijelo vrijedi

$$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, & \text{za } n = 0, 1 \bmod 3, \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1, & \text{za } n = 2 \bmod 3. \end{cases}$$

U prvom slučaju, za $n \bmod 3 = 0$ ili 1, imamo odmah

$$T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor\right) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$$

i $(*)$ vrijedi i bez poziva na pretpostavku indukcije.

Za $n \bmod 3 = 2$ imamo

$$T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor\right) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1\right)$$

i tu će nam trebati pretp. ind.

Ako je $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \le n \overset{\text{ili}}{(\Leftrightarrow)} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor < n$

(tj. dijeljenje s 3 zaista dovoljno smanji argument), onda smijemo iskoristiti pretp. ind.

$$T(\lfloor \tfrac{n}{3} \rfloor + 1) \ge T(\lfloor \tfrac{n}{3} \rfloor)$$

pa slijedi i

$$T(\lfloor \tfrac{n+1}{3} \rfloor) \ge T(\lfloor \tfrac{n}{3} \rfloor), \text{ tj. } (*)$$

Ostaje vidjeti koliki "n_0" nam treba da vrijedi $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor < n$. No, to vrijedi za $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. za $n \ge 1$ (pa onda i za $n = 2$ — kao najmanji n koji daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3).

Drugim riječima, treba nam baza indukcije do $n_0 = 1$, a to već imamo iz početnih uvjeta $T(\emptyset) \le T(1)$.

– Za gornje cijelo vrijedi

$$\lceil \tfrac{n+1}{3} \rceil = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{za } n = 1, 2 \bmod 3, \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1, & \text{za } n = 0 \bmod 3. \end{cases}$$

U prvom slučaju, za $n \bmod 3 = 1$ ili 2, imamo odmah

$$T(\lceil \tfrac{n+1}{3} \rceil) = T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil)$$

pa $(*)$ vrijedi i bez poziva na pretpostavku indukcije.

Za $n \bmod 3 = 0$ imamo

$$T(\lceil \tfrac{n+1}{3} \rceil) = T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil + 1)$$

i tu će nam trebati pretp. ind.

Ako je $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 \le n \overset{\text{ili}}{(\Leftrightarrow)} \lceil \frac{n}{3} \rceil < n$

onda smijemo iskoristiti pretp. ind.

$$T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil + 1) \ge T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil)$$

odatle slijedi i

$$T(\lceil \tfrac{n+1}{3} \rceil) \ge T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil), \text{ tj. } (*).$$

Međutim, $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 \leq n$, odn. $\lceil \frac{n}{3} \rceil < n$, ne vrijedi za $n=1$, nego tek za $n \geq 2$. Dakle, treba nam baza indukcije do $n_0 = 2$ (ne treba za 3, iako ovaj 'slučaj' ide samo za $n \bmod 3 = 0$, jer će 3 izaći indukcijom iz 2).

- U prijevodu, za gornje cijelo nam treba baza indukcije do $n_0 = 2$, što je najmanji n za kojeg uopće vrijedi rekurzija (tako je zadano, a $n = 0, 1$ su početni uvjeti)

Znamo da je $T(0) \leq T(1)$, pa još treba dobiti $T(1) \leq T(2)$

Za $n_0 = 2$:
$$\begin{aligned} T(2) &= T(0) + T(1) + \log_3 2 \\ &= 0 + \underbrace{d}_{T(1)} + \underbrace{\log_3 2}_{> 0} \\ &> d = T(1). \end{aligned}$$

- Dakle, imamo potrebnu bazu indukcije (čak sa strogim nejednakostima)
$$T(0) < T(1) < T(2)$$

Dodatna napomena:

Uočiti da u koraku indukcije koristimo rekurziju za $T(n)$ i $T(n+1)$, da bismo "proširili" domenu monotonosti s n (ili do n), na "do $n+1$".

To znači da najmanji n $(=2)$ za kojeg vrijedi rekurzija monotonost do (uključivo) njega moramo dokazati u bazi indukcije — direktno iz početnih uvjeta i rekurzije.

Zaključak za $T(2) \geq T(1)$ ... ne možemo dobiti korakom jer bi bilo $n+1 = 2$, tj. $n = 1$, a korak koristi rekurziju za $T(n) = \ldots$, što ne vrijedi za $n = 1$.
Tj. u koraku mora biti $n+1 \geq 3$.