Numerička matematika
6. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija (nastavak):
  - Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
  - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
  - Primjer Runge.
  - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
  - Hermiteova interpolacija.
  - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
  - Linearni spline i ocjena greške.

Informacije

Stalna promjena termina predavanja (odobreno):

- utorak, 16–19 sati u (005).

Start je “odmah” 15. 4. — nema u petak 18. 4.

Termin prvog kolokvija je:

- ponedjeljak, 28. 4., u 12 sati.

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Drugi dio stiže negdje pred kraj kolokvija!

Interpolacija polinomima (nastavak)

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

- ako su čvorovi ekvidistantni.

Prisjetimo se, Newtonov interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja radi se u

- podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$,
- faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Pojednostavnimo prvo podijeljenu razliku.

Točke su ekvidistantne s “razmakom” h ako je

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Konačnu razliku unaprijed definiramo kao

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo operator konačnih razlika unaprijed.

Konačnu razliku reda k, za $k \in \mathbb{N}$, definiramo rekurzivno kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Nađimo vezu podijeljenih i konačnih razlika.

Lema. Ako su točke x_j ekvidistantne, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!\, h^k} \Delta^k f_j.$$

Dokaz ide indukcijom po k.

Za $k = 0$, rezultat je očito istinit — po definiciji.

Baza indukcije. Za $k = 1$ imamo

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h},$$

pa tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Podijeljene i konačne razlike

Korak indukcije. Pretpostavimo da za sve uzastopne točke $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$, za bilo koji "dozvoljeni" j, vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}] = \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_j.$$

Zaključak. Ako je $j + k \leq n$, onda je

$$\begin{aligned} f[x_j, \ldots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \\ &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{k \cdot h} = (\text{pretp. ind.}) \\ &= \frac{1}{kh} \left(\frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_{j+1} - \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_j \right) \\ &= \frac{1}{k!h^k} (\Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j) = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_j. \end{aligned}$$

■

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Označimo s

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

s tim da s može biti i realan broj. Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} (s - j)h = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Po definiciji binomnih koeficijenata, s tim da smije biti i $s \in \mathbb{R}$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0, \qquad \binom{s}{0} = 1.$$

Odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

Sada možemo napisati interpolacijski polinom s ekvidistantnim čvorovima.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Uočimo da se faktor $h^k k!$ skrati (u nazivniku dolazi od konačnih razlika, a u brojniku od produkta $\prod(x - x_j)$), pa interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\qquad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\qquad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= \Delta^0 f_0 + \binom{s}{1} \Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica konačnih razlika:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f_k & \Delta f_k & \Delta^2 f_k & \cdots & \Delta^n f_k \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \Delta^n f_0 \\
 & & \Delta f_{n-2} & & \iddots & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Ova tablica se računa u jednom jednodimenzionalnom polju, kao i kod podijeljenih razlika.

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera.

Legenda:

- crna boja – funkcija f,
- crvena boja – interpolacijski polinom.

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo grafove interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

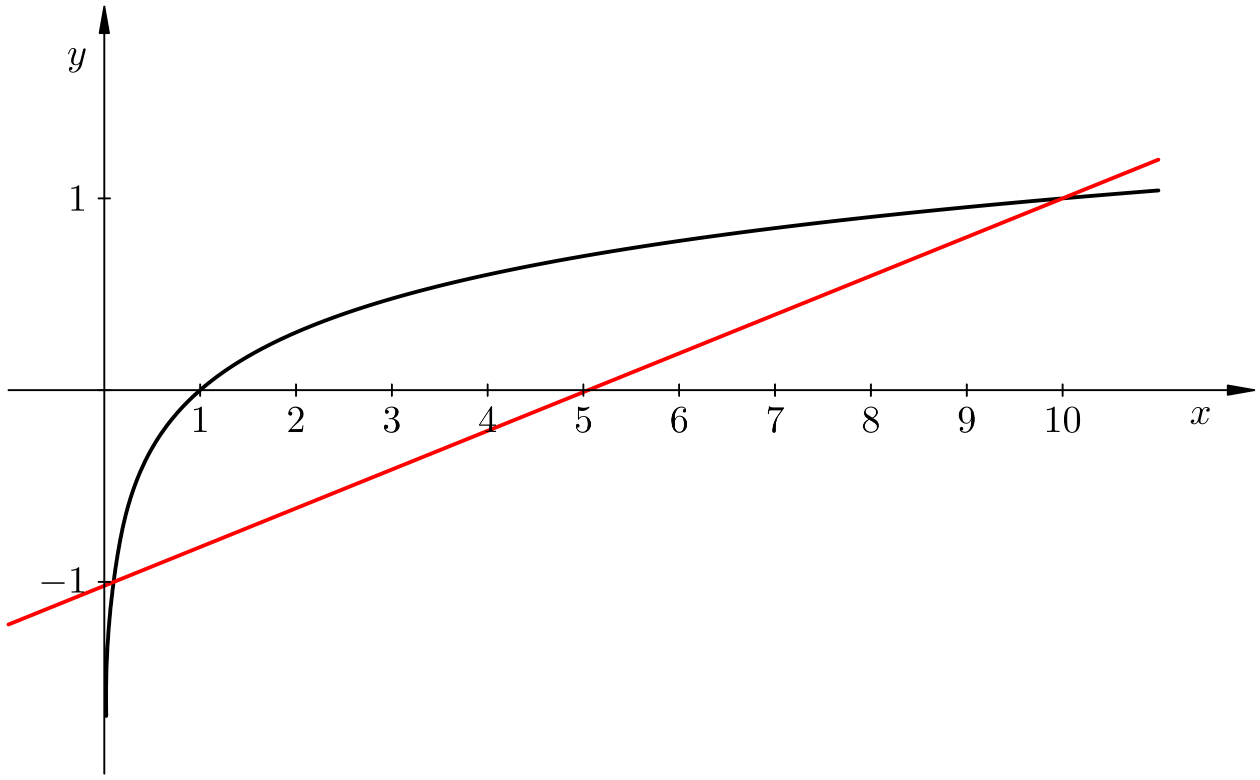
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije je blizu.

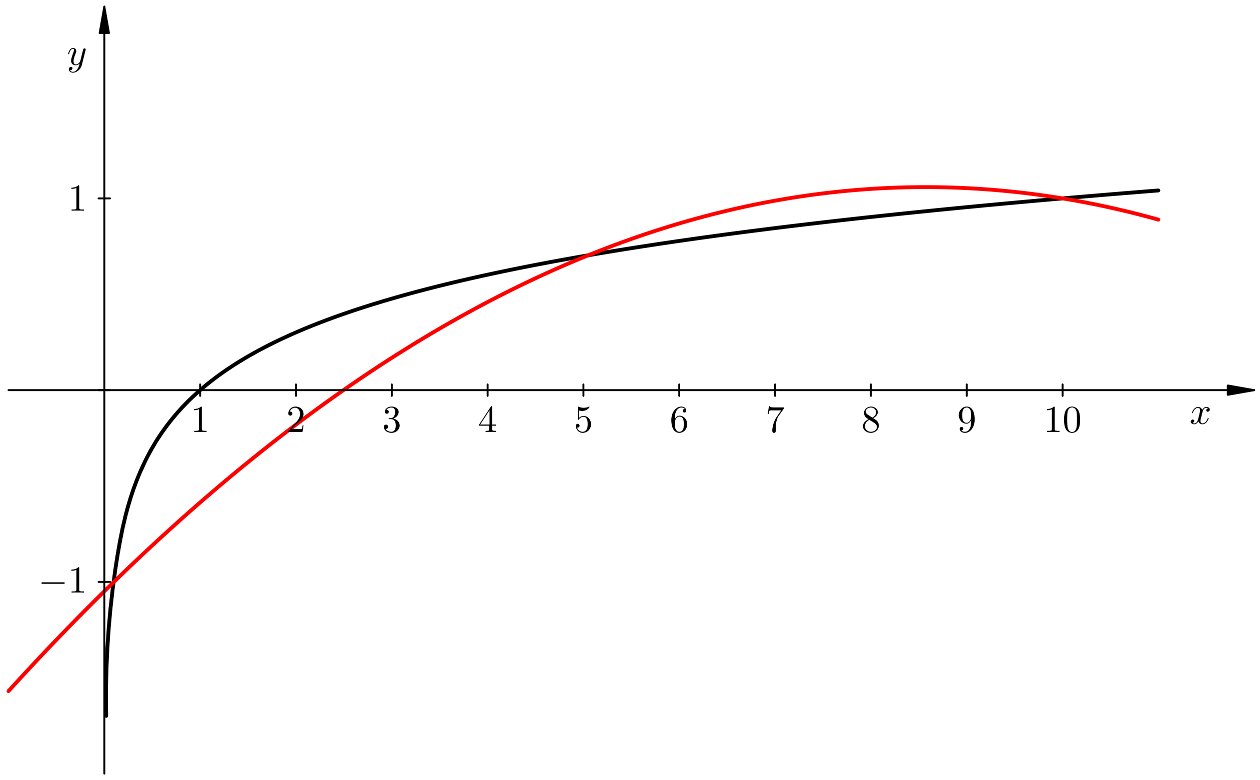
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša izvan intervala interpolacije.

Logaritam — ekvidistantna mreža



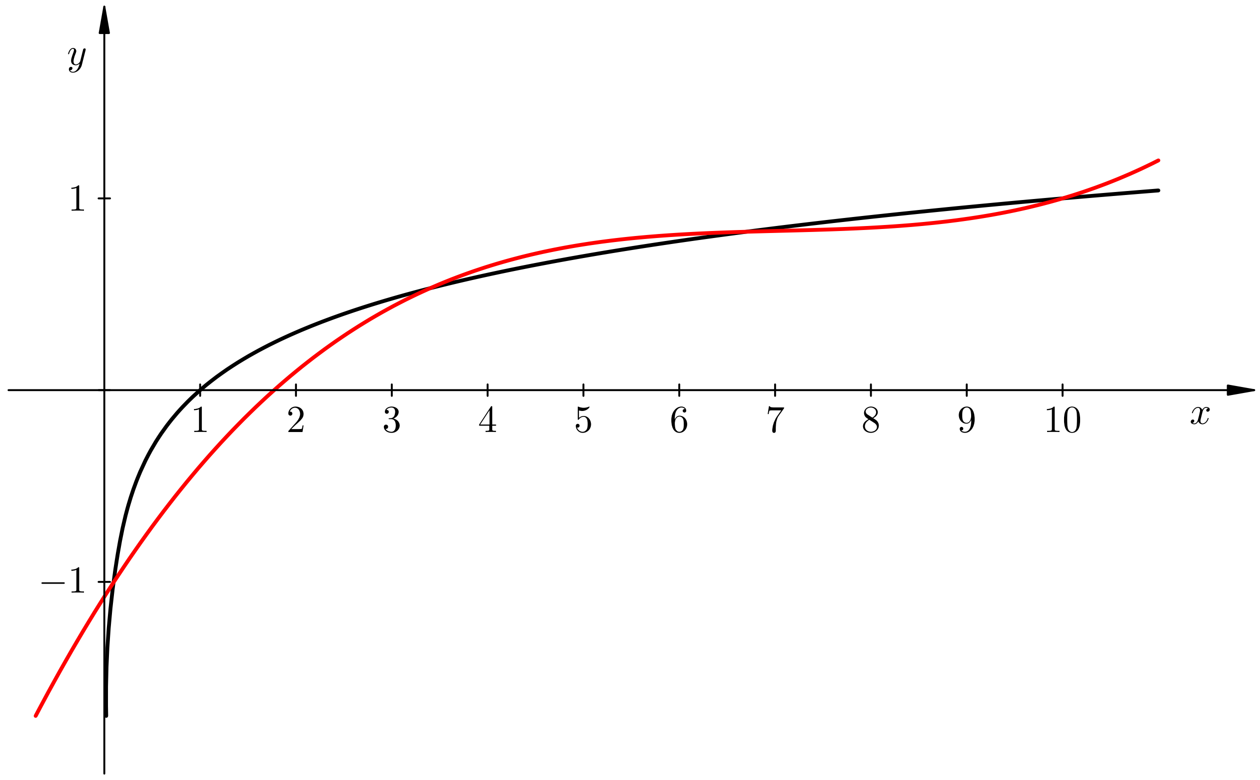
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



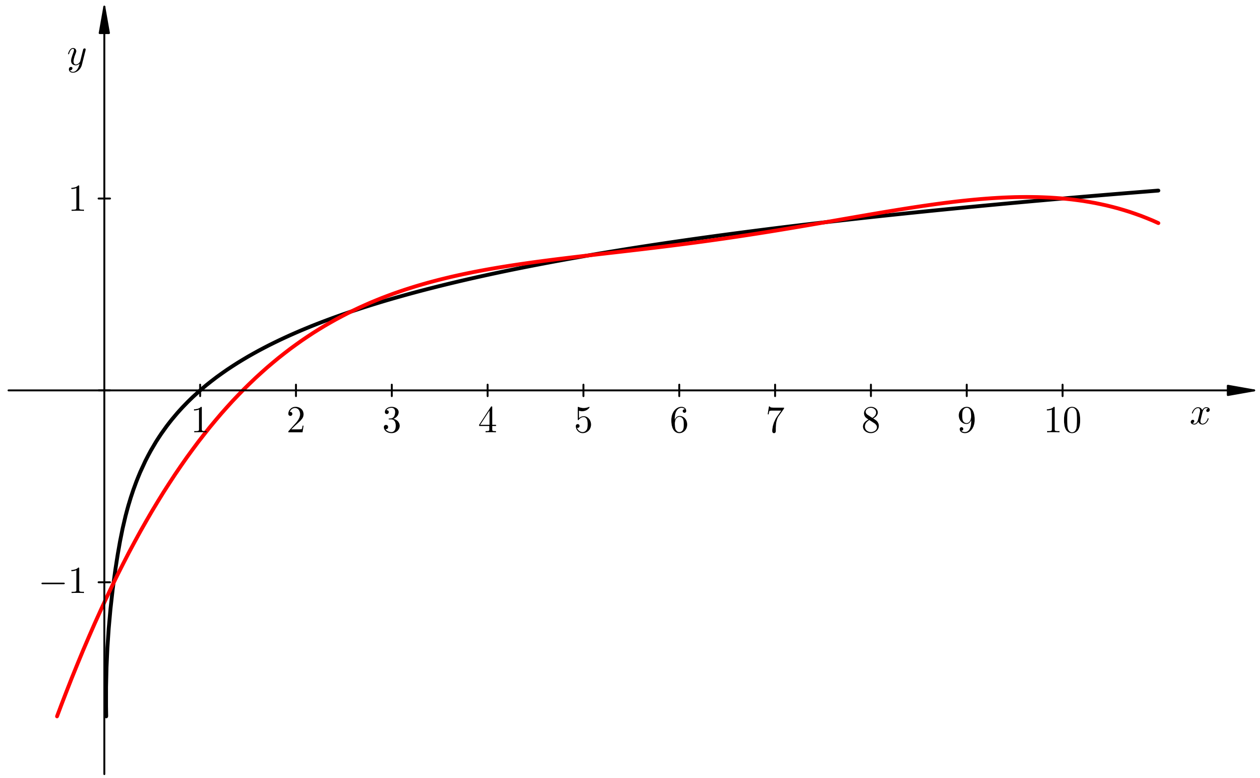
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



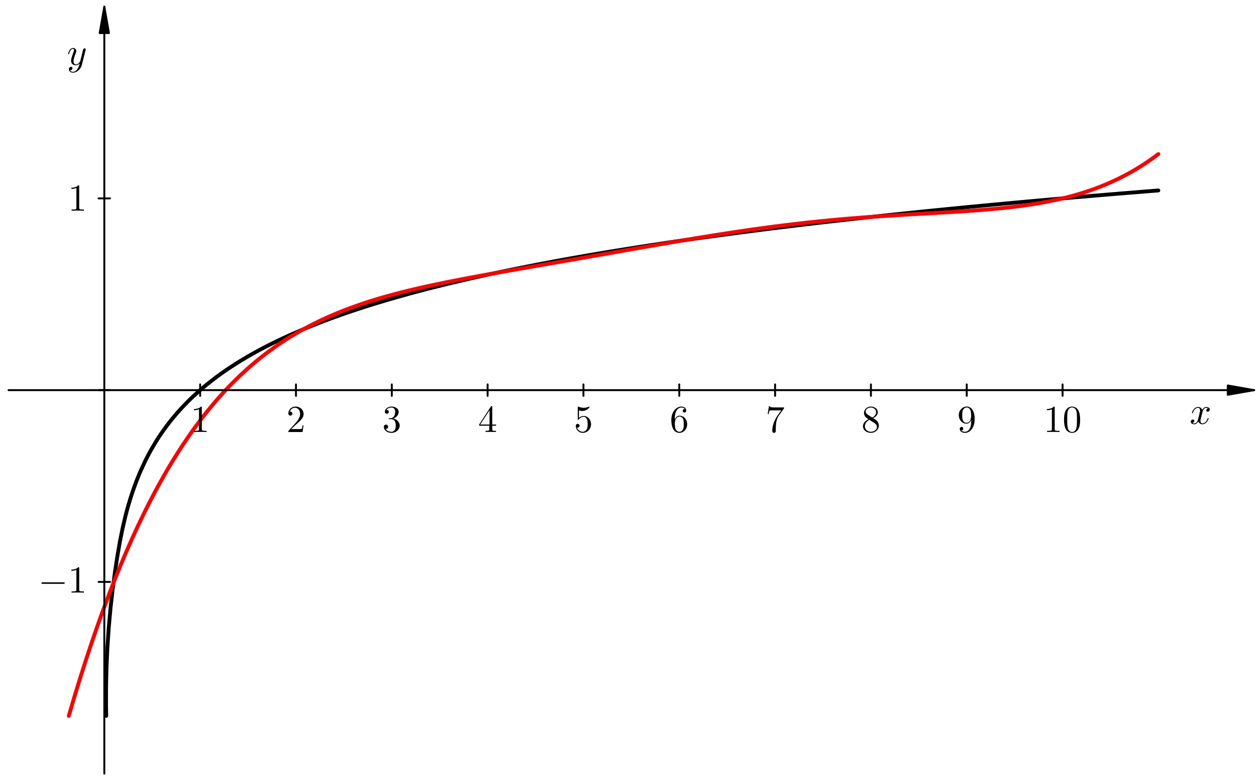
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



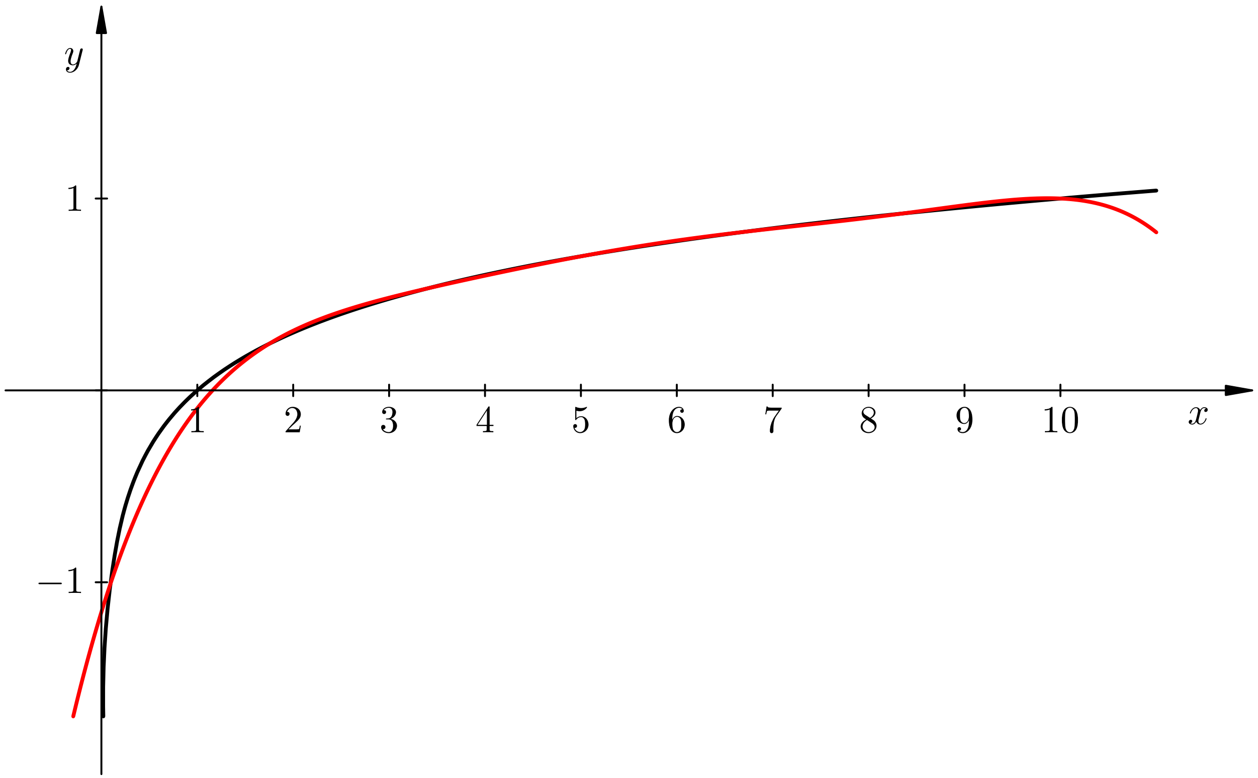
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



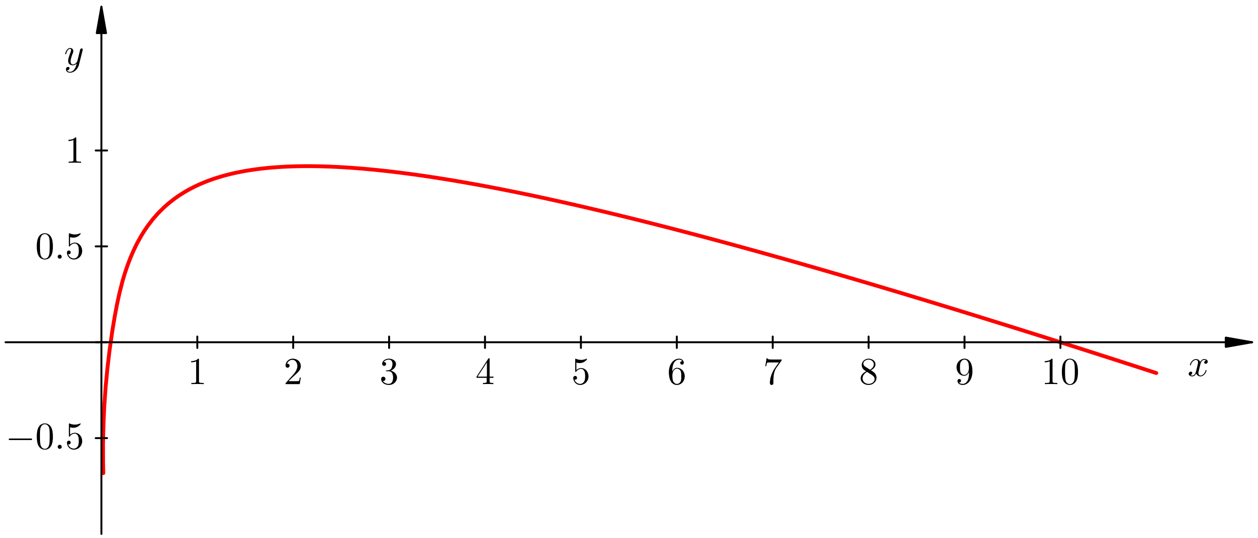
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

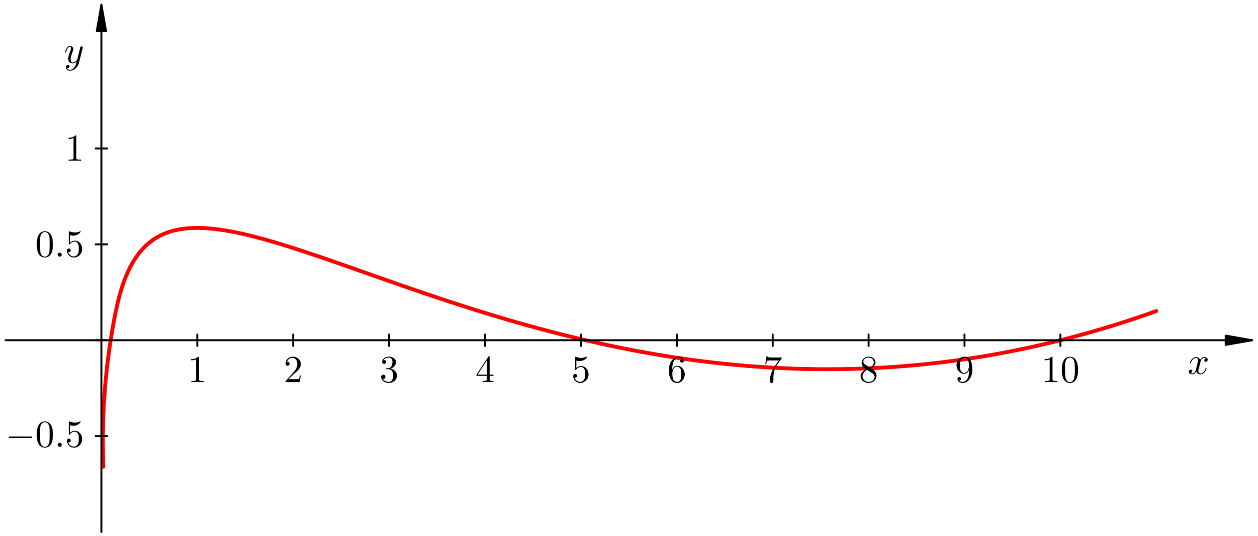
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite skalu na y-osi.

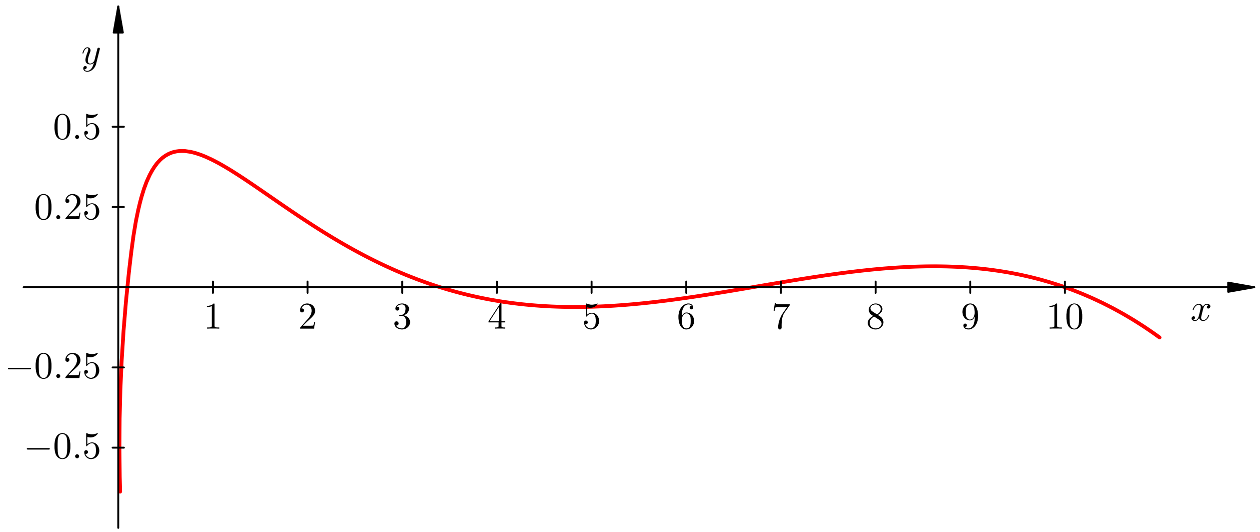
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Pratite skalu na y-osi.

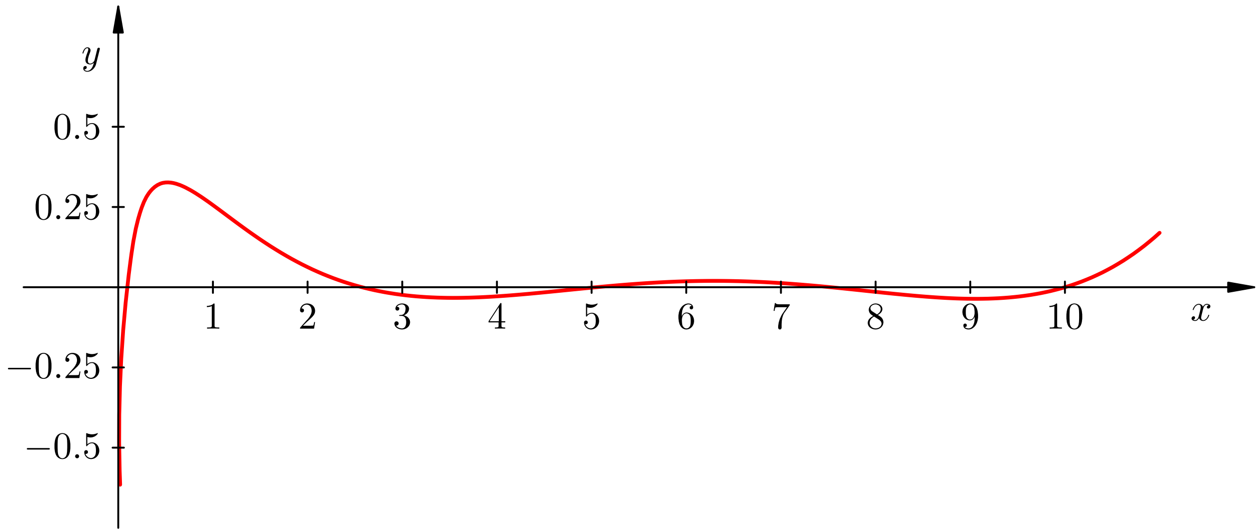
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite skalu na y-osi.

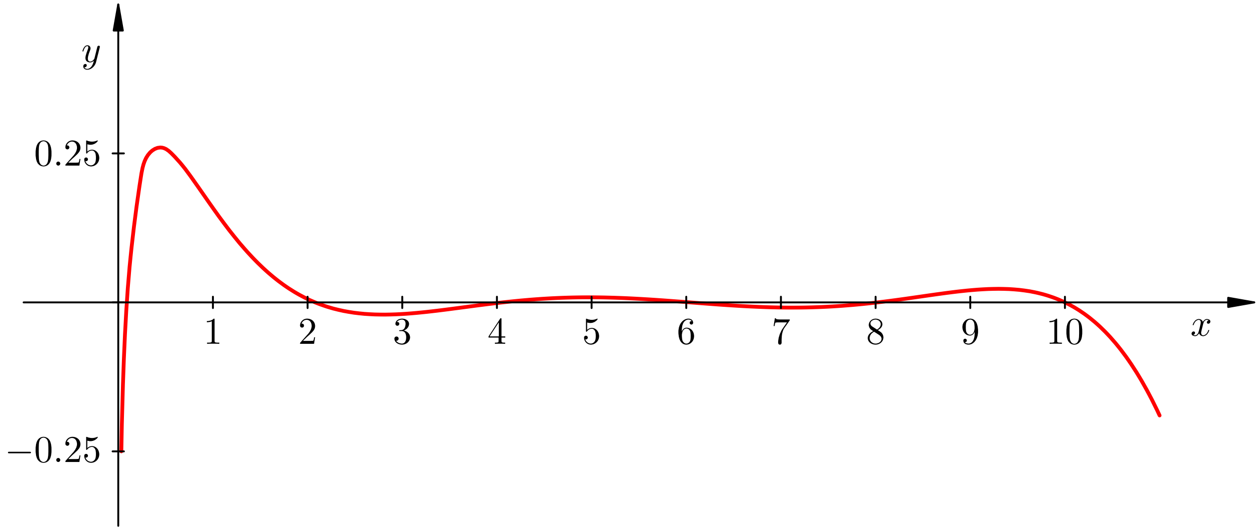
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite skalu na y-osi.

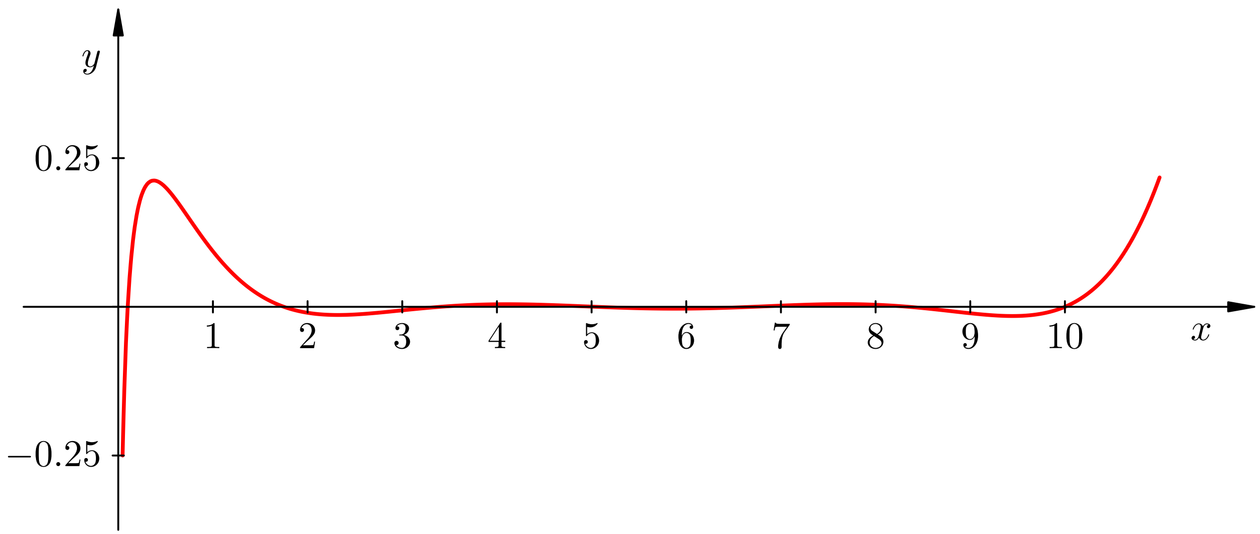
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite skalu na y-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite skalu na y-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar Runge prvi je uočio

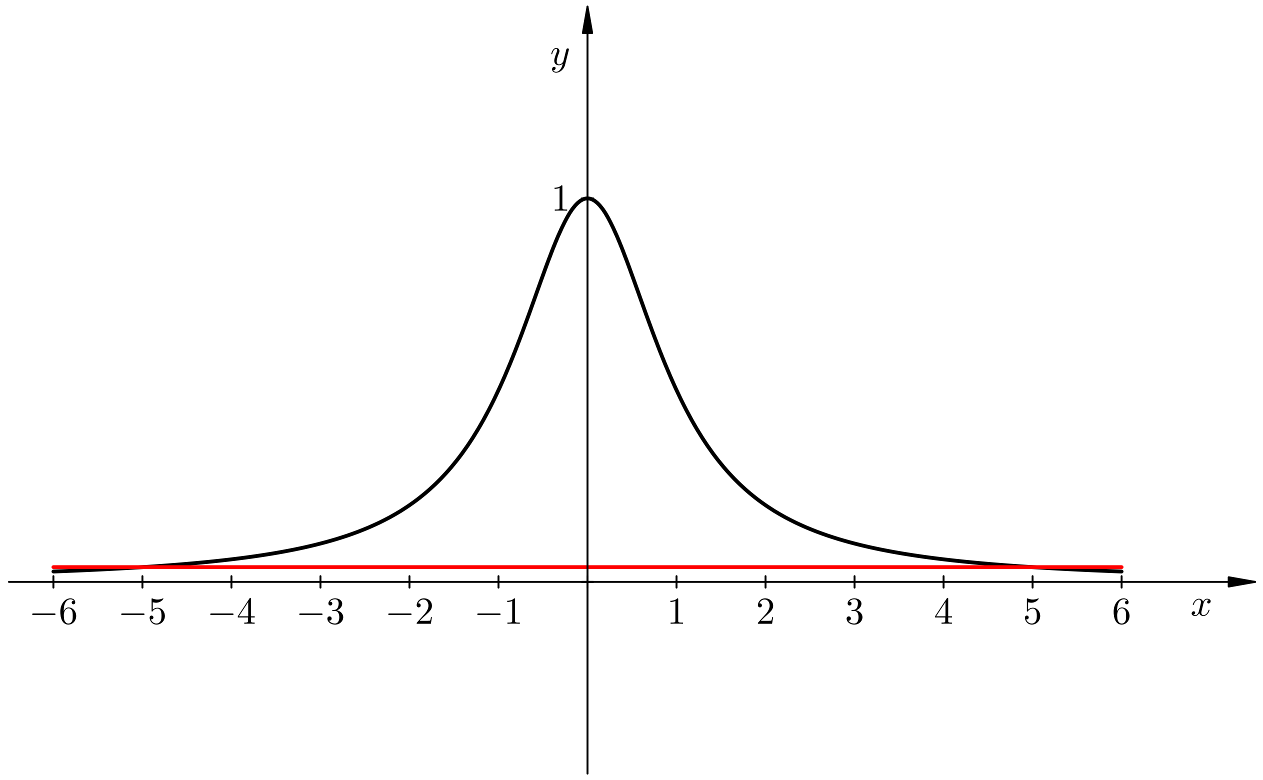
- probleme koji nastupaju kod interpolacije na ekvidistantnoj mreži,
- konstruirao je funkciju (poznatu kao funkcija Runge)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{na} \quad x \in [-5, 5]$$

  takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira prema toj funkciji.

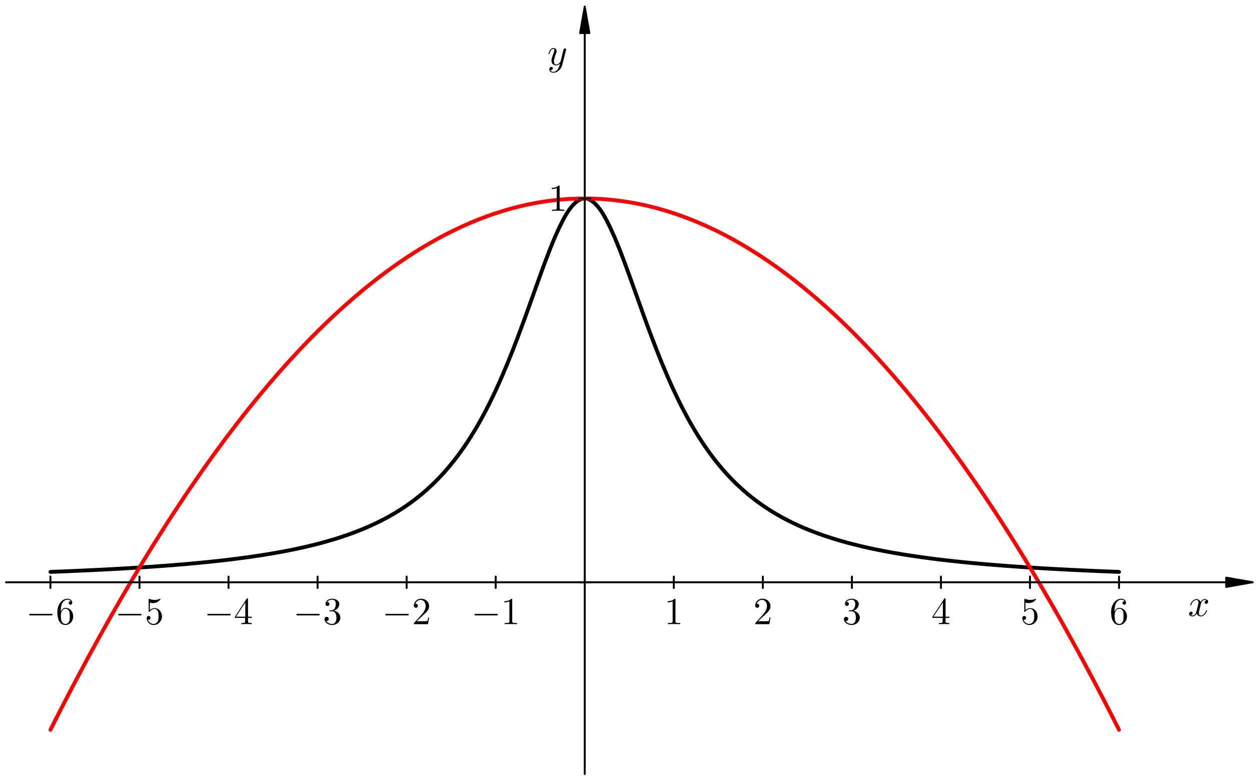
Promotrimo interpolaciju na ekvidistantnoj mreži polinomima stupnjeva 1–6, 8, 10, 12, 14 i 16 (parnost funkcije!).

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

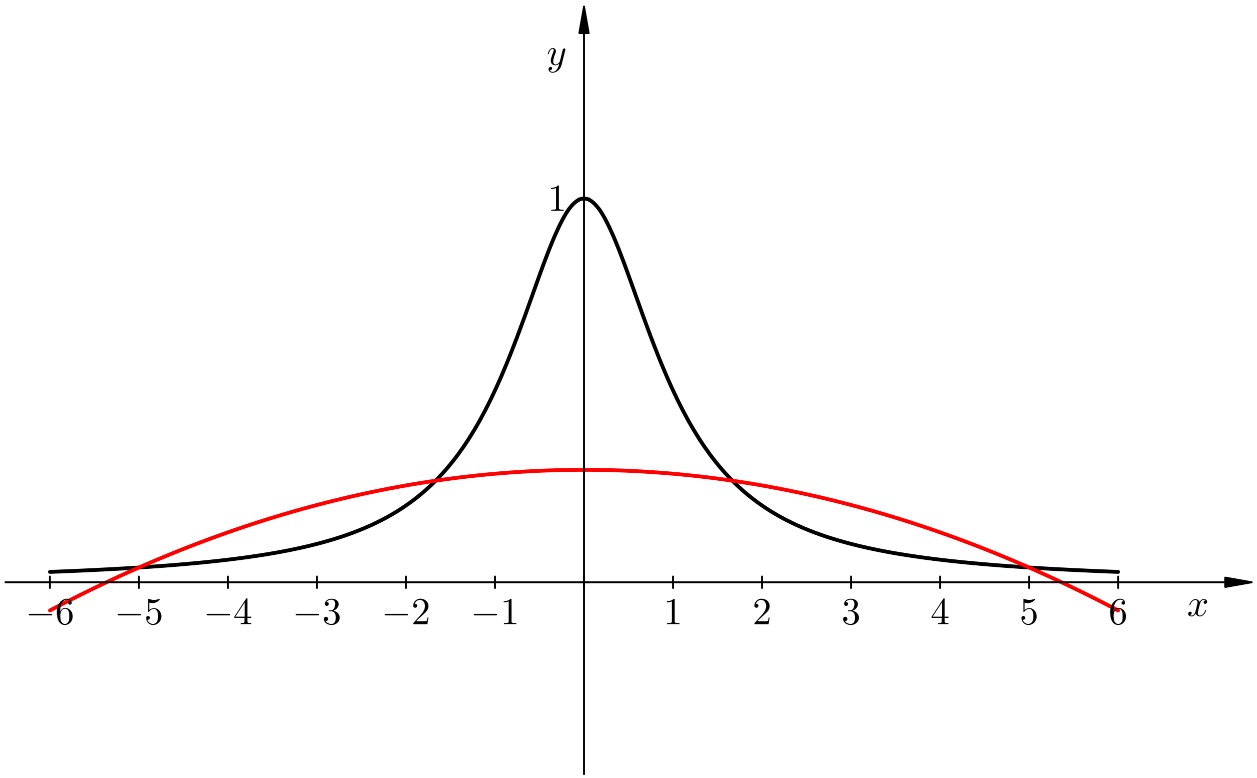
Primjer Runge — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,

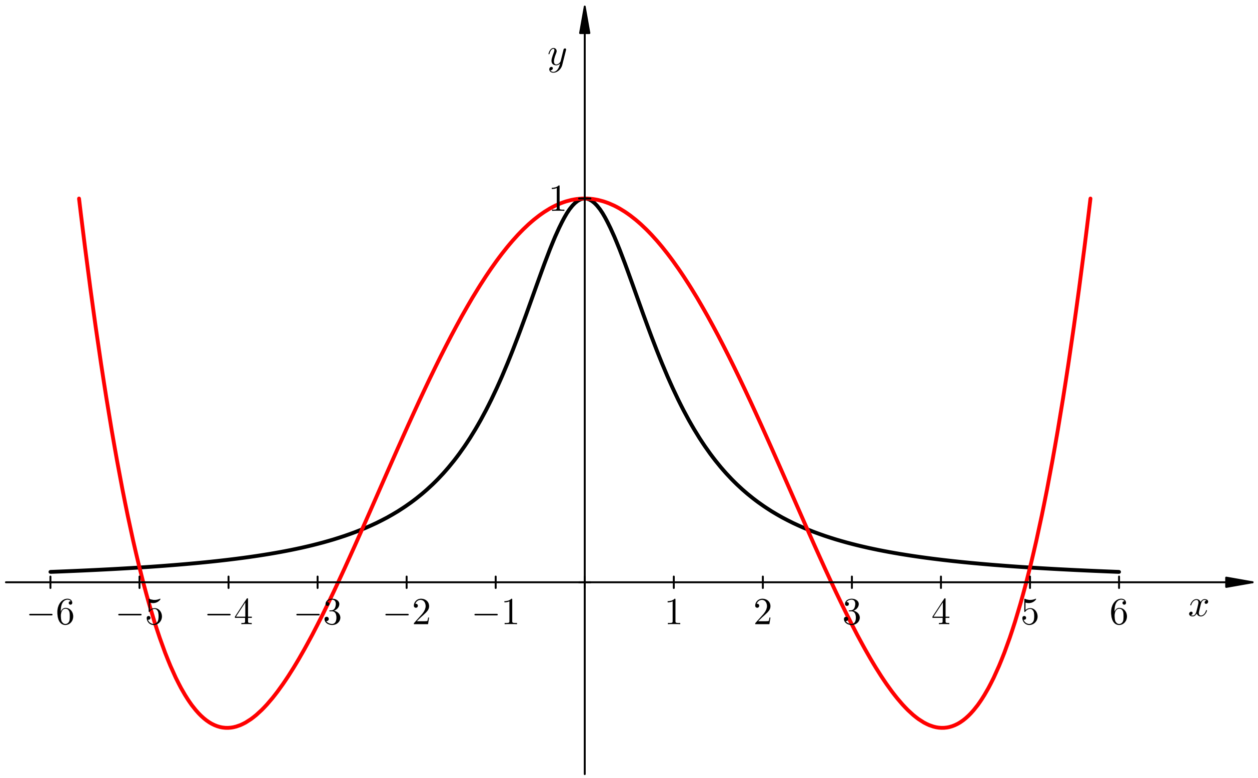
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



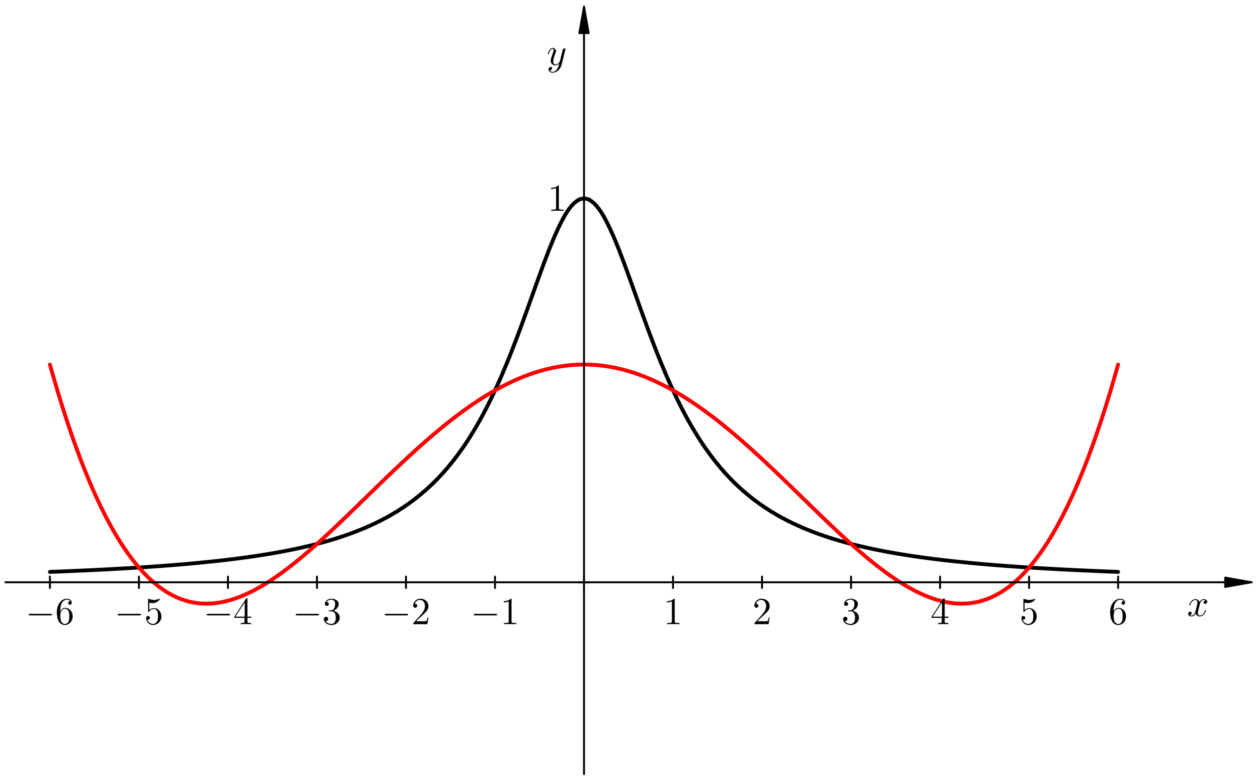
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



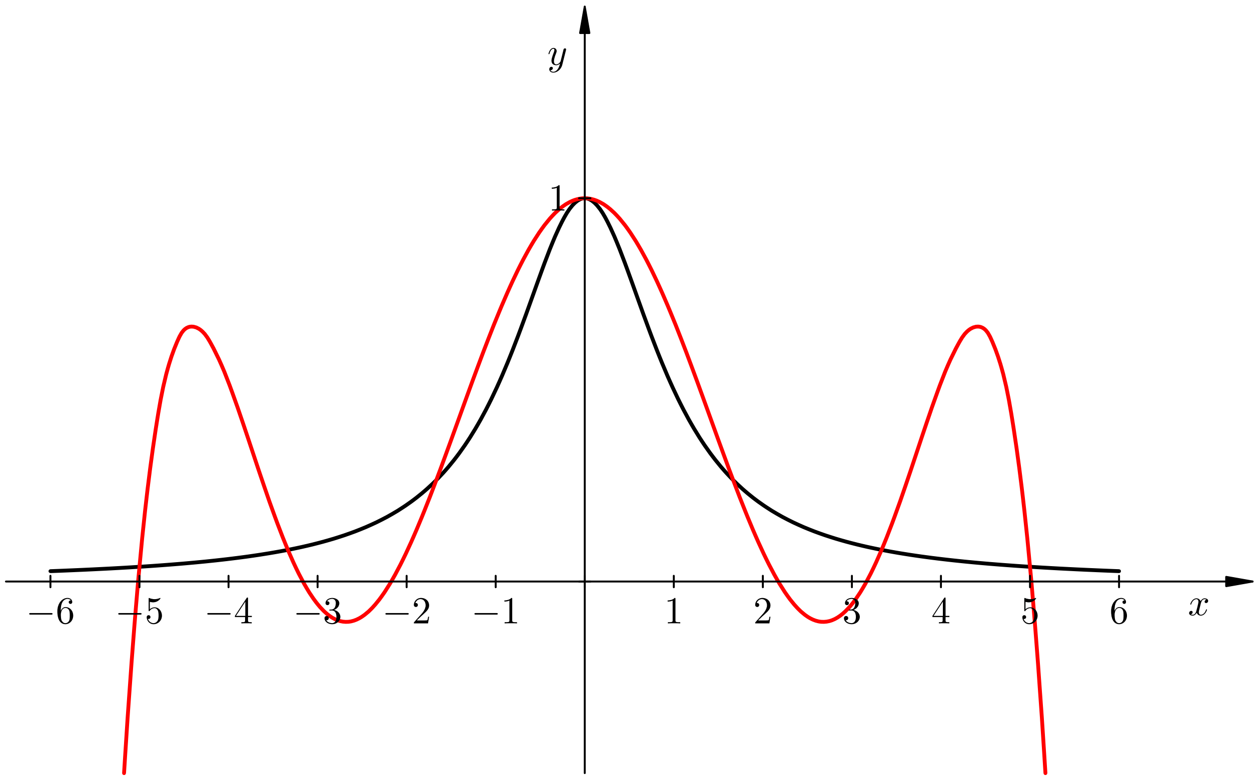
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



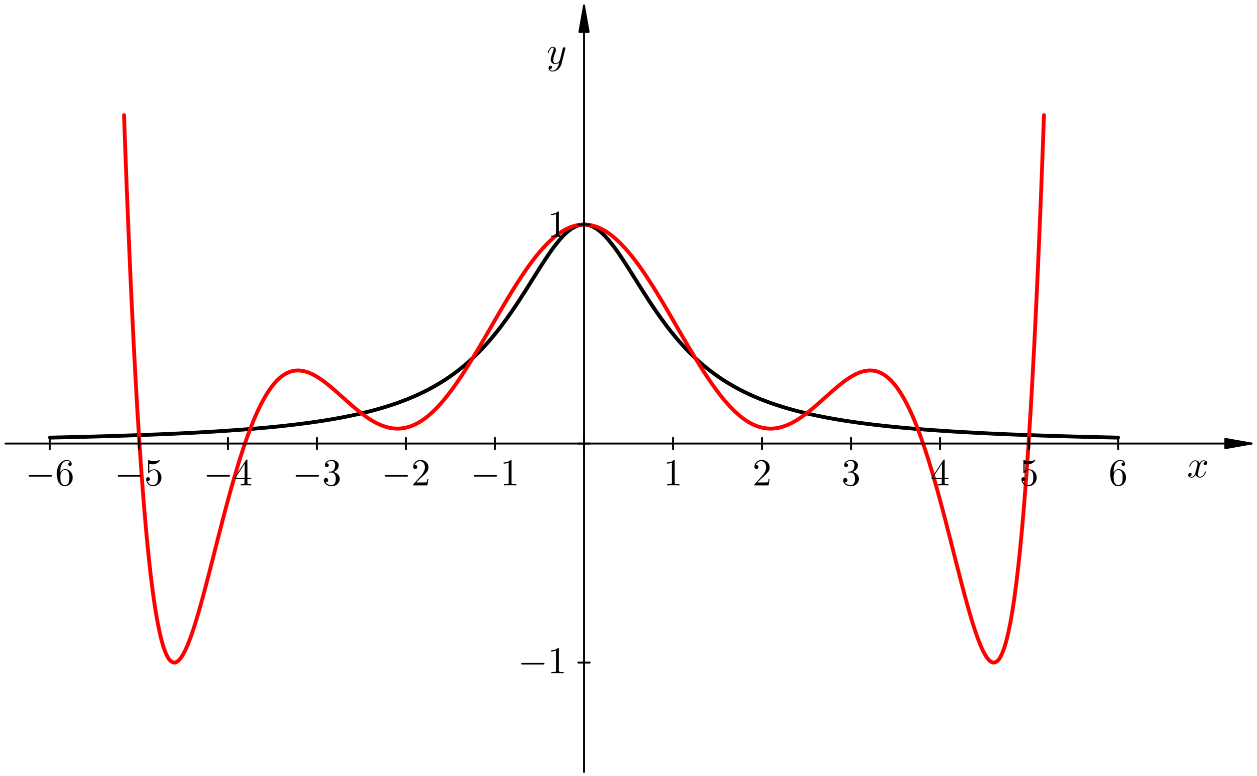
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



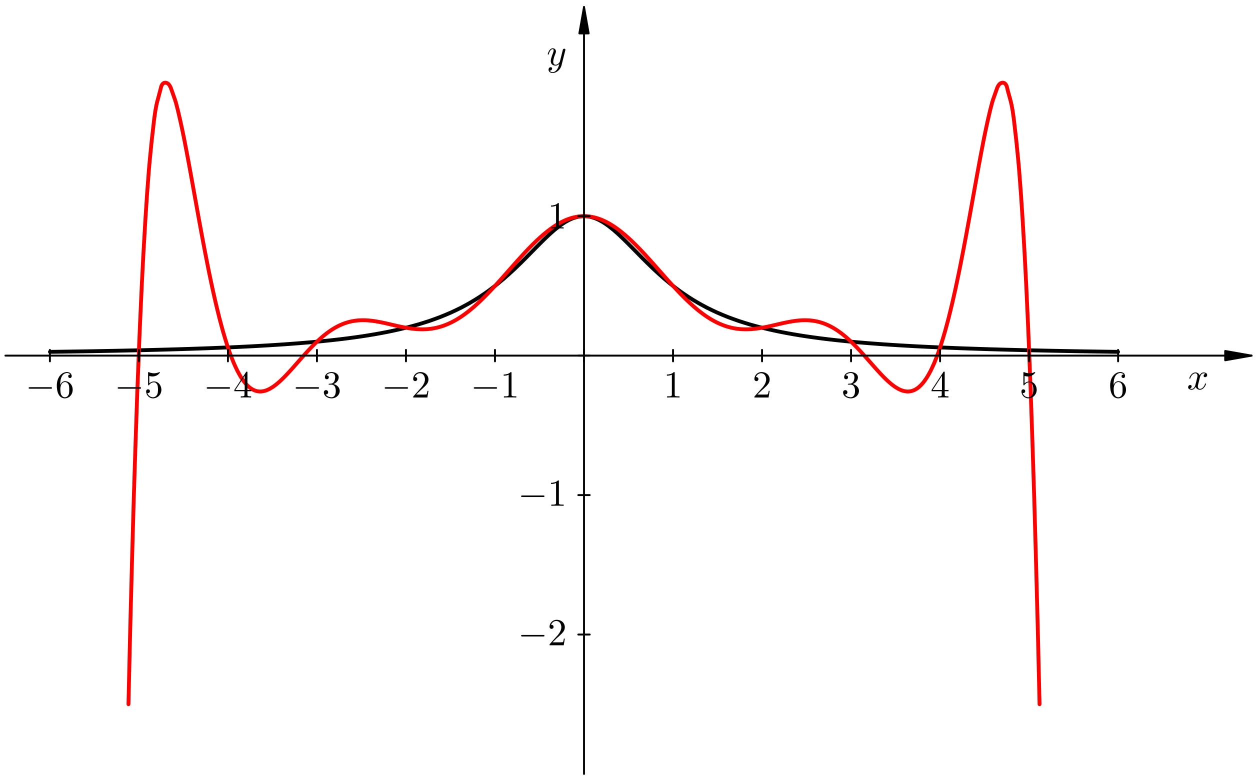
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



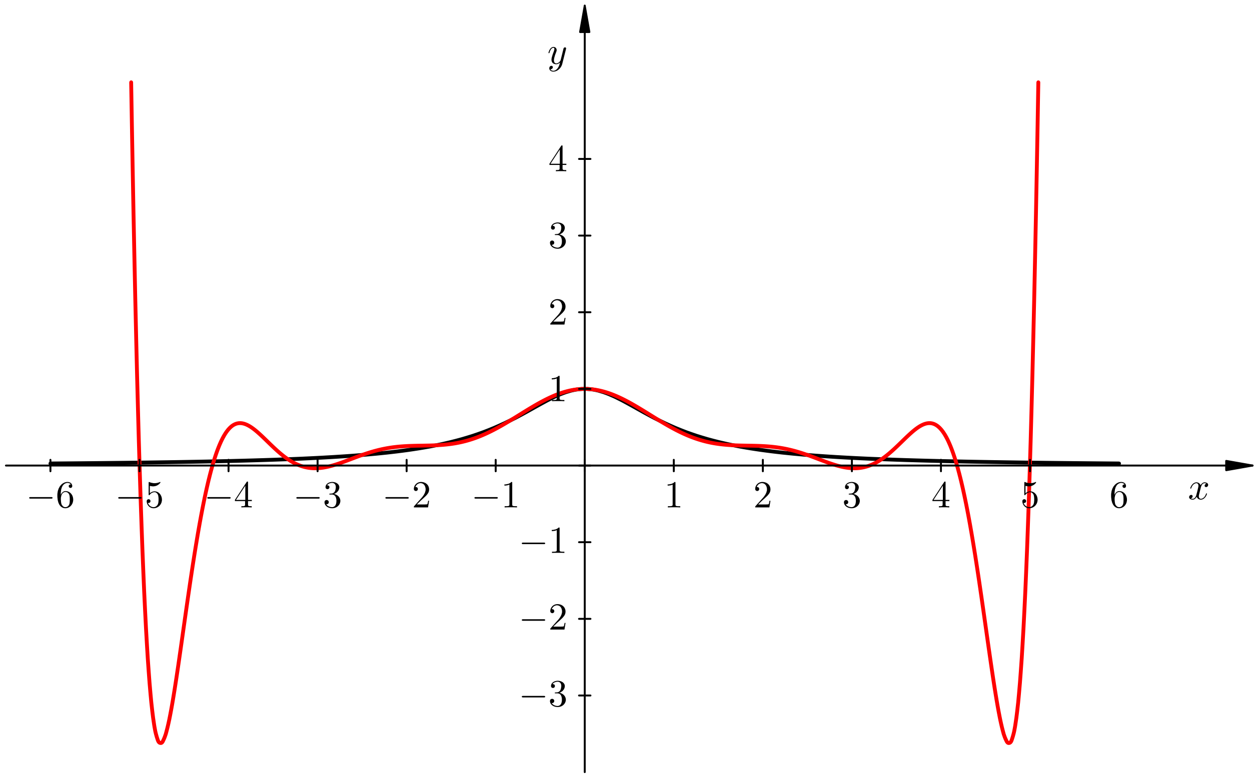
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



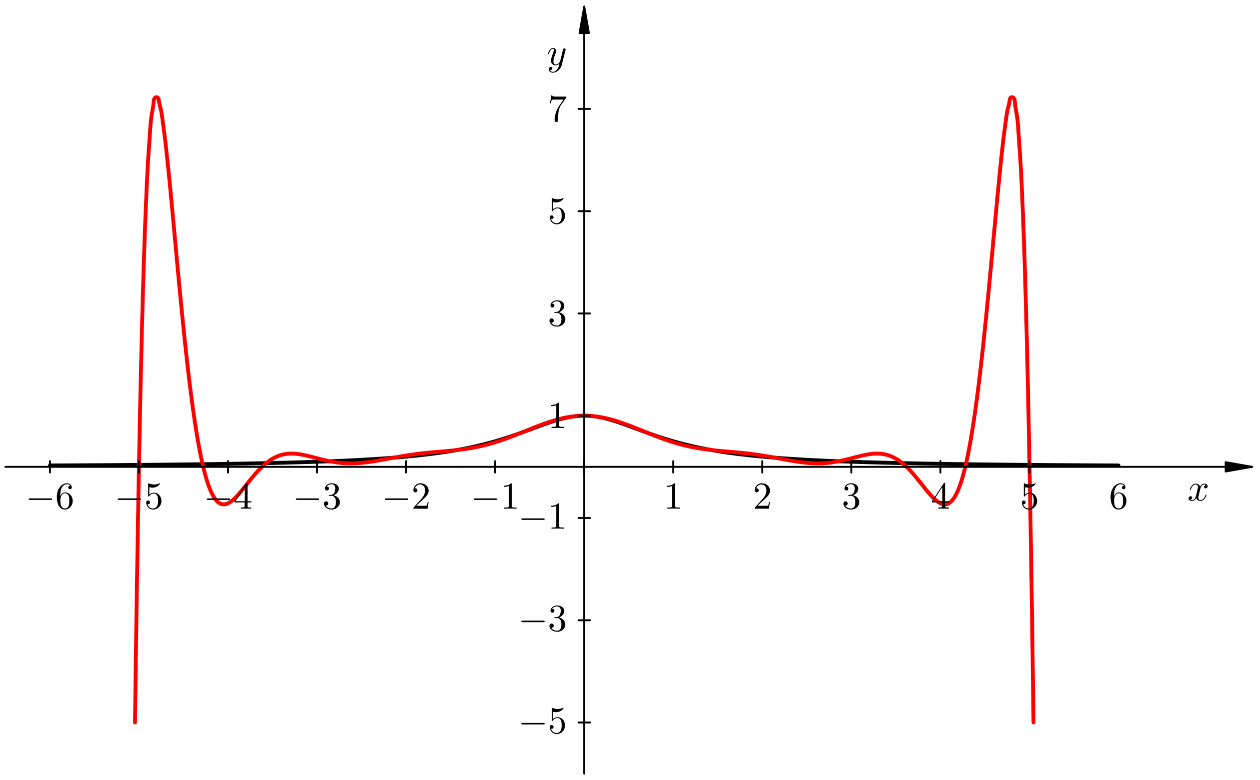
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



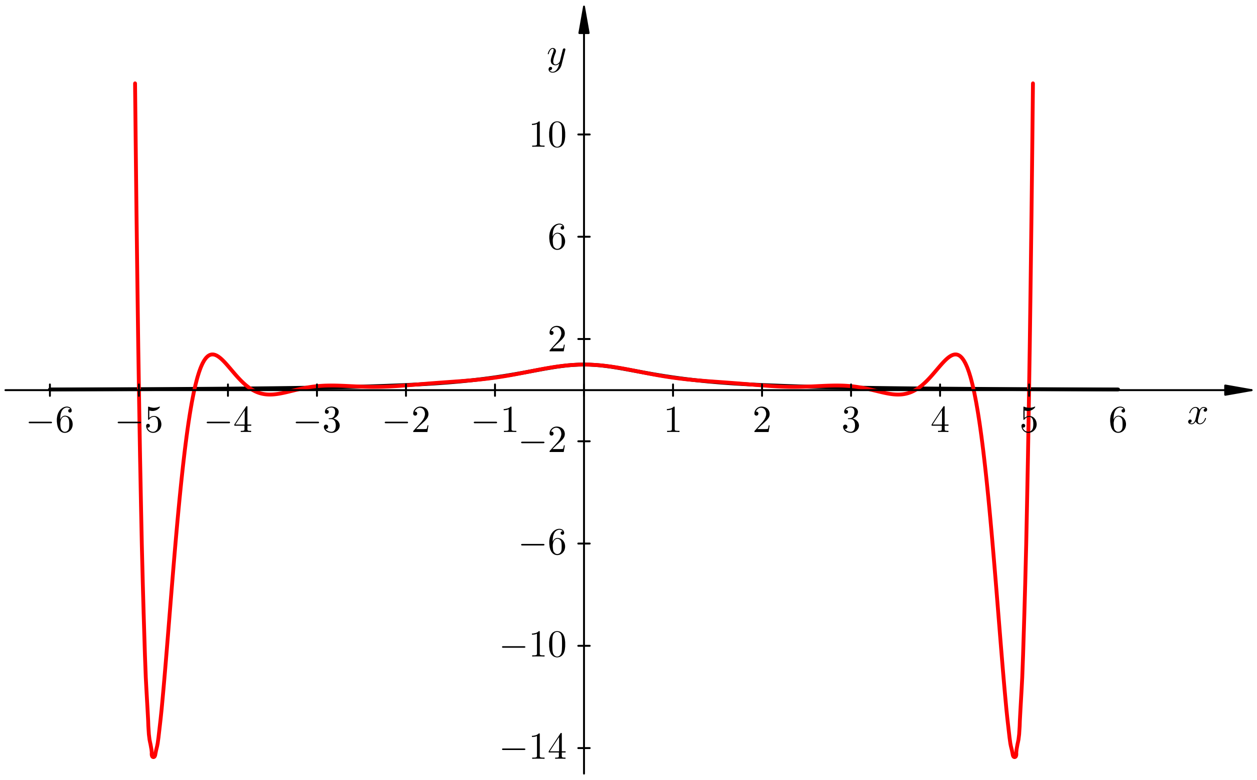
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



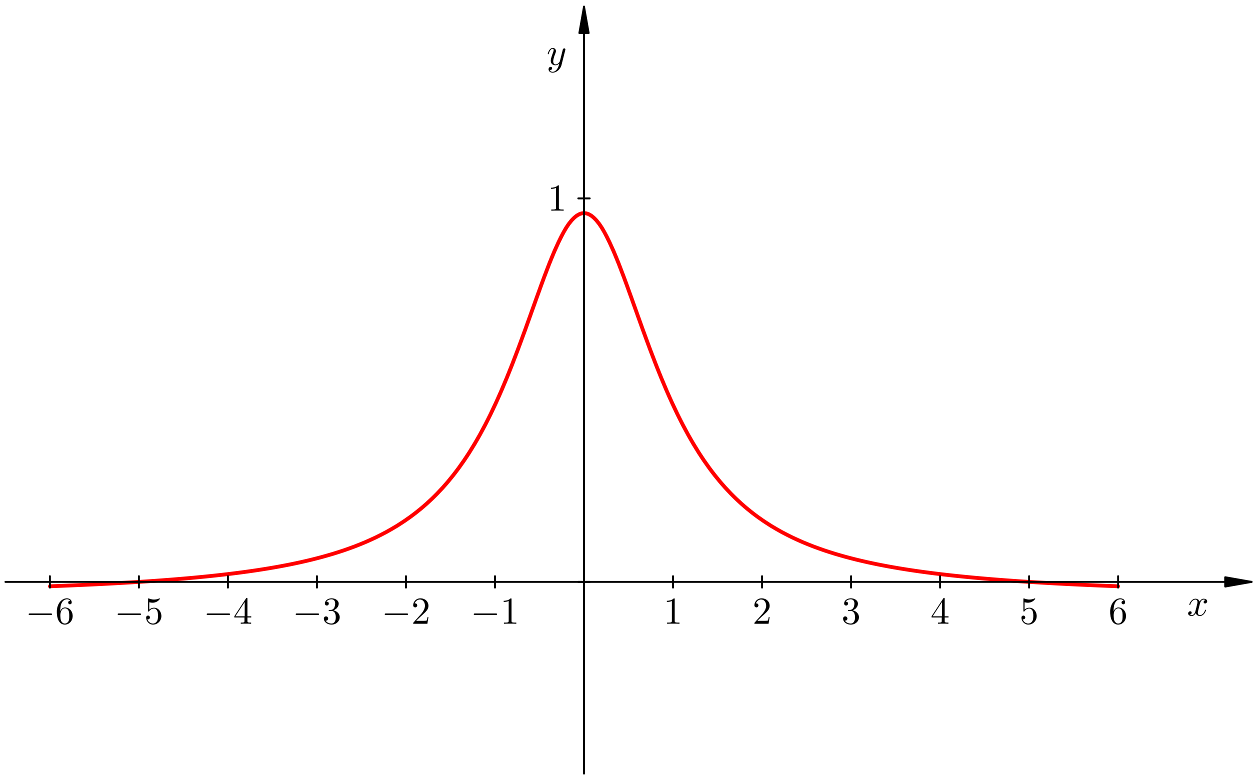
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



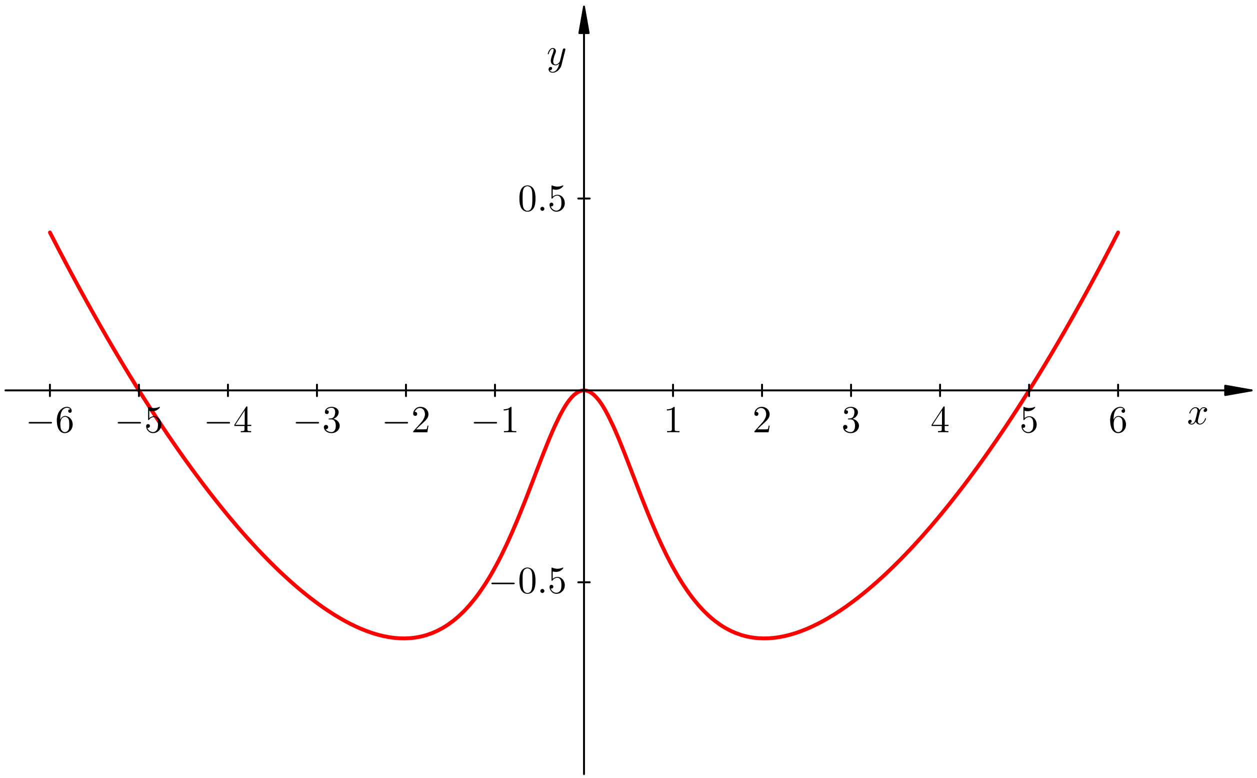
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



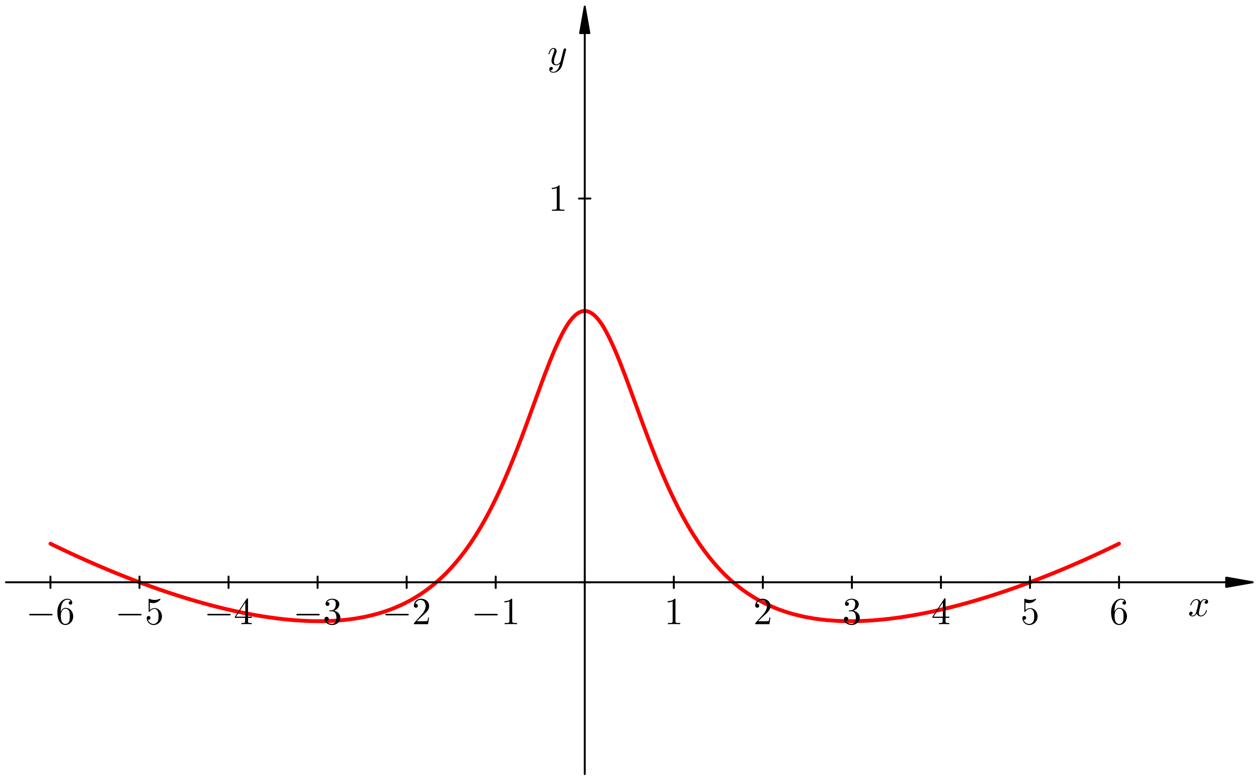
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



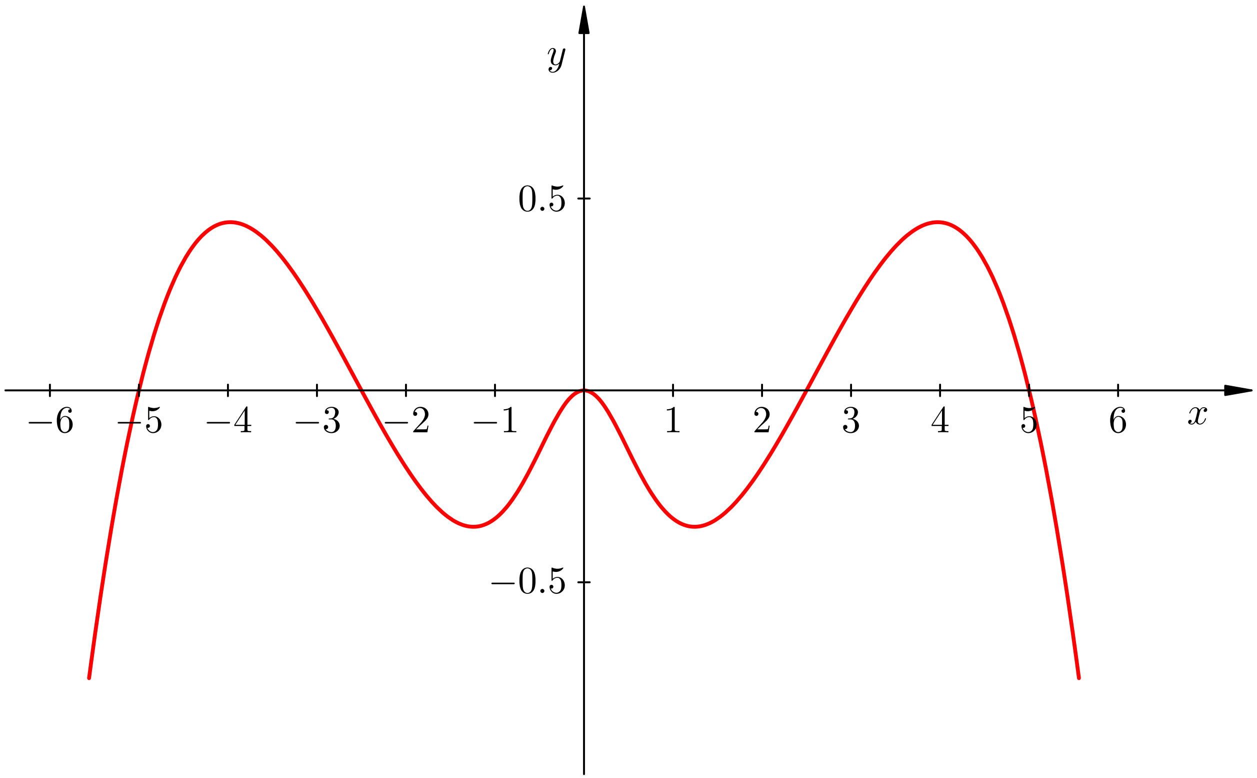
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



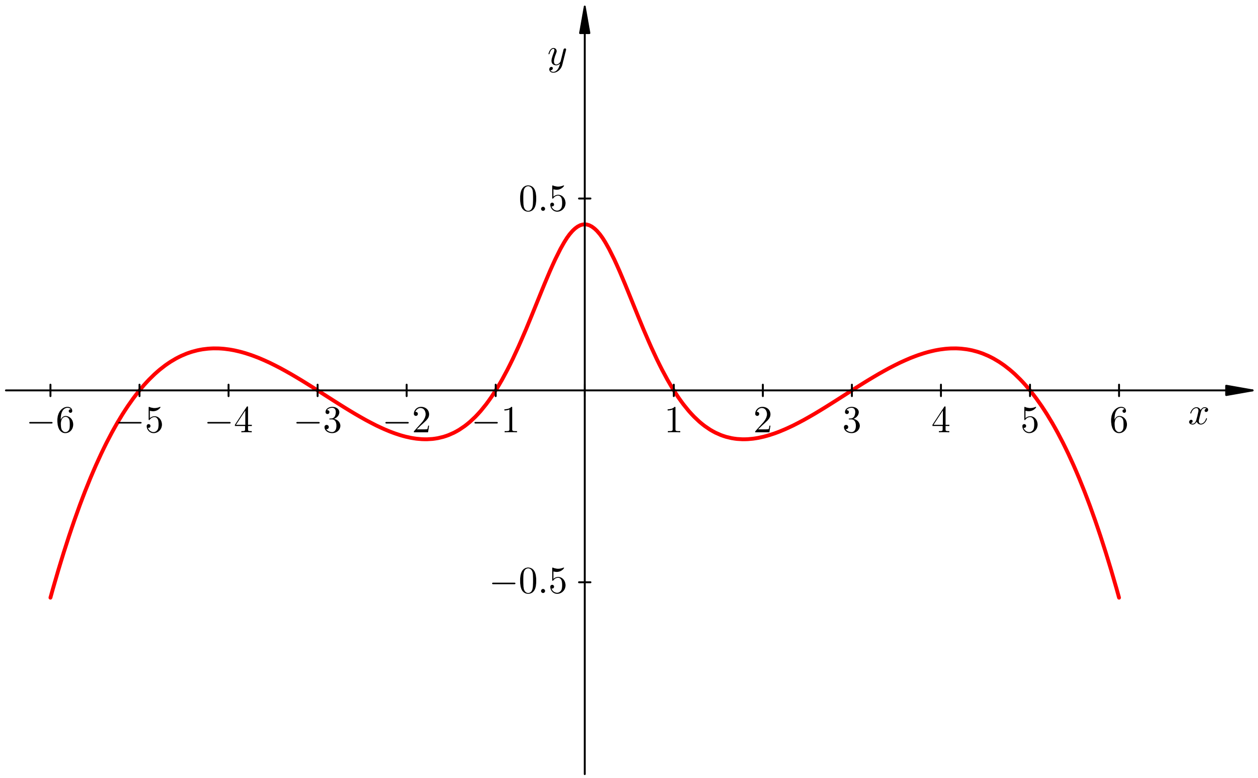
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



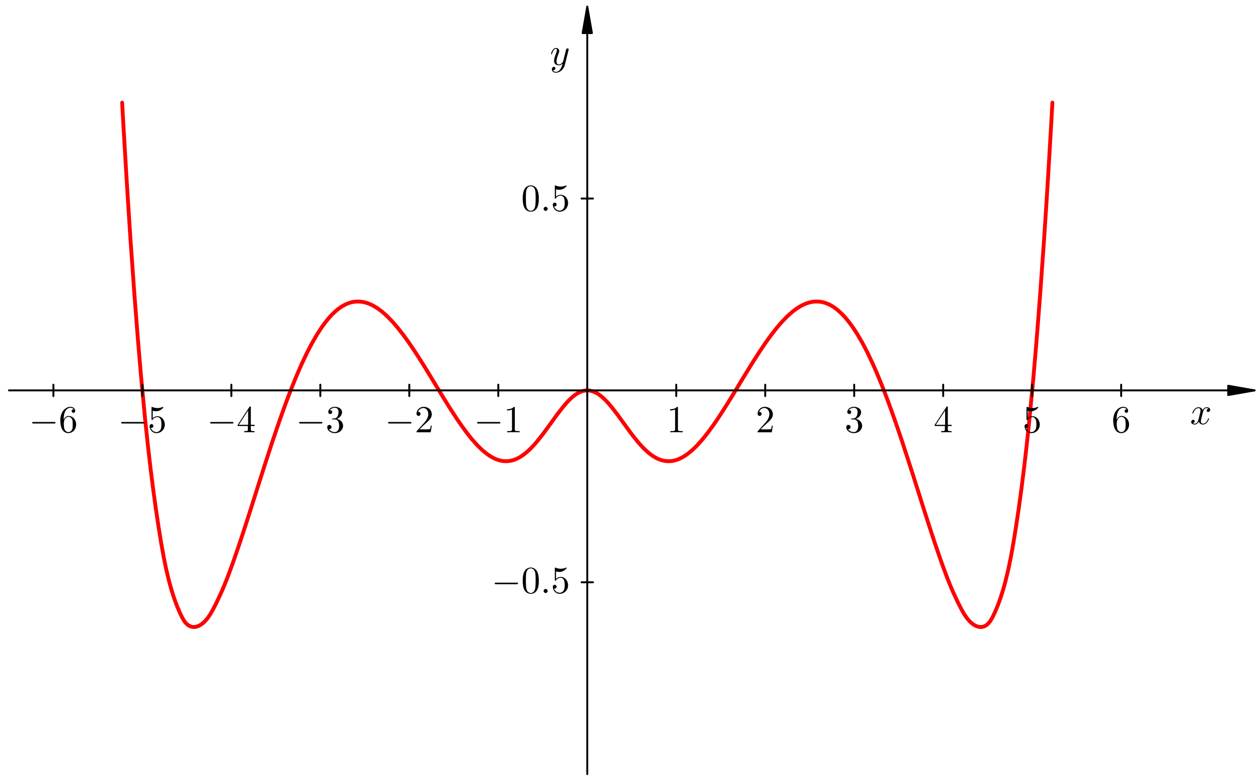
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



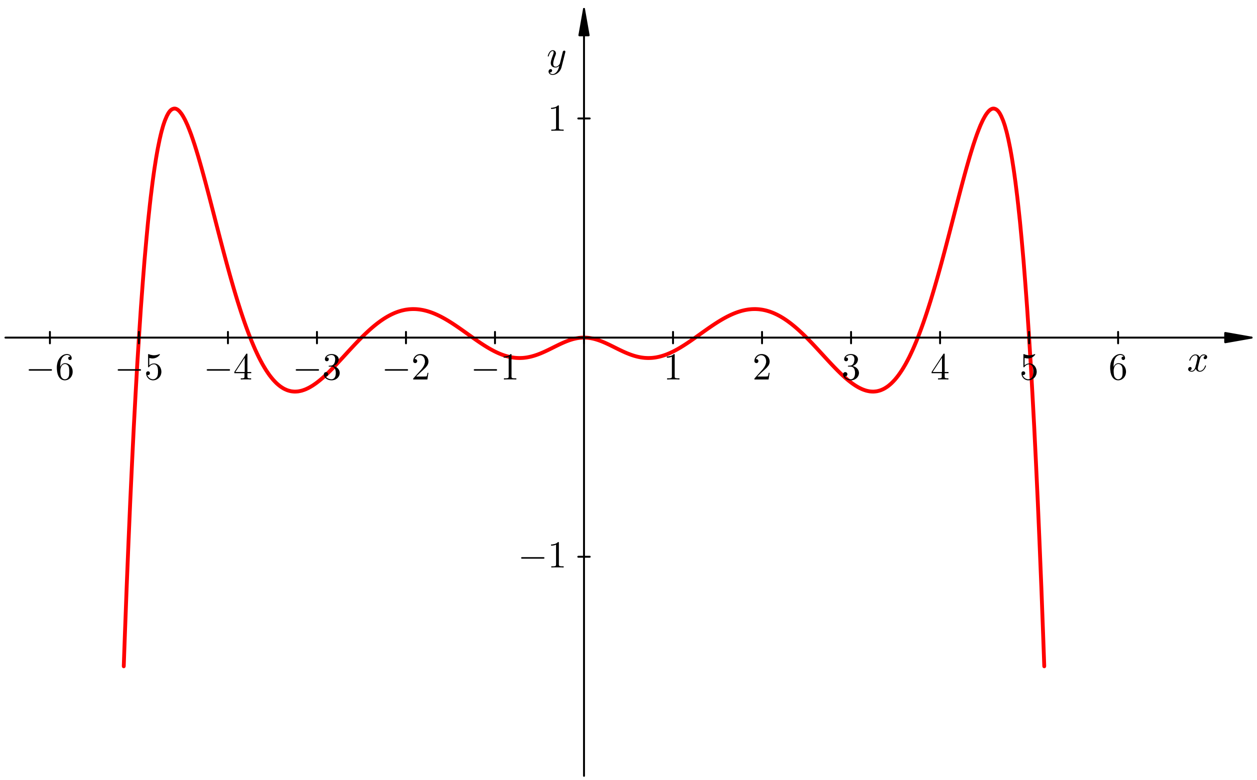
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



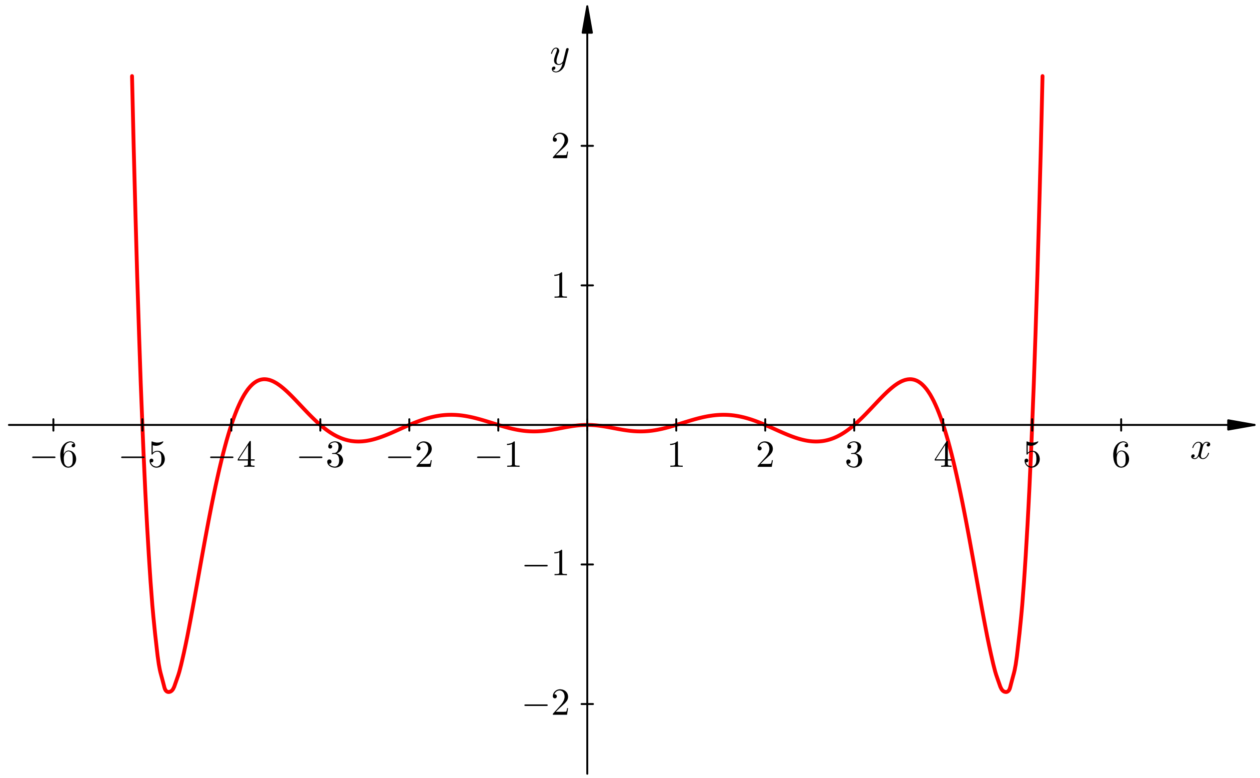
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



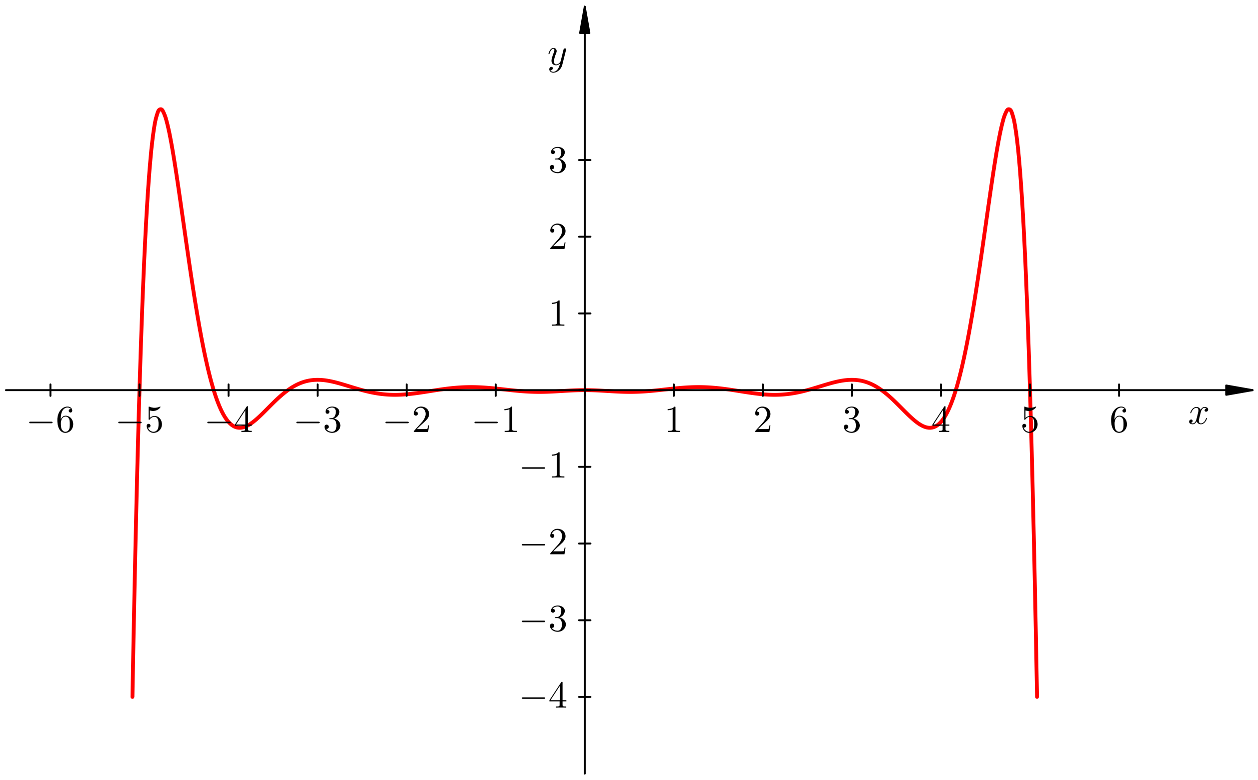
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



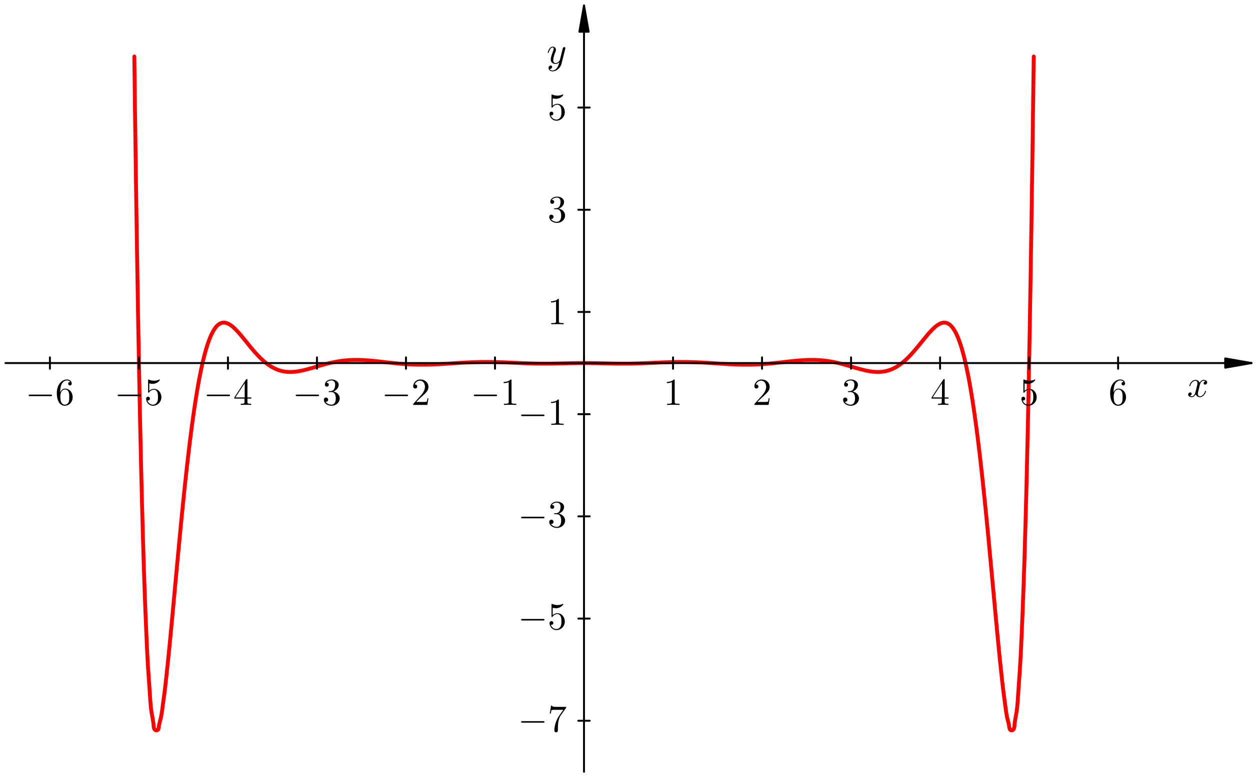
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



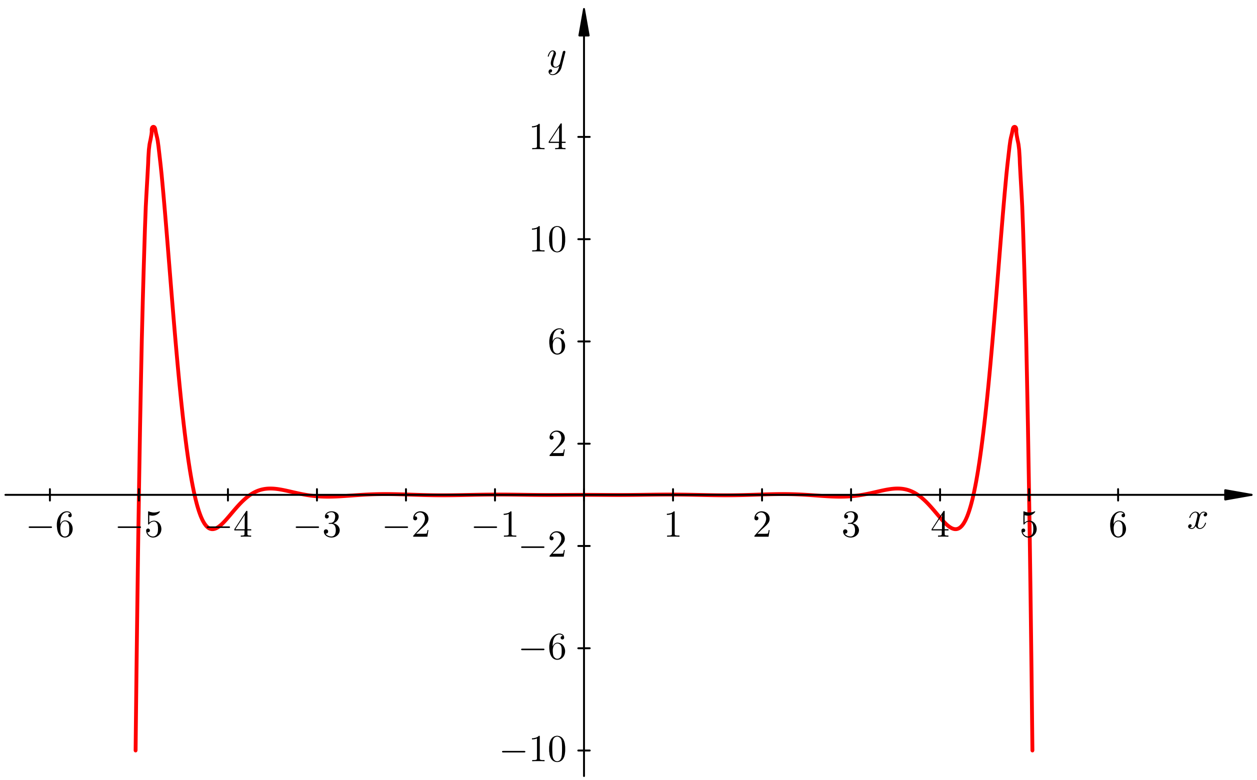
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63$, a interpolira se u ekvidistantnim točkama, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — interpolacijski polinom konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Brenstein, 1912.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je $p_n(x)$ interpolacijski polinom u $n + 1$ ekvidistantnih točaka u $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji pomoći? Može.

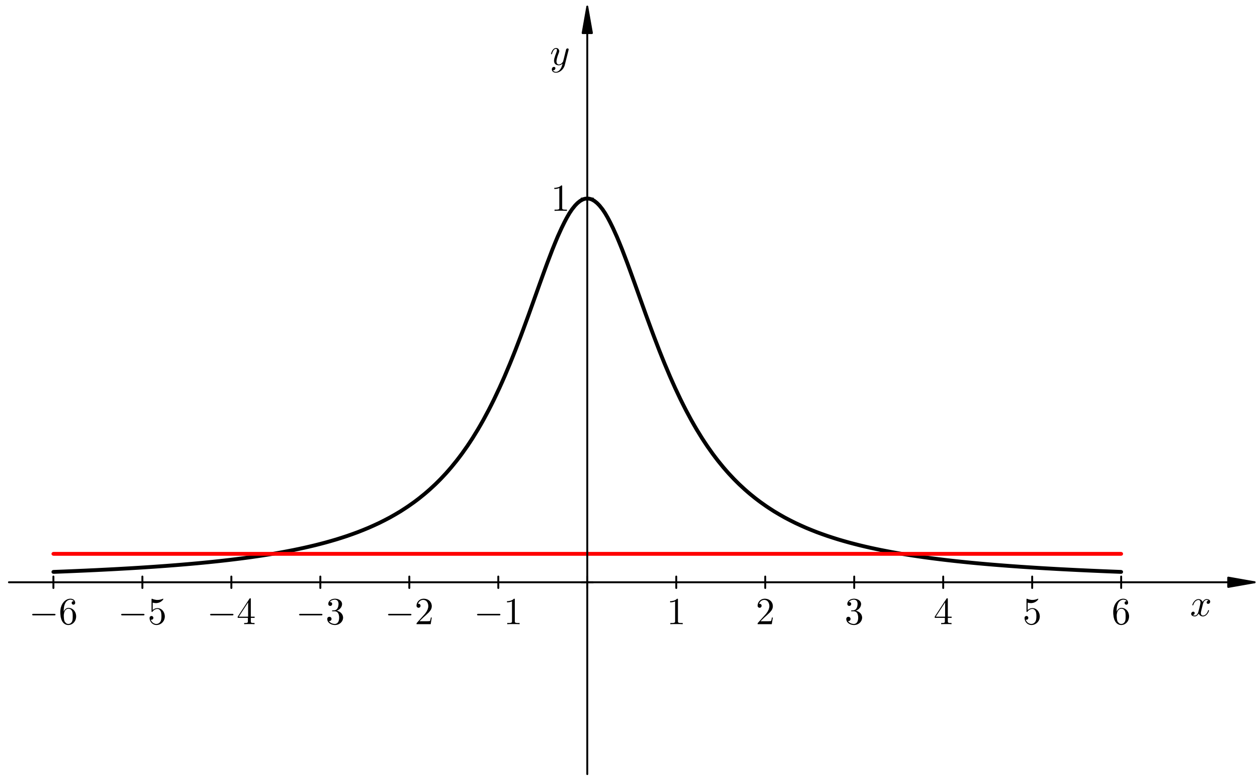
Ako umjesto ekvidistantnih točaka interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije tzv. Čebiševljeve točke, onda će porastom stupnja niz interpolacijskih polinoma

- konvergirati prema funkciji f.

Na intervalu $[a, b]$, Čebiševljeve točke su

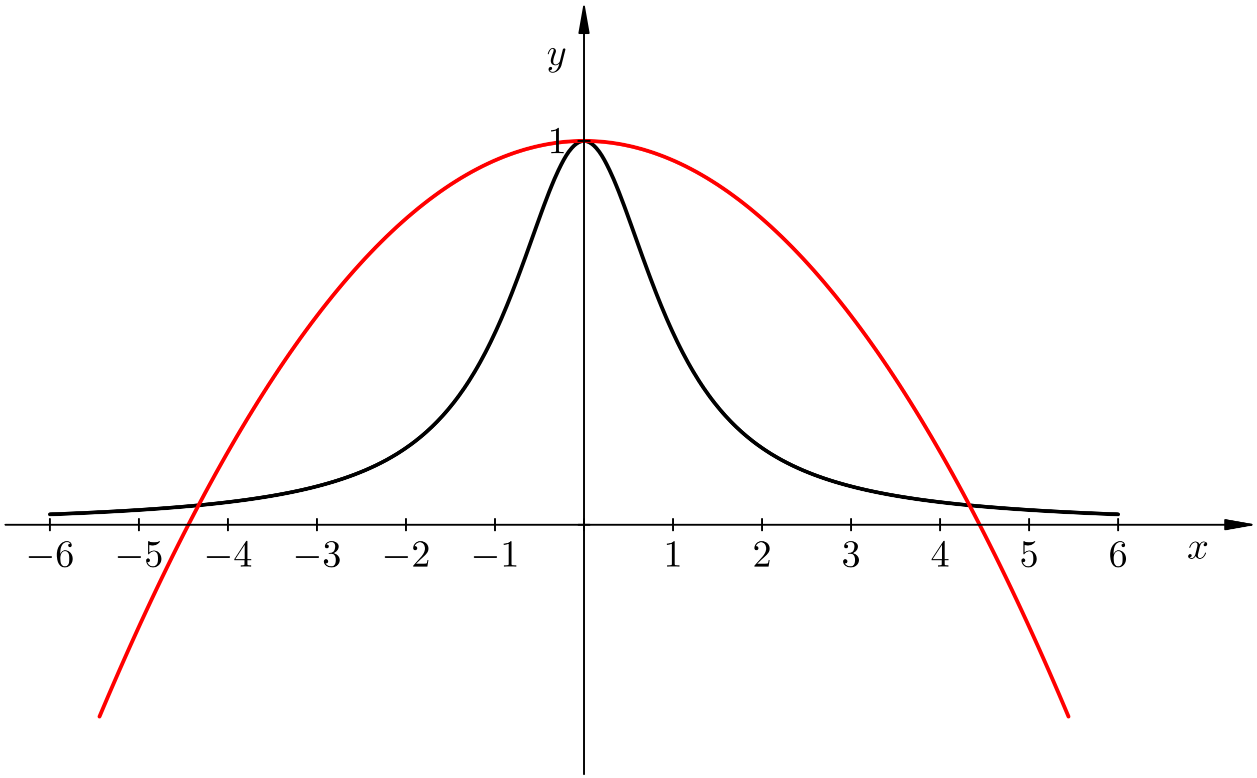
$$x_k = \frac{1}{2}\left(a + b + (a - b)\cos\frac{2k+1}{2n+2}\right), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



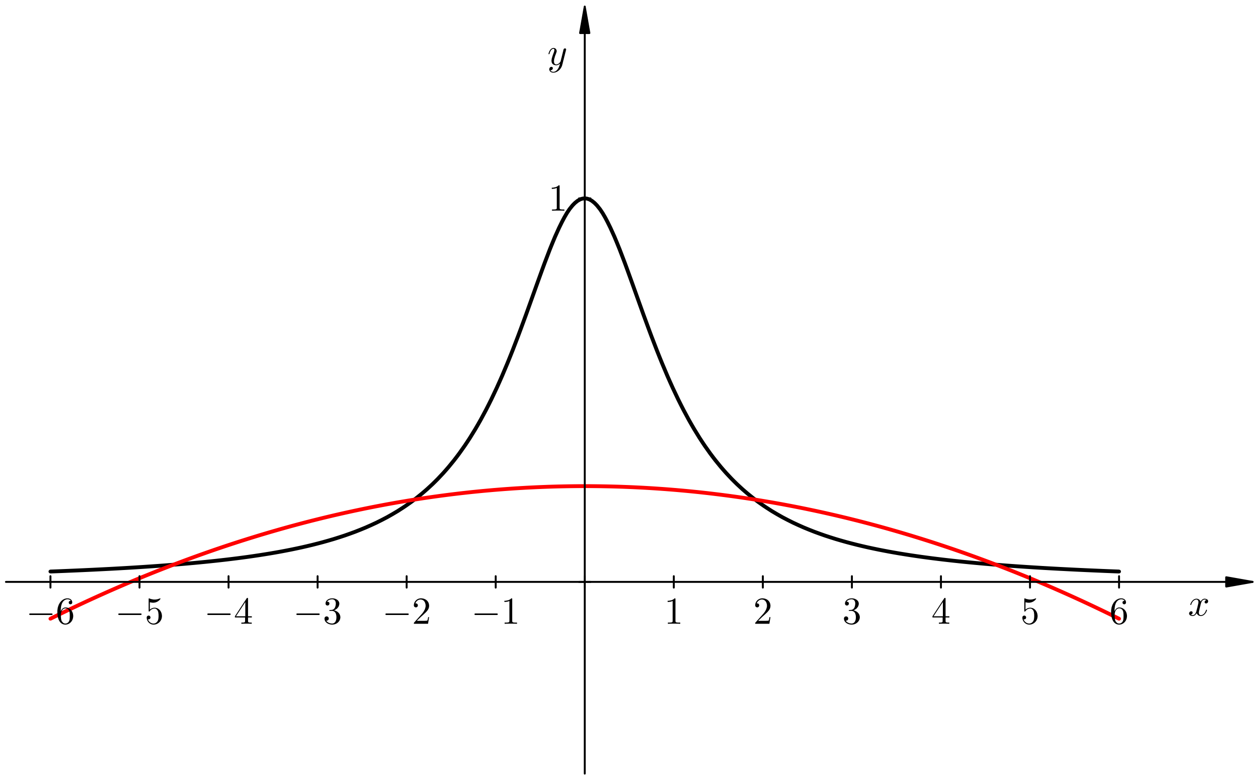
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



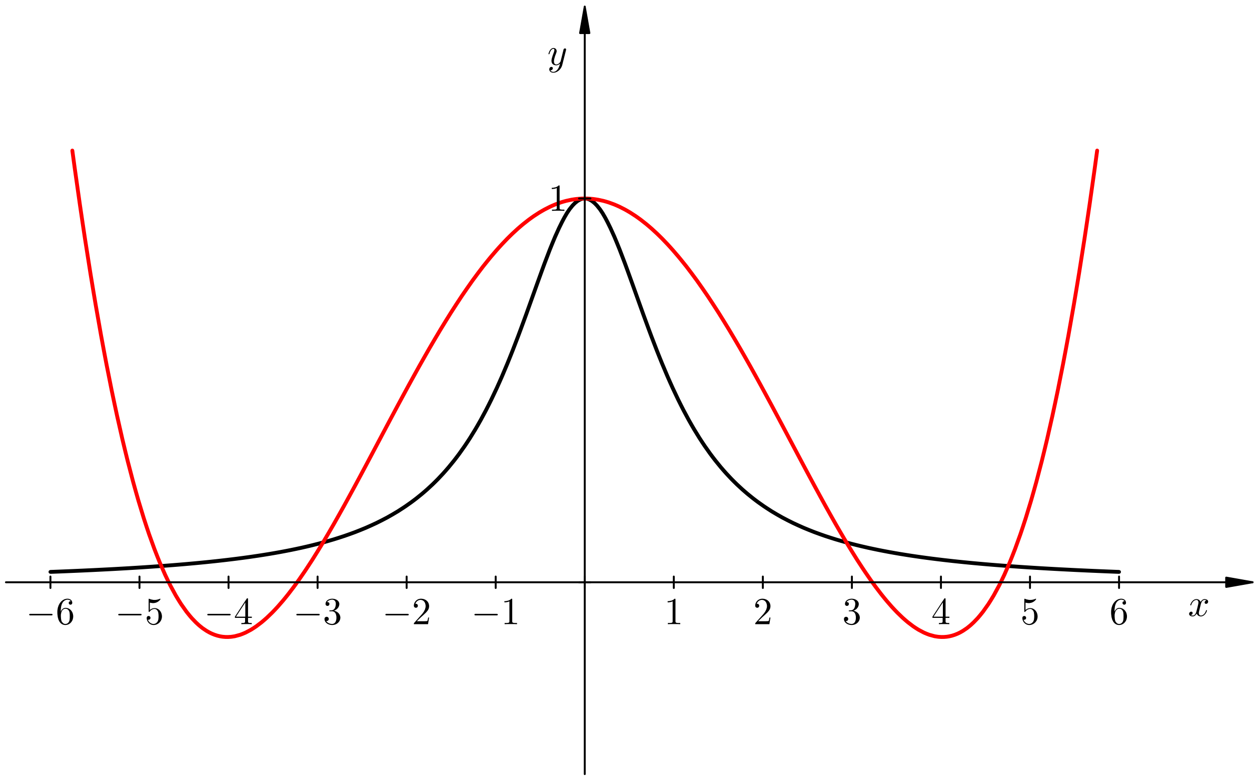
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



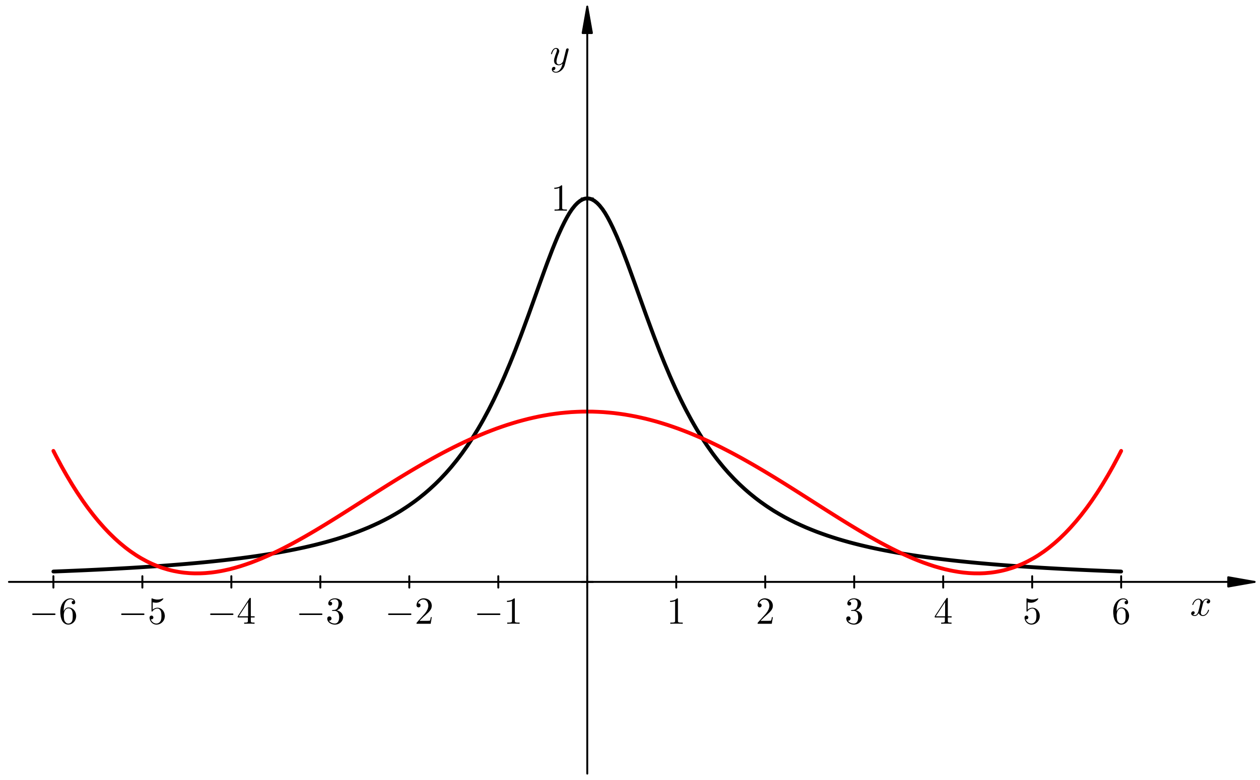
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



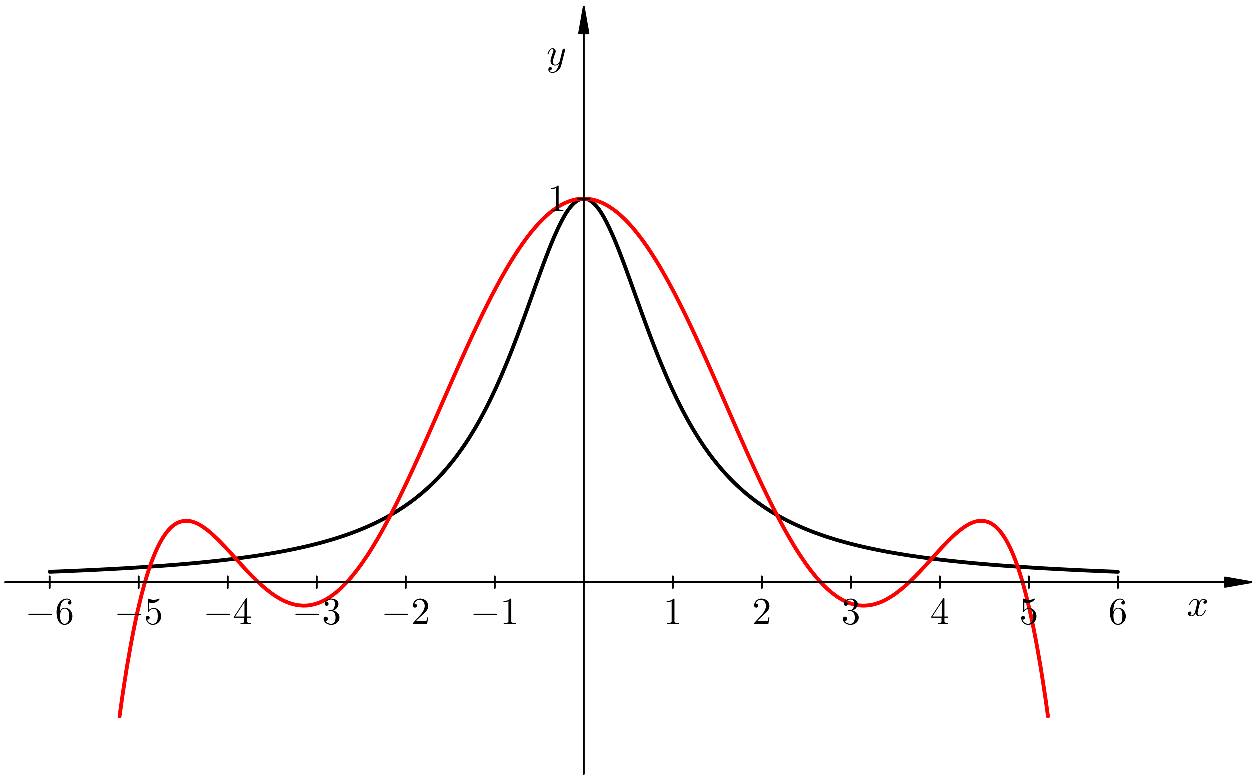
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



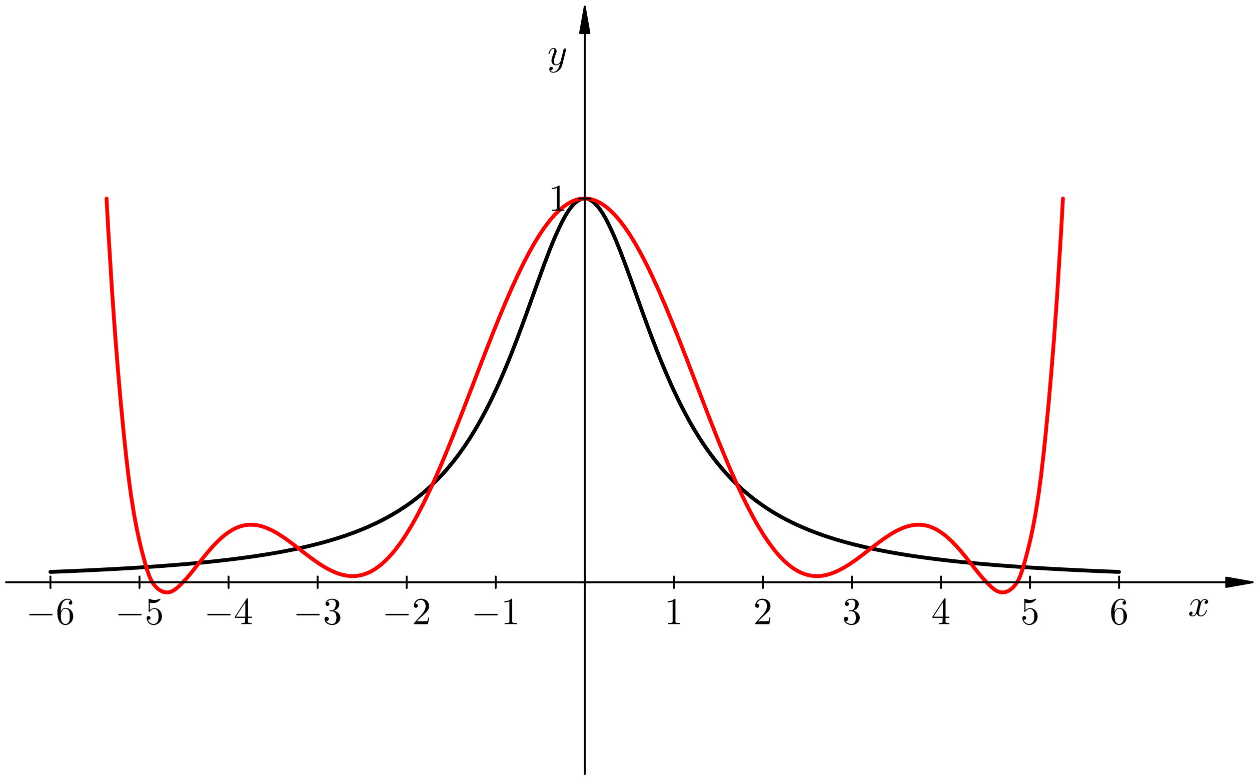
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

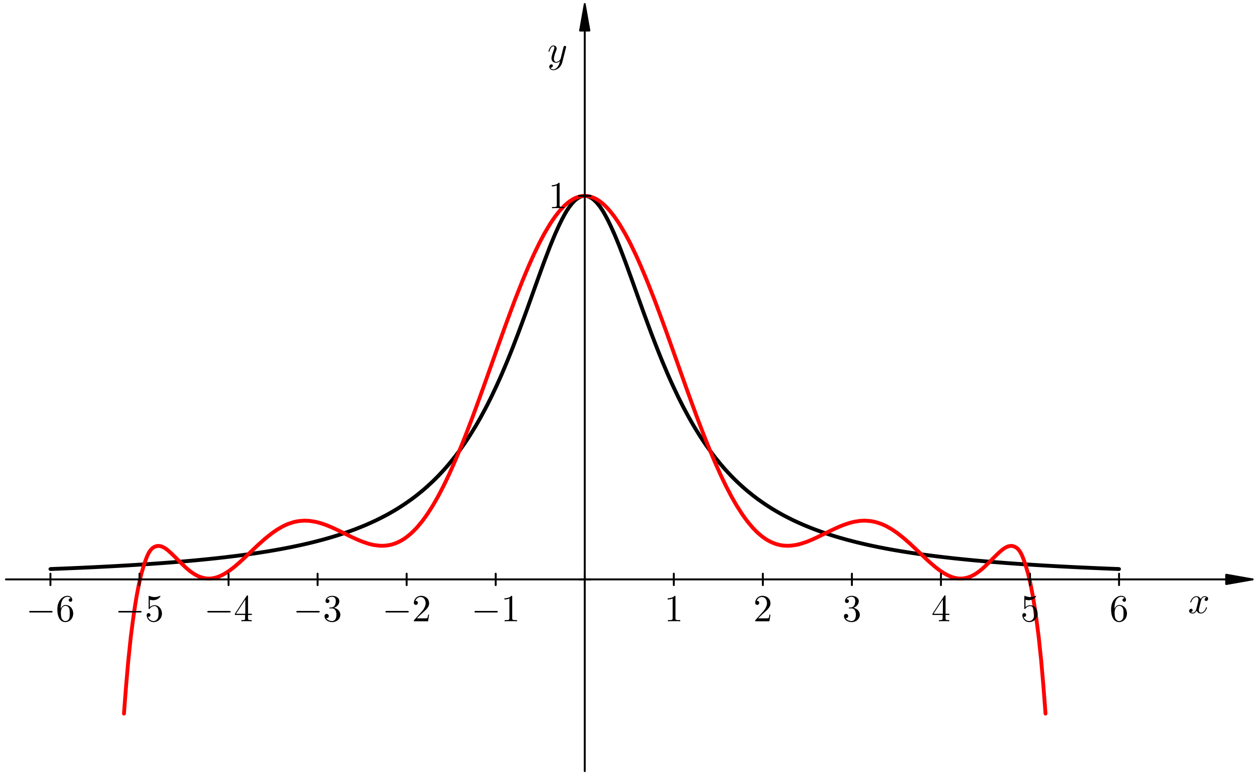
Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



Čebiševljeva mreža,

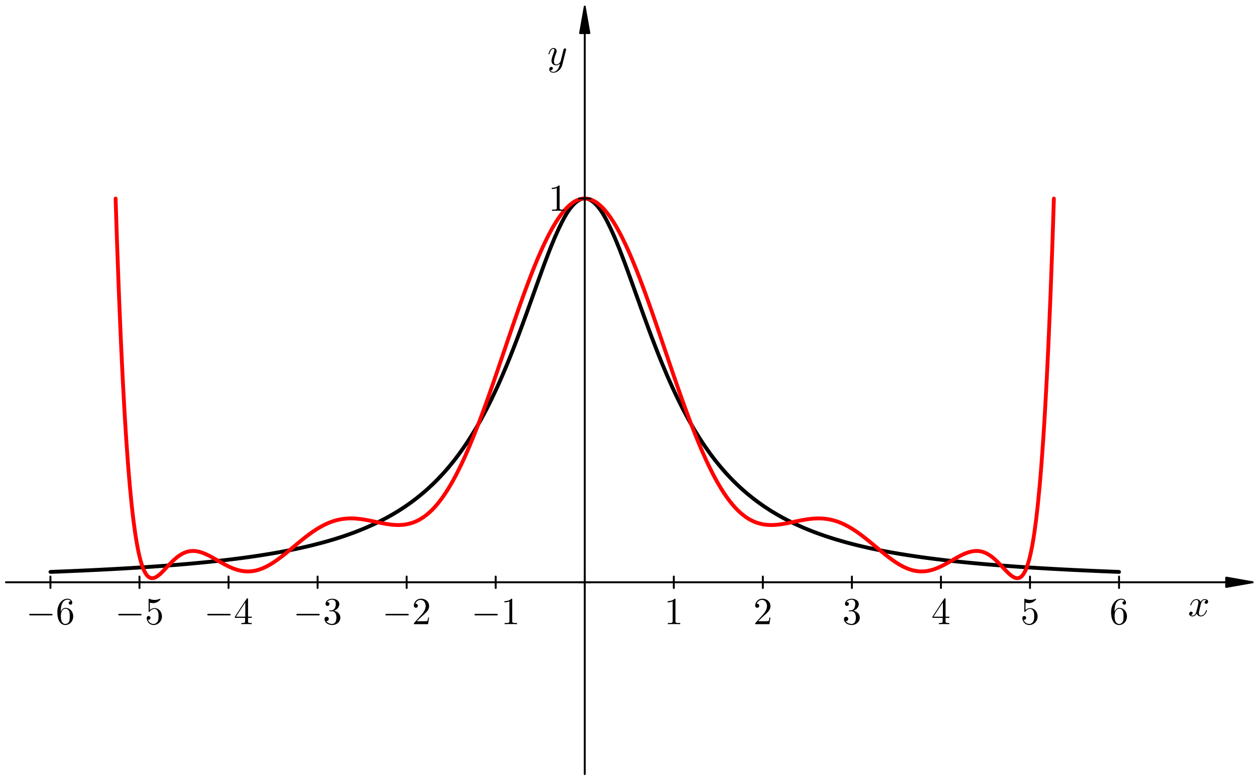
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



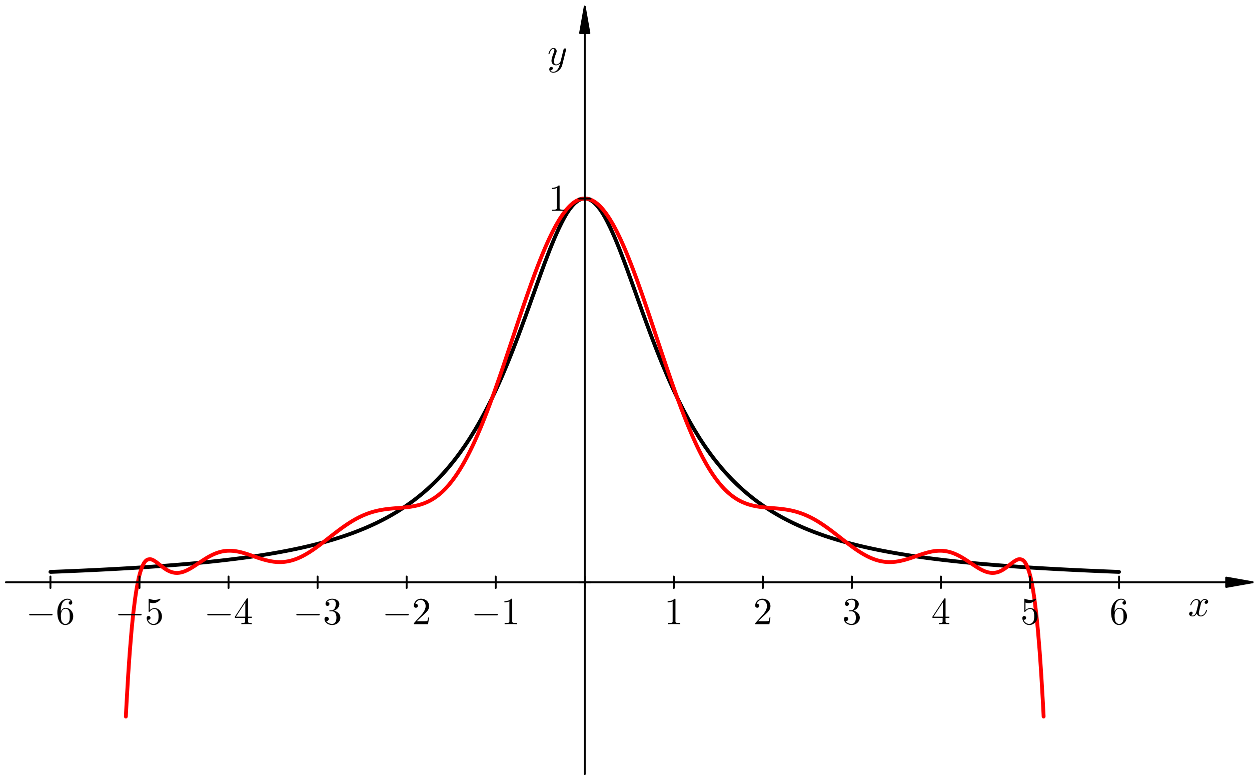
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



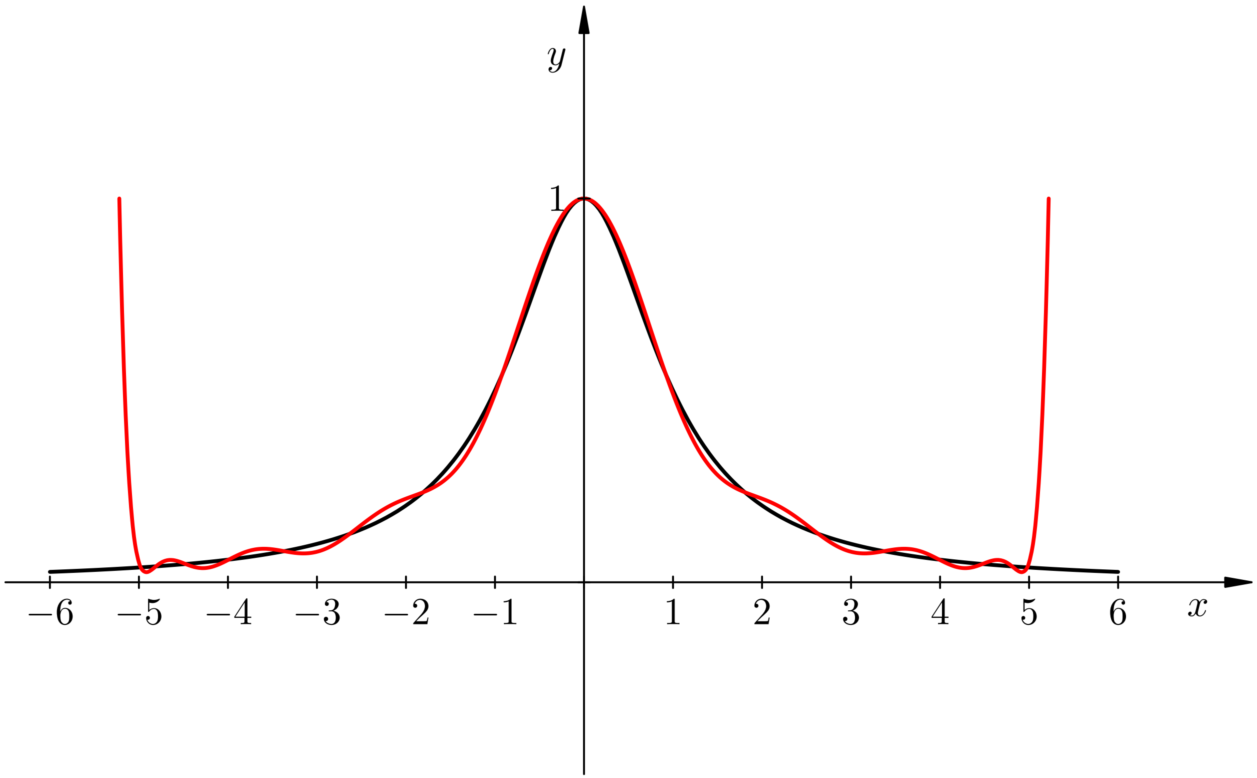
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

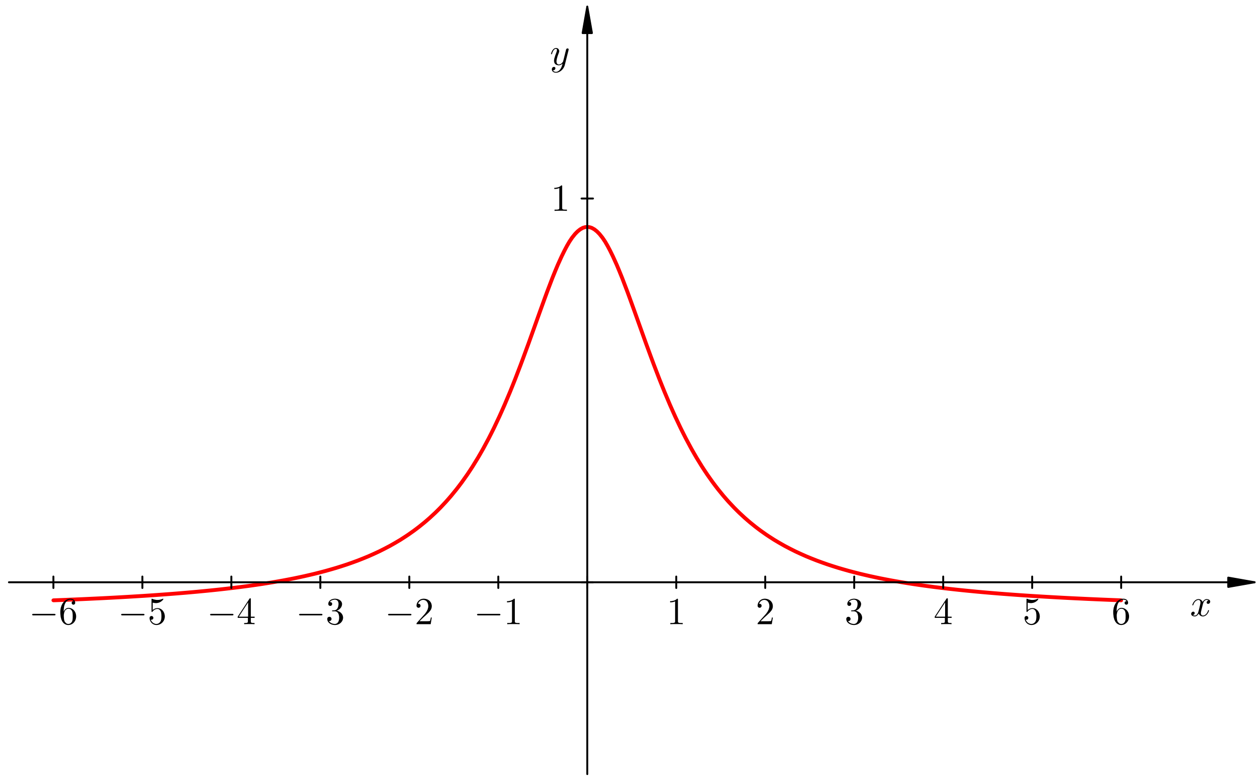
Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



Čebiševljeva mreža,

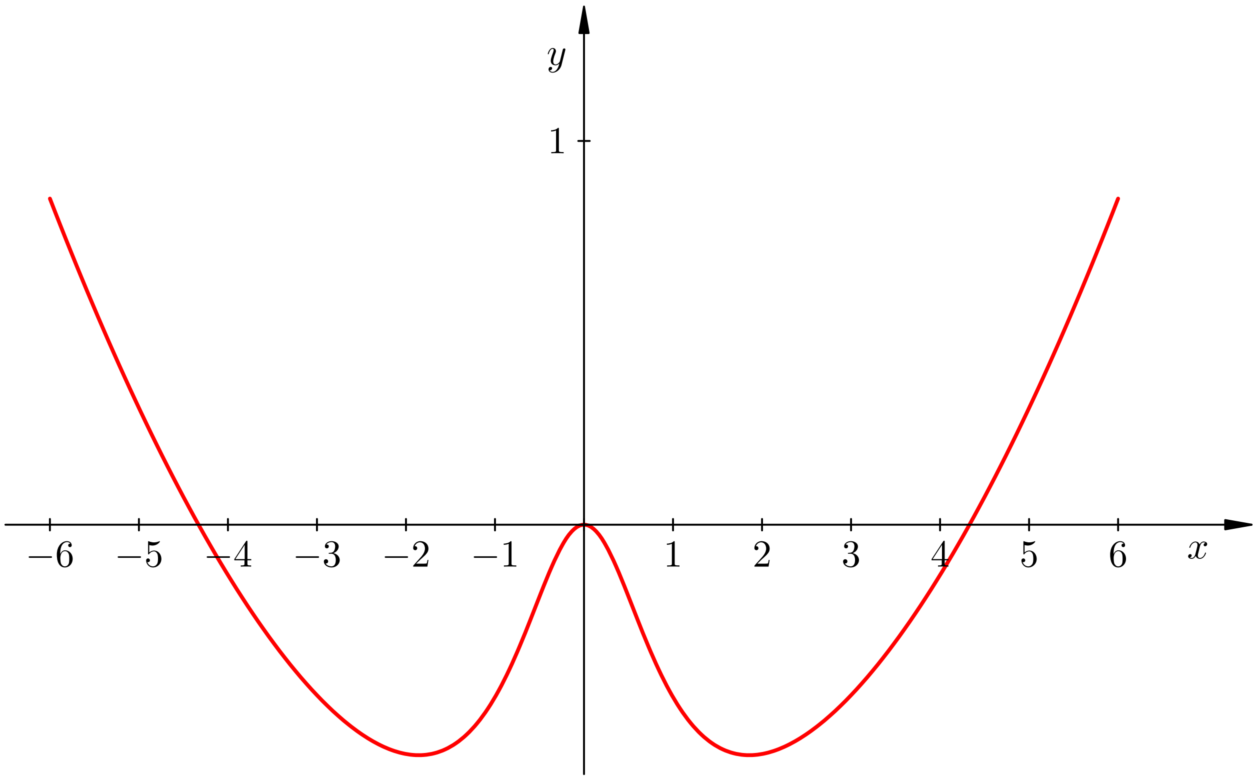
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



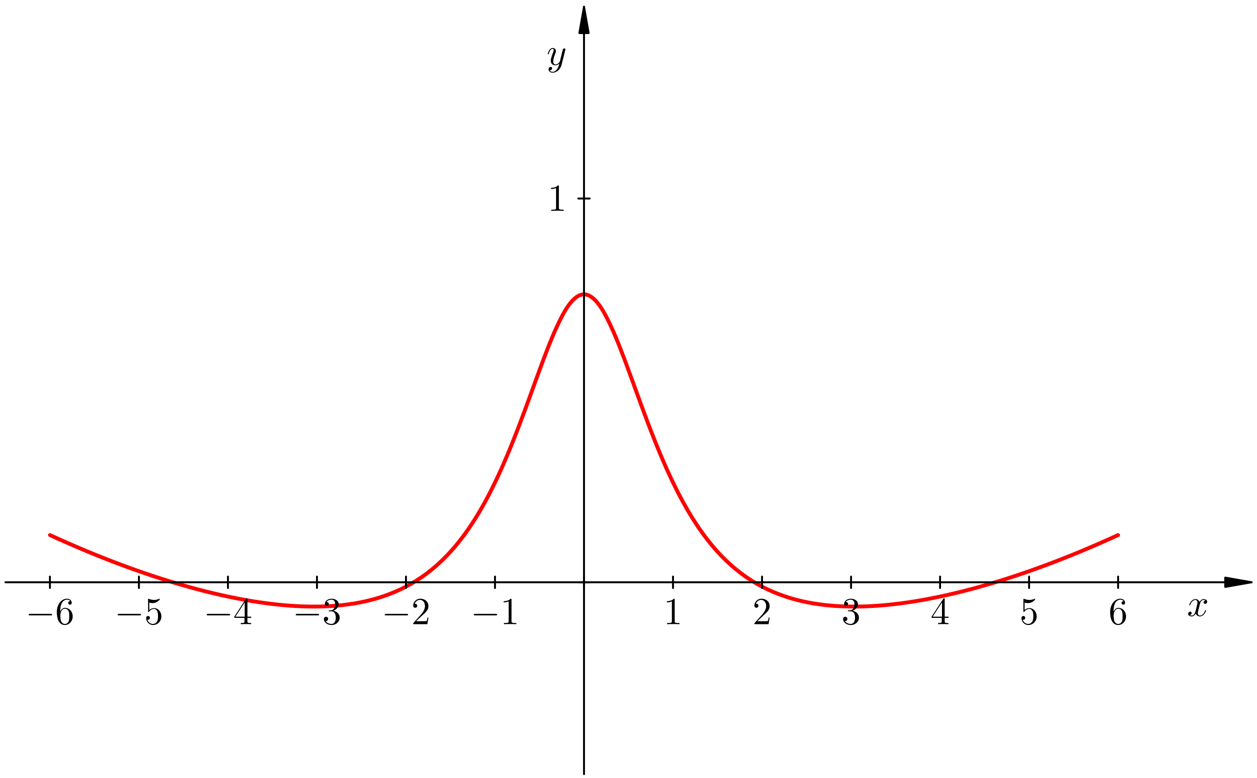
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



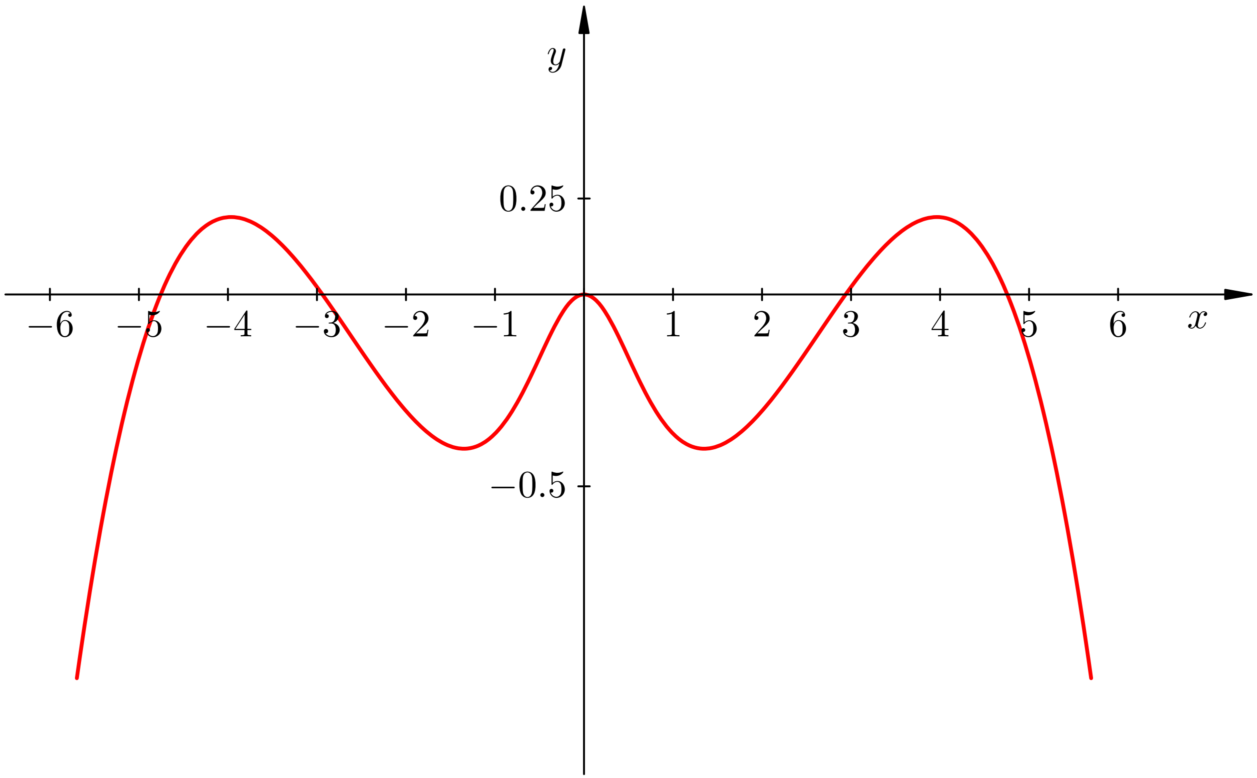
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



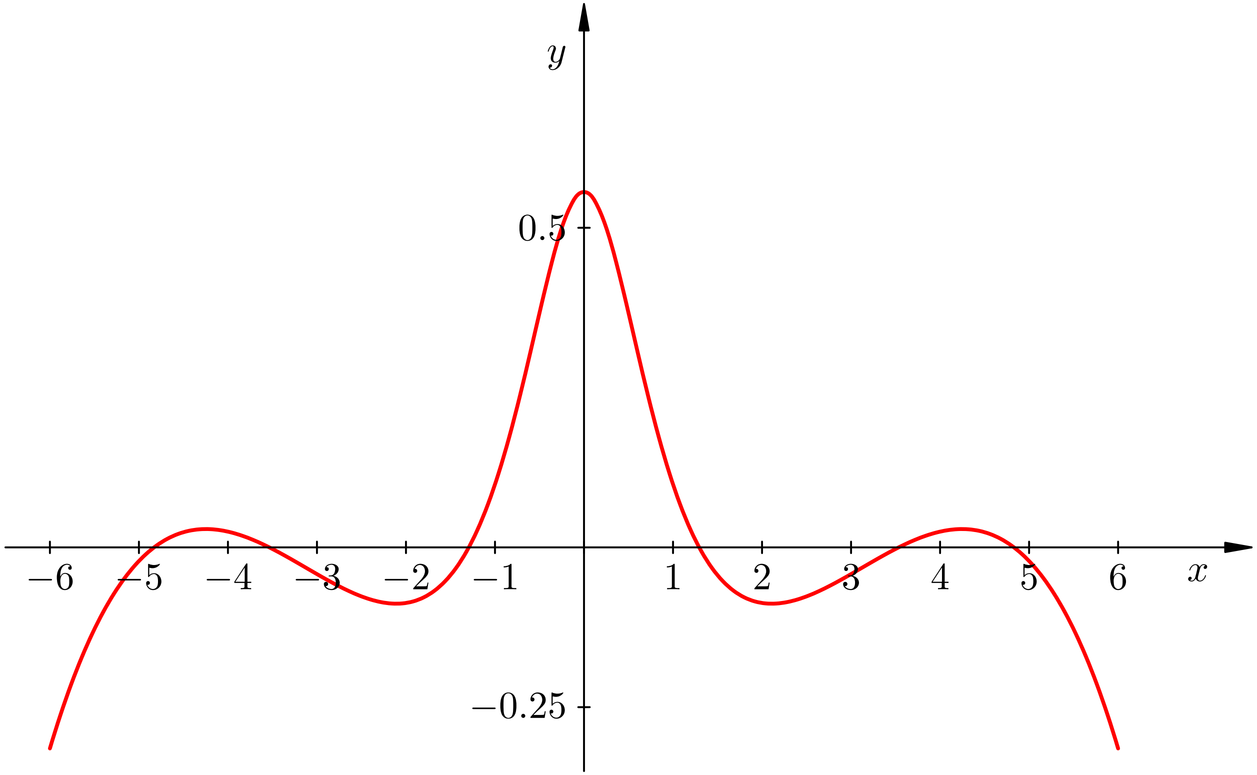
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



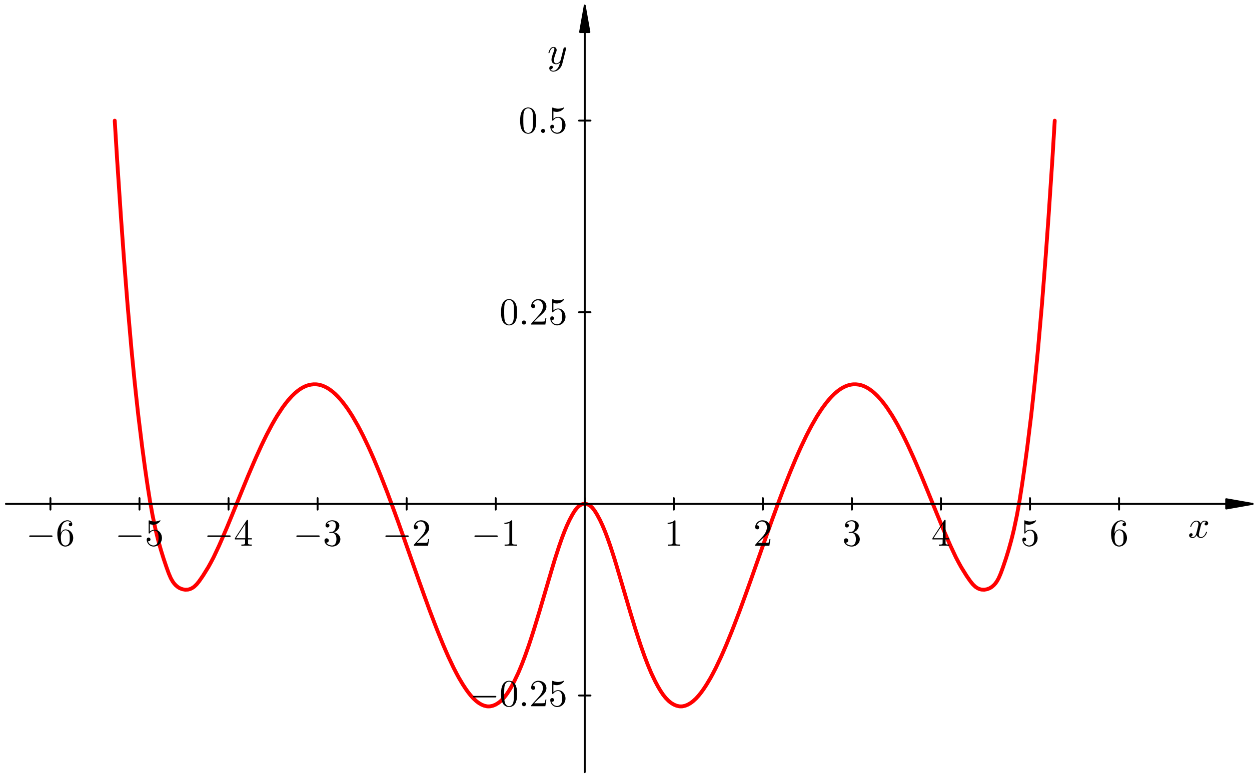
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



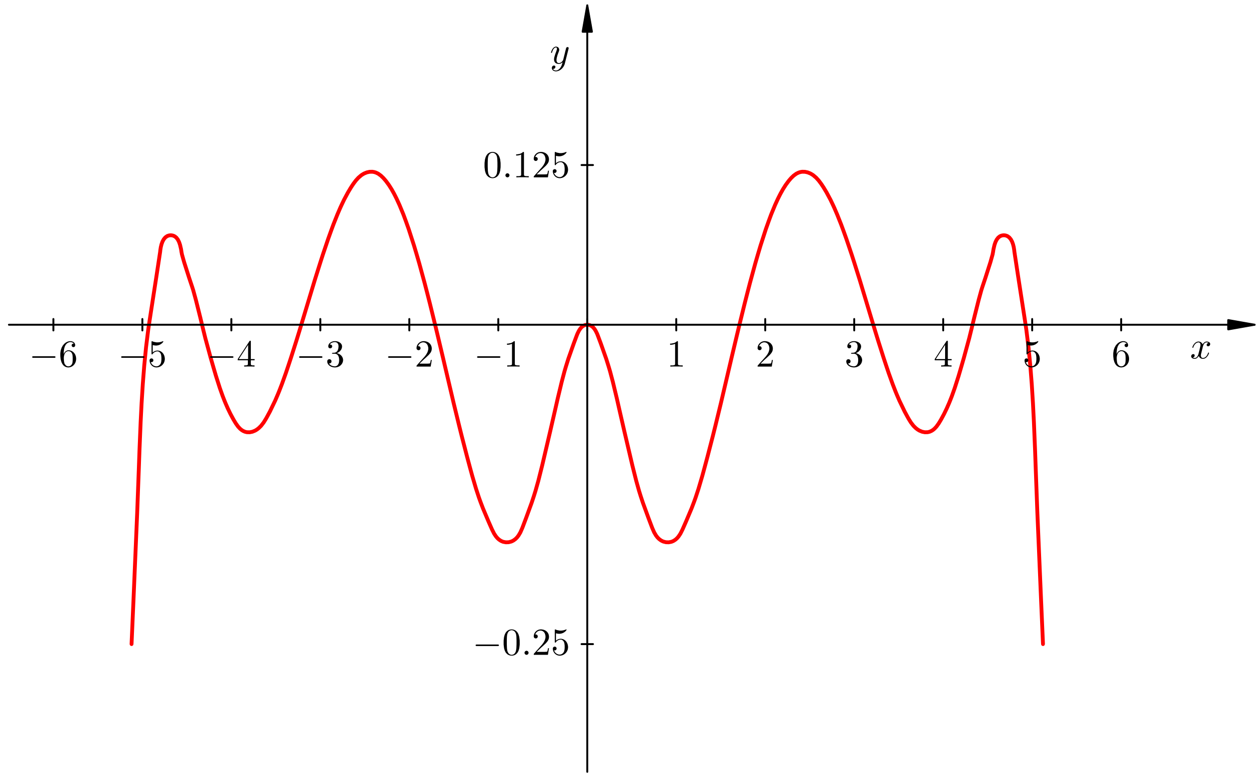
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



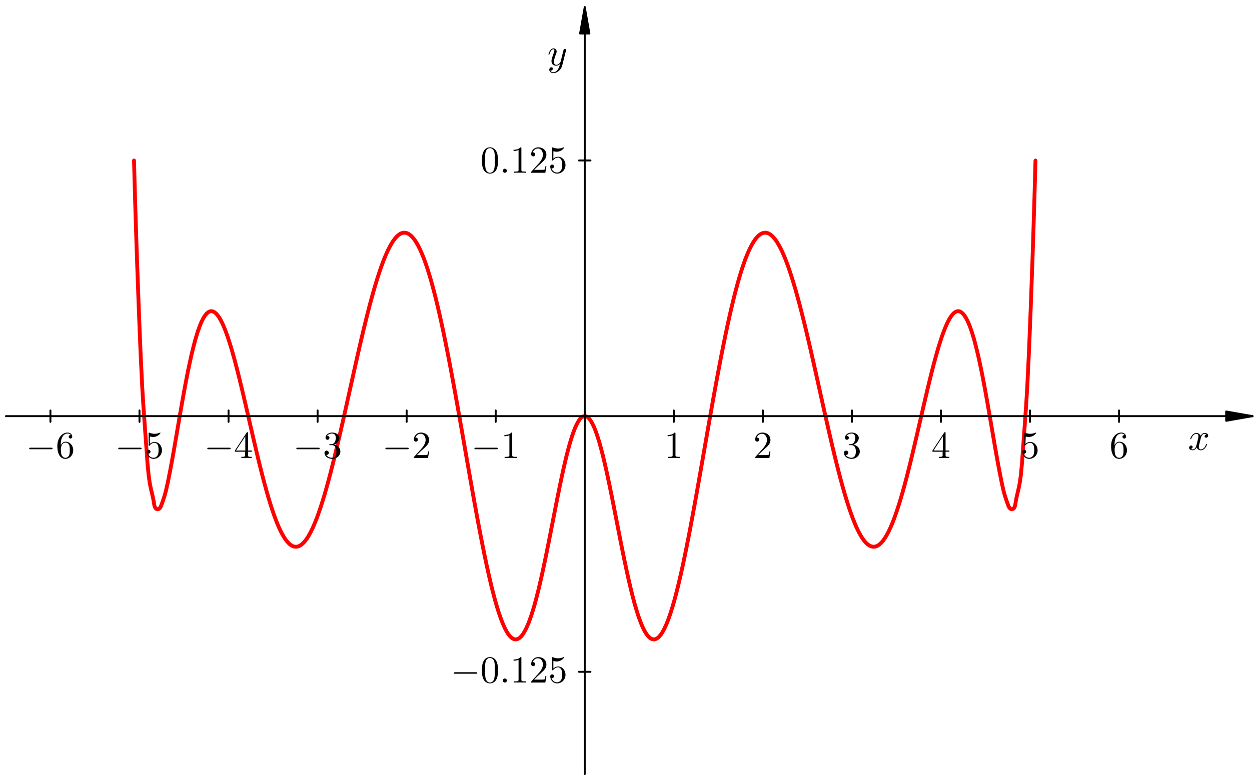
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



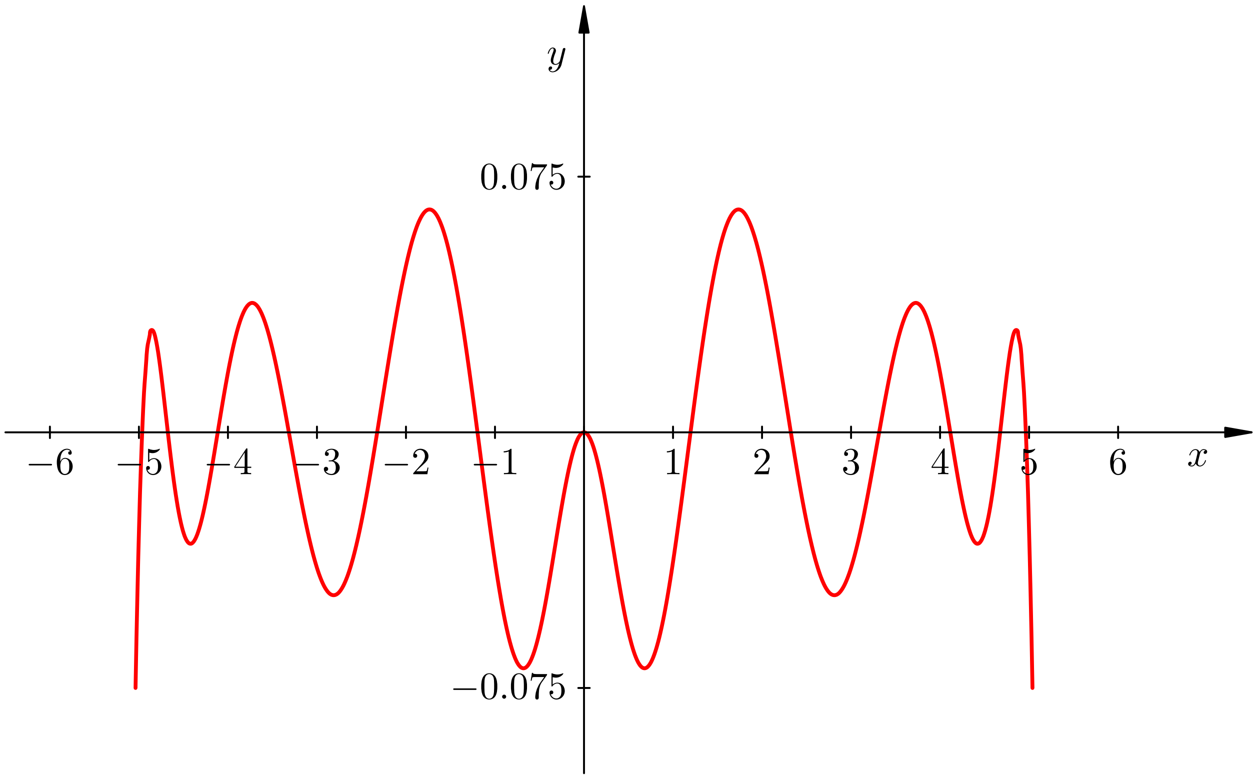
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

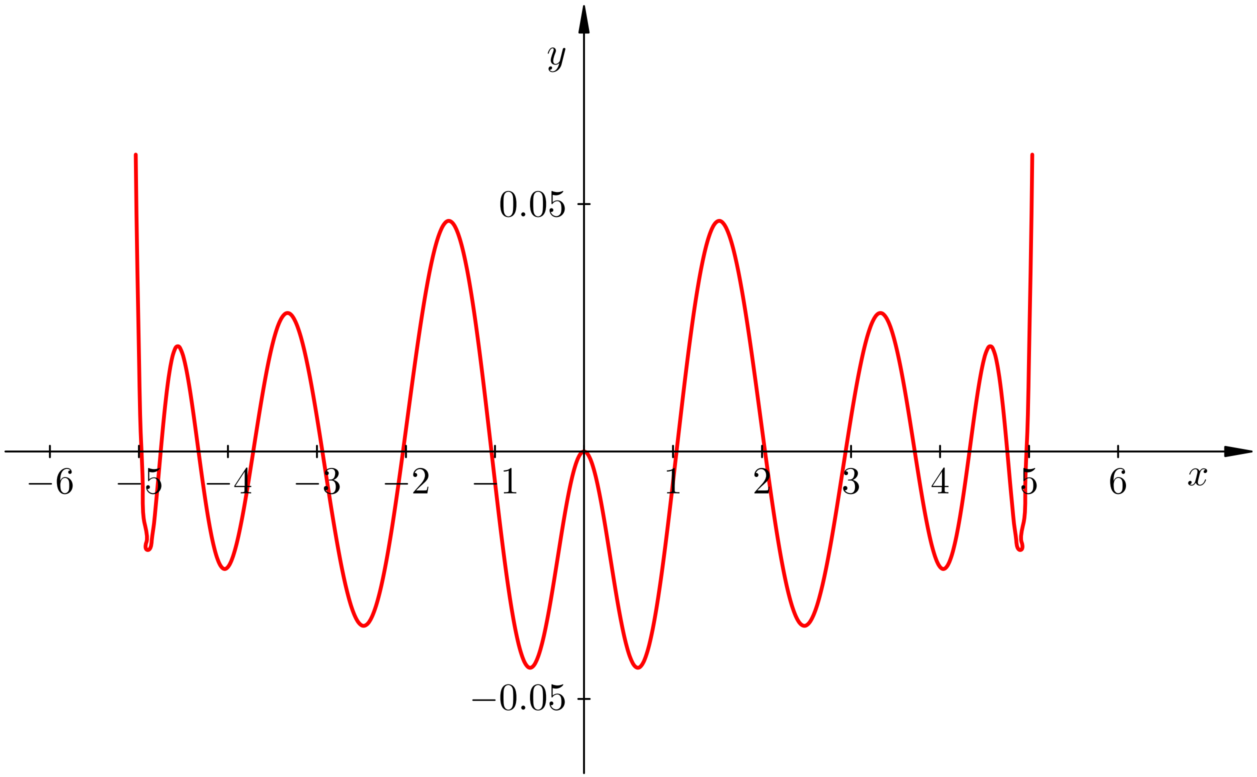
Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,

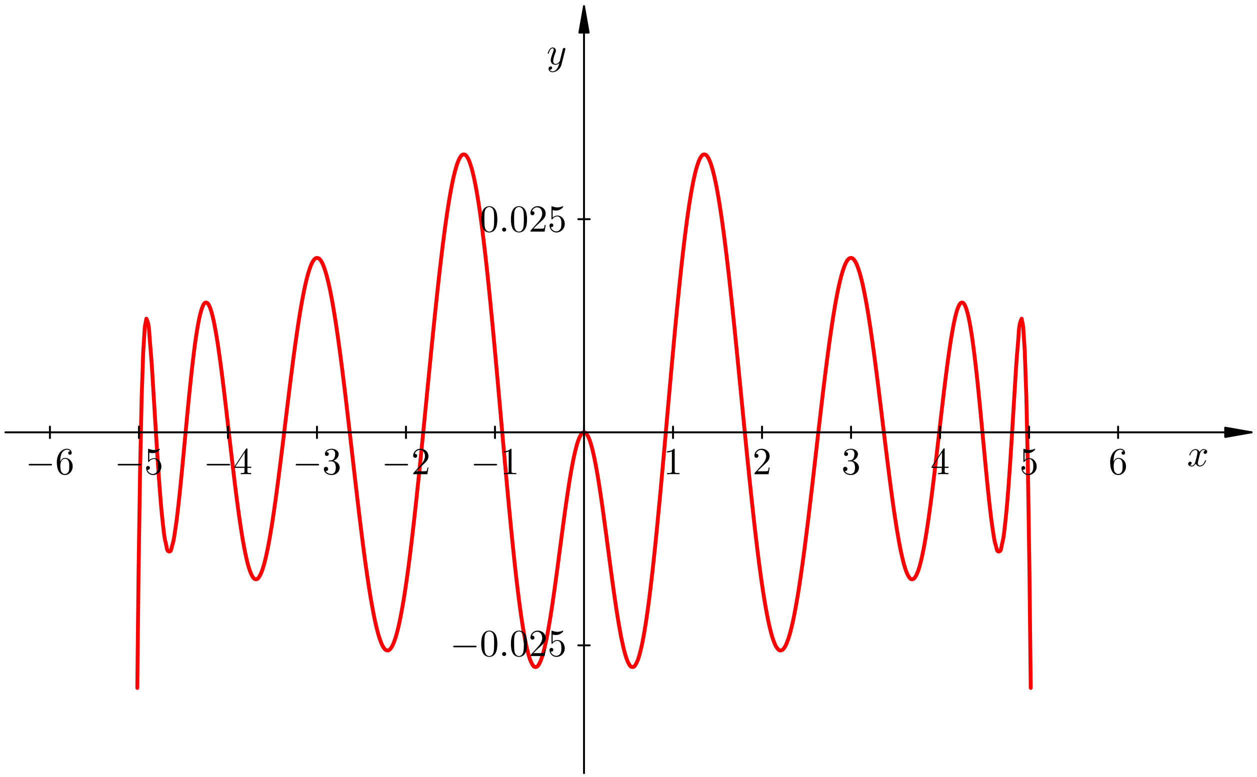
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je nemoguće naći dobar izbor točaka interpolacije za svaku funkciju.

Teorem. (Faber, 1914.)] Za svaki mogući izbor točaka interpolacije postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma $p_n(x)$, stupnja n vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0.$$

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo "kontrolirati".

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f, zadovoljimo se "skromnijim" ciljem:

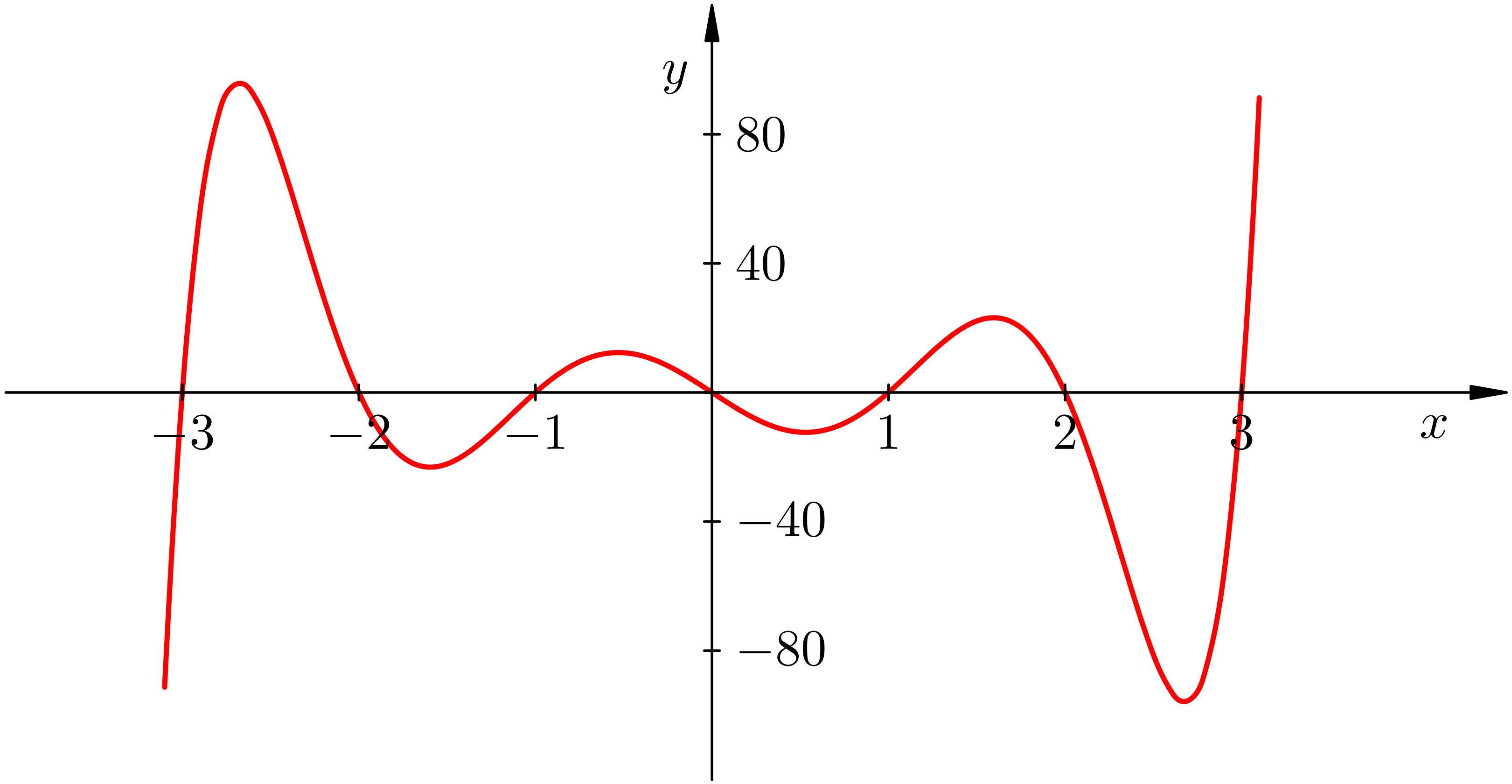
- minimizirajmo maksimalnu pogrešku polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

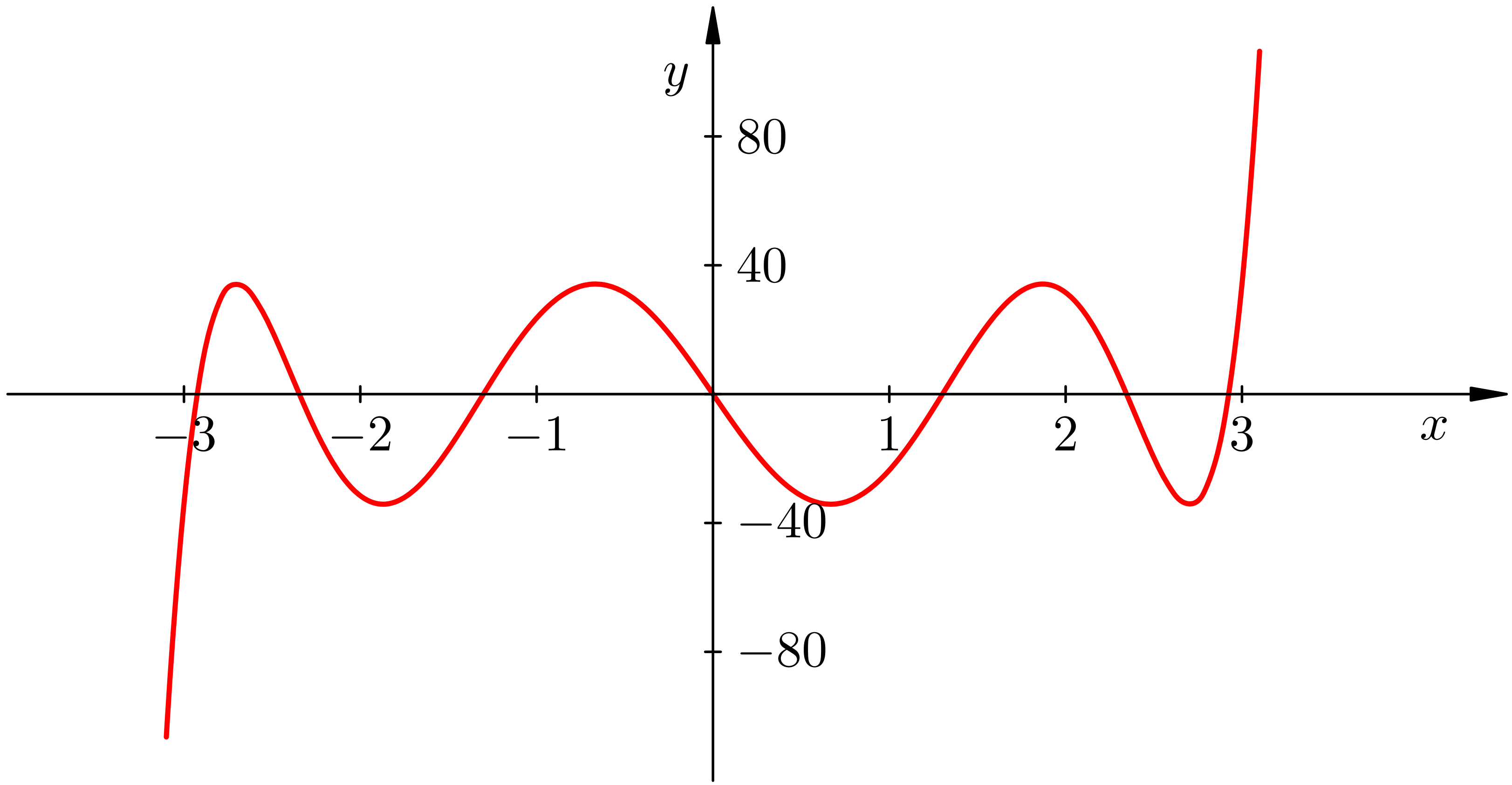
- ekvidistantni — najmanja greška je pri sredini intervala, a raste prema rubu,
- Čebiševljevi — greška je približno jednaka na svakom podintervalu.

Polinom čvorova za $n = 7$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 7$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 7$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 7$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da kad se uzmu Čebeševljevi čvorovi,

- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki.

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda je linearnom transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu pogrešku polinoma čvorova tj. da minimiziraju

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|.$$

Na intervalu $[a,b]$, Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{1}{2}\left(a+b+(a-b)\cos\frac{2k+1}{2n+2}\right), \quad k=0,\ldots,n.$$

Ako je $a=-1$, $b=1$, onda su Čebiševljeve točke x_k, $k=0,\ldots,n$ nultočke Čebiševljevih polinoma T_n prve vrste

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x\in[-1,1].$$

Čebiševljevi polinomi

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n.

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati. Njegove nultočke su

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, \ldots, n,$$

Čebiševljevi polinomi

dok su ekstremi

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k = 0, \ldots, n+1.$$

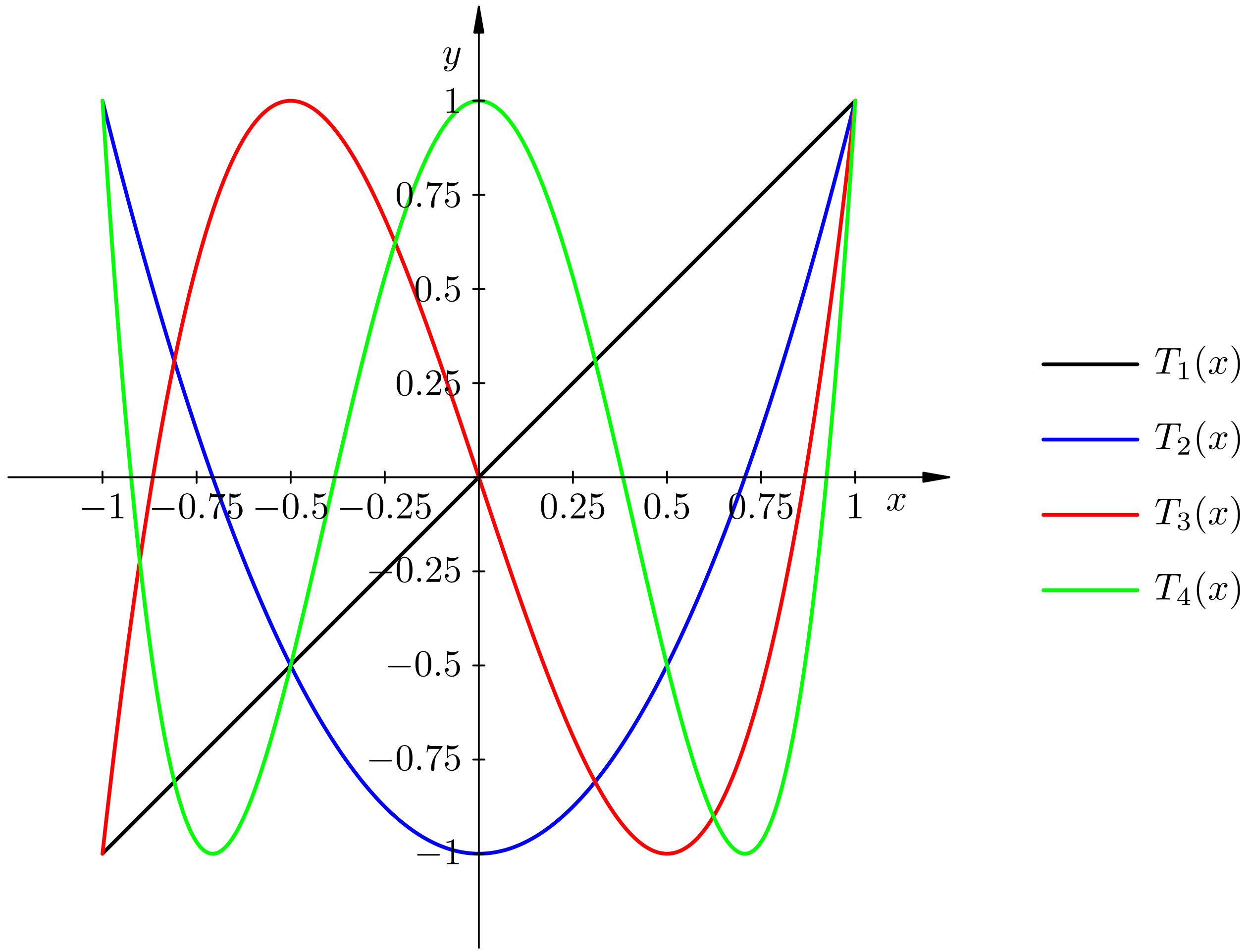
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x_k) = (-1)^k, \qquad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ i da alterniraju po znaku.

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma dan je na sljedećoj stranici.

Čebiševljevi polinomi



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule".

Teorem. Za fiksni prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n = \inf_{\deg(P) \leq n-1} \Big(\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \Big),$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n se dostiže samo za

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent T_n jednak

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad j = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

U njima je

$$T_n(x_k) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n$$

i $-1 = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0 = 1$. Polinom $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ ima vodeći koeficijent 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju. Definicija τ_n i prethodna pretpostavka pokazuju da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \le n - 1,$$

gdje je

$$\tau_n \le \max_{-1 \le x \le 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - M(x).$$

Tvrdimo da će se vodeći koeficijenti funkcija s desne strane skratiti, pa je

$$\deg(R) \leq n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima funkcije T_n. Iz gornje ograde za τ_n redom, izlazi

$$R(x_0) = R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0$$

$$R(x_1) = -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x_1) < 0, \ldots$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x_k)) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. ∎

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati točke interpolacije $x_j \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1. Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}, a njih smo već izračunali da su jednake

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k,

- možemo tražiti da interpolacijski polinom h interpolira i derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Ipak, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji je li jedinstven;
- ako postoji, kojeg je stupnja.

Hermiteova polinomna interpolacija

Problem egzistencije i jedinstvenosti konstruktivno rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1} stupnja najviše $2n+1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n+1}(x_k) = f'_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_k međusobno različite točke i f_k, f'_k zadani realni brojevi.

Dokaz.

Ideja: konstrukcija baze nalik na Lagrangeovu.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tražimo "bazične polinome" $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ za koje vrijedi

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x) \big).$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x) \big),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i) \big) = f_k,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i) \big) = f'_k.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu definirati kao

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\,\ell_k^2(x)$$
$$h_{k,1}(x) = (x - x_k)\,\ell_k^2(x),$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h'_{k,0}(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h'_{k,1}(x_i)$ zadovoljavaju traženo vrši se direktno, uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n, onda

- su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Primijetite da funkcija pogreške

$$e(x) = h_{2n+1}(x) - f(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots x_n$, jer i funkcija e i njezina derivacija e' imaju nultočke u x_i, tj.

$$e(x_i) = 0, \quad e'(x_i) = 0.$$

Ostaje još pokazati jedinstvenost.

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji ispunjava uvjete teorema. Tada je

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (h_{2n+1}(x) - f(x)) - (q_{2n+1}(x) - f(x)). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Polinom p

- je stupnja ne većeg od $2n+1$.
- p ima dvostruke nultočke u x_i, $i = 0, \ldots, n$, odnosno ukupno ima barem $2n+2$ nultočaka.

Zaključak. Polinom stupnja najviše $2n+1$ koji ima barem $2n+2$ nultočke je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven. ■

Zbog toga što Hermiteov interpolacijski polinom ima dvostruke nultočke u $x_0, \ldots x_n$, polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Pogreška Hermiteove interpolacije

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije, samo moramo iskoristiti

- h_{2n+1} je stupnja $2n+1$,
- oblik polinoma čvorova $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom h_{2n+1} funkcije $f \in C^{(2n+2)}[x_{\min}, x_{\max}]$ u $n+1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ je oblika

$$e(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\,\omega^2(x),$$

gdje su ξ i ω kao u teoremu o pogrešci Lagrangeove interpolacije.

Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka je dvostruki čvor.
- Pitanje: što je podijeljena razlika u dvostrukom čvoru?

Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo da $h \to 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f[x_0, x_0] &= \lim_{h\to 0} f[x_0, x_0 + h] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike računaju se na uobičajeni način.

Podijeljene razlike

Tablica podijeljenih razlika:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & {\color{red} f[x_0]} & & & & \\
 & & {\color{red} f'(x_0)} & & & \\
x_0 & f[x_0] & & {\color{red} f[x_0, x_0, x_1]} & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & {\color{red} \ddots} & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_1] & & \\
 & & f'(x_1) & & & {\color{red} \cdots} \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
x_n & f[x_n] & & f[x_{n-1}, x_n, x_n] & & \\
 & & f'(x_n) & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi

$$\begin{aligned} h_{2n+1}(x) &= f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\ &\quad + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2\,(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_0, \ldots\ , x_n, x_n](x - x_0)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n). \end{aligned}$$

Naziv "Hermiteova interpolacija" koristi i za općenitiji slučaj tzv. proširene Hermiteove interpolacije

- interpoliraju se i više derivacije od prvih;
- bitno je samo da se u svakom čvoru x_i redom interpoliraju funkcijska vrijednost i prvih nekoliko (uzastopnih) derivacija.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom.

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom $f, f', \ldots, f^{(n)}$ u x_0.

U ovom primjeru, x_0 je $(n+1)$-struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(k+1)\ \text{puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n oko točke x_0.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo "preskakanje" nekih derivacija u nekim točkama,

- problem interpolacije ne mora uvijek imati rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2$.

Interpolacija splajnovima

Interpolacija polinomima — zaključci

Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva,
- u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.

Pretpostavka: čvorovi interpolacije (rubovi podintervala) interpolacije su uzlazno numerirani,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo polinom fiksnog stupnja m, tj. tražimo da je

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_m$.

Svaki polinom p_k (stupnja m)

- određen je s $m + 1$ koeficijenata, i
- moramo odrediti koeficijente n polinoma (na svakom intervalu po jedan).

Ukupan broj koeficijenata koje treba odrediti je

$$(m + 1) \cdot n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Interpolacijski uvjeti su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

što za svaki polinom daje po 2 uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n,$$

odnosno, ukupno imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Digresija. Uvjetima interpolacije osigurali smo neprekidnost funkcije φ, jer je

$$p_{k-1}(x_{k-1}) = p_k(x_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Zaključak.

- Uvjeta interpolacije je $2n$, a
- treba naći $(m+1) \cdot n$ koeficijenata.

Bez dodatnih uvjeta to je moguće napraviti

- samo za $m = 1$,
- tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

Za $m > 1$

- dodaju se uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije φ u (unutarnjim) čvorovima interpolacije.

Po dijelovima linearna interpolacija

Osnovna ideja po dijelovima linearne interpolacije je:

- umjesto jednog polinoma visokog stupnja,
- koristi se više polinoma, ali stupnja 1.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k je stupnja 1

- i jedinstveno je određen iz uvjeta interpolacije.

Zapisujemo ga relativno obzirom na početnu točku intervala (stabilnost) u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1})$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Po dijelovima linearna interpolacija

Interpolacijski polinom zapisujemo u Newtonovoj formi

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}),$$

pa je očito

$$\begin{aligned} c_{0,k} &= f[x_{k-1}] = f_{k-1} \\ c_{1,k} &= f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Za aproksimaciju vrijednosti funkcije f u jednoj točki $x \in [a, b]$, treba

- prvo pronaći indeks k takav da vrijedi $x_{k-1} \leq x \leq x_k$,
- a onda izračunati koeficijente pripadnog linearnog polinoma.

Po dijelovima linearna interpolacija

Za traženje tog intervala koristimo binarno pretraživanje.

Binarno pretraživanje

```
low = 0;
high = n;
dok je (high - low) > 1 radi {
  /* U sljedećoj liniji cjelobrojno dijeljenje */
  mid = (low + high) / 2;
  ako je x < x[mid] onda
    high = mid;
  inače
    low = mid;
};
```

Trajanje ovog algoritma je proporcionalno s $\log_2(n)$.

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ako je funkcija f klase $C^2[a,b]$, onda je pogreška takve interpolacije zapravo

- maksimalna pogreška od n linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ pogreška je

- greška linearne interpolacije

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2!}\, |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ocijenimo $\omega(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$, tj. nađimo njezin maksimum po apsolutnoj vrijednosti.

Funkcija ω može imati maksimum samo na otvorenom intervalu (x_{k-1}, x_k) — u rubovima je greška 0.

Deriviranjem dobivamo da je lokalni ekstrem funkcije

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k),$$

točka $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ (parabola!).

Vrijednost funkcije ω u lokalnom ekstremu je

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})(x_e - x_k) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Za bilo koji $x \in (x_{k-1}, x_k)$ je $\omega(x) < 0$, pa je x_e

- točka lokalnog minimuma za ω, odnosno,
- točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$,

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Neka je h maksimalni razmak čvorova po svim podintervalima

$$h := \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je M_2 maksimum apsolutne vrijednosti f'' na cijelom intervalu $[a, b]$

$$M_2 := \max_{1 \leq k \leq n} M_2^k = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Na cijelom intervalu $[a, b]$, onda možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da maksimalni razmak čvorova $h \to 0$,

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

pogreška je reda veličine h^2, odnosno n^{-2}.

Komentar na po dijelovima linearnu interpolaciju

Mane po dijelovima linearne interpolacije.

- Potrebno je dosta podintervala da se dobije umjerena točnost aproksimacije.
- Na primjer, za $h = 0.01$, tj. za $n = 100$, greška aproksimacije je reda veličine 10^{-4}.
- Funkcija φ nije dovoljno glatka — samo je neprekidna.

Po dijelovima parabolička interpolacija

Ako stavimo $m = 2$, tj. na svakom podintervalu postavimo kvadratni polinom,

- moramo naći $3n$ koeficijenata,
- a imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Zahtijevamo da aproksimacijska funkcija φ u unutarnjim čvorovima interpolacije $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ima

- neprekidnu prvu derivaciju, pa smo dodali još $n - 1$ uvjet.
- dakle, treba nam još jedan uvjet!

Taj uvjet ne može se postaviti simetrično, ali se aproksimacija može naći.

Ona se uobičajeno ne koristi, jer kontrolu derivacije možemo napraviti samo na jednom rubu.