# *Numerička matematika*
# *1. predavanje*

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

# Dobar dan, dobro došli

# Sadržaj predavanja (početak)

- Uvod u kolegij:
  - Tko sam, što sam i kako do mene.
  - Pravila lijepog ponašanja.
  - Cilj kolegija “Numerička matematika”.
  - Pregled sadržaja kolegija.
  - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
    - “Pravila igre” ili način polaganja ispita.
    - Literatura.
    - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.

## *Sadržaj predavanja (nastavak)*

- Uvodna priča o greškama:
  - Problemi numeričke matematike (zašto ona postoji).
  - Modelni primjer za ilustraciju problema.
  - Pojam greške, apsolutna i relativna greška.
  - Mjerenje greške — razne norme.
  - Izvori grešaka — model, metoda, mjerenje, zaokruživanje.
  - Uvjetovanost problema.
  - Stabilnost algoritma.

# Kolegiji prethodnici

Bez obzira što piše na faklutetskom webu (na raznim mjestima), ovaj kolegij ima prethodnike i to su:

- LA1 = Linearna algebra 1,
- MA2 = Matematička analiza 2.

# Uvod u kolegij

# Sadržaj

- Uvod u kolegij:
  - Tko sam, što sam i kako do mene.
  - Pravila lijepog ponašanja.
  - Cilj kolegija “Numerička matematika”.
  - Pregled sadržaja kolegija.
  - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
    - “Pravila igre” ili način polaganja ispita.
    - Literatura.
    - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.

# Na samom početku

- Moja malenkost (u punom “sjaju”):

  doc. dr. sc. Saša Singer

- Službeni osobni podaci:
  - ured (soba, kabinet): 227, drugi kat,
  - e–mail: singer@math.hr
    (Molim plain text poruke.)
  - web stranica: `http://web.math.hr/~singer/`
    (ona “službena”: `http://www.math.hr/~singer/`
    je, uglavnom, beskorisna)

- Konzultacije (zasad): petak, 12–14 sati.

# *Osnovna pravila "lijepog" ponašanja*

Imam nekoliko lijepih zamolbi u rubrici "kultura".

- Prva i osnovna je

  **razumna tišina**,

  tj. da pričanjem ne ometate izvođenje nastave.
- Zatim, ne kasnite na predavanje.
- Održavajte razuman red u predavaonici.
- Mobilne telefone, molim, utišajte.

# Cilj kolegija Numerička matematika

Većina ostalih kolegija na studiju (do sada) bavi se

- tzv. "egzaktnom" ili "pravom" matematikom,

koja izgleda otprilike ovako:

- definicija, teorem, dokaz,

uz tek pokoji primjer.

Ovaj kolegij se ponešto razlikuje od toga:

- orijentiran je prema rješavanju konkretnih praktičnih problema,
- baziran je na pojmu greške, odnosno, aproksimacije.

# Cilj kolegija Numerička matematika (nastavak)

Zato ima nekoliko dosta različitih osnovnih ciljeva:

- spoznavanje neminovnosti pojave grešaka u praktičnom svijetu (izvori i vrste grešaka, važnost ocjene pogrešake),
- pregled osnovnih numeričkih metoda za rješavanje nekih "standardnih" problema,
- samostalna primjena tih metoda,
- razvijanje kritičnosti u interpretaciji dobivenih rezultata.

# Pregled sadržaja kolegija

Cijeli kolegij ima 8 "većih" cjelina (poglavlja):

- Uvod u kolegij — greške, uvjetovanost problema, stabilnost algoritama.
- Rješavanje linearnih sustava — tzv. direktne metode (Gaussove eliminacije, LR faktorizacija, faktorizacija Choleskog).
- Aproksimacija i interpolacija — općenito o problemu aproksimacije funkcija, interpolacija polinomom i splineom.
- Metoda najmanjih kvadrata — opći problem, linearizacija, matrična formulacija, QR faktorizacija.

# Pregled sadržaja kolegija (nastavak)

- Ortogonalni polinomi i generalizirana Hornerova shema.
- Numeričko integriranje — Newton–Cotesove i Gaussove formule.
- Rješavanje nelinearnih jednadžbi — bisekcija, Newton, sekanta.
- Uvod u optimizaciju bez ograničenja.

## Pravila polaganja i ocjenjivanja (1)

Elementi ocjenjivanja su:

- domaće zadaće — 10%,
- 1. kolokvij — 40%,
- 2. kolokvij — 50%,
- eventualni završni ispit — 25%.

Zbroj je 125% — nije greška, v. objašnjenje malo niže.

Domaće zadaće:

- Tijekom semestra zadaju se dvije domaće zadaće.
- Za svaku se može zaraditi najviše 5 bodova.

Ostatak organizacije i rokovi — kroz kraće vrijeme.

# Pravila polaganja i ocjenjivanja (2)

Kolokviji. Tijekom semestra pišu se dva kolokvija.

- 1. kolokvij — ima (najmanje) 40 bodova,
- 2. kolokvij — ima (najmanje) 50 bodova,

tj. oba kolokvija mogu imati “bonus” bodove.

- Na kolokvijima se postavljaju i teoretska pitanja.

Studenti koji ne pristupe nekom od kolokvija tijekom semestra,

- a svoj nedolazak pravovremeno opravdaju na odgovarajući način
  - na pr. medicinskom dokumentacijom,
- kolokvij će polagati u dogovoru s nastavnicima.

# Pravila polaganja i ocjenjivanja (3)

Za prolaznu ocjenu potrebno je:

- skupiti najmanje 45 bodova (iz kolokvija i zadaća),
- od čega barem 40 bodova mora biti na kolokvijima.

"Prva" ocjena se formira na temelju

- zbroja bodova iz kolokvija i zadaća.

Zato prva 3 elementa ocjenjivanja zbrojeno daju 100%.

Ako se zadovoljni ocjenom, to je (uglavnom) to!

## Pravila polaganja i ocjenjivanja (4)

Završni ispit:

- U načelu — završnog usmenog ispita NEMA.

Mogući izuzeci su:

- po želji — ako niste zadovoljni "prvom" ocjenom,
- po kazni — nastavnik IMA PRAVO pozvati studenta na usmeni ispit (na pr. zbog prepisivanja na kolokviju).

Na završnom ispitu moguće je ostvariti najviše još 25 bodova (v. skalu za ocjene).

Oprez:

- Student može svojim neznanjem na završnom ispitu dobiti i negativnu ocjenu — pasti.

# Pravila polaganja i ocjenjivanja (5)

Popravni ispit.

- Studenti koji su tijekom semestra na kolokvijama skupili barem 10 bodova,
- a nisu položili kolegij,

mogu pristupiti popravnom kolokviju.

Popravni kolokvij obuhvaća gradivo cijelog kolegija

- i na njemu je moguće ostvariti 100 bodova.

Na popravni kolokvij primjenjuje se isto pravilo o završnom ispitu kao za redovne kolokvije.

# *Pravila polaganja i ocjenjivanja (6)*

Tablica ocjenjivanja:

| Bodovi | Ocjena |
|---|---|
| 0 – 44 | 1 |
| 45 – 59 | 2 |
| 60 – 74 | 3 |
| 75 – 89 | 4 |
| 90 i više | 5 |

# Literatura (1)

Osnovna literatura su, naravno,

- predavanja i vježbe,

s popratnim materijalima (ponešto ih je na webu).

"Stvarna" literatura — u "pisanom" obliku:

- Z. Drmač i ostali,
  Numerička analiza (skripta),
  PMF–MO, 2003.

To je trenutno dostupno na web stranici

`http://web.math.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf`

a bit će uskoro i na mojoj.

Napomena: to nije zamjena za "živu" nastavu!

# Literatura (2)

Dodatna literatura:

- K. E. Atkinson,
  An Introduction to Numerical Analysis (second edition),
  John Wiley and Sons, 1989.

i hrpa malo starijih knjiga iz numeričke analize (matematike).

Možete potražiti i knjigu:

- Wolfgang Dahmen i ostali,
  Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,

Pripadni nastavni materijali su na stranici

http://www.igpm.rwth-aachen.de/node/161/

(koristite Firefox!)

# Korisni linkovi

Službena web stranica kolegija je:

`http://web.math.hr/nastava/unm/`

"User's guide for everything" — Wikipedia:

`http://en.wikipedia.org/`

# Ima li pitanja?

Slušam . . .

# Modelni primjer

# Problem gađanja

Imamo top (ili haubicu) u nekoj točki — recimo, ishodišu.

- Treba pogoditi cilj koje se nalazi u nekoj drugoj točki.

Najjednostavniji model za ovaj problem je poznati kosi hitac. Projektil ispaljujemo prema cilju,

- nekom početnom brzinom $v_0$ (vektor),
- pod nekim kutem $\alpha$, obzirom na horizontalnu ravninu.

Slikica!

Cijela stvar se odvija pod utjecajem gravitacije (prema dolje). Ako zanemarimo otpor zraka, dobijemo "obični" kosi hitac.

# Jednadžba

Osnovna jednadžba je

$$F = ma,$$

gdje je $m$ masa projektila (neće nam trebati na početku), a

- $a$ je akceleracija — vektor u okomitoj $(x, y)$-ravnini,
- $F$ je sila graviracije, prema dolje, tj. $F_x = 0$ i $F_y = -mg$.

Gornja jednadžba je diferencijalna jednadžba drugog reda u vremenu. Ako je $(x(t), y(t))$ položaj projektila u danom trenutku, jednadžba ima oblik po komponentama:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = F_y.$$

Akceleracija je druga derivacija položaja.

# Rješenje jednadžbe

Neka je projektil ispaljen u trenutku $t_0 = 0$.

Nakon integracije, za brzinu $v =$ prva derivacija položaja, imamo jednadžbu

$$mv = F \cdot t + mv_0,$$

ili, po komponentama (masa se skrati)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Još jednom integriramo (početni položaj je $x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Za položaj projektila u trenutku $t$ dobivamo:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Reklo bi se — znamo sve!

# Još neke relacije

Jednadžba "putanje" projektila u $(x, y)$-ravnini je

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Najveća visina projektila je

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g},$$

a maksimalni domet na horizontalnoj $x$-osi je

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

# Greške

## Greške

Pri numeričkom rješavanju nekog problema javljaju se različiti tipovi grešaka:

- greške modela,
- greške metoda za rješavanje modela,
- greške u ulaznim podacima (mjerenjima),
- greške aritmetike računala.

# Mjere za grešku

- Apsolutna greška:

$$E_{\text{abs}}(x, \hat{x}) := |x - \hat{x}|.$$

- S druge strane, ako smo umjesto 1 izračunali 2, to nam se čini lošije nego ako smo umjesto 100 izračunali 101.
- Relativna greška, definirana je za $x \neq 0$,

$$E_{\text{rel}}(x, \hat{x}) := \frac{|x - \hat{x}|}{|x|}.$$

# Mjere za grešku (nastavak)

- Apsolutna greška: mjeri udaljenost izračunate vrijednosti $\hat{x}$ obzirom na pravu vriojednost $x$.
- Relativna greška: mjeri relativnu točnost obzirom na veličinu broja $x$ (koliko se vodećih znamenki brojeva $x$ i $\hat{x}$ podudara).
- Ako $\hat{x}$ napišemo kao $\hat{x} = x(1 + \rho)$, onda je njegova relativna greška

$$E_{\mathrm{rel}}(x, \hat{x}) := |\rho|.$$

## Greške modela

Mogu nastati:

- zanemarivanjem utjecaja nekih sila (na primjer, zanemarivanje utjecaja otpora zraka ili trenja),
- zbog zamjene kompliciranog modela jednostavnijim (na primjer, sustavi nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se lineariziraju) da bi se dobilo barem približno rješenje,
- zbog upotrebe modela u graničnim slučajevima (na primjer kod matematičkog njihala se $\sin x$ aproksimira s $x$, što vrijedi samo za male kutove).

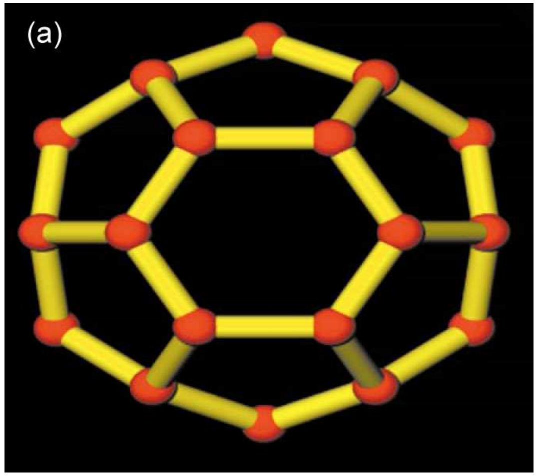
# Greške modela (nastavak)

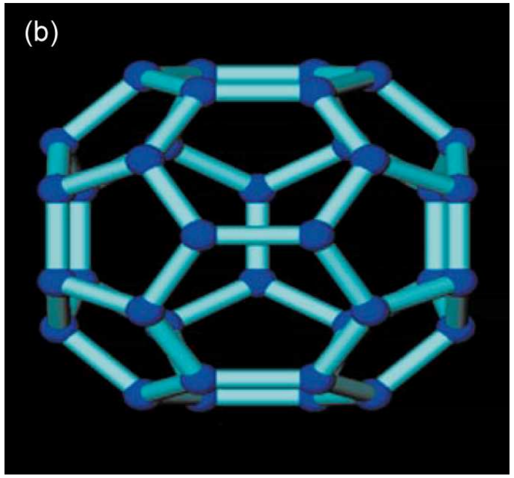
## Primjer

- Prva primjena jednog od superkompjutera bilo je određivanje trodimenzionalne strukture i elektronskog stanja ugljik-36 fulerena.
- Primjena spoja višestruka: supravodljivost na visokim temperaturama, precizno doziranje lijekova u stanice raka.
- Prijašnja istraživanja kvantnih kemičara dala su dvije moguće strukture tog spoja:
  - eksperimentalna mjerenja pokazivala su da je struktura (a) stabilnija,
  - teoretičari su tvrdili da je stabilnija struktura (b).

# Greške modela (nastavak)

- Te dvije strukture imaju različita kemijska svojstva.
- Prijašnja računanja, zbog pojednostavljivanja i interpolacije, kao odgovor davala su prednost "teoretskoj" strukturi.
- Definitivan odgovor, proveden računanjem bez pojednostavljivanja pokazao je da je struktura (a) stabilnija.



# Greške u ulaznim podacima

- Greške u ulaznim podacima javljaju se zbog nemogućnosti ili besmislenosti točnog mjerenja.
- Primjer, tjelesna temperatura se obično mjeri na desetinku stupnja Celziusa točno. Pacijent je podjednako loše ako ima tjelesnu temperaturu $39.5^\circ$ ili $39.513462^\circ$.
- Mogu li male greške u ulaznim podacima bitno povećati grešku rezultata?
- Nažalost MOGU! Takvi problemi zovu se loše uvjetovani problemi.

# Greške u ulaznim podacima (nastavak)

Primjer

Zadana su dva sustava linearnih jednadžbi (recimo umjesto ispravnih (prvih) koeficijanata izmjerili smo druge):

$$\begin{aligned} 2x &+ 6y &= 8 \\ 2x &+ 6.0001y &= 8.0001, \end{aligned}$$

i

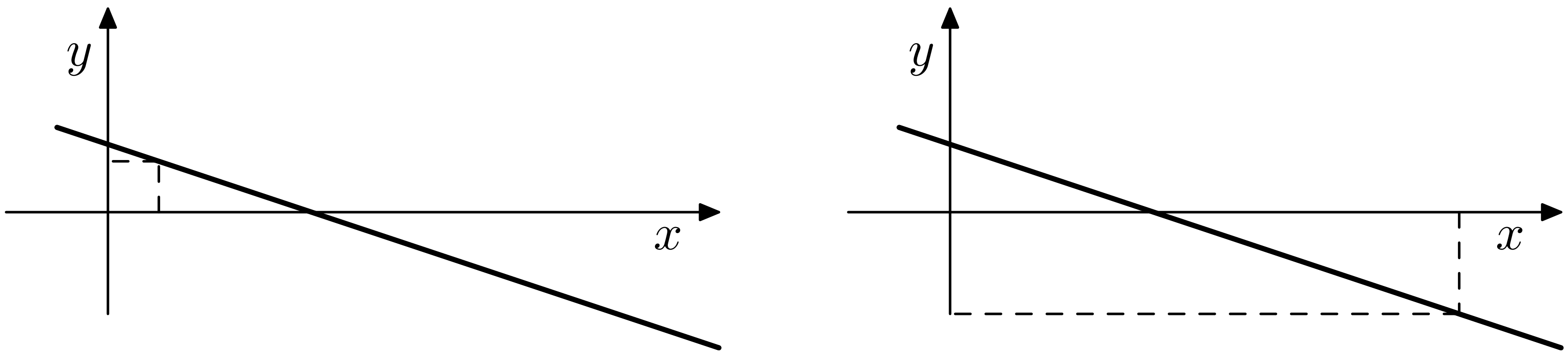
$$\begin{aligned} 2x &+ 6y &= 8 \\ 2x &+ 5.99999y &= 8.00002. \end{aligned}$$

Perturbacije koeficijenata: reda veličine $10^{-4}$. Je li se rezultat također promijenio za red veličine $10^{-4}$?

# Greške u ulaznim podacima (nastavak)

- Rješenje prvog problema: $x = 1$, $y = 1$.
- Rješenje drugog problema: $x = 10$, $y = -2$.

Grafovi presjecišta dva pravca za prvi i drugi sustav:



# Greške metoda za rješavanje problema

Najčešće nastaju kad se nešto beskonačno zamjenjuje nečim konačnim. Razlikujemo dvijekategorije:

- greške diskretizacije koje nastaju zamjenom kontinuuma konačnim diskretnim skupom točaka, ili "beskonačno" malu veličinu $h$ ili $\varepsilon \to 0$ zamijenjujemo nekim "konačno" malim brojem;
- greške odbacivanja koje nastaju "rezanjem" beskonačnog niza ili reda na konačni niz ili sumu, tj. odbacujemo ostatak niza ili reda.

## Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške diskretizacije:

- aproksimacija funkcije $f$ na $[a, b]$, vrijednostima te funkcije na konačnom skupu točaka (tzv. mreži) $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$,
- aproksimacija derivacije funkcije $f$ u nekoj točki $x$. Po definiciji je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

a za približnu vrijednost uzmemo dovoljno mali $h \neq 0$ i

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

# Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške odbacivanja:

- zaustavljanje iterativnih procesa nakon dovoljno velikog broja $n$ iteracija (recimo kod računanja nultočaka funkcije);
- zamjena beskonačne sume konačnom kad je greška dovoljno mala (recimo kod sumiranja Taylorovih redova).

## Taylorov red, Taylorov polinom, ...

Za dovoljno glatku funkciju $f$, Taylorov red oko točke $x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

možemo aproksimirati Taylorovim polinomom $p$

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

pri čemu je $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ greška odbacivanja, a $\xi$ neki broj između $x_0$ i $x$. $R_{n+1}(x)$ obično ocjenjujemo po apsolutnoj vrijednosti.

# Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Primjer

- Funkcije $e^x$ i $\sin x$ imaju Taylorove redove oko točke $0$ koji konvergiraju za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$.
- Zbrajanjem dovoljno mnogo članova tih redova, možemo, barem u principu, dobro aproksimirati vrijednosti funkcija $e^x$ i $\sin x$.
- Traženi Taylorovi polinomi s istim brojem članova (ali ne istog stupnja) su

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

# Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Za grešku odbacivanja trebaju nam derivacije:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \qquad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

pa su pripadne greške odbacivanja

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad R_{2n+3}(x) = \frac{\sin(\xi + \frac{2n+3}{2}\,\pi) x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

Pretpostavimo sada da je $x > 0$. Iz $\xi \leq x$ dobivamo

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad |R_{2n+3}(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

## Taylorov red, Taylorov polinom, . . . (nastavak)

Zbrojimo li članove reda sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti $\varepsilon > 0$, napravili smo grešku odbacivanja manju ili jednaku

$$\begin{cases} e^x \varepsilon, & \text{za } e^x, \\ \varepsilon, & \text{za } \sin x. \end{cases}$$

# Norme — mjere za greške

# Norme

Vektorske i matrične norme osnovno su sredstvo koje koristimo kod ocjene grešaka vezanih uz numeričke metode. Vektorska norma je svaka funkcija $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ (nejednakost poznata pod imenom nejednakost trokuta).

# Vektorske norme

U numeričkoj linearnoj algebri najčešće se koriste sljedeće tri norme:

1. 1-norma ili $\ell_1$ norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
2. 2-norma ili $\ell_2$ norma ili euklidska norma

$$\|x\|_2 = (x^* x)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

3. $\infty$-norma ili $\ell_\infty$ norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Samo 2-norma izvedena iz skalarnog produkta. To su specijalni slučajevi tzv. $p$-normi.

# Standardne norme

Norme nisu nezavisne jedna o drugoj! Neka su $\alpha$ i $\beta$ dvije $p$ norme takve da je $\alpha \leq \beta$. Tada vrijedi

$$\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq n^{(1/\alpha - 1/\beta)} \|x\|_\beta.$$

# Standardne norme

Definicija vektorskih normi u sebi ne sadrži zahtjev da je vektorski prostor iz kojeg su vektori konačno dimenzionalan. Na primjer, norme definirane na vektorskom prostoru neprekidnih funkcija na $[a, b]$ (u oznaci $C[a, b]$) definiraju se slično normama na $\mathbb{C}^n$:

1. $L_1$ norma $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|\, dt$,

2. $L_2$ norma $\|f\|_2 = \left( \int\limits_a^b |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$,

3. $L_\infty$ norma $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$.

# Matrične norme

Zamijenimo li u definiciji vektorske norme formalno vektor matricom, dobivamo matričnu normu.

Matrična norma je svaka funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Tome se često dodaje zahtjev konzistentnosti

4. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

kad god je matrični produkt $AB$ definiran.

# *Matrične norme*

Matrične norme nastaju na dva načina:

- Matricu $A$ promatramo kao vektor s $m \times n$ elemenata i za taj vektor koristimo odgovarajuću vektorsku normu.

  Najpoznatija takva norma odgovara vektorskoj 2-normi i zove se euklidska, Frobeniusova, Hilbert–Schmidtova, ili Schurova norma

$$\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

- operatorske norme:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} (\text{ ili } = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|).$$

# Matrične norme (nastavak)

Uvrštavanjem odgovarajućih vektorskih normi, dobivamo

1. matrična 1-norma, “maksimalna stupčana norma”
$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

2. matrična 2-norma, spektralna norma
$$\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{1/2} = \sigma_{\max}(A),$$

3. matrična $\infty$-norma, “maksimalna retčana norma”
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$\rho$ je spektralni radijus matrice (po aps. vrijednosti maksimalna svojstvena vrijednost), a $\sigma$ singularna vrijednost matrice.

# Matrične norme (nastavak)

Svojstva:

- I matrične norme nisu međusobno neovisne (slično kao vektorske norme).
- Matrična 2-norma se teško računa pa se uobičajeno procjenjuje korištenjem ostalih normi.
- Za svaku operatorsku normu vrijedi

$$\|Ay\| \leq \|A\| \, \|y\|,$$

  za svaki vektor $y$, što se često koristi kod ocjena. Formula direktno izlazi iz definicije operatorske norme.

# Primjeri “grešaka” iz prakse

# Promašaj raketa Patriot

- U Zaljevskom ratu, 25. veljače 1991. godine, Patriot rakete iznad Dhahrana u Saudijskoj Arabiji nisu uspjele oboriti iračku Scud raketu.
- Raketa je pukim slučajem pala na američku vojnu bazu usmrtivši 28 i ranivši stotinjak ljudi.

# Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Istraga otkriva sljedeće:

- Računalo koje je upravljalo Patriot raketama, vrijeme je brojilo u desetinkama sekunde proteklim od trenutka paljenja.
- Desetinka sekunde binarno

$$0.1_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

- To računalo prikazivalo je realne brojeve korištenjem nenormalizirane mantise duljine $23$ bita.
- Spremanjem $0.1$ u registar takvog računala radi se (apsolutna) greška $\approx 9.5 \cdot 10^{-8}$.

# Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Detalji:

- Računalo je bilo u pogonu $100$ sati, pa je ukupna greška zaokruživanja bila

$$100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 9.5 \cdot 10^{-8} = 0.34\,\mathrm{s}.$$

- Scud raketa putuje brzinom $\approx 1.6\,\mathrm{km/s}$, pa je tražena više od pola kilometra daleko od stvarnog položaja.
- Greška uočena dva tjedna ranije nakon $8$ sati rada sustava. Modifikacija programa stigla dan nakon nesreće.
- Posade sustava mogle su (ali nisu) dobiti uputu o "isključivanju i uključivanju računala" svakih nekoliko sati.

# Samouništenje Ariane 5

- Raketa Ariane 5 lansirana 4. lipnja 1995. godine iz Kouroua (Francuska Gvajana) nosila je u putanju oko Zemlje komunikacijske satelite vrijednost 500 milijuna USD.
- 37 sekundi nakon lansiranja izvršila je samouništenje.

# *Samouništenje Ariane 5 (nastavak)*

Objašnjenje:

- U programu za vođenje rakete postojala je varijabla koja je horizontalnu brzinu rakete (nije koristila ničemu).
- Greška je nastupila kad je program pokušao pretvoriti preveliki 64-bitni realni broj u 16-bitni cijeli broj.
- Računalo je javilo grešku, što je izazvalo samouništenje.
- Isti program bio korišten u prijašnjoj sporijoj verziji Ariane 4, pa do katastrofe nije došlo.

# *Potonuće naftne platforme*

- Naftna platforma Sleipner A potonula je prilikom sidrenja, 23. kolovoza 1991. u blizini Stavangera.
- Baza platforme su 24 betonske ćelije, od kojih su 4 produljene u šuplje stupove na kojima leži paluba.

# Potonuće naftne platforme (nastavak)

- Prilikom uronjavanja baze došlo je do pucanja veza među ćelijama (v. sliku).
- Rušenje je izazvalo potres jačine 3.0 stupnja po Richterovoj ljestvici i štetu od 700 milijuna USD.
- Greška je nastala u projektiranju, primjenom standardnog paketa programa, kad je upotrijebljena metoda konačnih elemenata s nedovoljnom točnošću.
- Proračun je dao naprezanja 47% manja od stvarnih.
- Točnijim proračunom utvrđeno je da su ćelije morale popustiti na dubini od 62 metra, a popustile su na 65 metara!