

Numerička matematika

2. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Uvodna priča o greškama:
 - Problemi numeričke matematike (zašto ona postoji).
 - Modelni primjer za ilustraciju problema.
 - Pojam greške, apsolutna i relativna greška.
 - Mjerenje greške — razne norme.
 - Izvori grešaka — model, metoda, mjerenje, zaokruživanje.
 - Uvjetovanost problema.
 - Stabilnost algoritma.

Informacije

Bitno: vježbe kod asistenta Igora Velčića su

● utorkom, 12–14 u (110), počev od sljedećeg tjedna.

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Izravni “link” na “veliku” skriptu je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf

Greške

Problemi numeričke matematike

U **matematici** postoji niz **problema** koje

- **ne** znamo **egzaktno** riješiti,

tj. prisiljeni smo tražiti **približno** rješenje.

Neki klasični “**zadaci**” u numeričkom računanju:

- rješavanje **sustava linearnih** i **nelinearnih** jednadžbi,

- računanje **integrala**,

- računanje **aproksimacije** neke zadane funkcije (zamjena podataka nekom funkcijom),

- **minimizacija** (maksimizacija) zadane funkcije, uz eventualna **ograničenja** (obično, u domeni),

- rješavanje **diferencijalnih** i **integralnih** jednadžbi ...

Problemi numeričke matematike (nastavak)

Neke probleme čak **znamo** egzaktno riješiti (bar u principu),

☛ poput sustava **linearnih** jednažbi (ponoviti LA1),
no to **predugo** traje, pa koristimo **računala**.

Međutim, tada imamo **dodatni** problem, jer

☛ računala **ne** računaju **egzaktno**, već **približno!**

Oprez, tada ni **osnovne** aritmetičke operacije **nisu** egzaktne.

Dakle, ključni pojam u **numerici** je

☛ **približna** vrijednost, odnosno, **greška**.

Ciljevi numeričke matematike

U skladu s tim, osnovni **zadatak** numeričke matematike je naći (dati) odgovore na sljedeća pitanja:

- **kako** riješiti neki problem — **metoda**,
- **koliko** je “dobro” izračunato rješenje — **točnost**, **ocjena greške**.

Malo preciznije, za svaku od navedenih klasa problema, treba **proučiti** sljedeće “**teme**” (potprobleme):

1. **Uvjetovanost** problema — **osjetljivost** problema na **greške**, prvenstveno u početnim **podacima** (tzv. teorija perturbacije ili smetnje — vezana uz sam **problem**).
2. **Konstrukcija** standardnih **numeričkih metoda** za **rješavanje** danog problema.

Ciljevi numeričke matematike (nastavak)

Kad jednom “stignemo” do **numeričkih metoda**, treba još **proučiti** sljedeće “**teme**” (potprobleme):

3. **Stabilnost** numeričkih metoda — njihova **osjetljivost** na “smetnje” problema.
4. **Efikasnost** pojedine **numeričke metode** — orijentirano prema implementaciji na **računalu**:
 - broj računskih **operacija** i potreban **memorijski** prostor za rješavanje problema.
(= **Složenost**).
5. **Točnost** numeričkih metoda, u smislu neke “**garancije**” točnosti izračunatog **rješenja**.

Ilustracija ovih “potproblema” na primjerima — malo kasnije.

Greške — ponavljanje

Pri **numeričkom** rješavanju nekog problema javljaju se različiti tipovi **grešaka**:

- greške **modela** — svođenje **realnog** problema na neki “**matematički**” problem,
- greške u **ulaznim podacima** (mjerjenja i sl.),
- greške **numeričkih metoda** za rješavanje “**matematičkog**” problema,
- greške “**približnog**” **računanja** — obično su to
 - greške **zaokruživanja** u **aritmetici računala**.

Greške **modela** su “**izvan**” dosega **numeričke matematike**.

- Spadaju u fiziku, kemiju, biologiju, tehniku, ekonomiju, ...

Greške (nastavak)

Sljedeće tri kategorije (**podaci**, **metoda**, **računanje**) su vezane za “**matematički**” problem, i

- **spadaju** u domenu **numeričke matematike**!

O njima nešto “moramo reći”.

Skica **numeričkog** rješavanja nekog problema slič **algoritmu**:



Posebno, ako dozvolimo da, umjesto riječi “**algoritam**”,

- piše i riječ “**metoda**”.

Zamislite da pojam “**algoritam**” uključuje

- **metodu** i stvarno **računanje** rezultata!

Greške (nastavak)



Sve tri vrste grešaka — podaci, metoda, računanje,
• rezultiraju nekom greškom u konačnom rezultatu!

Ta greška nas “zanima”.

Uočite da greške u ulaznim podacima možemo gledati

- neovisno o metodi za rješenje problema,
- i tako dolazimo do pojma uvjetovanosti problema.

Za razliku od toga, greške metode i računanja, naravno,

- ovise o metodi, odnosno, algoritmu za rješenje problema.

Uvjetovanost problema

Neformalno rečeno, **uvjetovanost problema** mjeri

- **osjetljivost** problema na **greške** u **podacima**.

Osnovno svojstvo **uvjetovanosti**:

- **Ne ovisi** o konkretnoj **numeričkoj metodi** za rješenje problema, već samo o **problemu**.

Svrha **uvjetovanosti** = daje odgovor na pitanje:

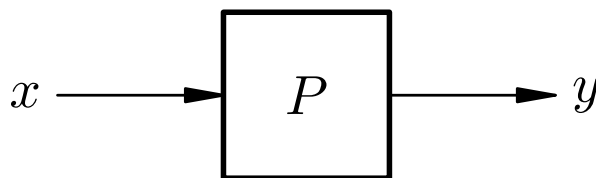
- Koju **točnost rezultata** možemo očekivati
- pri **točnom računanju**
- s (malo) **pomaknutim** — **netočnim podacima**?

Model problema

Matematički model **problema**, zovimo ga P :

- za zadani **ulaz** — podatak $x \in \mathcal{X}$,
- dobivamo **izlaz** — rezultat $y \in \mathcal{Y}$.

Slikica modela je



Problem P interpretiramo kao računanje vrijednosti **funkcije**

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y},$$

gdje su \mathcal{X} i \mathcal{Y} odgovarajući matematički **objekti**. Na primjer, **vektorski** prostori, a vrlo često su i **normirani** prostori (treba nam mjera za grešku).

Uvjetovanost problema (nastavak)

Ideja **uvjetovanosti**:

$$\text{greška u rezultatu} = \text{uvjetovanost} \cdot \text{greška u podacima}$$

Ovisi o obje vrijednosti: točnoj x i približnoj \hat{x} .

Napomene:

- Obično nas uvjetovanost posebno zanima za **male** perturbacije (greške, smetnje) podataka.
- Ako je f dovoljno glatka funkcija, možemo koristiti **Taylorov** razvoj u okolini **točnog** ulaznog podatka x
- i dobiti procjenu **uvjetovanosti** preko **derivacija**!

Primjeri problema (nastavak)

Primjer 1. Računanje **sume** dva **realna** broja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

s tim da je $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$.

Primjer 2. Računanje **produkta** dva **realna** broja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

s tim da je opet $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$.

Primjeri problema (nastavak)

Primjer 3. Računanje sjecišta pravaca

$$P_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = x_1\},$$

$$P_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = x_1\}.$$

Smatramo da su koeficijenti a_{ij} i x_i , za $i, j = 1, 2$, ulazni podaci.

Ovaj problem pišemo u matričnom zapisu kao linearni sustav od dvije jednačbe oblika $Ay = x$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Primjeri problema (nastavak)

Traženo **sjecište** je **rješenje** linearnog sustava $Ay = x$.

Ako pretpostavimo da je matrica A sustava **regularna**, tj. $\det A \neq 0$, onda je $y = A^{-1}x$. Dakle,

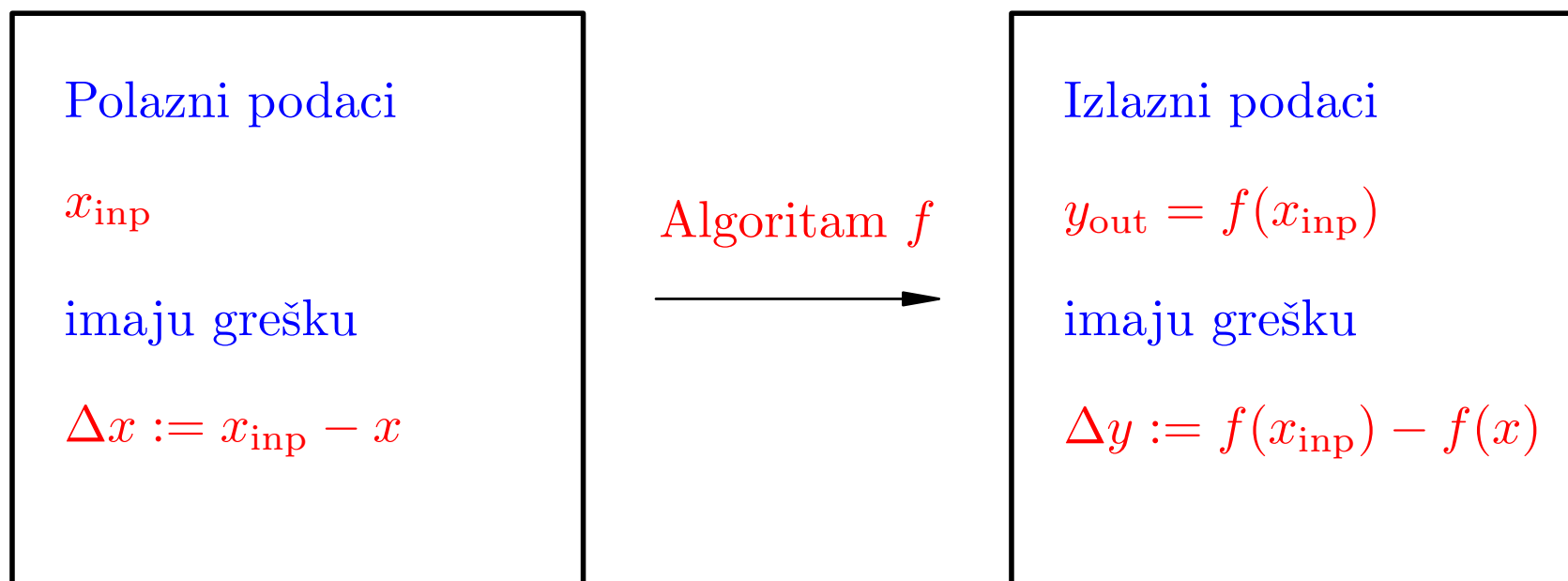
$$f(x) = A^{-1}x,$$

s tim da je $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$.

Norme i uvjetovanost

Greška na ulazu – što na izlazu?

Zadatak numeričke analize je odrediti **vezu** između greške na **ulazu** i greške na **izlazu**.



Uzimamo da su \mathcal{X} i \mathcal{Y} (barem) **vektorski** prostori.

Kako mjeriti grešku?

Kad x_{inp} i $f(x_{\text{inp}})$ nisu brojevi, nego **vektori** ili **matrice**, grešku možemo mjeriti:

- 📍 po svakoj od **komponenata**, **međutim** to je malo previše brojeva,
- 📍 kao neku “ukupnu ili najveću” grešku — **samo jedan broj** i to korištenjem vektorskih/matričnih **normi**.

Prisjetite se: **vektorski** prostor na kojem je definirana norma zove se **normirani prostor**.

Vektorske norme

“Vektorska” **norma** na vektorskom prostoru V (nad poljem F , gdje je $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$) je

• je svaka funkcija $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$

koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in F$, $\forall x \in V$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$
(nejednakost poznata pod imenom **nejednakost trokuta**).

Najpoznatije vektorske norme

Kad je $V = \mathbb{R}^n$ ili $V = \mathbb{C}^n$ (kon. dim.), najčešće se koriste sljedeće tri norme:

1. **1-norma** ili ℓ_1 norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,

2. **2-norma** ili ℓ_2 norma ili **euklidska norma**

$$\|x\|_2 = (x^* x)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

3. **∞ -norma** ili ℓ_∞ norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

Samo je **2-norma** izvedena iz **skalarnog produkta**.

Norme na prostoru funkcija

Definicija vektorskih normi u sebi **ne sadrži** zahtjev da je vektorski prostor V konačno dimenzionalan.

Na primjer, norme definirane na vektorskom prostoru **neprekidnih funkcija** na $[a, b]$ (u oznaci $C[a, b]$) definiraju se slično normama na \mathbb{R}^n :

1. L_1 norma $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt,$

2. L_2 norma $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$

3. L_∞ norma $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$

Ekvivalentnost normi

Može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem. Na svakom **konačno**-dimenzionalnom vektorskom prostoru V sve su norme ekvivalentne, tj. za svake dvije norme $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ postoje konstante c i C takve da je

$$c\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C\|v\|_a, \quad \text{za sve } v \in V.$$

Na primjer,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Razlika između teorije i prakse — kad je n **ogroman**.

Matrične norme

Zamijenimo li u definiciji vektorske norme formalno vektor matricom, dobivamo **matričnu normu**.

Matrična norma je svaka funkcija $\| \cdot \| : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Tome se često dodaje zahtjev **konzistentnosti**

$$4. \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

kad god je matrični produkt AB definiran.

Matrične norme (nastavak)

Matrične norme nastaju na dva načina:

- Maticu A promatramo kao **vektor** s $m \times n$ elemenata i za taj vektor koristimo odgovarajuću vektorsku normu.

Najpoznatija takva norma odgovara vektorskoj **2-normi** i zove se **euklidska**, **Frobeniusova**, **Hilbert–Schmidtova**, ili **Schurova** norma

$$\|A\|_F = (\operatorname{tr}(A^* A))^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

- **operatorske norme:**

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{ili } = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|).$$

Matrične norme (nastavak)

Uvrštavanjem odgovarajućih vektorskih normi, dobivamo

1. matrična **1-norma**, “maksimalna stupčana norma”

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

2. matrična **2-norma**, spektralna norma

$$\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{1/2} = \sigma_{\max}(A),$$

3. matrična **∞ -norma**, “maksimalna retčana norma”

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

ρ je **spektralni radijus** matrice (po aps. vrijednosti maksimalna svojstvena vrijednost), a σ **singularna vrijednost** matrice.

Matrične norme (nastavak)

Svojstva:

- I matrične norme nisu međusobno neovisne (slično kao vektorske norme) — ekvivalentnost.
- Matrična 2-norma se teško računa pa se uobičajeno procjenjuje korištenjem ostalih normi.
- Za svaku operatorsku normu vrijedi

$$\|Ay\| \leq \|A\| \|y\|,$$

za svaki vektor y , što se često koristi kod ocjena. Formula direktno izlazi iz definicije operatorske norme.

Mjerenje grešaka i uvjetovanost

Relativna/apsolutna uvjetovanost problema mjeri koliko je problem **osjetljiv** na odgovarajuće promjene polaznih podataka.

- Apsolutna greška: $\|\Delta x\|$, $\|\Delta y\|$, (svaka norma u svom prostoru), gdje je

$$\Delta x = x - \hat{x}, \quad \Delta y = y - \hat{y}.$$

- Apsolutna uvjetovanost:

$$\kappa_{\text{abs}}(x) := \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|}.$$

Veza s derivacijom!

Mjerenje grešaka i uvjetovanost (nastavak)

U praksi se češće koristi **relativna** mjera za grešku (na primjer, zbog aritmetike računala).

● **Relativna greška:**

$$\delta_x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \quad \delta_y := \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}.$$

● **Relativna uvjetovanost:**

$$\kappa_{\text{rel}}(x) := \frac{\|\delta_y\|}{\|\delta_x\|}.$$

Problem je **dobro uvjetovan** ako je

● κ_{rel} što je moguće **manji**, za $\delta_x \rightarrow 0$.

Landauov simbol — red veličine

Neka su $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funkcije, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ i $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ norme i neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ako postoje konstante $C > 0$ i $\delta > 0$ takve da za sve x vrijedi

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \implies \|g(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C\|h(x)\|_{\mathbb{R}^m},$$

onda kažemo da je

“funkcija g reda \mathcal{O} od h , za x koji teži prema x_0 ”

i to pišemo ovako

$$g(x) = \mathcal{O}(h(x)) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Landauov simbol (nastavak)

Primjer. Za $m = n = 1$ je

$$\sin x = \mathcal{O}(x) \quad (x \rightarrow a), \quad \text{za sve } a \in \mathbb{R},$$

$$x^2 + 3x = \mathcal{O}(x) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$x^2 - x - 6 = \mathcal{O}(x - 3), \quad (x \rightarrow 3).$$

Uvjetovanost i Taylorov teorem

Istražimo uvjetovanost problema za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Promatramo ponašanje f za **male** perturbacije Δx u okolini točke x . Neka je Δy pripadna perturbacija funkcijske vrijednosti $y = f(x)$, tj. $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$.
- Neka je f još dva puta neprekidno derivabilna. Korištenjem Taylorovog polinoma stupnja 1 dobivamo

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= f'(x)\Delta x + \frac{f''(x + \theta\Delta x)}{2!} (\Delta x)^2, \quad \theta \in (0, 1).\end{aligned}$$

Uvjetovanost i Taylorov teorem (nastavak)

- Za male perturbacije Δx , **apsolutni** oblik ove relacije je

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + O((\Delta x)^2),$$

odakle slijedi da je $f'(x)$ ili $|f'(x)|$ **apsolutna** uvjetovanost funkcije f (za male Δx).

- Ako je $x \neq 0$ i $y \neq 0$, onda joj je **relativna** forma

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{x f'(x)}{f(x)} \frac{\Delta x}{x} + O\left(\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right),$$
 pa **relativnu**

uvjetovanost funkcije f možemo definirati kao

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = (\text{cond } f)(x) := \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|.$$

Uvjetovanost – primjer

Primjer. **Relativna** uvjetovanost funkcije

$$f(x) = \ln x,$$

je

$$(\text{cond } f)(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{1}{\ln x} \right|,$$

što je **veliko** za $x \approx 1$.

Pitanje: **Apsolutna** uvjetovanost?

Rekurzija za integral

Ispitajmo **uvjetovanost** problema računanja integrala

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5} dt$$

za fiksni prirodni broj n .

Nađimo vezu I_k i I_{k-1} , s tim da I_0 znamo izračunati

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{t+5} dt = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln \frac{6}{5}.$$

Rekurzija za integral (nastavak)

Vrijedi da je

$$\frac{t}{t+5} = 1 - \frac{5}{t+5},$$

pa moženjem obje strane s t^{k-1} i integracijom dobivamo

$$I_k = \int_0^1 t^{k-1} dt - 5I_{k-1} = \frac{1}{k} - 5I_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

I_k je rješenje (linearne, nehomogene) **diferencijske jednačbe**

$$y_k = -5y_{k-1} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{uz poč. uvj. } y_0 = I_0.$$

Rekurzija za integral (nastavak)

Varijacija početnog uvjeta definira niz funkcija f_k , $y_k = f_k(y_0)$. Zanima nas uvjetovanost f_n u točki $y_0 = I_0$ u ovisnosti o $n \in \mathbb{N}$.

- I_0 nije **egzaktno** prikaziv,
- umjesto I_0 spremi se \hat{I}_0 ,
- rezultat – neka aproksimacija $\hat{I}_n = f_n(\hat{I}_0)$.

Indukcijom

$$y_n = f_n(y_0) = (-5)^n y_0 + p_n,$$

gdje je p_n ovisi samo o nehomogenim članovima rekurzije, ali ne i o y_0 .

Rekurzija za integral (nastavak)

Uvjetovanost je

$$(\text{cond } f_n)(y_0) = \left| \frac{y_0 f'_n(y_0)}{y_n} \right| = \left| \frac{y_0 (-5)^n}{y_n} \right|.$$

Iz definicije integrala: I_n monotonno padaju po n , čak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Zbrajanjima dobivamo sve manje i manje brojeve!

$$(\text{cond } f_n)(I_0) = \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_n} > \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_0} = 5^n.$$

f_n je vrlo loše uvjetovana u $y_0 = I_0$, i to tim gore kad n raste.

Rekurzija unaprijed — rezultati

Pitanje: Kako se loša uvjetovanost vidi, kad stvarno računamo $f_n(I_0)$?

Pokaži program i rezultate!

Rekurzija za integral (nastavak)

Može li se loša uvjetovanost **izbjeći**? Može — **okretanjem rekurzije**.

Treba uzeti neki $\nu > n$ i računati

$$y_{k-1} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{k} - y_k \right), \quad k = \nu, \nu - 1, \dots, n + 1.$$

Problem: kako izračunati početnu vrijednost y_ν .

Nova rekurzija definira niz funkcija g_k , koje vežu y_n i y_ν , uz $\nu > n$, tj.

$$y_n = g_n(y_\nu).$$

Rekurzija za integral (nastavak)

Uvjetovanost za g_n

$$(\text{cond } g_n)(y_\nu) = \left| \frac{y_\nu (-1/5)^{\nu-n}}{y_n} \right|, \quad \nu > n.$$

Za $y_\nu = I_\nu$, je $y_n = I_n$, a iz monotonosti I_n slijedi

$$(\text{cond } g_n)(I_\nu) = \frac{I_\nu}{I_n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n,$$

što je ispod 1, tj. greške se prigušuju.

Rekurzija za integral (nastavak)

Ako je \hat{I}_ν neka aproksimacija za I_ν , onda za **relativne perturbacije** vrijedi

$$\left| \frac{\hat{I}_n - I_n}{I_n} \right| = (\text{cond } g_n)(I_\nu) \cdot \left| \frac{\hat{I}_\nu - I_\nu}{I_\nu} \right| < \left(\frac{1}{5} \right)^{\nu-n} \cdot \left| \frac{\hat{I}_\nu - I_\nu}{I_\nu} \right|.$$

Zbog linearnosti funkcije g_n , ova relacija vrijedi za **bilo kakve perturbacije**, a ne samo male.

- Početna vrijednost \hat{I}_ν uopće **ne mora biti blizu** prave I_ν .
- Možemo uzeti $\hat{I}_\nu = 0$, čime smo napravili relativnu grešku od **100%** u početnoj vrijednosti ...

Rekurzija za integral (nastavak)

- ... a još uvijek dobivamo \hat{I}_n s relativnom greškom

$$\left| \frac{\hat{I}_n - I_n}{I_n} \right| < \left(\frac{1}{5} \right)^{\nu - n}, \quad \nu > n.$$

- Povoljnim izborom ν , ocjenu na desnoj strani možemo napraviti **po volji malom** — ispod tražene točnosti ε .

- Dovoljno uzeti $\nu \geq n + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 5}$, i $\hat{I}_\nu = 0$ i računamo vrijednosti

$$\hat{I}_{k-1} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{k} - \hat{I}_k \right), \quad k = \nu, \nu - 1, \dots, n + 1.$$

Rekurzija unatrag — rezultati

Pitanje: Kako se **dobra** uvjetovanost **vidi**, kad stvarno računamo $g_n(I_\nu)$?

Pokaži program i rezultate za $\varepsilon = 10^{-19}$!

🔴 Za ovaj ε dobijemo

$$\nu \geq n + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 5} \approx n + 28.$$

Dakle, “**silazno**” računamo **28** vrijednosti.

🔴 Stvarna početna vrijednost je $\hat{I}_\nu = 0$.

Primjer grešaka zaokruživanja

Primjer rasprostiranja grešaka

Primjer. Vrijednost

$$f_n(x) = (x - n)^{10}, \quad n = 0, \dots, 10,$$

računamo u aritmetici računala u okolini točke n .

Primijetite da je graf funkcije $(x - n)^{10}$ **translatirani** graf funkcije x^{10} za n jedinica udesno.

Funkcijsku vrijednost funkcija f_n možemo izračunati na više načina koji su **matematički ekvivalentni**, ali **nisu numerički jednaki**.

Primjer rasprostiranja grešaka (nastavak)

Računat ćemo:

- translacijom grafa funkcije x^{10} za n jedinica udesno,
- korištenjem binomne formule

$$(x - n)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k (-n)^{10-k},$$

s tim da polinom na desnoj strani računamo Hornerovom shemom.

Odgovor: U okolini točke n je $(x - n)^{10}$ mali broj. Članovi u sumi na desnoj strani su **alternirajući** po predznaku i **rastu** s porastom n .

Primjer rasprostiranja grešaka (nastavak)

Kako izgledaju grafovi?

- zeleno — graf dobiven translacijom,
- crveno — korištenjem binomne formule.

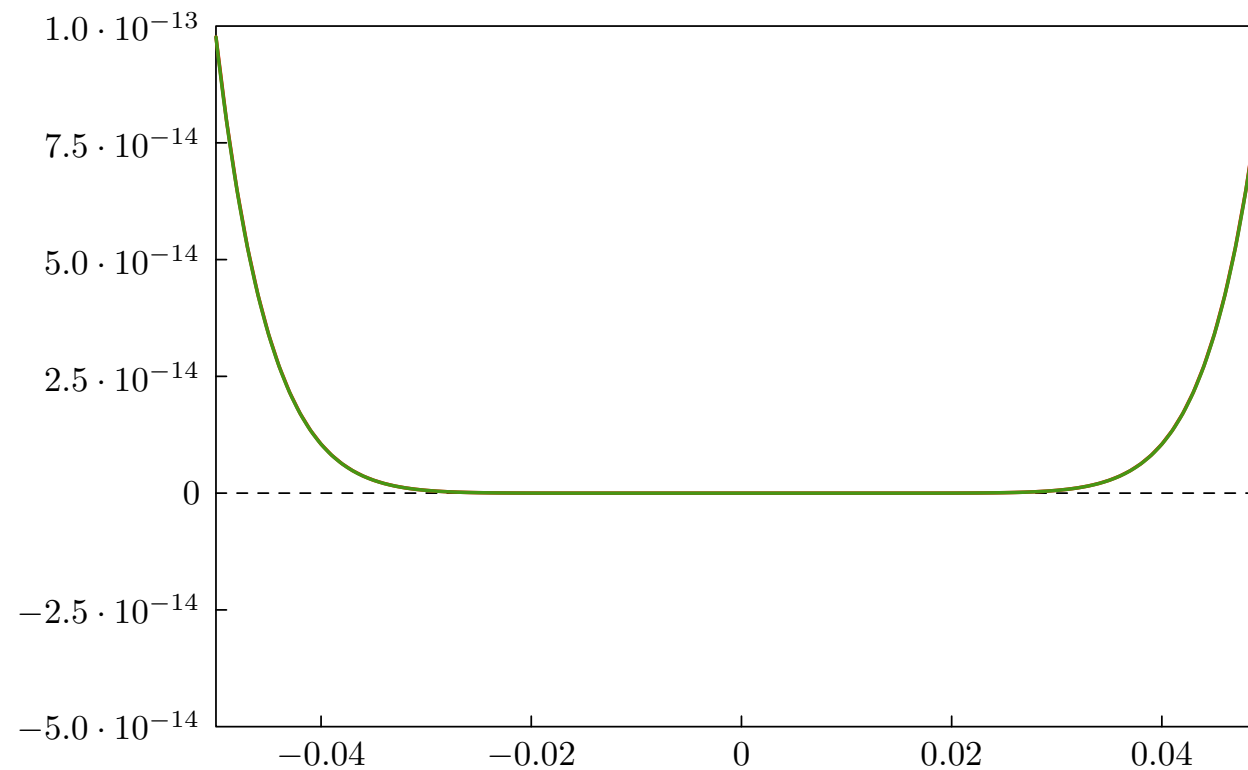
Za svaki n crtamo dvije slike grafa funkcije f_n :

- na intervalu $[n - 0.05, n + 0.05]$,
- na intervalu $[n - r, n + r]$, gdje je r odabran tako da ovaj interval sadrži numeričke nultočke od f_n .

Obratite pažnju na skale po x i y !

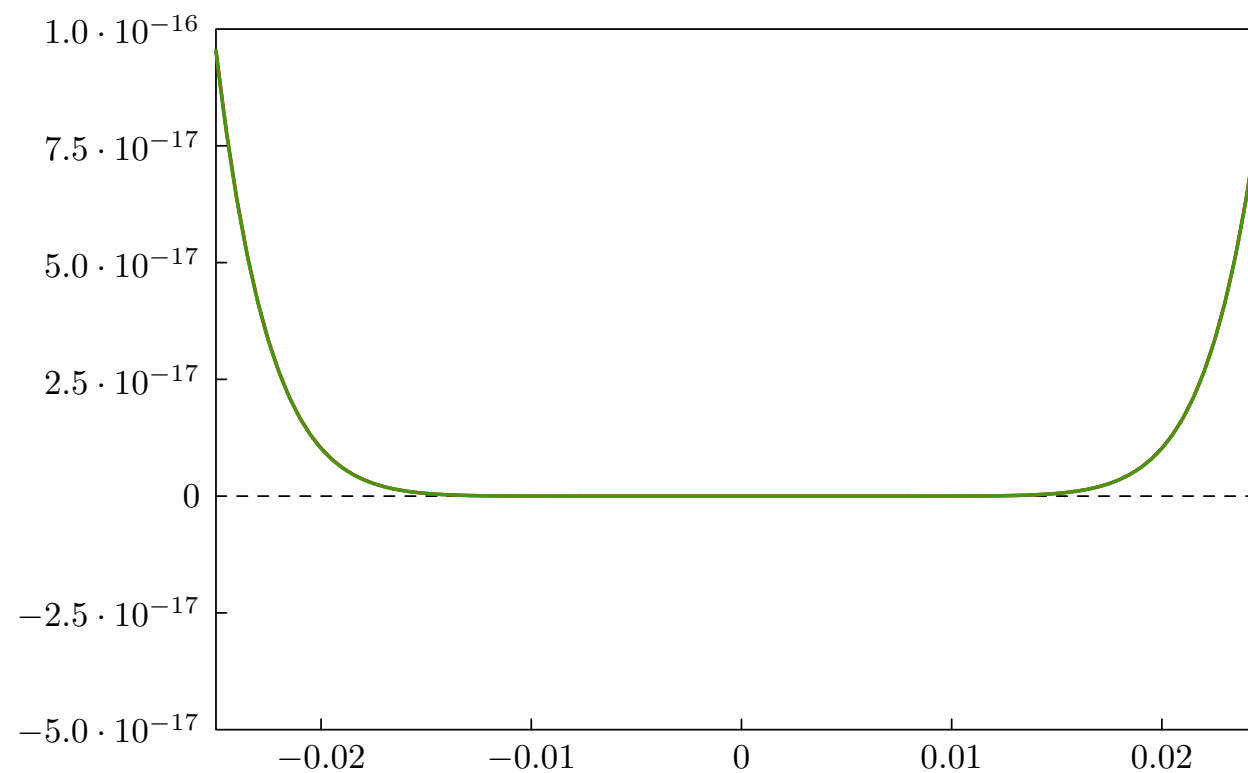
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 0$ (1)

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



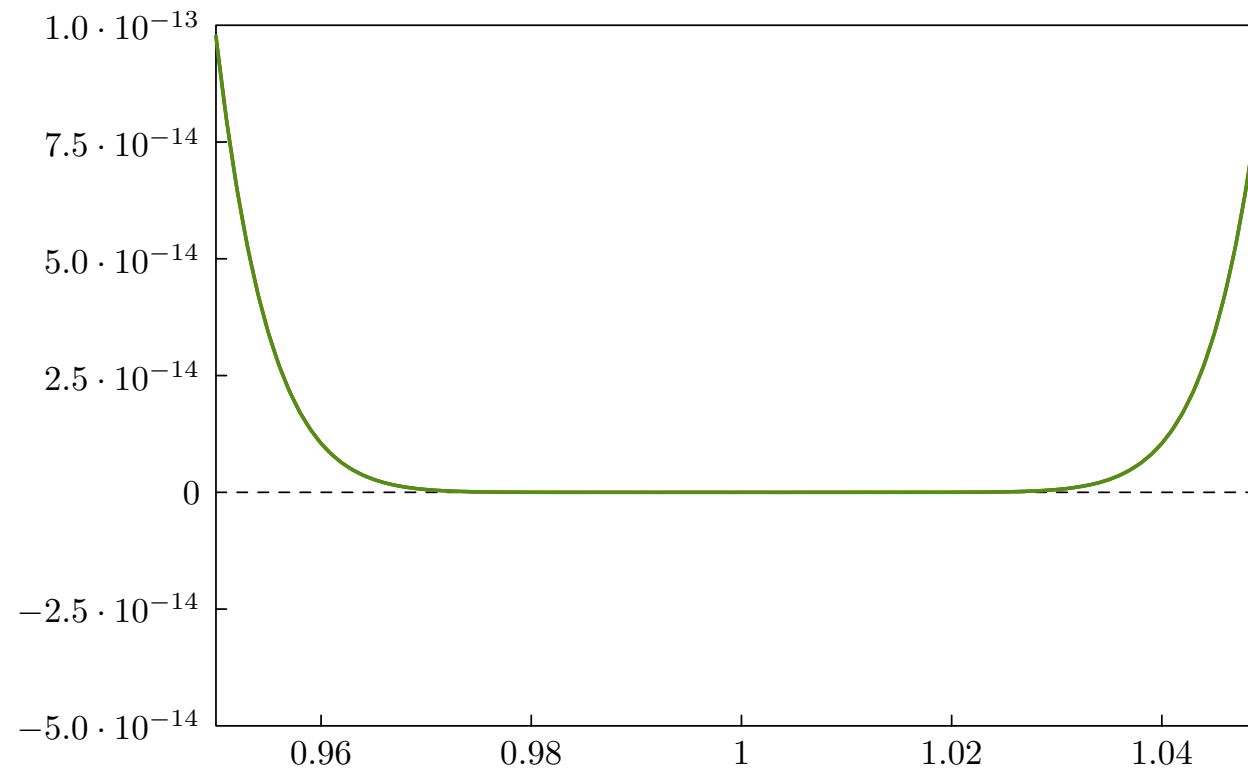
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 0$ (2)

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



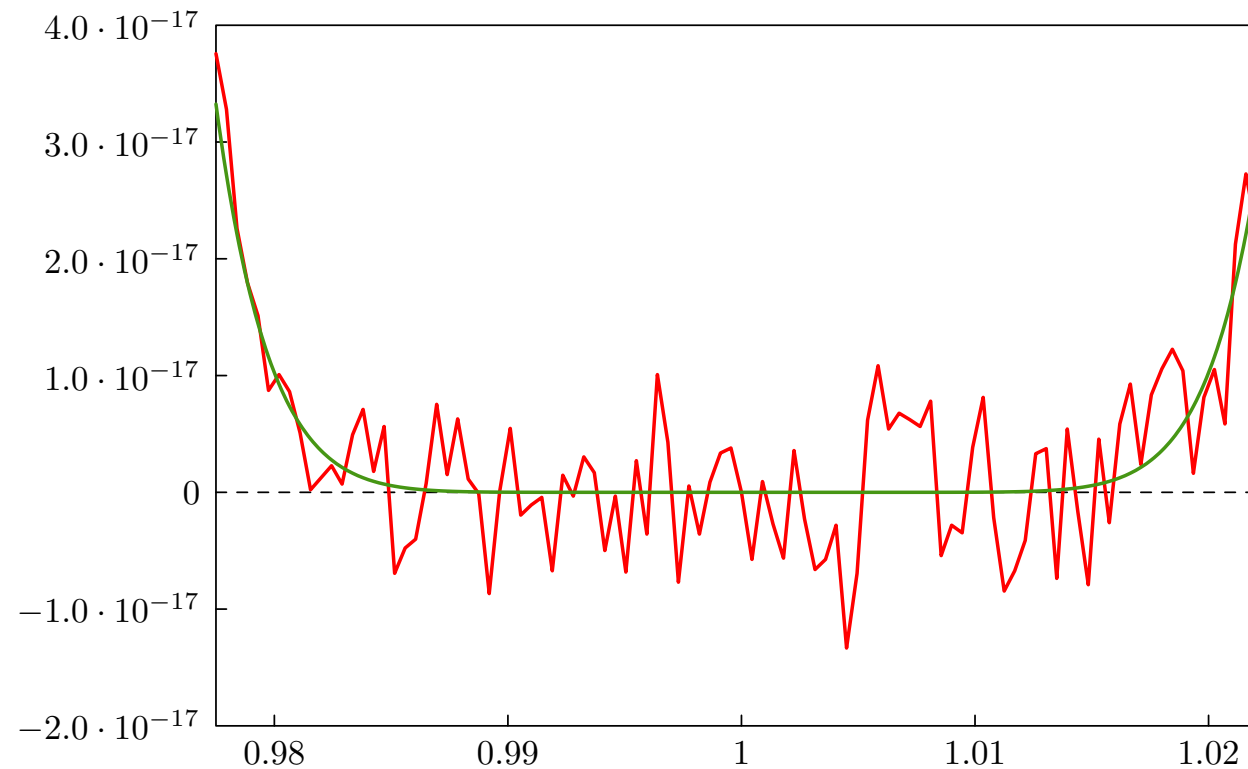
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 1$ (1)

$$(x - 1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5 \\ + 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$



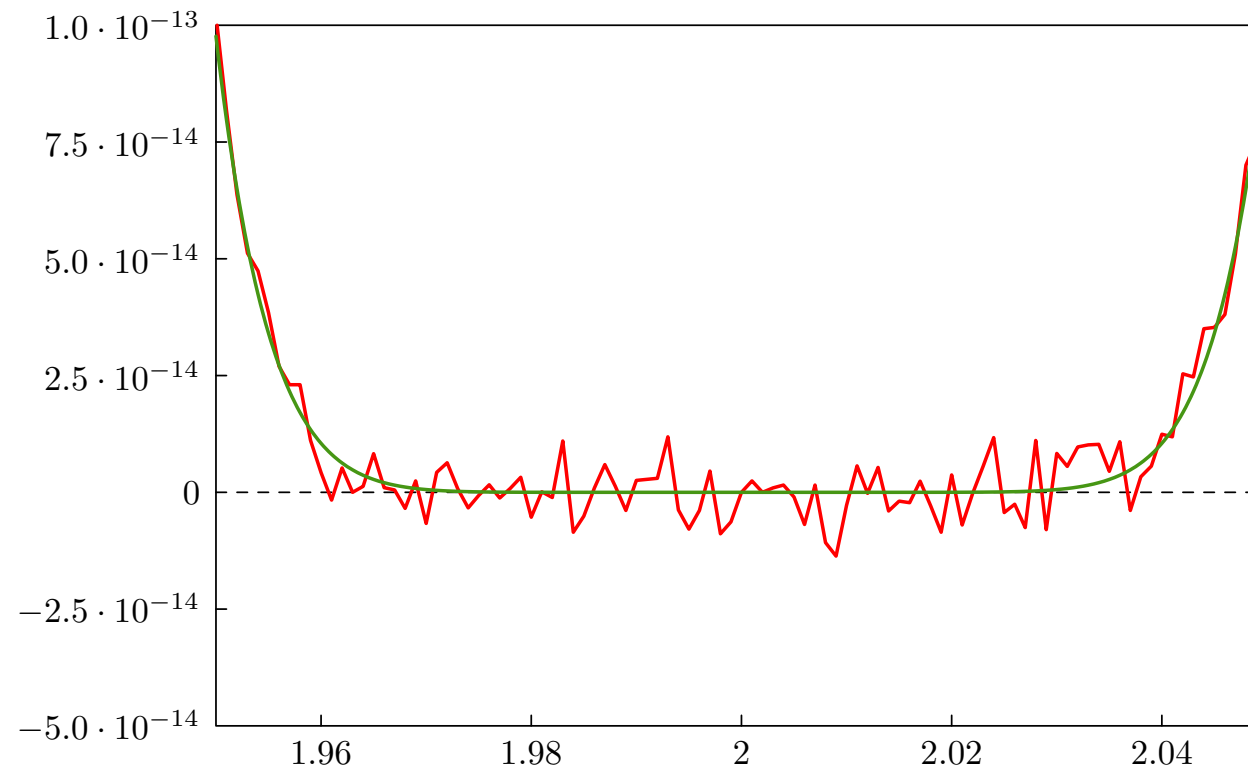
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 1$ (2)

$$(x - 1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5 \\ + 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$



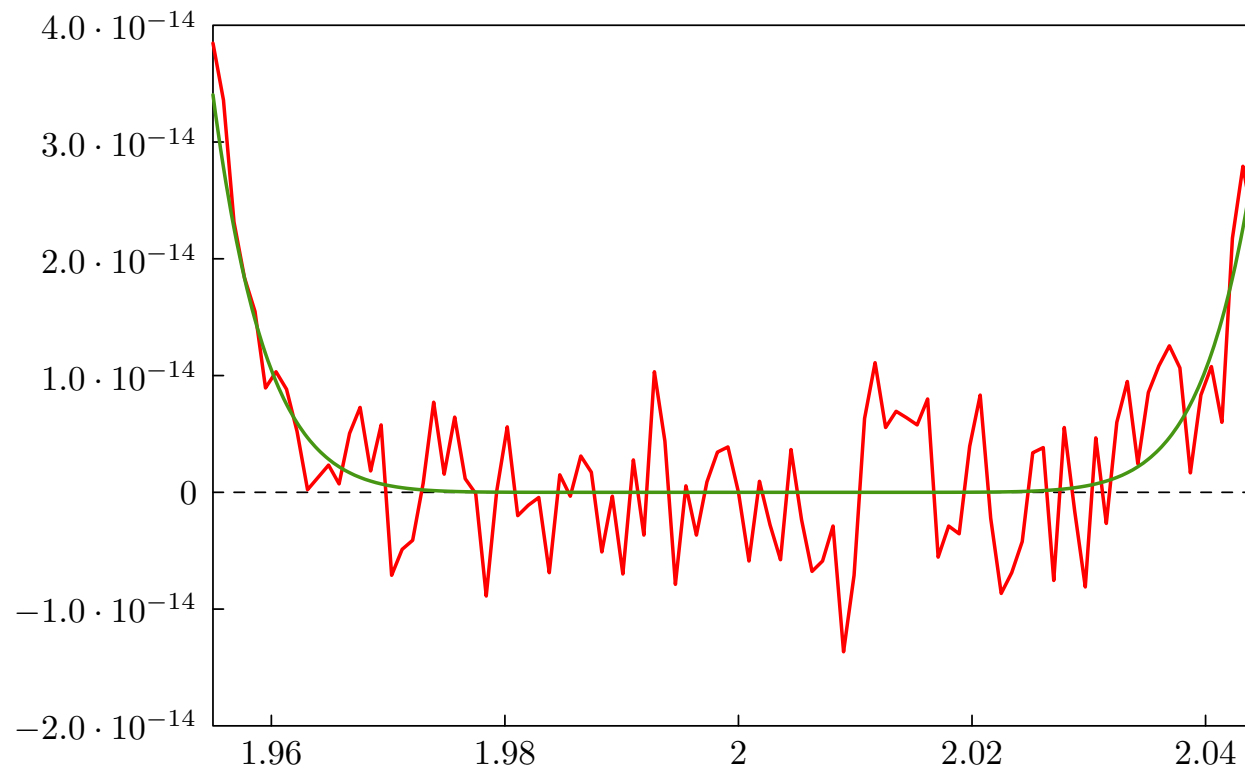
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 2$ (1)

$$(x - 2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5 \\ + 13440x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



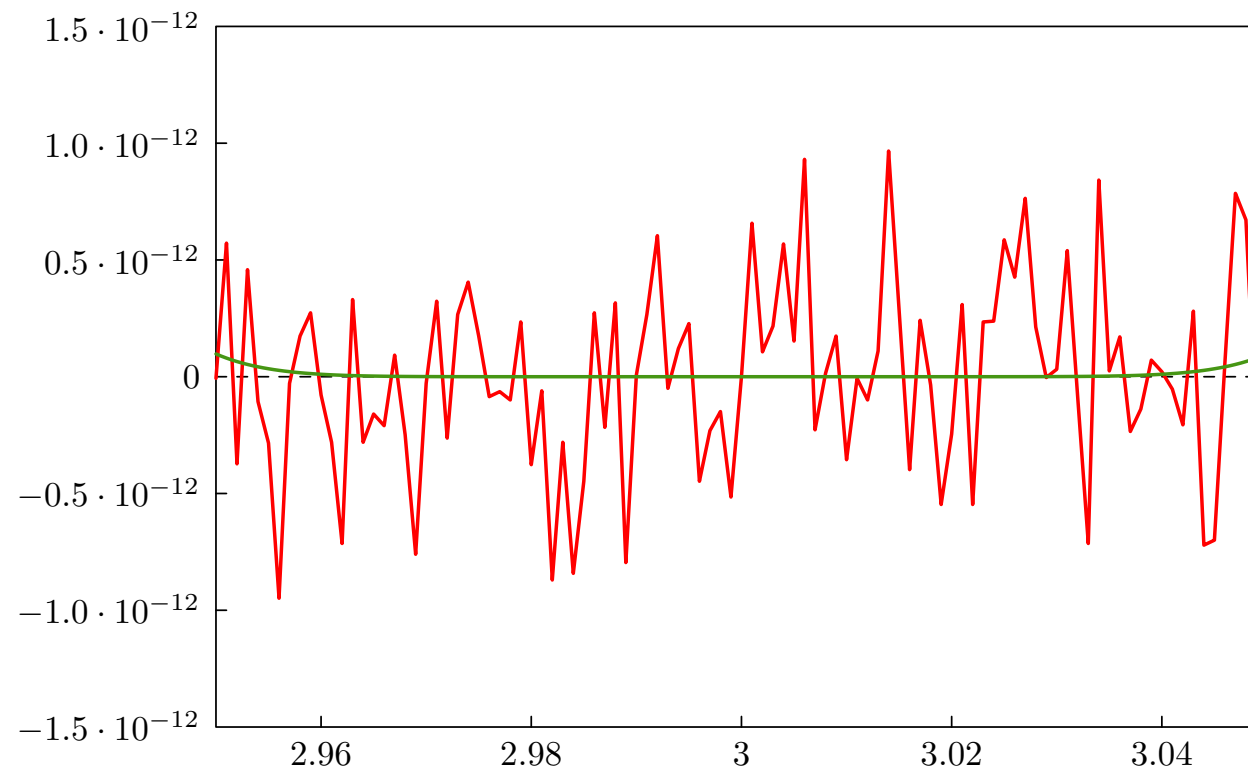
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 2$ (2)

$$(x - 2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5 \\ + 13440x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



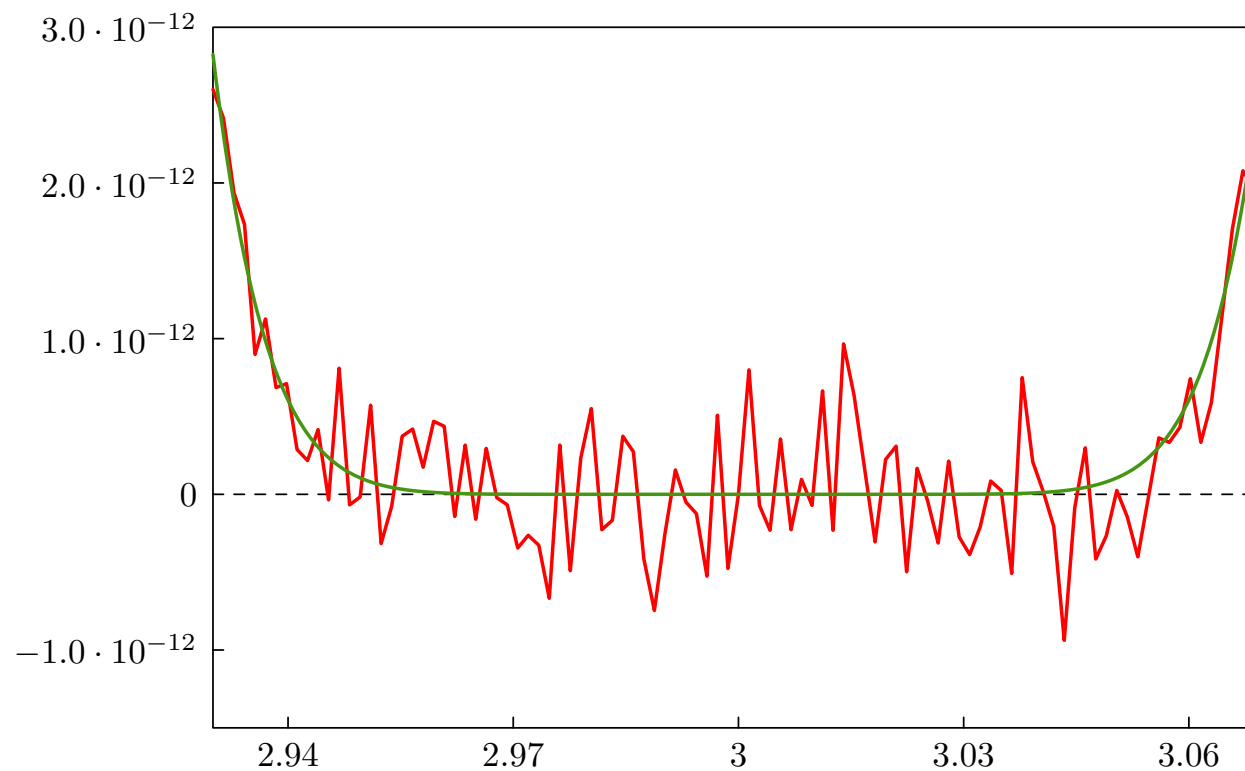
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 3$ (1)

$$(x - 3)^{10} = x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 - 61236x^5 \\ + 153090x^4 - 262440x^3 + 295245x^2 - 196830x + 59049$$



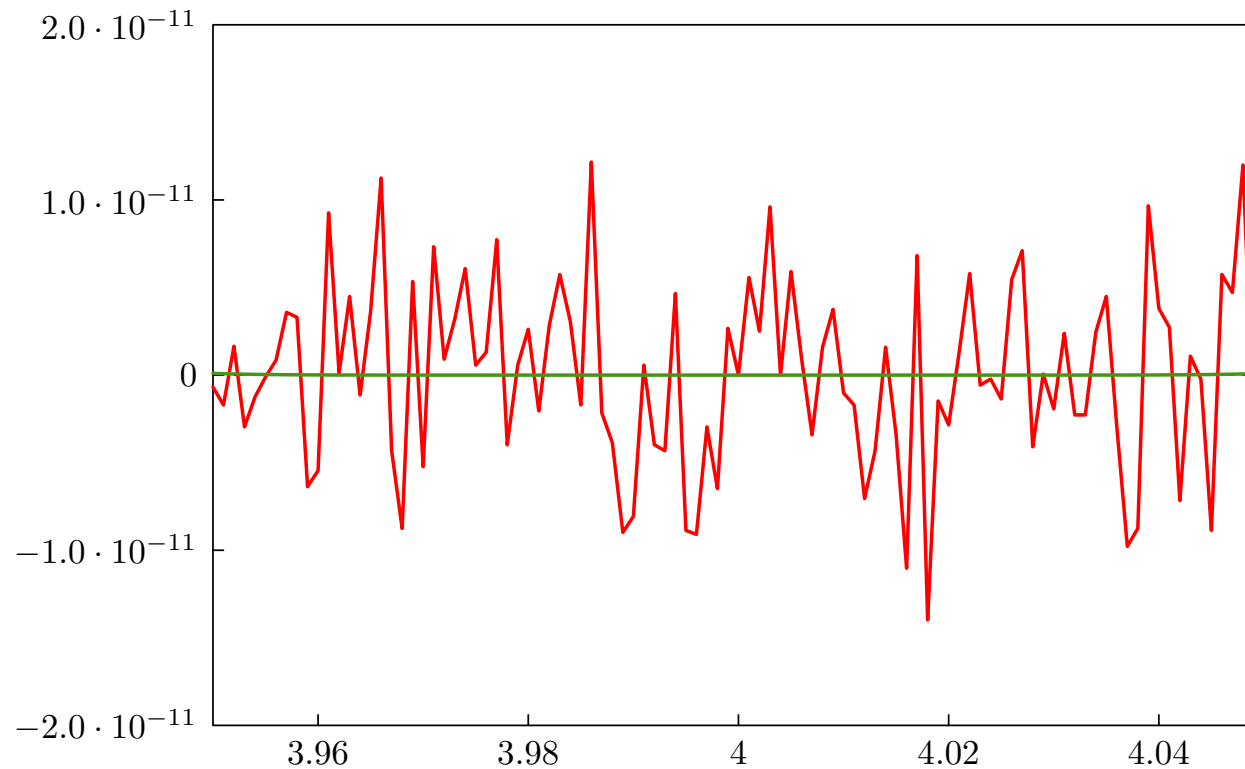
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 3$ (2)

$$(x - 3)^{10} = x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 - 61236x^5 \\ + 153090x^4 - 262440x^3 + 295245x^2 - 196830x + 59049$$



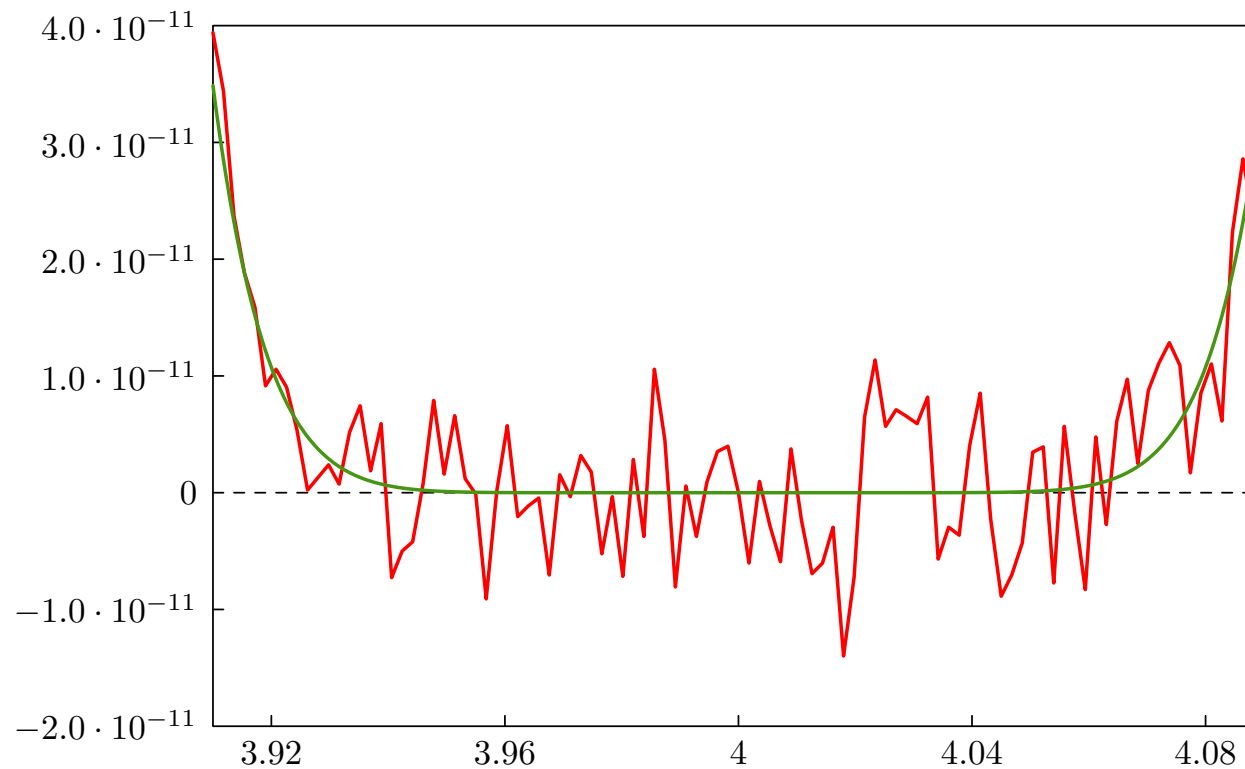
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 4$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 4)^{10} = & x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\ & - 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\ & + 2949120x^2 - 2621440x + 1048576\end{aligned}$$



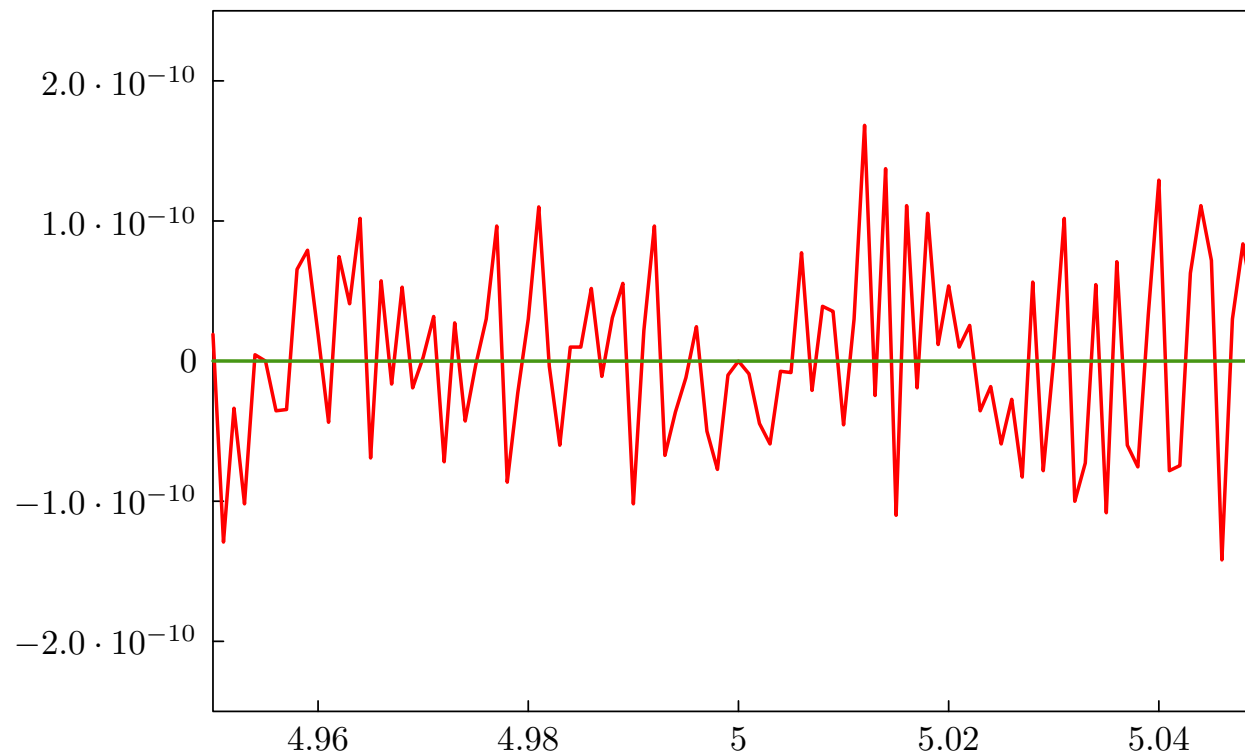
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 4$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 4)^{10} = & x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\ & - 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\ & + 2949120x^2 - 2621440x + 1048576\end{aligned}$$



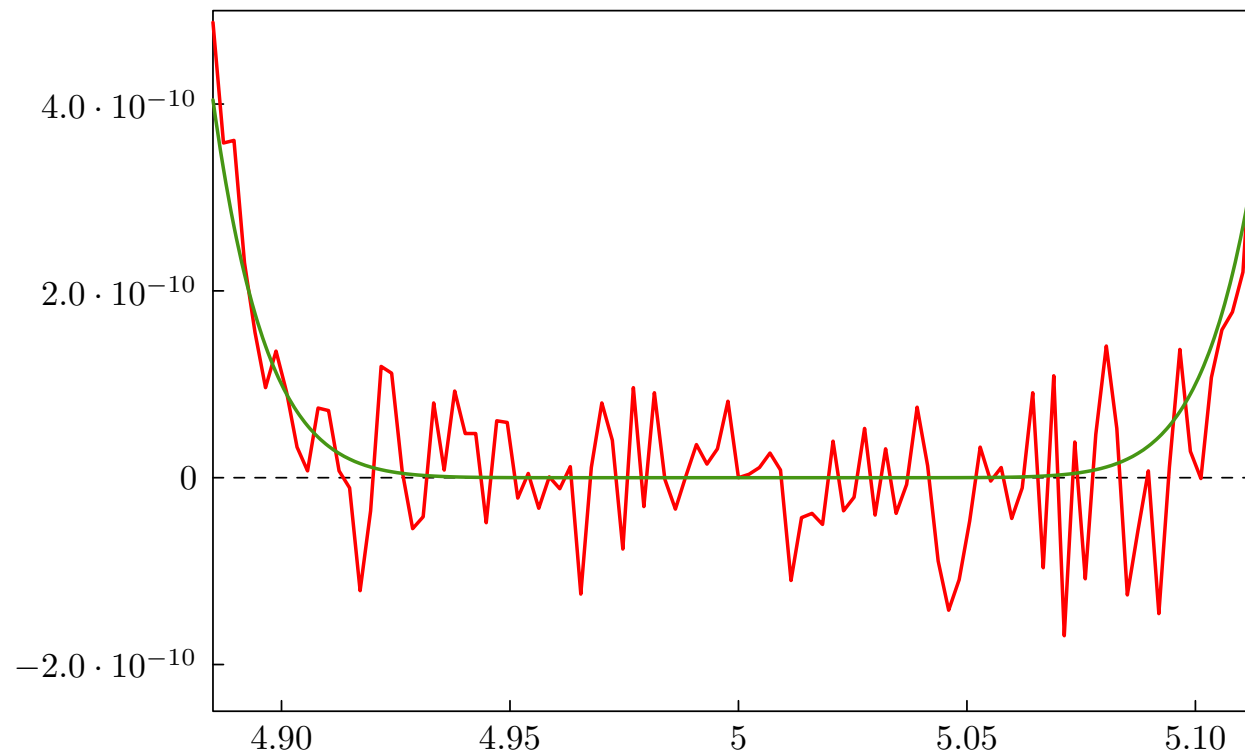
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 5$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 5)^{10} = & x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\ & - 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\ & + 17578125x^2 - 19531250x + 9765625\end{aligned}$$



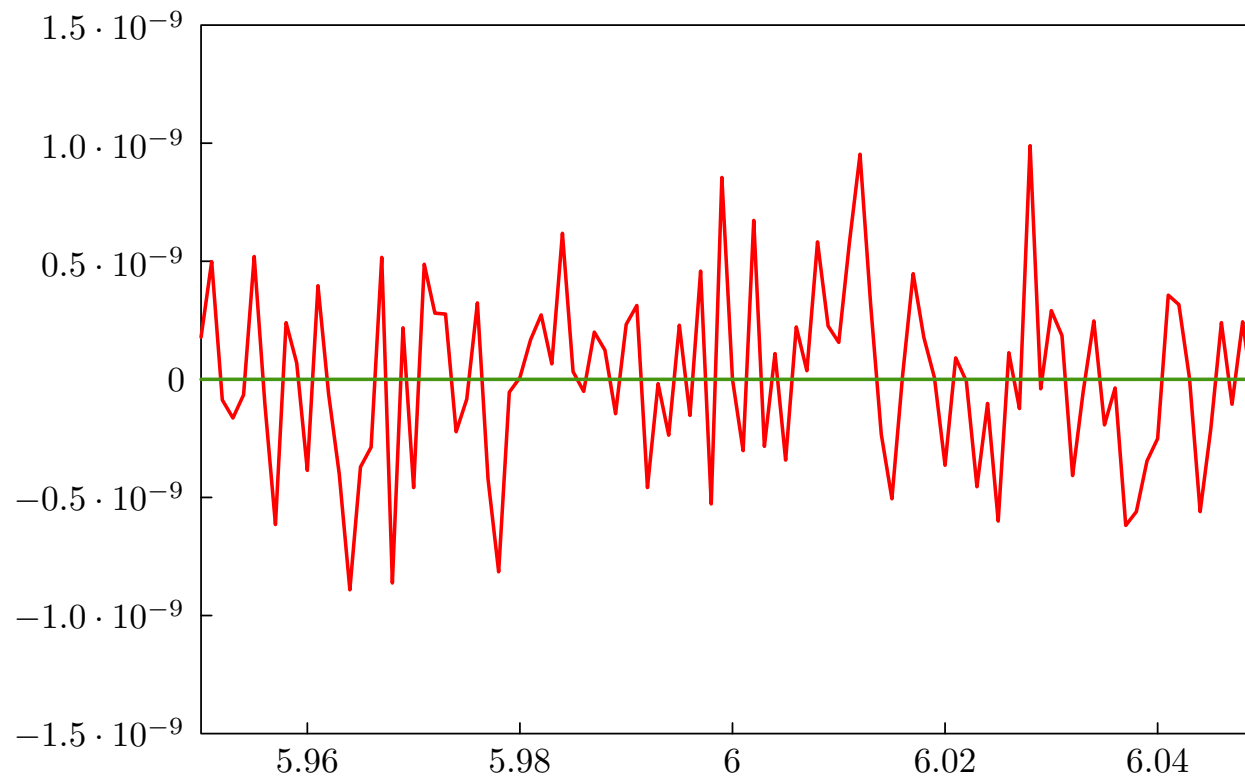
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 5$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 5)^{10} &= x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\ &\quad - 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\ &\quad + 17578125x^2 - 19531250x + 9765625\end{aligned}$$



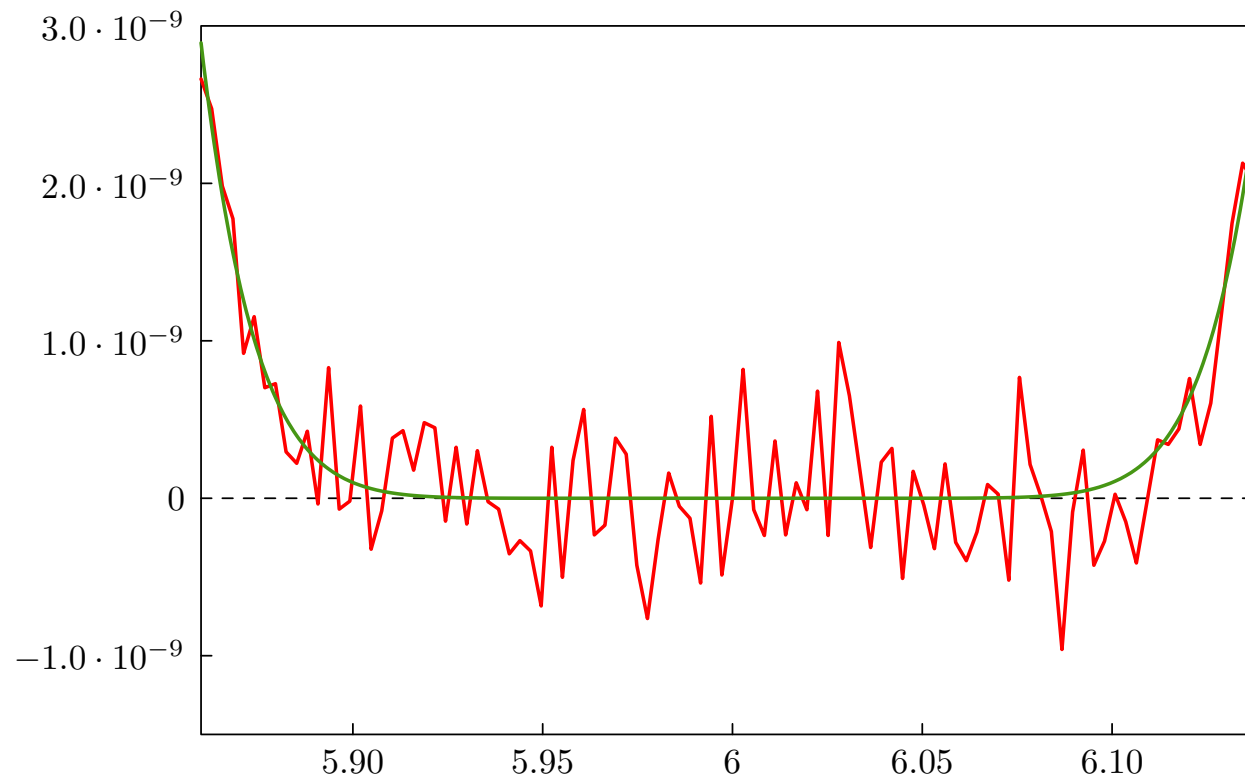
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 6$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 6)^{10} = & x^{10} - 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\ & - 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\ & + 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176\end{aligned}$$



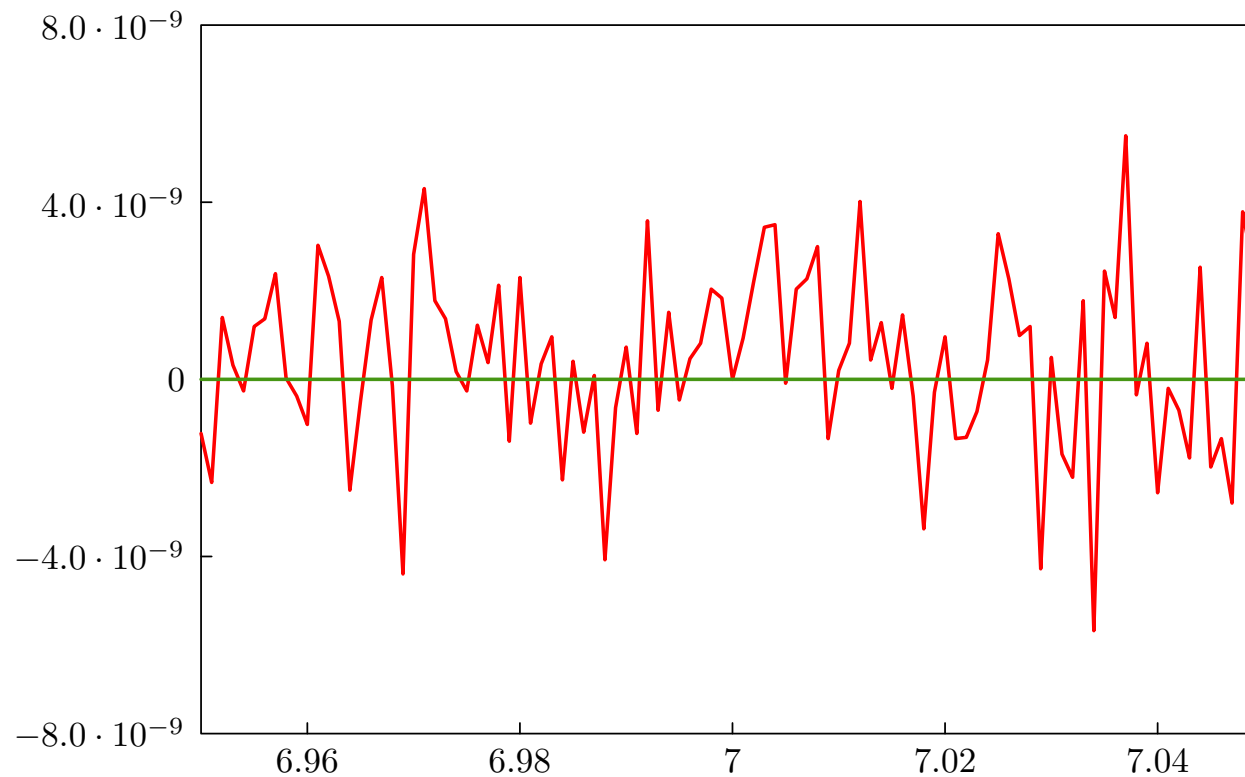
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 6$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 6)^{10} = & x^{10} - 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\ & - 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\ & + 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176\end{aligned}$$



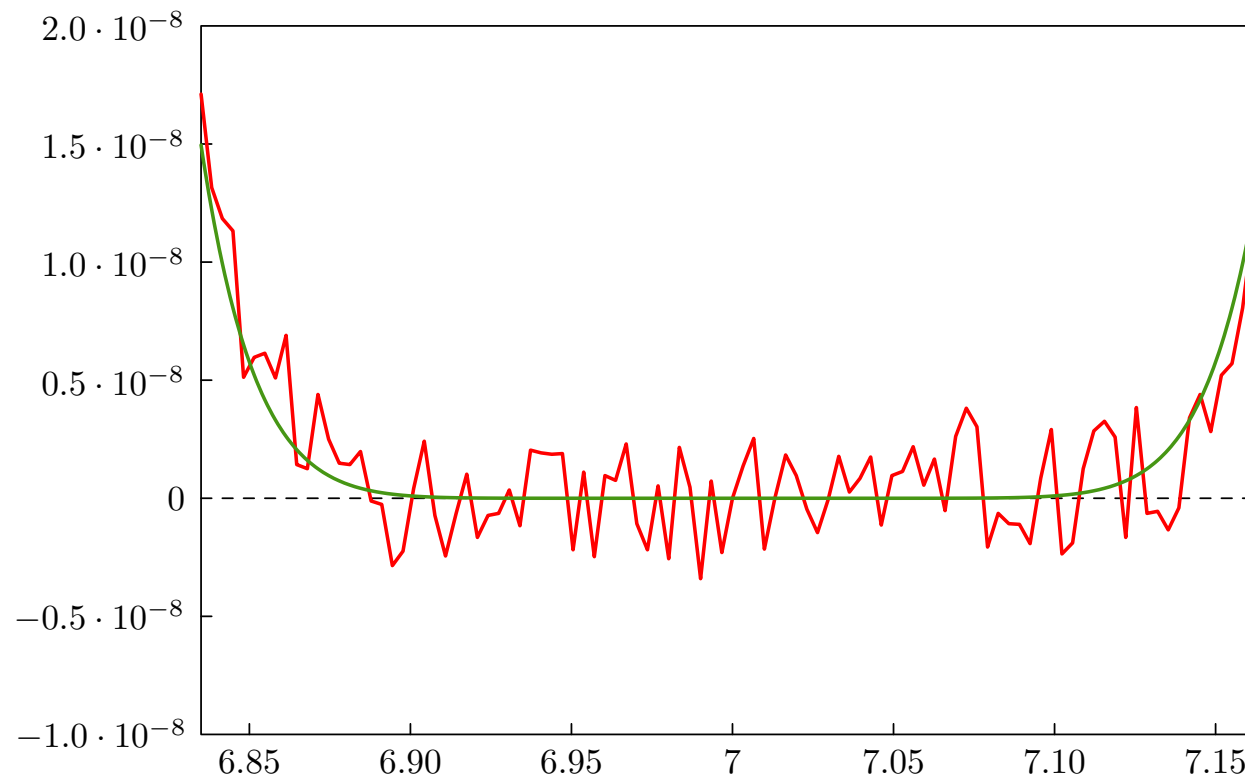
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 7$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 7)^{10} = & x^{10} - 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\ & - 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\ & + 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249\end{aligned}$$



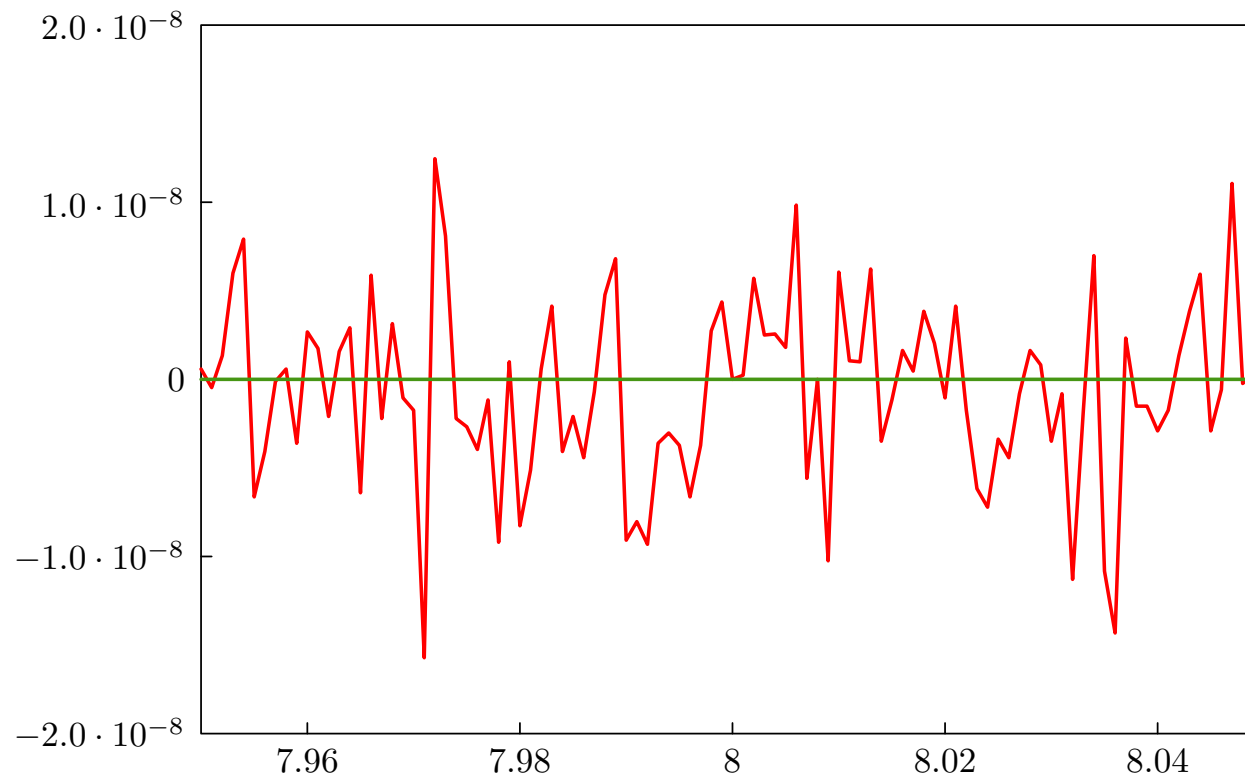
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 7$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 7)^{10} = & x^{10} - 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\ & - 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\ & + 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249\end{aligned}$$



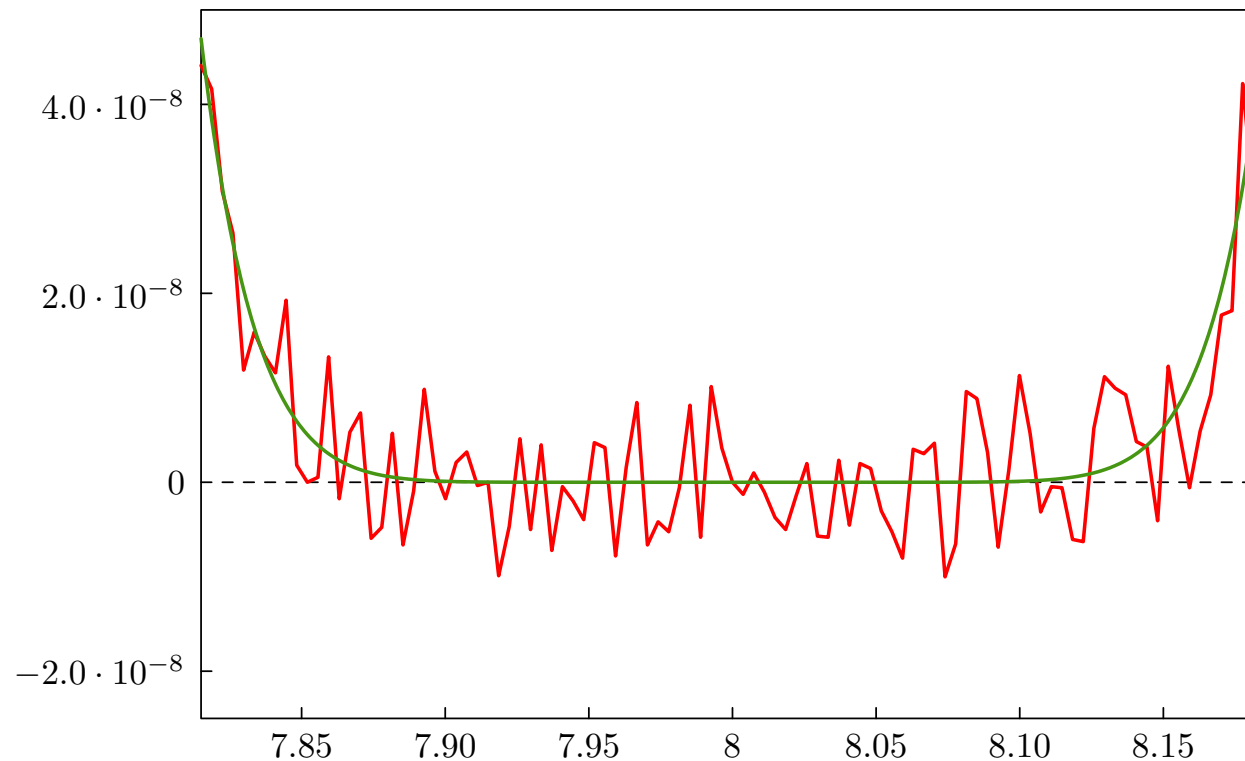
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 8$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 8)^{10} = & x^{10} - 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\ & - 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\ & + 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824\end{aligned}$$



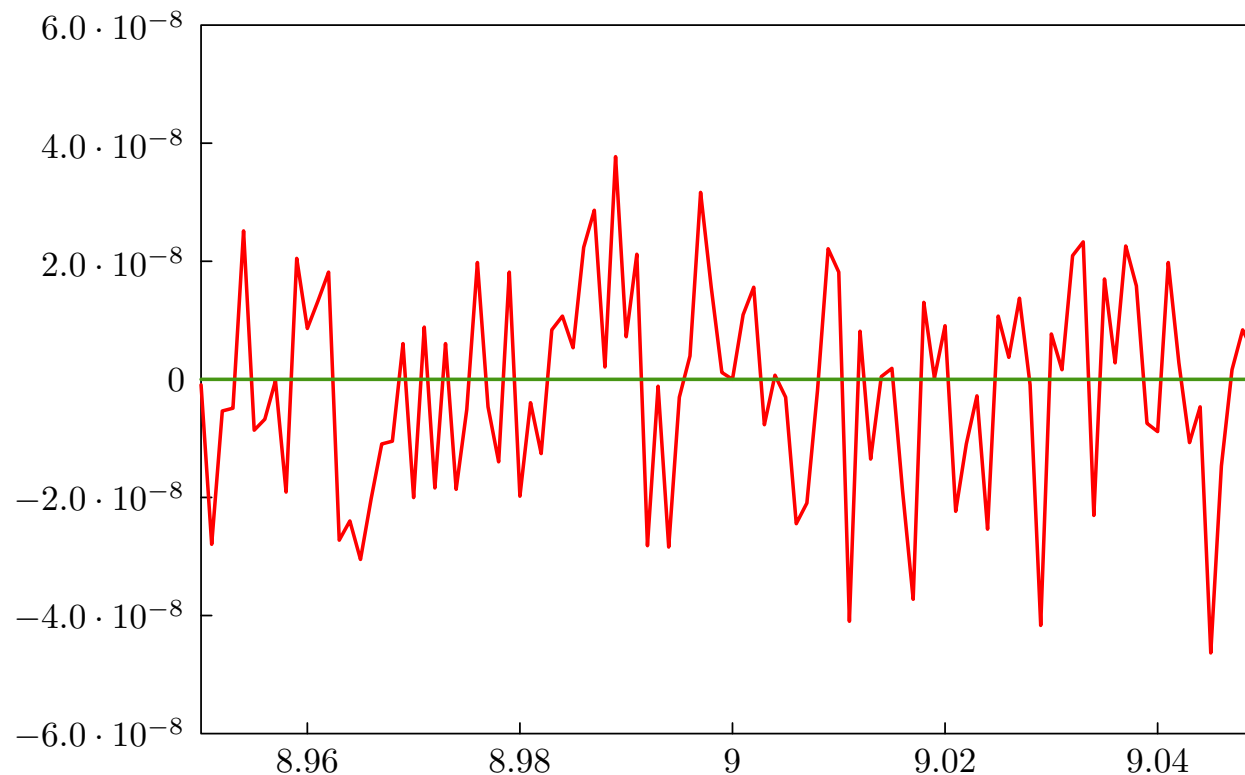
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 8$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 8)^{10} = & x^{10} - 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\ & - 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\ & + 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824\end{aligned}$$



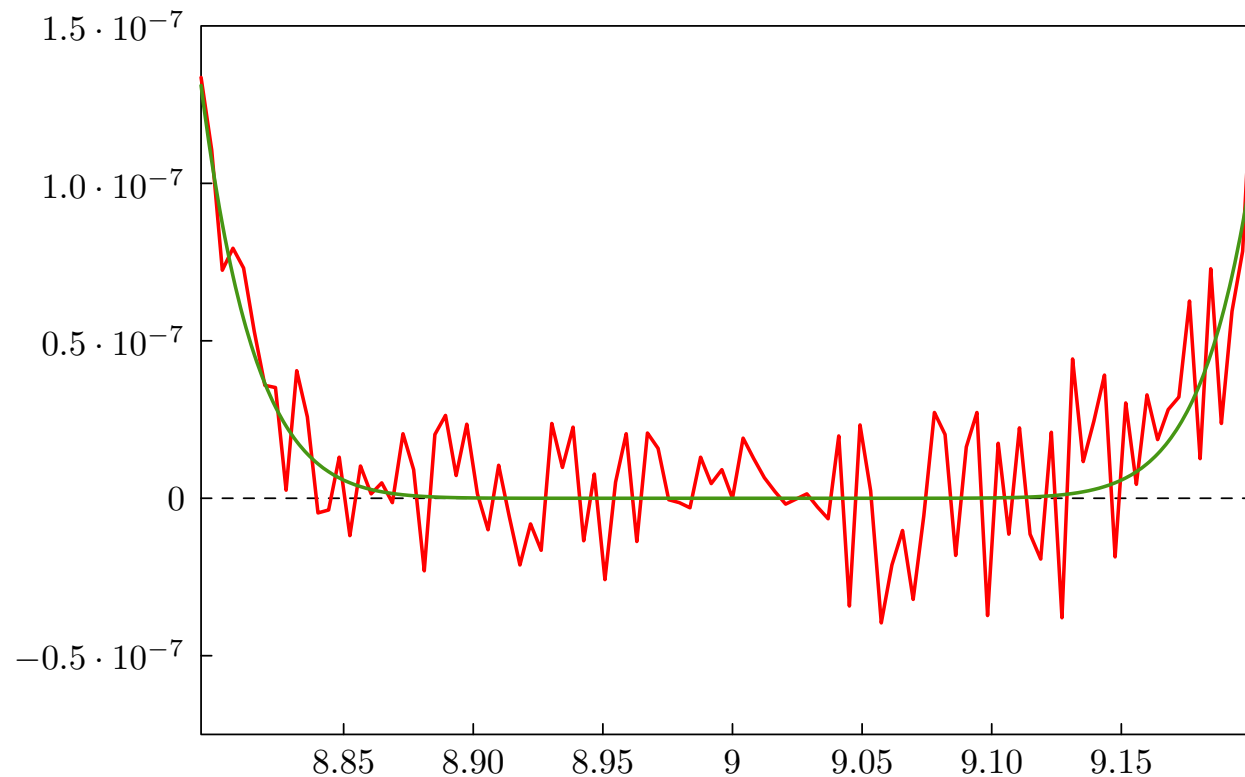
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 9$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 9)^{10} = & x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\ & - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\ & + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401\end{aligned}$$



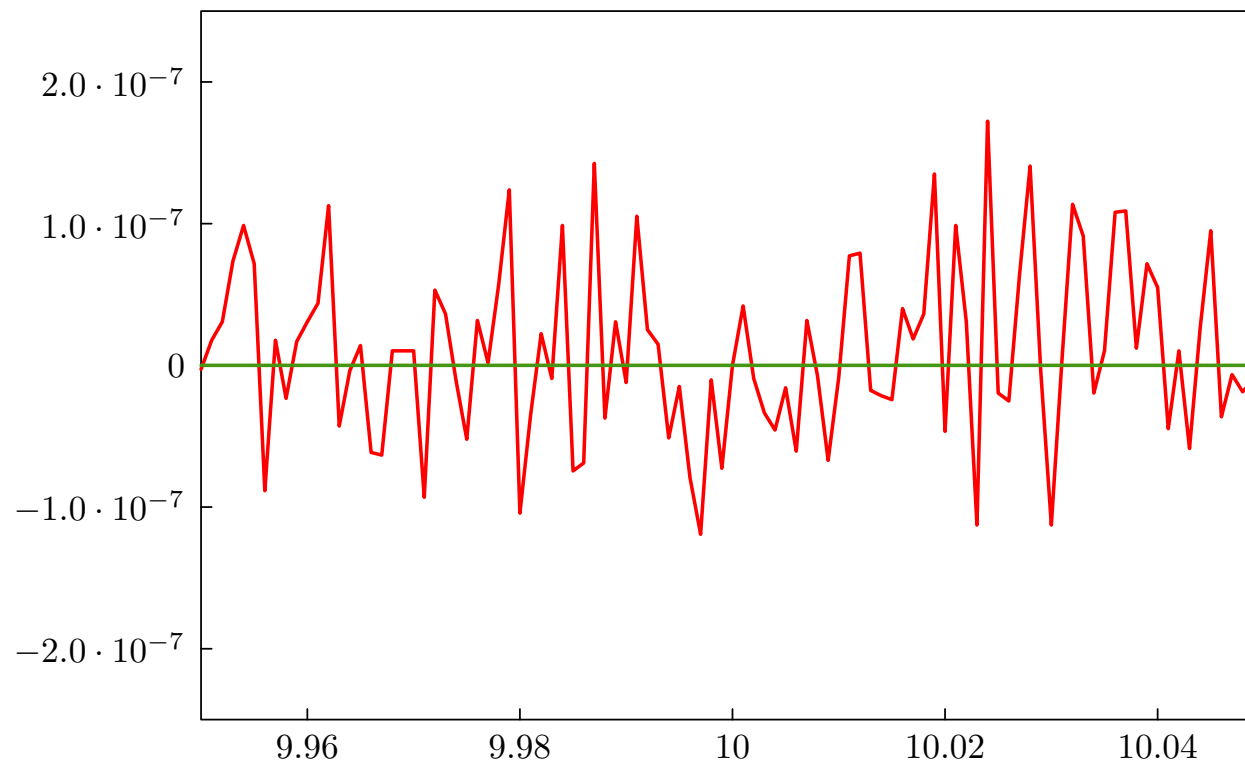
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 9$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 9)^{10} = & x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\ & - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\ & + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401\end{aligned}$$



Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 10$ (1)

$$\begin{aligned}(x - 10)^{10} = & x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\ & - 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\ & + 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000\end{aligned}$$



Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 10$ (2)

$$\begin{aligned}(x - 10)^{10} &= x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\ &\quad - 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\ &\quad + 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000\end{aligned}$$

