Programiranje 1 — popravni kolokvij, 21. 2. 2020.

Rješenje 1. i 2. zadatka

Zadatak 1. Napišite tablicu istinitosti, te konjunktivnu ili disjunktivnu normalnu formu (samo jednu od njih!) izraza $f = f(x, y, z)$, koji vraća istinu ako i samo ako za broj $(xyz)_2 + (yzx)_2 + (zxy)_2$ postoji prirodan broj $b \geq 2$, takav da taj broj zapisan u bazi b ima točno b znamenaka. Upotrebom formula za pojednostavljivanje logičkih izraza pojednostavite dobiveni izraz. Potrebno je napisati **cijeli postupak**, a ne samo konačna rješenja. Pomoć: Izraz je moguće pojednostaviti tako da ima samo 4 operatora.

Rješenje: Neka su x, y, z binarne znamenke i gledamo broj

$$\begin{aligned} n &= (xyz)_2 + (yzx)_2 + (zxy)_2 = (4x + 2y + z) + (4y + 2z + x) + (4z + 2x + y) \\ &= 4(x + y + z) + 2(x + y + z) + (x + y + z) = 7(x + y + z). \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je za broj n bitan samo ukupan **broj** jedinica, a ne i **koje** varijable su jednake 1 (položaj jedinica u tablici). Broj jedinica varira od 0 do 3, a pripadne brojeve indeksiramo brojem jedinica.

$$n_0 = 7 \cdot 0 = 0, \quad n_1 = 7 \cdot 1 = 7, \quad n_2 = 7 \cdot 2 = 14, \quad n_3 = 7 \cdot 3 = 21.$$

Broj $n_0 = 0$ ima zapis $(0)_b$ u bilo kojoj bazi $b \geq 2$, pa ne postoji baza b u kojoj bi 0 imala točno b znamenaka. Dakle, pripadna vrijednost funkcije je $f = 0$.

Za preostale brojeve, gledamo njihove zapise u bazama $b = 2$ i $b = 3$.

$$n_1 = 7 = (111)_2 = (21)_3,$$

pa n_1 ima 3 znamenke u bazi 2, dvije znamenke u bazi 3, a u svim bazama $b \geq 4$ sigurno ima najviše dvije znamenke. Dakle, ne postoji baza b u kojoj bi 7 imao točno b znamenaka. Pripadna vrijednost funkcije je $f = 0$.

$$n_2 = 14 = (1110)_2 = (112)_3, \quad n_3 = 21 = (10101)_2 = (210)_3.$$

Oba broja imaju 3 znamenke u bazi 3, pa je pripadna vrijednost funkcije $f = 1$.

Pripadna tablica istinitosti za vrijednosti $f = f(x, y, z)$ je

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tablica ima 4 jedinice pa su DNF i KNF podjednako "teške". Pripadna DNF je

$$\mathrm{DNF} = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z\,.$$

Pripadna KNF je

$$\mathrm{KNF} = (x + y + z) \cdot (x + y + \overline{z}) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + z)\,.$$

Pojednostavljenje iz DNF:

$$
\begin{aligned}
&\overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot\overline{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot z = \{\text{(6a): izlučimo } z \text{ iz prva dva i } x\cdot y \text{ iz zadnja dva člana}\}\\
&\quad = (\overline{x}\cdot y + x\cdot\overline{y})\cdot z + x\cdot y\cdot(\overline{z}+z) = \{\text{(9a): } \overline{z}+z=1\text{, onda (4b): } A\cdot 1 = A\}\\
&\quad = (\overline{x}\cdot y + x\cdot\overline{y})\cdot z + x\cdot y = \{\text{proširimo po (12a): } x\cdot y = x\cdot y + x\cdot y\cdot z\text{, a zatim (1a)}\}\\
&\quad = (\overline{x}\cdot y + x\cdot\overline{y})\cdot z + x\cdot y\cdot z + x\cdot y = \{\text{spojimo prva dva člana po distributivnosti (6a)}\}\\
&\quad = (\overline{x}\cdot y + x\cdot\overline{y} + x\cdot y)\cdot z + x\cdot y = \{\text{uočimo: izraz u zagradi je DNF za } x+y\}\\
&\quad = (x+y)\cdot z + x\cdot y\,.
\end{aligned}
$$

U predzadnjem redu, izraz u zagradi smo prepoznali kao DNF za $x+y$. Ako baš želimo koristiti samo formule za pojednostavljenje, onda taj izraz sređujemo ovako:

$$
\begin{aligned}
&\overline{x}\cdot y + x\cdot\overline{y} + x\cdot y = \{\text{okrenemo poredak članova po komutativnosti (1a)}\}\\
&\quad = x\cdot y + x\cdot\overline{y} + \overline{x}\cdot y = \{\text{spojimo prva dva člana po distributivnosti (6a)}\}\\
&\quad = x\cdot(y+\overline{y}) + \overline{x}\cdot y = \{\text{(9a): } y+\overline{y}=1\text{, onda (4b): } x\cdot 1 = x\}\\
&\quad = x + \overline{x}\cdot y = \{\text{proširimo po (12a): } x = x + x\cdot y\}\\
&\quad = x + x\cdot y + \overline{x}\cdot y = \{\text{spojimo zadnja dva člana po distributivnosti (6a)}\}\\
&\quad = x + (x+\overline{x})\cdot y = \{\text{(9a): } x+\overline{x}=1\text{, onda (4b): } 1\cdot y = y\}\\
&\quad = x + y\,.
\end{aligned}
$$

Drugi oblik pojednostavljene formule sa samo 4 operatora je

$$(x+y)\cdot(x\cdot y + z)\,.$$

Zbog invarijantnosti na **poredak** varijabli (pogledati f i tablicu), obje formule

$$(x+y)\cdot z + x\cdot y,\quad (x+y)\cdot(x\cdot y+z),$$

možemo napisati i u bilo kojoj od permutacija varijabli x, y i z.

Zadatak 2. Na koji način 32-bitno računalo zapisuje u memoriji cijeli broj -1939? Negativni brojevi se prikazuju dvojnim komplementom. Napišite i **cijeli postupak**, a ne samo konačno rješenje.

Rješenje: Zbog prikaza negativnih brojeva **dvojnim komplementom**, treba naći prikaz apsolutne vrijednosti zadanog broja, tj. broja 1939, a zatim **komplementirati** dobiveni prikaz (bit-po-bit) i rezultatu dodati 1.

Prikaz broja $1939 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 16 + 2 + 1 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^4 + 2^1 + 2^0$, s 32 bita za prikaz, je

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1

Komplementiranjem bit-po-bit dobijemo

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0

Na kraju dodamo 1. Prikaz broja -1939 u 32-bitnom računalu je

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1