

# *Numerička matematika*

## *9. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Metoda najmanjih kvadrata:
  - QR faktorizacija i pivotiranje.
  - Rješenje matrice formulacije korištenjem QR faktorizacije.
  - Neprekidni problem najmanjih kvadrata.
  - Ortogonalni polinomi.
  - Primjeri ortogonalnih familija funkcija.
  - Svojstva ortogonalnih polinoma.

# Informacije

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/](http://web.math.hr/~singer/num_mat/)

**Skraćena** verzija skripte — 2. dio (drugih 7 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat2.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf)

Stiže za **desetak** dana!

# QR faktorizacija i pivotiranje

# Računanje QR faktorizacije

Neka je  $G$  zadana matrica tipa  $m \times n$ , s tim da je  $m \geq n$ .

Računanje QR faktorizacije matrice  $G$

- provodimo u nizu od  $n$  koraka (ili  $\min\{m, n\}$  koraka, ako dozvolimo i  $m < n$ ).

Na početku algoritma označimo  $R^{(0)} := G$ .

Opišimo kako izgleda  $k$ -ti korak algoritma, za  $k = 1, \dots, n$ .

- Na početku  $k$ -tog koraka trenutna radna matrica je  $R^{(k-1)}$ .
- U njoj prvih  $k - 1$  stupaca već ima gornjetrokutastu formu, tj. nule ispod dijagonale.
- Ti stupci se više neće mijenjati!

# Računanje QR faktorizacije

Izgled radne matrice  $R^{(k-1)}$  na početku  $k$ -tog koraka:

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} r_{1,1}^{(1)} & r_{1,2}^{(2)} & \cdots & r_{1,k-1}^{(k-1)} & r_{1,k}^{(k-1)} & \cdots & r_{1,n}^{(k-1)} \\ & r_{2,2}^{(2)} & \cdots & r_{2,k-1}^{(k-1)} & r_{2,k}^{(k-1)} & \cdots & r_{2,n}^{(k-1)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & r_{k-1,k-1}^{(k-1)} & r_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & r_{k-1,n}^{(k-1)} \\ & & & & r_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & r_{k,n}^{(k-1)} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & r_{m,k}^{(k-1)} & \cdots & r_{m,n}^{(k-1)} \end{array} \right] .$$

# Računanje QR faktorizacije

U  $k$ -tom koraku — u matrici  $R^{(k-1)}$

- poništavamo sve elemente  $k$ -tog stupca ispod dijagonale, nekom ortogonalnom transformacijom.
- Tako dobivamo novu radnu matricu  $R^{(k)}$  koja ima jedan “sređeni” stupac više.

Ovu transformaciju možemo prikazati u obliku

$$R^{(k)} = Q_k R^{(k-1)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Na kraju dobivamo gornju trokutastu matricu  $R := R^{(n)}$ .

Nije bitno kako računamo  $Q_k$  — rotacijama ili reflektorima!

# Pivotiranje stupaca u QR faktorizaciji

Slično kao kod LR faktorizacije i kod QR faktorizacije možemo koristiti **pivotiranje**.

- Uobičajeno se koristi pivotiranje **stupaca**

$$GP = QR,$$

gdje je  $P$  matrica permutacije.

- Ako su  $x_\ell$ ,  $\ell = k, \dots, n$ , **skraćeni** stupci, na prvo mjesto dovodi se onaj s **najvećom** normom, tj. takav da je  $\|x_k\|_2$  **maksimalna**.
- Postupak dovođenja na prvo mjesto **ponavljamo** u svakom koraku QR faktorizacije sa sve kraćim i kraćim stupcima.



# Svrha pivotiranja

## Svrha?

- Ako je matrica  $G$  bila takva da su joj stupci (skoro) linearno zavisni, onda se QR faktorizacijom s pivotiranjem određuje rang matrice  $G$ .

**Teorem.** Neka je  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrica ranga  $r$ . Tada postoje  $n \times n$  matrica permutacije  $P$ , ortogonalna matrica  $Q$  reda  $m$  te gornja trokutasta matrica  $R_0$  ranga  $r$ , tipa  $\min\{m, n\} \times n$  tako da vrijedi

$$\|(R_0)_{kk}\|^2 \geq \sum_{i=k}^j \|(R_0)_{ij}\|^2, \quad 1 \leq k \leq \min\{m, n\}, \quad k \leq j \leq n.$$

# Rješenje matricne formulacije korištenjem QR faktORIZACIJE

# Korištenje QR faktorizacije

Već smo najavili da ćemo za rješenje problema najmanjih kvadrata koristiti QR faktorizaciju.

Prisjetimo se, ako je  $A$  punog stupčanog ranga, onda je QR faktorizacija matrice  $A$

$$A = QR = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_0^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_0 R_0.$$

Ako minimiziramo  $\|Ax - b\|_2^2$ , minimizirali smo i  $\|Ax - b\|_2$ , pa zbog **unitarne invarijantnosti** 2-norme imamo

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 = \min_x \|Q^T(Ax - b)\|_2^2 = \min_x \|Q^T Ax - Q^T b\|_2^2.$$

# Korištenje QR faktorizacije

Za  $Q$  uzmimo ortogonalnu matricu iz QR faktorizacije, pa je

$$\begin{aligned}\min_x \|Q^T(Ax - b)\|_2^2 &= \min_x \left\| \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} x - Q^T b \right\|_2^2 \\ &= \min_x \left\| \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} Q_0^T \\ (Q_0^\perp)^T \end{bmatrix} b \right\|_2^2 \\ &= \min_x \left\| \begin{bmatrix} R_0 x - Q_0^T b \\ 0 - (Q_0^\perp)^T b \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \min_x (\|R_0 x - Q_0^T b\|_2^2 + \|(Q_0^\perp)^T b\|_2^2).\end{aligned}$$

# Korištenje QR faktorizacije

Primijetimo da **samo prvi član** u prethodnom minimumu ovisi o  $x$ , a **drugi** ne.

Budući da je  $R_0$  kvadratna, **punog ranga**, onda postoji **jedinstveno rješenje** linearnog sustava

$$R_0 x = Q_0^T b,$$

pa smo time prvi član u kvadratu norme napravili **najmanjim** mogućim.

**Zaključak.**

$$\min_x \|Ax - b\|_2 = \|(Q_0^\perp)^T b\|_2,$$

a postiže se za  $x$  koji je rješenje sustava

$$R_0 x = Q_0^T b.$$

## Drugi način

**Napomena.** Postoji i lakši način da se dođe do prethodnog zaključka, ako znamo da su rješenja **problema minimizacije**

$$\min_x \|Ax - b\|_2$$

jednaka rješenju **sustava normalnih jednažbi**

$$A^T Ax = A^T b.$$

Ako je  $A^T A$  **nesingularna**, što je ekvivalentno tome da  $A$  ima **puni** stupčani rang, onda je **rješenje** problema najmanjih kvadrata

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

## Drugi način

Napravimo skraćenu QR faktorizaciju matrice  $A$

$$A = Q_0 R_0.$$

Uvrštavanjem u rješenje izlazi

$$\begin{aligned}x &= (A^T A)^{-1} A^T b = ((Q_0 R_0)^T Q_0 R_0)^{-1} (Q_0 R_0)^T b \\&= (R_0^T Q_0^T Q_0 R_0)^{-1} R_0^T Q_0^T b = (R_0^T R_0)^{-1} R_0^T Q_0^T b \\&= R_0^{-1} (R_0^T)^{-1} R_0^T Q_0^T b = R_0^{-1} Q_0^T b,\end{aligned}$$

pa je  $x$  očito rješenje sustava

$$R_0 x = Q_0^T b.$$

# Primjer

Primjer. Diskretnom linearnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{x + a}{bx + c}$$

koja aproksimira slijedeći skup podataka (točaka):

$x_i$	0	1	2	3	4
$f_i$	2.02	0.97	0.82	0.70	0.67

Nađite

- aproximacije i pogreške u čvorovima  $x_i$  i
- sumu kvadrata apsolutnih grešaka  $S$ .



## Primjer — linearizacija

Rješenje nađite

- korištenjem sustava **normalnih jednadžbi** i faktORIZACIJE Choleskog,
- korištenjem **QR** faktORIZACIJE,
- korištenjem **QR** faktORIZACIJE s **pivotiranjem** stupaca.

Traženi oblik funkcije je **nelinearan**, pa ga treba **linearizirati**.  
To možemo na više načina.

1. Pomnožimo oblik funkcije  $\varphi$  s  $bx + c$  i dobivamo

$$(bx + c)\varphi(x) = x + a,$$

odnosno

$$-a + bx\varphi(x) + c\varphi(x) = x.$$

## Primjer — linearizacija

2. Posljednju funkciju možemo podijeliti s  $\varphi(x)$ , pa dobivamo drugu linearizaciju

$$-a \cdot \frac{1}{\varphi(x)} + bx + c = \frac{x}{\varphi(x)}.$$

Primijetite da ove dvije linearizacije

- ne moraju (i neće) dati isto rješenje,
- pripadaju grupi linearizacija oblika

$$D + Eu + Fv = w,$$

pri čemu je  $w = w(u, v)$ .

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Prvo riješimo problem korištenjem sustava normalnih jednadžbi. Metoda najmanjih kvadrata ima oblik

$$S = \sum_{i=0}^n (w_i - (-a + bu_i + cv_i))^2 \rightarrow \min,$$

pri čemu su supstitucije za varijable

$$u = x\varphi(x), \quad v = \varphi(x), \quad w = x,$$

a za vrijednosti varijabli u čvorovima

$$u_i = x_i f_i, \quad v_i = f_i, \quad w_i = x_i.$$

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Deriviranjem po sve tri varijable izlazi

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^n (w_i - (-a + bu_i + cv_i))(-1) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^n (w_i - (-a + bu_i + cv_i))u_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = -2 \sum_{i=0}^n (w_i - (-a + bu_i + cv_i))v_i = 0.$$

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Oдавде dobivamo simetrični, pozitivno definitni linearni sustav

$$\begin{bmatrix} (n+1) & -\sum_{i=0}^n u_i & -\sum_{i=0}^n v_i \\ -\sum_{i=0}^n u_i & \sum_{i=0}^n u_i^2 & \sum_{i=0}^n u_i v_i \\ -\sum_{i=0}^n v_i & \sum_{i=0}^n u_i v_i & \sum_{i=0}^n v_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=0}^n w_i \\ \sum_{i=0}^n u_i w_i \\ \sum_{i=0}^n v_i w_i \end{bmatrix} .$$

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Za taj slučaj linearni sustav glasi  $Mx = d$ , gdje je

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -7.39 & -5.18 \\ -7.39 & 15.2229 & 5.5513 \\ -5.18 & 5.5513 & 6.6326 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -10 \\ 21.27 \\ 7.39 \end{bmatrix}.$$

Faktorizacija Choleskoga matrice  $M$  je

$$R \approx \begin{bmatrix} 2.236067977 & -3.304908471 & -2.316566425 \\ & 2.0737598704 & -1.014939111 \\ & & 0.485817456 \end{bmatrix}.$$

Sad moramo još riješiti dva sustava:

$$R^T y = d, \quad Rx = y.$$

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Rješenja prvog, pa drugog sustava su

$$y \approx \begin{bmatrix} -4.472135955 \\ 3.129581246 \\ 0.424715923 \end{bmatrix}, \quad x \approx \begin{bmatrix} 1.768586298 \\ 1.936999050 \\ 0.874229442 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, rješenje za paramtere je

$$a = 1.768586298,$$

$$b = 1.936999050,$$

$$c = 0.874229442.$$

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Greške u čvorovima ćemo naći ako uvrstimo  $x_i$  u  $\varphi(x)$

$$\varphi(x_i) = \frac{x_i + 1.768586298}{1.936999050x_i + 0.874229442},$$

a zbroj kvadrata grešaka kao

$$S = \sum_{i=0}^4 (f_i - \varphi(x_i))^2.$$



## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Za 2. slučaj treba uvesti supstitucije za varijable

$$u = -\frac{1}{\varphi(x)}, \quad v = x, \quad w = \frac{x}{\varphi(x)},$$

i vrijednost varijabli u čvorovima

$$u_i = -\frac{1}{\varphi(f_i)}, \quad v_i = x_i, \quad w_i = \frac{x_i}{f_i}.$$

Metoda najmanjih kvadrata imat će oblik

$$S = \sum_{i=0}^n (w_i - (au_i + bv_i - c))^2 \rightarrow \min.$$

## Primjer — sustav normalnih jednadžbi

Linearni sustav glasi  $Mx = d$ , gdje je

$$M \approx \begin{bmatrix} 7.0636 & -13.7258 & -5.6666 \\ -13.7258 & 30 & 10 \\ -5.6666 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad d \approx \begin{bmatrix} -19.0704 \\ 42.6467 \\ 13.7258 \end{bmatrix}.$$

Rješenje za parametre je

$$a = 1.752205717,$$

$$b = 1.938744602,$$

$$c = 0.853483129.$$

## Primjer — QR faktorizacija

Riješimo sad **1. slučaj** korištenjem QR faktorizacije.  
Uvrštavanjem čvorova  $(x_i, f_i)$  u

$$-a + bx\varphi(x) + c\varphi(x) = x,$$

dobivamo

$$-a + bx_i f_i + c f_i = x_i, \quad i = 0, \dots, 4,$$

pa su  $A$  i  $b$  iz **problema minimizacije** jednaki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.00 & 2.02 \\ -1 & 0.97 & 0.97 \\ -1 & 1.64 & 0.82 \\ -1 & 2.10 & 0.70 \\ -1 & 2.68 & 0.67 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

## Primjer — QR faktorizacija

Skraćena forma QR faktorizacije od  $A$  je  $A = Q_0 R_0$  gdje je

$$Q_0 \approx \begin{bmatrix} -0.447213595 & -0.712715113 & 0.536492779 \\ -0.447213595 & -0.244965682 & -0.647620310 \\ -0.447213595 & 0.078118977 & -0.281410215 \\ -0.447213595 & 0.299938295 & -0.065005678 \\ -0.447213595 & 0.579623522 & 0.457543425 \end{bmatrix},$$
$$R_0 \approx \begin{bmatrix} 2.236067977 & -3.304908471 & -2.316566425 \\ & 2.0737598704 & -1.014939111 \\ & & 0.485817456 \end{bmatrix}.$$

## Primjer — QR faktorizacija

Budući da je desna strana linearnog sustava  $Q_0^T b$ ,

$$Q_0^T b \approx \begin{bmatrix} -4.472135955 \\ 3.129581246 \\ 0.424715923 \end{bmatrix},$$

onda je rješenje sustava  $R_0 x = Q_0^T b$

$$x \approx \begin{bmatrix} 1.76858629811 \\ 1.93699905025 \\ 0.87422944194 \end{bmatrix}$$

Napravite isto sami za drugu linearizaciju.

## Primjer — QR faktorizacija s pivotiranjem

Ako napravimo QR faktorizaciju s pivotiranjem stupaca, dobit ćemo  $AP = Q_0 R_0$ , gdje je poredak stupaca  $p = [2, 3, 1]$ ,

$$Q_0 \approx \begin{bmatrix} 0.000000000 & 0.940989460 & 0.332153833 \\ 0.248612544 & 0.287082061 & -0.731570874 \\ 0.420334610 & 0.103390036 & -0.312927468 \\ 0.538233342 & -0.030653048 & -0.059615261 \\ 0.686888265 & -0.143155917 & 0.502991359 \end{bmatrix},$$
$$R_0 \approx \begin{bmatrix} 3.901653496 & 1.4228070243 & -1.894068760 \\ & 2.1466765410 & -1.157652593 \\ & & 0.268968410 \end{bmatrix}.$$

## Primjer — QR faktorizacija s pivotiranjem

Dobiveno rješenje trokutastog sustava je

$$x' \approx \begin{bmatrix} 1.93699905025 \\ 0.87422944194 \\ 1.76858629811 \end{bmatrix},$$

samo još treba vratiti  $x$  u “pravi poredak”. Budući da je finalni pivotni vektor bio  $p = [2, 3, 1]$ , to odgovara pivotnoj matrici

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Primjer — QR faktorizacija s pivotiranjem

Pravo rješenje dobit ćemo kao

$$x = P^T x' = \begin{bmatrix} 1.76858629811 \\ 1.93699905025 \\ 0.87422944194 \end{bmatrix} .$$



# Neprekidni problem najmanjih kvadrata

## Još jednom o najmanjim kvadratima

U uvodu o aproksimaciji rečeno je da se parametri funkcije  $\varphi \in \mathcal{F}$  po **metodi najmanjih kvadrata**, traže tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2,$$

pri čemu je  $e(x) = f(x) - \varphi(x)$ .

Da bismo mogli naći **minimalnu grešku** u **neprekidnom** slučaju, moramo definirati

- **skalarni produkt** za **neprekidne** funkcije na odgovarajućem intervalu.
- Definicija **norme nije dovoljna**, jer je rješenje već u **diskretnom** slučaju bila **projekcija** na potprostor, a za to nam je potreban skalarni produkt.

## Definicija norme i skalarnog produkta

Neka je  $w(x)$  zadana funkcija.  $w(x)$  je **težinska funkcija** ako je

- $w(x) \geq 0$  na intervalu  $[a, b]$ ,
- $w(x)$  može biti jednaka 0 samo u **izoliranim** točkama.

**Težinska  $L_2$ -norma** (ili samo **2-norma**) funkcije  $u$  na  $[a, b]$  je

$$\|u\|_2 = \left( \int_a^b w(x) |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ako je ta norma **konačna** i za funkciju  $u$  i za funkciju  $v$ , onda možemo definirati **težinski skalarni produkt**

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b w(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

## Definicija skalarnog produkta

Skalarni produkt  $\langle u, v \rangle$  je dobro definiran (konačan), jer vrijedi Cauchy–Schwarzova nejednakost

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2.$$

$\langle u, v \rangle$  je skalarni produkt, jer

1.  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , a jednak je 0 za one funkcije  $u$  koje su nula u svim točkama gdje je  $w(x) > 0$ , (v. mjera i integral)
2. vrijedi linearnost u prvom argumentu

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle,$$

3. i antilinearnost/linearnost ( $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ) u drugom argumentu,

$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \bar{\beta}_1 \langle u, v_1 \rangle + \bar{\beta}_2 \langle u, v_2 \rangle.$$

# Ortogonalne funkcije

**Napomena.** Ako se radi o **realnim** funkcijama, onda kompleksno konjugiranje drugog argumenta izbacujemo.

Za funkcije  $u$  i  $v$  reći ćemo da su **ortogonalne** ako vrijedi

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Ako su  $u$  i  $v$  **ortogonalne**, onda vrijedi

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

## Sustavi ortogonalnih funkcija

Ako imamo **sustav ortogonalnih funkcija**  $u_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ , za koje vrijedi

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad \text{za } i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, m,$$

i  $u_k \not\equiv 0$  tamo gdje je  $w(x) > 0$ , onda vrijedi

$$\left\| \sum_{k=0}^m \alpha_k u_k \right\|_2^2 = \sum_{k=0}^m |\alpha_k|^2 \|u_k\|_2^2.$$

Prethodna jednakost znači da je **ortogonalni sustav** funkcija **linearno nezavisan** tamo gdje je  $w(x) > 0$ .

Ako je lijeva strana jednaka **nula**, mora biti i desna, a po pretpostavci je  $\|u_k\|_2 > 0$ , pa je jedino moguće da je  $\alpha_k = 0$  za  $k = 0, \dots, m$ .

## Norma kvadrata greške

Ako je  $\varphi$  linearna funkcija, tj.  $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$ ,  
onda za **normu kvadrata greške** dobivamo

$$S := \|e\|_2^2 = \|f - \varphi\|_2^2 = \langle f, f \rangle - 2\langle f, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Ako uvrstimo oblik funkcije  $\varphi$  i definiciju **skalarnog produkta**,  
dobivamo

$$S = \int_a^b w(x) f^2(x) dx - 2 \int_a^b w(x) f(x) \left( \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) \right) dx \\ + \int_a^b w(x) \left( \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) \right)^2 dx.$$

## Sustav normalnih jednažbi

Kvadrat norme greške  $S$  je funkcija koeficijenata  $a_j$ .

- Radi o kvadratnoj funkciji u  $m + 1$  varijabli, pa je uvjet **minimuma** da su sve parcijalne derivacije jednake 0.

Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a_i} &= 2 \int_a^b w(x) \left( \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) dx \\ &\quad - 2 \int_a^b w(x) f(x) \varphi_i(x) dx,\end{aligned}$$

pa mora biti ...



## Sustav normalnih jednažbi

pa mora biti ...

$$\sum_{j=0}^m a_j \int_a^b w(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \int_a^b w(x) f(x) \varphi_i(x) dx,$$

za  $i = 0, \dots, m$ . Uočimo da su odgovarajući integrali **skalarni produkti**, pa imamo

$$\sum_{j=0}^m \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle a_j = \langle \varphi_i, f \rangle.$$

Ako označimo

$$m_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle, \quad t_i = \langle \varphi_i, f \rangle, \quad i, j = 0, \dots, m,$$

# Sustav normalnih jednažbi

pri čemu je

$$a^T = [a_0, a_1, \dots, a_m],$$

onda problem najmanjih kvadrata možemo pisati kao **sustav normalnih jednažbi**

$$Ma = t.$$

Matrica  $M$  je

- (očito) **simetrična**,
- ali i **pozitivno definitna**.

## Pozitivna definitnost matrice $M$

Pozitivna definitnost izlazi iz definicije elemenata  $m_{ij}$ . Za svaki vektor  $x \neq 0$  imamo

$$\begin{aligned}x^T M x &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m x_i x_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \langle x_i \varphi_i, x_j \varphi_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=0}^m x_i \varphi_i, \sum_{j=0}^m x_j \varphi_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=0}^m x_i \varphi_i \right\|_2^2,\end{aligned}$$

što je očito **nenegativno**. Nuli je jednako ako i samo ako je

$$\sum_{i=0}^m x_i \varphi_i \equiv 0, \quad \text{čim je } w(x) > 0.$$

# Rješenje problema najmanjih kvadrata

**Zaključak.** Simetrične pozitivno definitne matrice su **nesingularne**, pa

• postoji **jedinstveno** rješenje problema  $Ma = t$ .

Nadalje, izračunati vektor  $a$  je **jedinstveni minimum** za problem najmanjih kvadrata, jer je

• **Hesseova matrica** drugih parcijalnih derivacija  $H$  pozitivno definitna, što slijedi iz

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j} = 2 \int_a^b w(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 2m_{ij},$$

tj.  $H = 2M!$

## Jednostavni primjer

**Primjer.** Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite **polinom** stupnja 1 koji aproksimira funkciju

$$f(x) = e^x$$

na intervalu  $[-1, 1]$  uz **težinsku funkciju**  $w(x) = 1$ .

Treba minimizirati

$$S = \int_{-1}^1 (e^x - a_1x - a_0)^2 dx \rightarrow \min .$$

## Jednostavni primjer

Deriviranjem dobivamo

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \int_{-1}^1 (e^x - a_1 x - a_0) x dx$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \int_{-1}^1 (e^x - a_1 x - a_0) dx,$$

pa uz oznake

$$s_k := \int_{-1}^1 x^k dx, \quad t_k := \int_{-1}^1 e^x x^k dx,$$

treba riješiti sljedeći linearni sustav ...

## Jednostavni primjer

treba riješiti sljedeći linearni sustav ...

$$s_2 a_1 + s_1 a_0 = t_1$$

$$s_1 a_1 + s_0 a_0 = t_0,$$

Izračunajmo integrale s lijeve strane

$$\begin{aligned} s_k &= \int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & \text{za } k \text{ paran,} \\ 0, & \text{za } k \text{ neparan.} \end{cases} \end{aligned}$$

## Jednostavni primjer

Za integrale desne strane dobivamo

$$t_0 := \int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1}$$

$$\begin{aligned} t_1 &:= \int_{-1}^1 x e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x & v = e^x \end{array} \right\} = x e^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \\ &= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}. \end{aligned}$$



## Jednostavni primjer

Linearni sustav tada glasi:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 &= 2e^{-1} \\ 0 \cdot a_1 + 2 \cdot a_0 &= e - e^{-1},\end{aligned}$$

a njegovo rješenje je

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{t_1}{s_2} = 3e^{-1} \approx 1.103638324, \\ a_0 &= \frac{t_0}{s_0} = \frac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1) \approx 1.175201194.\end{aligned}$$

**Pravac** dobiven neprekidnom metodom najmanjih kvadrata je

$$p_1(x) \approx 1.103638324x + 1.175201194.$$

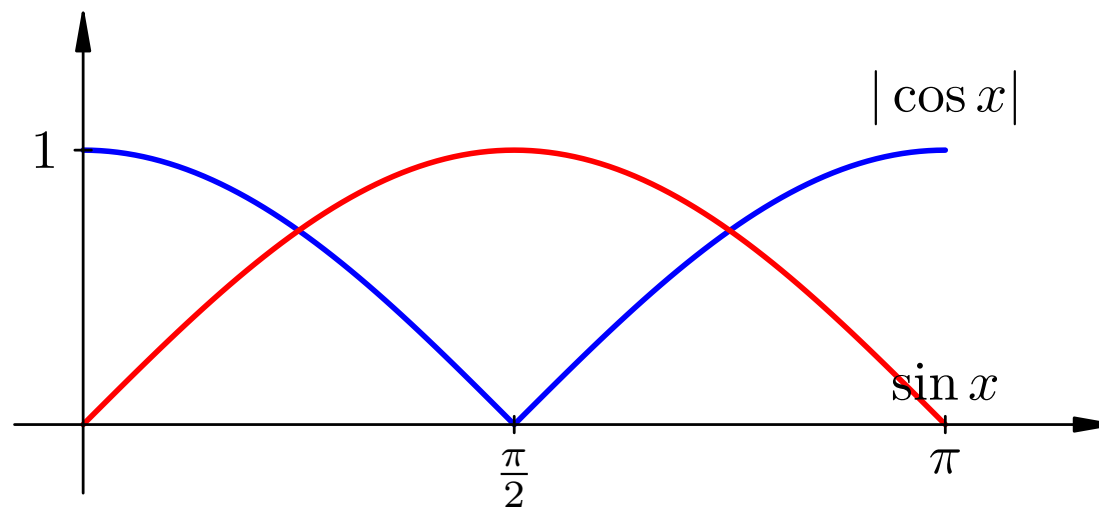
## Složeniji primjer

**Primjer.** Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite **polinome** stupnjeva 1, 2 i 3 koji aproksimiraju funkciju

$$f(x) = \sin x$$

na intervalu  $[0, \pi]$  uz **težinsku funkciju**  $w(x) = |\cos x|$ .

Skicirajmo prvo funkcije  $f$  i  $w$ .



## Složeniji primjer

Budući da su obje funkcije **simetrične** oko točke  $\frac{\pi}{2}$ , polinome se isplati pisati u **bazi**  $(x - \frac{\pi}{2})^k$ .

Označimo s  $p_n$  polinom stupnja  $n$ ,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k.$$

Treba minimizirati

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| (\sin x - p_n(x))^2 dx \rightarrow \min.$$

## Složeniji primjer

Iz uvjeta

$$\frac{\partial S}{\partial a_{nk}} = 0, \quad k = 0, \dots, n,$$

dobivamo linearni sustav

$$\sum_{j=0}^n a_{nj} \int_0^{\pi} |\cos x| \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{k+j} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| \sin x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k dx,$$

za  $k = 0, \dots, n$ .

## Složeniji primjer

Nađimo sad potrebne integrale:

$$\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k |\cos x| dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{2} \quad x = 0 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} \\ dy = dx \quad x = \pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^k |\sin y| dy = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{za } k \text{ neparan,} \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^k \sin y dy, \quad \text{za } k \text{ paran.} \end{array} \right\}$$

**Napomena.** Neparni koeficijenti su **nula** jer je **baza** pogodno odabrana, tako da koristi činjenicu da je  $w(x)$  **parna** funkcija obzirom na  $\frac{\pi}{2}$ . Baza sadrži samo “**parne**” i “**neparne**” funkcije.

## Složniji primjer

Nađimo rekurziju za integral

$$\begin{aligned} s_k &:= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^k \sin y \, dy = \left\{ \begin{array}{ll} u = y^k & du = ky^{k-1} dy \\ dv = \sin y \, dy & v = -\cos y \end{array} \right\} \\ &= 2 \left( -y^k \cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + k \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^{k-1} \cos y \, dy \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = y^{k-1} & du = (k-1)y^{k-2} dy \\ dv = \cos y \, dy & v = \sin y \end{array} \right\} \\ &= 2ky^{k-1} \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - k(k-1) \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^{k-2} \sin y \, dy \right) \\ &= 2k \left( \frac{\pi}{2} \right)^{k-1} - k(k-1) s_{k-2}. \end{aligned}$$

## Složeniji primjer

Još treba izračunati

$$s_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin y| dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = -2 \cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Sada je

$$s_2 = 4 \frac{\pi}{2} - 4s_0 = 2\pi - 4,$$

$$s_4 = 8 \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 12s_2 = \pi^3 - 24\pi + 48,$$

$$s_6 = 12 \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - 30s_4 = \frac{3}{8}\pi^5 - 24\pi^3 + 720\pi - 1440.$$

## Složeniji primjer

Ostaje još izračunati integrale s desne strane:

$$t_k := 2 \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k |\cos x| \sin x \, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} y = x - \frac{\pi}{2} & x = 0 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} \\ dy = dx & x = \pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^k |\sin y| \cos y \, dy$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{za } k \text{ neparan,} \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^k \sin y \cos y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^k \sin(2y) \, dy, & \text{za } k \text{ paran.} \end{array} \right\}$$



## Složeniji primjer

Za parne indekse  $k$  s desne strane imamo

$$\begin{aligned} t_k &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^k \sin(2y) dy = \left\{ \begin{array}{ll} u = y^k & du = ky^{k-1} dy \\ dv = \sin(2y) dy & v = -\cos(2y)/2 \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} y^k \cos(2y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^{k-1} \cos(2y) dy \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = y^{k-1} & du = (k-1)y^{k-2} dy \\ dv = \cos(2y) dy & v = \sin(2y)/2 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{2} y^{k-1} \sin(2y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{k-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^{k-2} \sin(2y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k - \frac{k(k-1)}{4} t_{k-2}. \end{aligned}$$

## Složeniji primjer

Još treba izračunati

$$t_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y) dy = -\frac{1}{2} \cos(2y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Sada je

$$t_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} t_0 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 4}{8}.$$

Linearni sustav sada ima oblik

$$\sum_{j=0}^n a_{nj} s_{k+j} = t_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

## Složeniji primjer

Za  $n = 1$  sustav je:

$$s_0 a_{10} + s_1 a_{11} = t_0$$

$$s_1 a_{10} + s_2 a_{11} = t_1,$$

tj. ako uvrstimo izračunate  $s_k$  i  $t_k$ , imamo

$$2 \cdot a_{10} + 0 \cdot a_{11} = 1$$

$$0 \cdot a_{10} + (2\pi - 4) \cdot a_{11} = 0.$$

Rješenje tog sustava je  $a_{10} = \frac{1}{2}$ ,  $a_{11} = 0$ , pa je aproksimacijski polinom

$$p_1(x) = \frac{1}{2}.$$

## Složeniji primjer

Za  $n = 2$  sustav je:

$$s_0 a_{20} + s_1 a_{21} + s_2 a_{22} = t_0$$

$$s_1 a_{20} + s_2 a_{21} + s_3 a_{22} = t_1$$

$$s_2 a_{20} + s_3 a_{21} + s_4 a_{22} = t_2.$$

Ako uvrstimo izračunate veličine, sustav glasi:

$$2 \cdot a_{20} + 0 \cdot a_{21} + (2\pi - 4) \cdot a_{22} = 1$$

$$0 \cdot a_{20} + (2\pi - 4) \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} = 0$$

$$(2\pi - 4) \cdot a_{20} + 0 \cdot a_{21} + (\pi^3 - 24\pi + 48) \cdot a_{22} = \frac{\pi^2 - 4}{8}.$$

## Složeniji primjer

Rješenje tog sustava je

$$a_{20} \approx 0.964909552, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} \approx -0.407246447,$$

pa je aproksimacijski polinom

$$p_2(x) \approx -0.407246447 \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^2 + 0.964909552.$$

Za  $n = 3$  dobije se rješenje  $p_3 = p_2$  (provjerite sami).

## Još jedan primjer

**Primjer.** Ako funkciju  $f(x)$  na  $[0, 1]$  uz  $w(x) = 1$  aproksimiramo **polinomom** stupnja  $n$  po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, **matrica** linearnog sustava je

$$M = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{bmatrix},$$

pri čemu su

$$s_k := \int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Matrica linearnog sustava je **Hilbertova matrica** reda  $n + 1!$

## Komentari primjera

U posljednja dva primjera uočili smo sljedeće:

- Ako za bazu biramo funkcije  $1, x, x^2, \dots$ , matrica sustava može biti **vrlo loše uvjetovana**.
- U složenijem primjeru, podizanjem stupnja polinoma **mijenjaju** se koeficijenti polinoma  $p_n$ . Na primjer,  $a_0$  **ovisi** o stupnju  $n$ .

Prethodna dva problema otklanjaju se ako se za bazu funkcija uzmu **ortogonalne funkcije**.

# Ortogonalne funkcije



# Ortogonalne funkcije i najmanji kvadrati

Linearni sustav za neprekidni problem najmanjih kvadrata zapisali smo kao

$$\sum_{j=0}^m \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle a_j = \langle \varphi_i, f \rangle, \quad i = 0, \dots, m.$$

Ako  $\varphi_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ , tvore **ortogonalni sustav funkcija**, onda je

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{za } i \neq j, \quad \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = \|\varphi_j\|^2 > 0.$$

Uvrštavanjem u **linearni sustav**, dobivamo da je sustav **dijagonalan**, a njegovo rješenje je

$$a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, \dots, m.$$

# Problemi

Oblikom koeficijenata  $a_j$  nismo izbjegli sve probleme.

- Tipično norme  $\|\varphi_j\|_2^2$  padaju kad  $j$  raste, dok su brojnici reda veličine  $f$ .
- Za koeficijente  $a_j$  se očekuje da rapidno padaju.
- Zbog toga se očekuju greške nastale kraćenjem pri računanju skalarnog produkta u brojniku.

Alternativna forma za računanje  $a_j$  je

$$a_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|_2^2} \left\langle f - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle, \quad j = 0, \dots, m.$$

Uočite da je skalarni produkt “sume” s  $\varphi_j$  jednak nuli zbog ortogonalnosti.

# Algoritam računanja koeficijenata

Sljedeći algoritam računa ne samo  $a_j$ , nego i aproksimaciju

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x).$$

## Računanje koeficijenata

```
s[-1] = 0;  
za j = 0 do m radi {  
    a[j] = ⟨f - s[j - 1], phi[j]⟩ / ||phi[j]||22;  
    s[j] = s[j - 1] + a[j] * phi[j];  
};
```

Vrijednost  $\varphi^{(m)}(x)$  izračunata je u  $s[m]$ .

## Projekcija je opet rješenje

Tvrdimo da je greška aproksimacije  $f - \varphi^{(m)}$  okomita na sve linearne kombinacije funkcija  $\varphi_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

Dovoljno je pokazati da je greška okomita na svaki  $\varphi_k$

$$\begin{aligned}\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = \langle f - a_k \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle - a_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle - \frac{\langle \varphi_k, f \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0.\end{aligned}$$

Dobiveni rezultat ima jednostavno geometrijsko značenje — aproksimacija je ortogonalna projekcija na prostor  $\Phi_m$  razapet funkcijama  $\varphi_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

# Projekcija je opet rješenje

Iz

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \psi \rangle = 0,$$

gdje je  $\psi \in \Phi_m$  neka linearna kombinacija  $\varphi_k$  zaključujemo da je i

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)} \rangle = 0.$$

Tada, zbog okomitosti, možemo pisati

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \|\varphi^{(m)}\|_2^2 = \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \left\| \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j \right\|_2^2 \\ &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \sum_{j=0}^m |a_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2. \end{aligned}$$

# Greška rješenja

Iz prethodne relacije slijedi da se **greška aproksimacije** može zapisati kao

$$\|f - \varphi^{(m)}\|_2 = \left( \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^m |a_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Ako je zadan **niz** prostora  $\Phi_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , onda je iz prethodne relacije jasno da je

$$\|f - \varphi^{(0)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(1)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(2)}\|_2 \geq \dots,$$

što jasno slijedi i iz činjenice da je

$$\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots.$$

# Greška rješenja

Ako je prostora  $\Phi_k$  beskonačno mnogo, očito je da je norma greške aproksimacije

- monotono padajuća i
- odozdo ograničena s 0,

pa mora konvergirati.

Mora li norma greške konvergirati u 0?

Odgovor je ne! Naravno, nužni i dovoljni uvjet da bi greška konvergirala u nulu je

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2,$$

što se odmah čita iz oblika greške.

# Ortogonalizacija

Ako je zadan skup funkcija  $\hat{\varphi}_j$  koje su **linearno nezavisne**, ali **nisu ortogonalne** na nekom intervalu,

- $\hat{\varphi}_j$  ortogonaliziramo korištenjem (modificiranog) Gram–Schmidtovog procesa ortogonalizacije.
- Funkcije  $\varphi_j$  koje razapinju isti prostor kao  $\hat{\varphi}_j$  ne treba **normirati**.

Ortogonalizacija započinje s:

$$\varphi_0 := \hat{\varphi}_0.$$

Zatim, za  $j = 1, 2, \dots$  stavimo

$$\varphi_j := \hat{\varphi}_j - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \quad a_k = \frac{\langle \hat{\varphi}_j, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|_2^2}.$$

Tada je  $\varphi_j$  ortogonalan na sve prethodne  $\varphi_k$ ,  $k = 0, \dots, j - 1$ .



## Primjer

Primjer. Nađite **ortogonalnu** bazu za prostor razapet funkcijama  $1, x, x^2$  na intervalu  $[-1, 1]$  s **težinskom funkcijom**  $w = 1$ .

Skalarni produkt funkcija  $u$  i  $v$  definiran je s

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 w(x)u(x)v(x) dx = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx.$$

Prva funkcija u ortogonalnoj bazi jednaka je prvoj zadanoj funkciji,

$$\varphi_0(x) = 1.$$

## Primjer

Sada je

$$\langle x, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx = x \Big|_{-1}^1 = 2,$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{0}{2} = 0.$$

Odatle odmah dobivamo

$$\varphi_1(x) = x - a_0 \cdot 1 = x.$$

## Primjer

Za ortogonalni polinom stupnja 2 treba izračunati  $a_0$  i  $a_1$

$$\langle x^2, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

$$\langle x^2, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x dx = \frac{2}{3},$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

# Primjer

Odatle je

$$\varphi_2(x) = x^2 - a_1 \cdot x - a_0 \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

**Primjer.** Korištenjem **ortogonalnih** polinoma izračunatih u prethodnom primjeru, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata nađite **polinome** stupnjeva 0 i 1 koji aproksimiraju funkciju

$$f(x) = e^x$$

na intervalu  $[-1, 1]$  uz **težinsku funkciju**  $w(x) = 1$ .

## Jednostavni primjer — ortogonalni polinomi

Rješenje problema najmanjih kvadrata je funkcija

$$\varphi^{(m)} = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j, \quad a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, 1.$$

Za račun koeficijenata  $a_j$  moramo izračunati

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx = 2, \quad \langle \varphi_0, e^x \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot e^x \, dx = e - e^{-1},$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}, \quad \langle \varphi_1, e^x \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot e^x \, dx = 2e^{-1}.$$

## Jednostavni primjer — ortogonalni polinomi

Odatle odmah izlazi

$$a_0 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \operatorname{sh}(1), \quad a_1 = \frac{2e^{-1}}{\frac{2}{3}} = 3e^{-1}.$$

Aproksimacija **konstantom** je

$$\varphi^{(0)}(x) = \operatorname{sh}(1)\varphi_0(x) = \operatorname{sh}(1) \cdot 1,$$

a **polinomom stupnja 1**

$$\varphi^{(1)}(x) = \operatorname{sh}(1)\varphi_0(x) + 3e^{-1}\varphi_1(x) = \operatorname{sh}(1) \cdot 1 + 3e^{-1} \cdot x,$$

što se poklapa s već izračunatim rješenjem koje nije koristilo ortogonalne polinome.

# Primjeri ortogonalnih familija funkcija

# Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$$

čine **ortogonalnu familiju** funkcija na intervalu  $[0, 2\pi]$  uz **težinsku funkciju**  $w(x) = 1$ .

Pokažimo da je to zaista istina. Neka su  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ . Tada vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(k + \ell)x - \cos(k - \ell)x) \, dx.$$



# Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Ako je  $k = \ell$ , onda je prethodni integral jednak

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k + \ell)x}{k + \ell} - x \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Ako je  $k \neq \ell$ , onda je jednak

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k + \ell)x}{k + \ell} - \frac{\sin(k - \ell)x}{k - \ell} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell, \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, \dots,$$

# Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Na sličan način, pretvaranjem **produkta** trigonometrijskih funkcija u zbroj, možemo pokazati da je

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos lx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 2\pi, & k = l = 0, \\ \pi, & k = l > 0, \end{cases} \quad k, l = 0, 1, \dots,$$

te, također, da je

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos lx \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 0, 1, \dots,$$

# Fourierov red

Ako **periodičku** funkciju  $f$  osnovnog perioda duljine  $2\pi$  aproksimiramo redom oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

onda, množenjem odgovarajućim trigonometrijskim funkcijama i integriranjem, dobivamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Prethodni red poznat je pod imenom **Fourierov red**, a koeficijenti kao **Fourierovi koeficijenti**.

# Fourierov red i najmanji kvadrati

Ako **Fourierov red** odsiječemo za  $k = m$  dobijemo tzv. **trigonometrijski polinom**.

- Taj polinom je **najbolja** aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata za  $f$  u klasi trigonometrijskih polinoma stupnja **manjeg ili jednakog  $m$** .

Uz ortogonalnost trigonometrijskih funkcija (obzirom na integral kao skalarni produkt), postoji **diskretna ortogonalnost** (integral se zamijeni sumom).

# Klasični ortogonalni polinomi

# Klasični ortogonalni polinomi — uvod

U praksi najčešće susrećemo **pet tipova** klasičnih **ortogonalnih polinoma**.

Prisjetimo se, za polinome

$$\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\},$$

(indeks polinoma označava stupanj), kažemo da su **ortogonalni** obzirom na težinsku funkciju  $w$ , na  $[a, b]$ , ako vrijedi

$$\int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = 0, \quad \text{za } m \neq n.$$

# Klasični ortogonalni polinomi — uvod

## Težinska funkcija

- određuje sistem polinoma do na konstantni faktor u svakom od polinoma.
- Izbor takvog faktora zove se još i standardizacija ili normalizacija.

## Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma:

- Ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

s tim da su poznate “početne” funkcije  $p_0$  i  $p_1$ , i sve funkcije  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ , za  $n \in \mathbb{N}$ .

# Klasični ortogonalni polinomi — uvod

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma (nastavak):

- **Oprez.** Prethodnu rekurziju zadovoljavaju i mnoge specijalne funkcije koje **nisu** ortogonalne!
- **Nultočke** ortogonalnih polinoma uvijek se nalaze **unutar** intervala  $[a, b]$  na kojem su polinomi **ortogonalni**.

Dokaze za **tročlanu** rekurziju i **nultočke** možete naći u skripti.



# Čebiševljevi polinomi prve vrste

## Čebiševljevi polinomi prve vrste

- označavaju se s  $T_n$ ,
- ortogonalni su na intervalu  $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

# Čebiševljevi polinomi prve vrste

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za njih postoji i **eksplicitna** formula

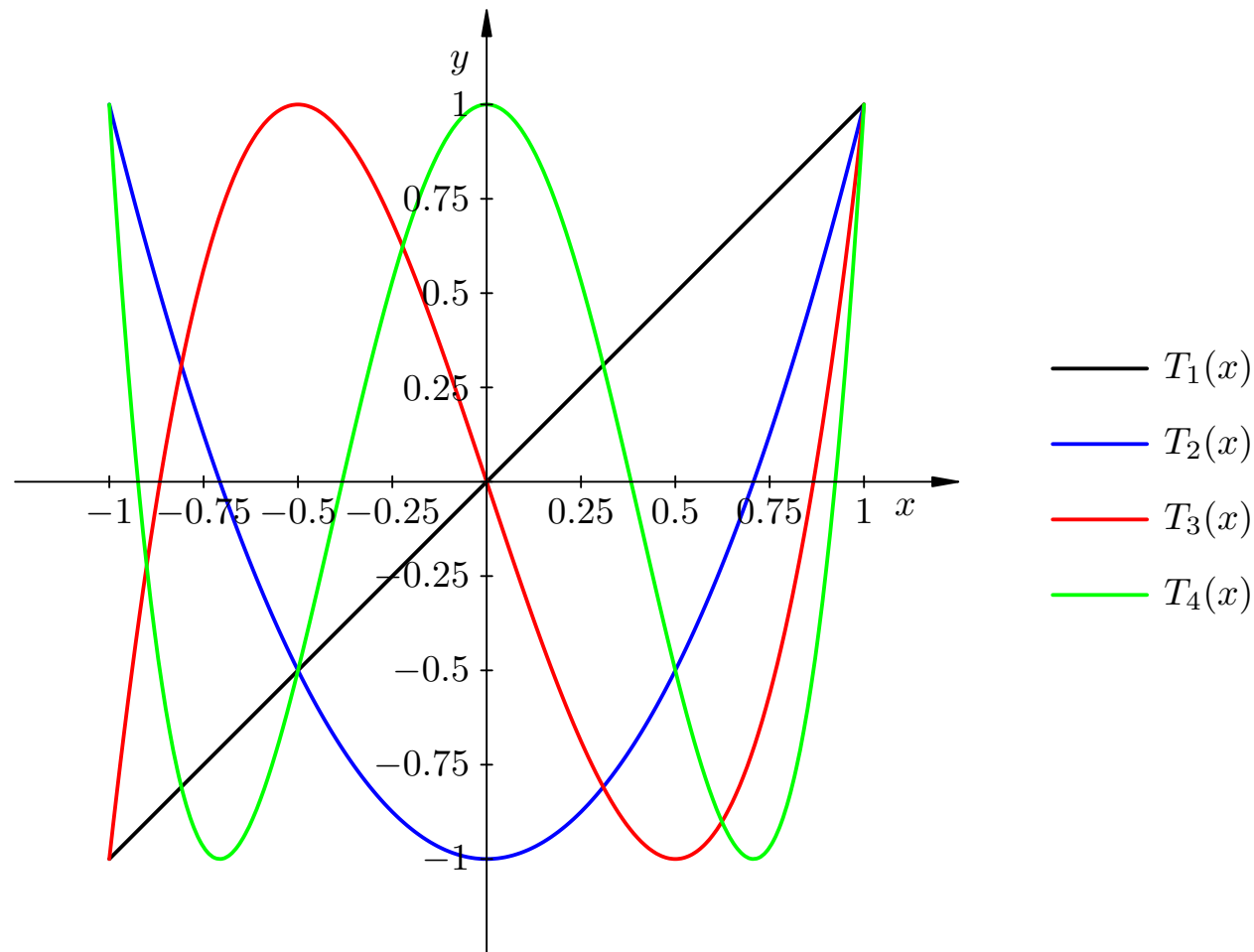
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Osim toga,  $n$ -ti Čebiševljev polinom prve vrste  $T_n$  zadovoljava diferencijalnu jednažbu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

# Čebiševljevi polinomi prve vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



# Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinomi prve vrste

- transformirani na interval  $[0, 1]$ ,
- u oznaci  $T_n^*$ .

Dobivaju se korištenjem linearne (preciznije, afine) transformacije

$$[0, 1] \ni x \mapsto \xi := 2x - 1 \in [-1, 1].$$

Relacija ortogonalnosti postaje

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x) T_n^*(x)}{\sqrt{x - x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0, \end{cases}$$

# Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

a rekurzivna relacija

$$T_{n+1}^*(x) - 2(2x - 1)T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x) = 0,$$

uz start

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1.$$

# Čebiševljevi polinomi druge vrste

## Čebiševljevi polinomi druge vrste

- označavaju se s  $U_n$ ,
- ortogonalni su na intervalu  $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} U_m(x) U_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi/2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

## Čebiševljevi polinomi druge vrste

Zadovoljavaju **istu** rekurziju kao i polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz malo drugačiji start

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Za njih postoji i **eksplicitna** formula

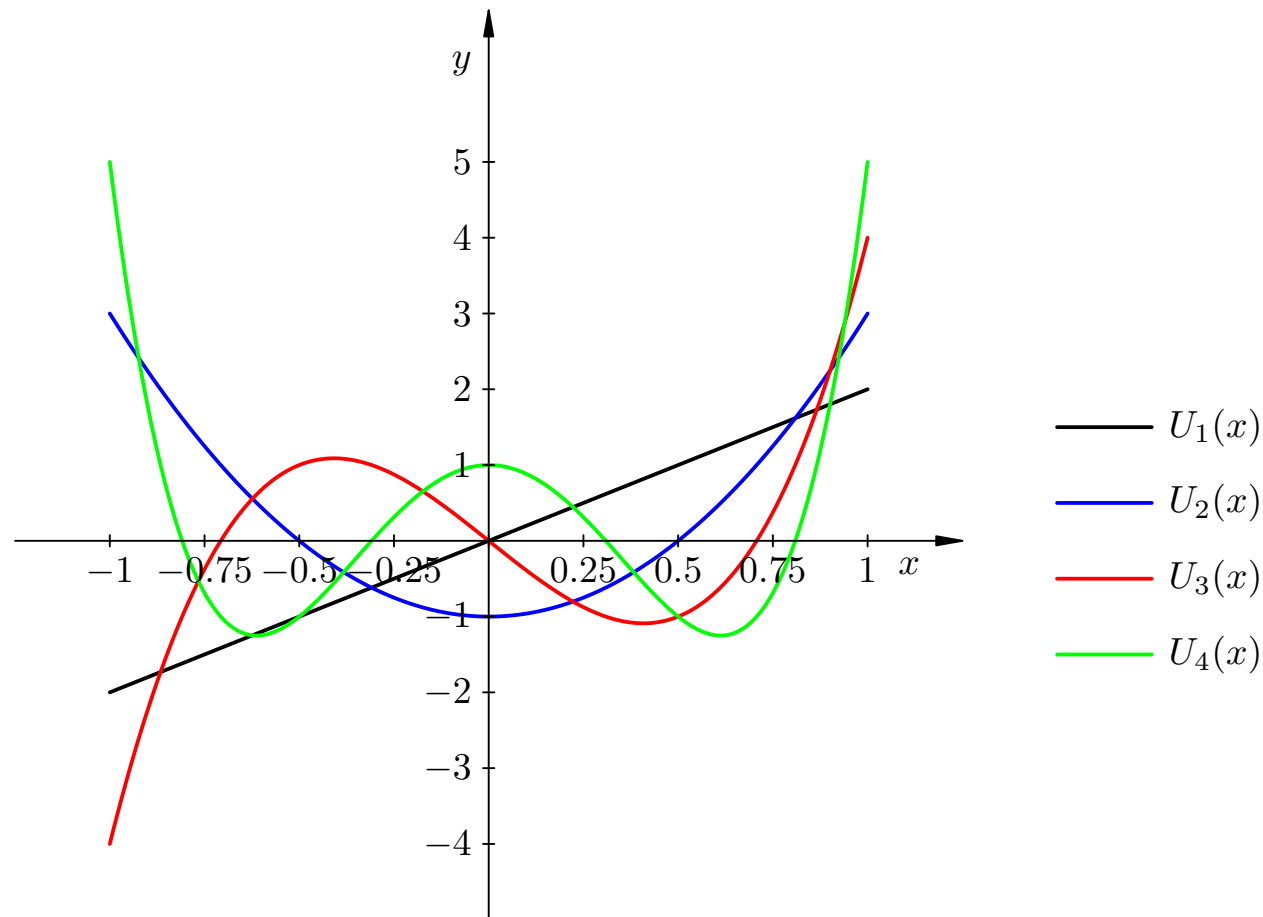
$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

$n$ -ti Čebiševljev polinom druge vrste  $U_n$  zadovoljava diferencijalnu jednažbu

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

# Čebiševljevi polinomi druge vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.





# Legendreovi polinomi

## Legendreovi polinomi

- označavaju se s  $P_n$ ,
- ortogonalni su na intervalu  $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = 1.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2/(2n + 1), & \text{za } m = n. \end{cases}$$

# Legendreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

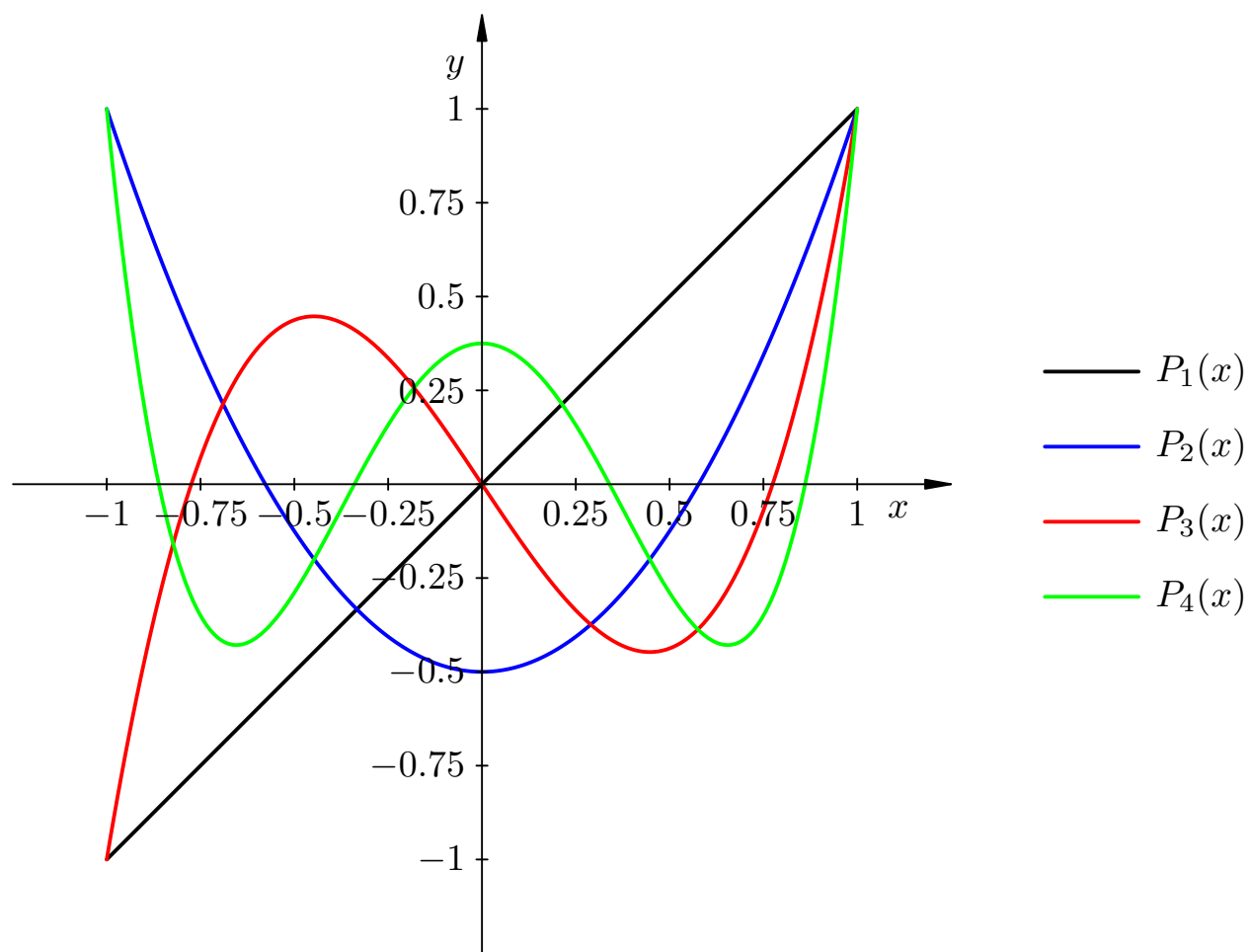
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Osim toga,  $n$ -ti Legendreov polinom  $P_n$  zadovoljava diferencijalnu jednačbu

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

# Legendreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



# Laguerreovi polinomi

## Laguerreovi polinomi

- označavaju se s  $L_n$ ,
- ortogonalni su na intervalu  $[0, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 1, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

# Laguerreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n + 1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

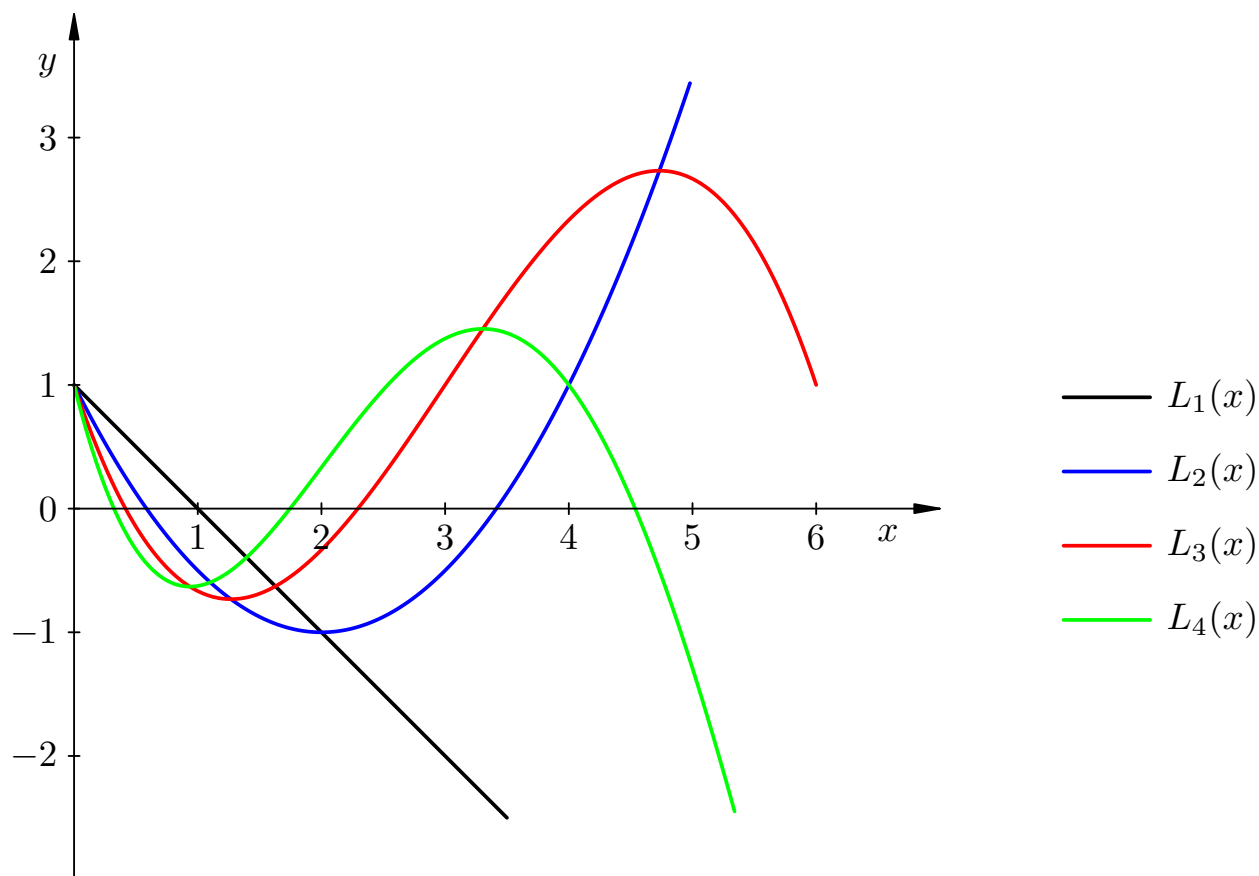
$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Osim toga,  $n$ -ti Laguerreov polinom  $L_n$  zadovoljava diferencijalnu jednažbu

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

# Laguerreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



# Laguerreovi polinomi

Često nailazi na još jednu rekurziju za Laguerreove polinome

$$\tilde{L}_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)\tilde{L}_n(x) + n^2\tilde{L}_{n-1}(x) = 0,$$

uz jednaki start

$$\tilde{L}_0(x) = 1, \quad \tilde{L}_1(x) = 1 - x.$$

Uspoređivanjem ove i prethodne rekurzije dobivamo da je

$$\tilde{L}_n(x) = n! L_n(x),$$

tj. radi se samo o drugačijoj **normalizaciji**

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \tilde{L}_m(x) \tilde{L}_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ (n!)^2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

# Hermiteovi polinomi

## Hermiteovi polinomi

- označavaju se s  $H_n$ ,
- ortogonalni su na intervalu  $(-\infty, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{za } m = n. \end{cases}$$



# Hermiteovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Osim toga,  $n$ -ti Hermiteov polinom  $H_n$  zadovoljava diferencijalnu jednačbu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

# Hermiteovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.

