Numerička matematika
10. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Svojstva ortogonalnih polinoma:
  - Tročlana homogena rekurzija.
  - Nultočke ortogonalnih polinoma.
- Računanje vrijednosti funkcija:
  - Polinomi i Hornerova shema.
  - Ortogonalne funkcije i generalizirana Hornerova shema.
  - Primjeri.
    - Razvoj po T_n i skoro minimaks aproksimacije.
    - Fourierov red.

Informacije

Bitno: Napokon su “oživile” i domaće zadaće iz NM.

Realizacija ide “automatski” — preko web aplikacije, slično kao na Prog1. Pogledajte

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Stiže za desetak dana!

Ortogonalni polinomi i tročlane rekurzije

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokažimo neka svojstva ortogonalnih polinoma koja smo već spomenuli prošli puta.

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Pretpostavljamo da je p_n polinom stupnja n, za svaki $n \geq 0$.

Ako je f polinom stupnja m, tada vrijedi

$$f = \sum_{n=0}^{m} \frac{\langle f, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} \, p_n.$$

Dokaz. Provodi se Gram–Schmidtovim procesom ortogonalizacije na sustavu potencija $\{1, x, x^2, \ldots\}$, pa se iskoristi da je f linearna kombinacija baze $\{1, x, \ldots, x^m\}$. ■

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokaz može i preko linearne nezavisnosti ortogonalnih funkcija (v. prošli puta), pa to vrijedi i za familiju $\{p_n \mid n \geq 0\}$.

Početni komad te familije — skup $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ je

- linearno nezavisan skup od $m + 1$ funkcija,
- i svi elementi su polinomi stupnja manjeg ili jednakog m,

pa je $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$ (dimenzija je $m + 1$).

Zbog $f \in \mathcal{P}_m$, slijedi da je f neka linearna kombinacija funkcija $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$.

Formula za koeficijente u toj kombinaciji (prikaz) slijedi iz ortogonalnosti polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$. ■

Ortogonalnost na polinome nižeg stupnja

Jednostavna posljedica prethodne tvrdnje je sljedeći rezultat, kojeg ćemo koristiti u nastavku.

Korolar. Neka je p_n ortogonalni polinom stupnja n, za $n \geq 0$, i neka je f bilo koji polinom stupnja strogo manjeg od n, tj. $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Onda je

$$\langle p_n, f \rangle = 0.$$

Drugim riječima,

- p_n je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja od n.

Dokaz. Stavimo $m = n - 1$, pa tvrdnja ide direktno iz prikaza u prošlom teoremu i ortogonalnosti. ∎

Nultočke ortogonalnih polinoma

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Tada svaki polinom p_n ima točno n različitih (jednostrukih) realnih nultočaka na otvorenom intervalu (a, b).

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve nultočke polinoma p_n za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u x_i.

Budući da je p_n stupnja n,

- po osnovnom teoremu algebre, p_n ima točno n nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima manje ili jednako n, tj. znamo da je $m \leq n$.

Nultočke ortogonalnih polinoma

Polinom p_n onda možemo prikazati u obliku produkta

$$p_n(x) = h(x)\,(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi r_i moraju biti neparni, a
- polinom $h(x)$ ne smije promijeniti predznak na (a, b).

Pretpostavimo da je nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva striktno manje od n, tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Nultočke ortogonalnih polinoma

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x)\,(x-x_1)\cdots(x-x_m) \\ &= h(x)\,(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka $x_1, \ldots, x_m$, ovaj polinom ne mijenja znak prolaskom kroz točke $x_1, \ldots, x_m$ (eksponenti $r_i + 1$ su parni).

Osim toga, $h(x)$ ne mijenja znak na (a, b), tj.

- čitav polinom $p_n(x)B(x)$ ne mijenja znak na (a, b).

Zato vrijedi

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x)\,dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije fiksnog predznaka.

Nultočke ortogonalnih polinoma

S druge je strane, prethodni integral je skalarni produkt polinoma B (stupnja $m < n$) i polinoma p_n (stupnja n).

- Svaki ortogonalni polinom p_n je okomit na sve polinome nižeg stupnja (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x)\,dx = \langle B, p_n \rangle = 0,$$

što je kontradikcija.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma B je bila pogrešna, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, p_n ima točno n nultočaka $x_1, \ldots, x_n$ u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti jednostruke, jer je $p_n'(x_i) \neq 0$. $\blacksquare$

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zadana je familija ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ i neka su A_n i B_n vodeća dva koeficijenta polinoma p_n, tj.

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots ,$$

s tim da je $A_n \neq 0$. Tada p_n možemo napisati kao

$$p_n(x) = A_n(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Definiramo još i

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \qquad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Uočite: a_n je omjer vodećih koeficijenata susjednih polinoma.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za svaki $n \geq 1$ vrijedi tročlana homogena rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) p_n(x) - c_n p_{n-1}(x),$$

pri čemu su koeficijenti u rekurziji dani formulama

$$b_n = a_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right) = -\frac{a_n}{\gamma_n} \langle x p_n, p_n \rangle,$$

$$c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}.$$

Za polinome p_n s vodećim koeficijentom $A_n = 1$, ove formule su još jednostavnije, jer je $a_n = 1$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Dokaz. Definiramo polinom G na sljedeći način — tako da poništimo vodeći koeficijent u p_{n+1}, tj. dobijemo $\deg G \leq n$.

$$\begin{aligned} G(x) &= p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x) \\ &= (A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^n + \cdots) \\ &\qquad - \frac{A_{n+1}}{A_n} x (A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots) \\ &= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1}B_n}{A_n}\right) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Dakle, G je zaista stupnja manjeg ili jednakog n.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Polinom G onda možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, tj.

$$G(x) = d_n p_n(x) + \cdots + d_0 p_0(x).$$

Računanjem koeficijenata d_i (v. prvi teorem o prikazu) izlazi

$$d_i = \frac{\langle G, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{1}{\gamma_i} (\langle p_{n+1}, p_i \rangle - a_n \langle x p_n, p_i \rangle), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Treba još izračunati oba skalarna produkta na desnoj strani.

Za prvi produkt, iz ortogonalnosti odmah dobivamo

$$\langle p_{n+1}, p_i \rangle = 0, \quad i \le n,$$

tj. tog člana nema u relaciji za koeficijente d_i, $i = 0, \ldots, n$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Za drugi produkt $\langle xp_n, p_i\rangle$ dobivamo

$$\langle xp_n, p_i\rangle = \int_a^b w(x)p_n(x)xp_i(x)\,dx = \langle p_n, xp_i\rangle.$$

Polinom $xp_i(x)$ je stupnja $i+1$. Nadalje, polinom p_n je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja.

Dakle, za sve $i \leq n-2$, stupanj polinoma $xp_i(x)$ je manji ili jednak $n-1$, pa je

$$\langle xp_n, p_i\rangle = \langle p_n, xp_i\rangle = 0, \quad i \leq n-2.$$

Kombiniranjem ta dva rezultata, dobivamo

$$d_i = 0 \quad \text{za} \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zbog toga je

$$G(x) = d_n p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Kad uvrstimo $G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x)$ i sredimo, izlazi

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + d_n) p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Iz prve od dvije prethodne relacija, uspoređivanjem vodećih koeficijenata funkcije G i vodećih koeficijenata funkcije s desne strane, dobivamo relaciju za d_n.

Iz opće relacije za d_i, za koeficijente d_{n-1} i d_n dobivamo

$$d_i = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle x p_n, p_i \rangle = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle p_n, x p_i \rangle, \quad i = n-1, n.$$

Ostale formule izlaze iz ovih relacija. ■

Christoffel–Darbouxov identitet

Mnoge korisne relacije za ortogonalne polinome izvode se korištenjem sljedećeg teorema.

Teorem. (Christoffel–Darbouxov identitet) Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za njih vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x) p_k(y)}{\gamma_k} = \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{a_n \gamma_n (x - y)}.$$

Dokaz. Manipulacijom tročlane rekurzije. ■

Hornerova shema

Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Već ste upoznali Hornerovu shemu za izvrednjavanje polinoma.

- Postoji vrlo slična shema za izvrednjavanje ortogonalnih polinoma.
- Ponovimo svojstva Hornerove sheme za polinome.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom stupnja n

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0$$

kojemu treba izračunati vrijednost u točki x_0. To se može napraviti na više načina.

- Prvo, napravimo to direktno po zapisu, potencirajući.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se rekurzivno

$$x^k = x \cdot x^{k-1}.$$

Imamo li zapamćen x^{k-1}, lako je izračunati x^k korištenjem samo jednog množenja.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Vrijednost polinoma s pamćenjem potencija

```
sum = a[0];
pot = 1;
za i = 1 do n radi {
  pot = pot * x_0;
  sum = sum + a[i] * pot;
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

U unutarnjoj petlji javljaju se 2 množenja i 1 zbrajanje.
Petlja se izvršava n puta, pa ukupno imamo

$$2n \text{ množenja } + n \text{ zbrajanja.}$$

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvrednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s manje množenja. Ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvrednjava polinom zove se Hornerova shema.

Hornerova shema

```
sum = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * x_0 + a[i];
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Odmah je očito da smo korištenjem ovog algoritma broj množenja prepolovili, tj. da je njegova složenost

$$n \text{ množenja } + n \text{ zbrajanja.}$$

Hornerova shema je optimalan algoritam za izvrednjavanje zadanog polinoma u zadanoj točki.

- Ulaz algoritma su: polinom i točka!

Napomena: za izvrednjavanje fiksnog polinoma puno točaka postoje i brži algoritmi (prethodna obrada koeficijenata, FFT).

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Za opći polinom (ulaz u Horner) automatski pretpostavljamo da je većina koeficijenata različita od nule.

Ako imamo fiksni polinom s malo koeficijenata različtih od nule — postoje i bolji algoritmi! Na primjer, polinom

$$p_{100}(x) = x^{100} + 1$$

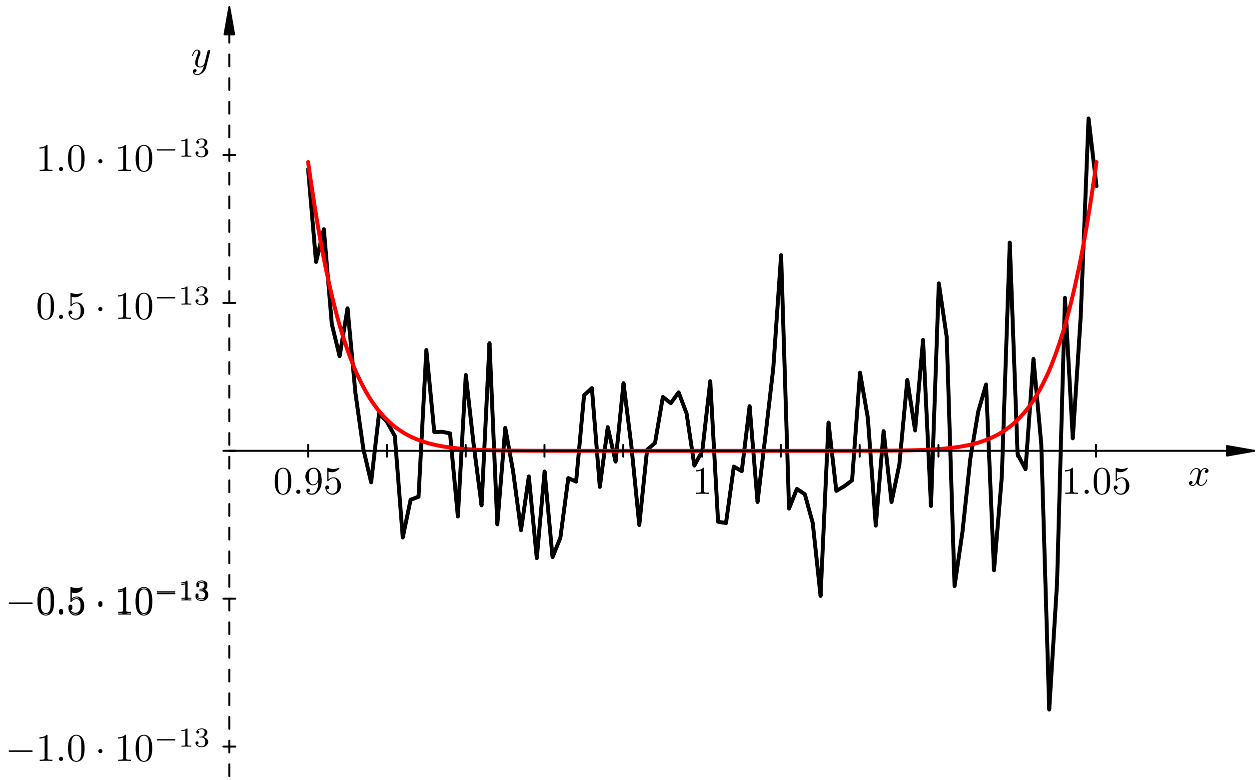
besmisleno je izvrednjavati Hornerovom shemom, jer bi to predugo trajalo (binarno potenciranje je brže). Sastavite odgovarajući algoritam.

Dodatna prednost Hornerove sheme:

- Hornerova shema može biti stabilnija nego direktno potenciranje, zbog redova veličine članova u sumi.

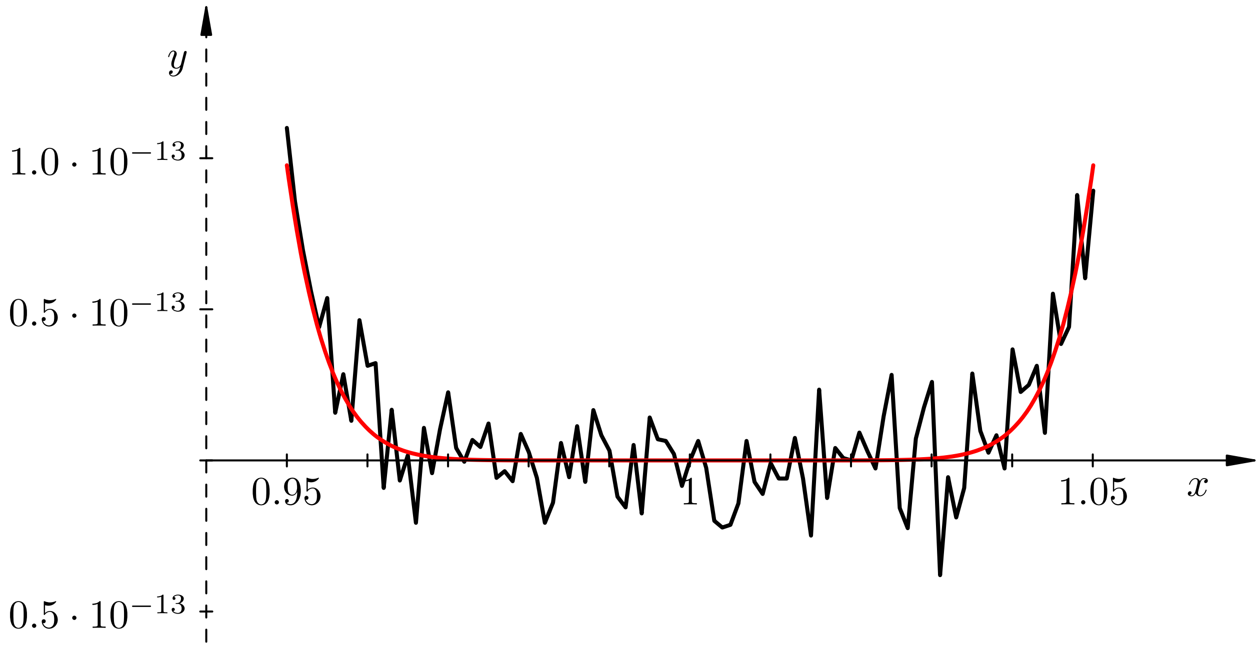
Ilustracija je na sljedeće dvije stranice.

Stabilnost direktnog potenciranja



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x: direktnim potenciranjem (dvostruka točnost).

Stabilnost Hornerove sheme



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x:
Hornerovom shemom (dvostruka točnost).

Hornerova shema "na ruke"

Hornerova shema "na ruke" radi se tako da se napravi tablica kojoj se

- u gornjem redu se popišu redom svi koeficijenti polinoma p_n od a_n do a_0;
- donji red se izračunava korištenjem gornjeg reda i točke x_0.

Elemente donjeg reda, slijeva nadesno, označimo s $x_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, r_0$, tako da se c_{n-1} nalazi ispod a_n:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline x_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 & r_0 \end{array}.$$

Hornerova shema “na ruke”

Elementi donjeg reda se računaju ovako:

$$c_{n-1} := a_n,$$

$$c_{i-1} := c_i * x_0 + a_{i-1}, \quad i = n, \ldots, 1.$$

Dakle,

- vodeći koeficijent a_n se prepiše,
- svi ostali se računaju tako da se posljednji izračunati c_i pomnoži s x_0, a zatim mu se doda a_{i-1}.

Hornerova shema “na ruke”

Primjer. Izračunajmo vrijednost polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki $x_0 = -1$.

Formirajmo tablicu:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Dakle, $p_5(-1) = 4$. ■

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Pogledajmo značenje koeficijenata c_i koji se javljaju u donjem redu tablice.

Promatrajmo polinom koji dobijemo dijeljenjem polinoma p_n s polinomom stupnja 1 oblika $x - x_0$.

- Kvocijent ta dva polinoma nazovimo q_{n-1} (to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$),
- a ostatak je broj, (mora biti stupnja manjeg od polinoma kojim dijelimo) koji označimo s b_0.

Tada vrijedi

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je

$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Označimo koeficijente polinoma q_{n-1} s b_i, $1 \leq i \leq n$

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i.$$

Uvrstimo li to u relaciju za dijeljenje, sređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x) = b_n x^n &+ (b_{n-1} - x_0\, b_n) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0\, b_2) x \\ &+ b_0 - x_0\, b_1. \end{aligned}$$

Za vodeći koeficijent b_n, odmah zaključujemo $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Dakle, b_i možemo izračunati iz b_{i+1} rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija istog oblika kao za dobivanje c_i, samo s pomaknutim indeksima, a kako je i $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti kvocijenta i ostatka pri dijeljenju polinoma p_n linearnim faktorom $x - x_0$.

Primjer

Primjer. Podijelimo

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

linearnim polinomom $x + 1$.

Primijetite da je to ista tablica kao u prošlom primjeru pa imamo

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r}
 & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline
-1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4
\end{array}.$$

Odatle lako čitamo

$$2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1 = (x+1)\left(2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 3\right) + 4.$$

Algoritam za dijeljenje polinoma

Dijeljenje polinoma s $(x - x_0)$

```
b[n] = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  b[i] = b[i + 1] * x_0 + a[i];
};
/* Polinom-kvocijent:  */
/* q_{n-1} = b[n] · x^{n-1} + ··· + b[2] · x + b[1].   */
```

Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta?
Vrijedi

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= (x - x_0)q_{n-1}(x) + r_0 \\
&= (x - x_0)\big[(x - x_0)q_{n-2}(x) + r_1\big] + r_0 \\
&= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1(x - x_0) + r_0 \\
&= \cdots \\
&= r_n(x - x_0)^n + \cdots + r_1(x - x_0) + r_0.
\end{aligned}
$$

Dakle, polinom p_n razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.
Koja su značenja koeficijenata r_i?

Potpuna Hornerova shema

Usporedimo dobiveni oblik s Taylorovim polinomom oko x_0

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} \, (x - x_0)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Dakle, potpuna Hornerova shema računa

- sve Taylorove koeficijente polinoma u zadanoj točki,

tj. sve derivacije polinoma u zadanoj točki podijeljene pripadnim faktorijelima.

Primjer

Primjer. Nađimo sve derivacije polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki -1.

Formirajmo potpunu Hornerovu tablicu.

	2	0	−1	4	0	1
−1	2	−2	1	3	−3	4
−1	2	−4	5	−2	−1	
−1	2	−6	11	−13		
−1	2	−8	19			
−1	2	−10				
−1	2					

Primjer

Odatle lako čitamo

$$
\begin{aligned}
p_5(-1) &= 4, & p_5^{(1)}(-1) &= -1 \cdot 1! = -1, \\
p_5^{(2)}(-1) &= -13 \cdot 2! = -26, & p_5^{(3)}(-1) &= 19 \cdot 3! = 114, \\
p_5^{(4)}(-1) &= -10 \cdot 4! = -240, & p_5^{(5)}(-1) &= 2 \cdot 5! = 240.
\end{aligned}
$$

Algoritam za Taylorov razvoj polinoma

Taylorov razvoj polinoma oko x_0

Algoritam nalazi koeficijente r_i, (koeficijente Taylorovog razvoja) zadanog polinoma oko točke x_0, korištenjem jednodimenzionalnog polja.

```
za i = 0 do n radi {
  r[i] = a[i];
};
za i = 1 do n radi {
  za j = n - 1 do i - 1 radi {
    r[j] = r[j] + x_0 * r[j + 1];
  };
};
```

Generalizirana Hornerova shema

Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki ortogonalni sustav funkcija na domeni aproksimacije.

- Razvoj funkcije f u red po ortogonalnim polinomima je očita generalizacija reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za aproksimaciju funkcije f, ako znamo da red konvergira prema f na nekoj domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

"Rezanjem" reda dobivamo aproksimaciju funkcije f

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima

- za aproksimaciju elementarnih i "manje elementarnih" specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

Da bismo izračunali $f_N(x)$ moramo znati sve koeficijente a_n i sve funkcije p_n.

- Najčešće nemamo formulu za p_n, nego znamo da funkcije p_n zadovoljavaju jednostavnu tročlanu rekurziju po n.

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije:

- Ako unaprijed ne znamo N, onda se sumacija vrši unaprijed, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.
- Iz teorije aproksimacija, često je moguće unaprijed naći koliko članova N treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost. Tada se koristi generalizacija Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje f_N.

Izvrednjavanje tročlanih rekurzija

Prisjetimo se, ortogonalni polinomi, ali i mnoge druge specijalne funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

s tim da su poznate "početne" funkcije p_0 i p_1, i sve funkcije α_n, β_n, za $n \in \mathbb{N}$.

Definiramo rekurziju za koeficijente

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Generalizirana Hornerova shema

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \big(B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}\big)\, p_n(x) \\
&= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\
&= (\text{rastavimo indekse na } 1 \text{ do } N-1 \text{ i ostale}) = \cdots
\end{aligned}
$$

Generalizirana Hornerova shema

$$\cdots = \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1}\big(p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)\big)$$

$$+ B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \alpha_0(x)B_1p_0(x)$$

$$= (\text{iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena})$$

$$= B_0p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).$$

U algoritmu je uobičajeno napraviti jedan korak rekurzije za koeficijente B_n i početi je indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

Algoritam za generaliziranu Hornerovu shemu

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ (silazni algoritam)

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_k+1(x) * B_2;
};
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f_N'(x)$, do pripadnog dolazimo deriviranjem rekurzije za B_n.

- Koeficijente B_n shvatimo kao funkcije od x.
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}$, s tim da B_n' označava derivaciju B_n po x, u točki x.

"Formalnim" deriviranjem dobivamo rekurziju za B_n'

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_{N+2}' = B_{N+1}' = 0,$$

$$\begin{aligned} B_n &= a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \\ B_n' &= -\alpha_n'(x)B_{n+1} - \alpha_n(x)B_{n+1}' \\ &\qquad - \beta_{n+1}'(x)B_{n+2} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}', \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odavde je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0,$$

je $b_N = 0$, pa rekurziju za B'_n pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x)B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0,$$

što ima skoro isti oblik kao i rekurzija za B_n, osim zamjene a_n s b_n. Vrijednost $f'_N(x)$, dobivamo deriviranjem $f_N(x)$,

$$f_N(x) = B_0 p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odmah slijedi

$$\begin{aligned} f_N'(x) = B_0 p_0'(x) + B_0' p_0(x) \\ &+ B_1 \big(p_1'(x) + \alpha_0'(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p_0'(x)\big), \\ &+ B_1' \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big). \end{aligned}$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f_N'(x)$, dovoljno je znati samo derivacije "početnih" funkcija p_0' i p_1', kao i α_n' i β_n'.

- Za računanje $f_N'(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično zajedno računaju.
- Rekurzije za B_n i B_n' provodimo u istoj petlji.

Algoritam za funkciju i derivaciju

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ i $f'_N(x)$

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
B'_1 = 0;
B'_0 = 0;
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_k+1(x) * B_2;
  B'_2 = B'_1;
  B'_1 = B'_0;
  b = - alpha'_k(x) * B_1 - beta'_k+1(x) * B_2;
  B'_0 = b - alpha_k(x) * B'_1 - beta_k+1(x) * B'_2;
};
```

Algoritam za funkciju i derivaciju

```
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
             + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
f'_N(x) = B_0 * p'_0(x) + B'_0 * p_0(x)
             + B_1 * (p'_1(x) + alpha'_0(x) * p_0(x)
                     + alpha_0(x) * p'_0(x))
             + B'_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Na isti način možemo izvesti i rekurzije za računanje viših derivacija $f_N^{(k)}(x)$, za $k \geq 2$.

- U praksi to gotovo nikada nije potrebno.
- Gotovo sve "korisne" familije funkcija p_n, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe drugog reda, s parametrom n.

Generalizirana Hornerova shema — primjeri

Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su neparne, a parni su parne funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za nulti i prvi polinom, tvrdnja vrijedi, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja), parne, a svi neparni, neparne funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ suprotne parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je iste parnosti kao T_{n-1},
- pa je T_{n+1} iste parnosti kao T_{n-1}.

Rekurzija za parne/neparne Čebiševljeve pol.

Isti dokaz kao za parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se parne funkcije razvijaju po parnim, a neparne po neparnim Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su parne/neparne funkcije, korisno je imati rekurziju samo za parne/neparne polinome.

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = 0$$

$$T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) = 0,$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove, Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x\big(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)\big) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su prva dva parna polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za neparne polinome, rekurzija se dobiva na sličan način. Pokažite da je rekurzija za neparne Čebiševljeve polinome istog oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za parne/neparne polinome izvodi se na isti način.

Napomena. Rekurziju za parne/neparne Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti

- korištenjem adicijske formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po parnim normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{2x}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.47200121576823476745	6	0.00000000021934576590
1	-0.49940325827040708740	7	-0.00000000000074816487
2	0.02799207961754761751	8	0.00000000000000193230
3	-0.00059669519654884650	9	-0.00000000000000000391
4	0.00000670439486991684	10	0.00000000000000000001
5	-0.00000004653229589732		

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

Kosinus je parna funkcija, pa je treba aproksimirati parnim funkcijama.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije kosinus na intervalu $[-1, 1]$ po parnim Čebiševljevim polinomima.

U algoritmu za generaliziranu Hornerovu shemu treba uvrstiti da je za parne Čebiševljeve polinome

$$\alpha(x) = 2(1 - 2x^2), \qquad \beta(x) = 1,$$
$$p_0(x) = T_0(x), \qquad p_1(x) = T_2(x).$$

Koeficijenti a_k u razvoju brzo padaju, pa su greške u aproksimaciji vrlo male i približno jednake prvom odbačenom članu.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Konačno, treba reći kako se dobivaju koeficijenti a_k u ovakvom razvoju.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da radimo na standardnom intervalu $[-1, 1]$.

Relacija ortogonalnosti za Čebiševljeve polinome prve vrste ima oblik

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq \ell, \\ \pi, & \text{za } k = \ell = 0, \\ \pi/2, & \text{za } k = \ell \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da je $\|T_0\|^2 = 2\,\|T_k\|^2$, za bilo koji $k \geq 1$.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Zato se razvoj zadane funkcije f po T_k obično piše u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

Pripadne formule za koeficijente u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \qquad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati analitički

- tek za poneke funkcije f.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Aproksimacija f_n funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata je

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(x).$$

Za numeričko računanje koeficijenata a_k, za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss-Čebiševljeva integracija reda većeg od n,
- diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u nultočkama ili ektremima Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, za $N \geq n$.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi T_k zapravo kosinusi, za njih vrijede

- vrlo slične relacije diskretne ortogonalnosti kao kod trigonometrijskih funkcija (v. malo kasnije).

Neka su x_j sve različite nultočke Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za Čebiševljeve polinome na skupu nultočaka $\{x_0, \ldots, x_N\}$ vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} T_k(x_j)\, T_\ell(x_j) &= \sum_{j=0}^{N} \cos(k\vartheta_j) \cos(\ell\vartheta_j) \\
&= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Skica dokaza: Produkt kosinusa pretvorimo u zbroj kosinusa.

- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume ($N+1$-i korijeni iz jedinice).

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Dakle, $\{T_0, T_1, \ldots, T_N\}$ je ortogonalna baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_N$ obzirom na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija ne možemo dodati sljedeći Čebiševljev polinom T_{N+1}, jer je

- njegov vektor vrijednosti u zadanim točkama nul-vektor.

Napomena: Unitarni prostor "događaja" je $\mathbb{R}^{N+1}$, s tim da

- svakoj funkciji f pridružujemo
- vektor njezinih vrijednosti u točkama $x_0, \ldots, x_N$.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Neka je f_n aproksimacija za f po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \|T_k\|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Napomena: koeficijenti d_k ovise o N, samo to nije posebno označeno!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za zadane f i N, ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N,$$

se jednostavno računaju!

Ako koeficijenti a_k relativno brzo padaju, onda za relativno male vrijednosti N (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se a_k i d_k podudaraju na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije diskretne ortogonalnosti vrijede i u ekstremima polinoma T_{N+1}.

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1+x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0,1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0,1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x-1)$.

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.37645281291919543163	13	0.00000000001717587317
1	0.34314575050761980479	14	−0.00000000000273642009
2	−0.02943725152285941438	15	0.00000000000043819577
3	0.00336708925556438925	16	−0.00000000000007048360
4	−0.00043327588861004446	17	0.00000000000001138172
5	0.00005947071198957983	18	−0.00000000000000184431
6	−0.00000850296754120286	19	0.00000000000000029978
7	0.00000125046736220057	20	−0.00000000000000004886
8	−0.00000018772799565082	21	0.00000000000000000798
9	0.00000002863025064840	22	−0.00000000000000000131
10	−0.00000000442095698068	23	0.00000000000000000021
11	0.00000000068956027323	24	−0.00000000000000000004
12	−0.00000000010845068551	25	0.00000000000000000001

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

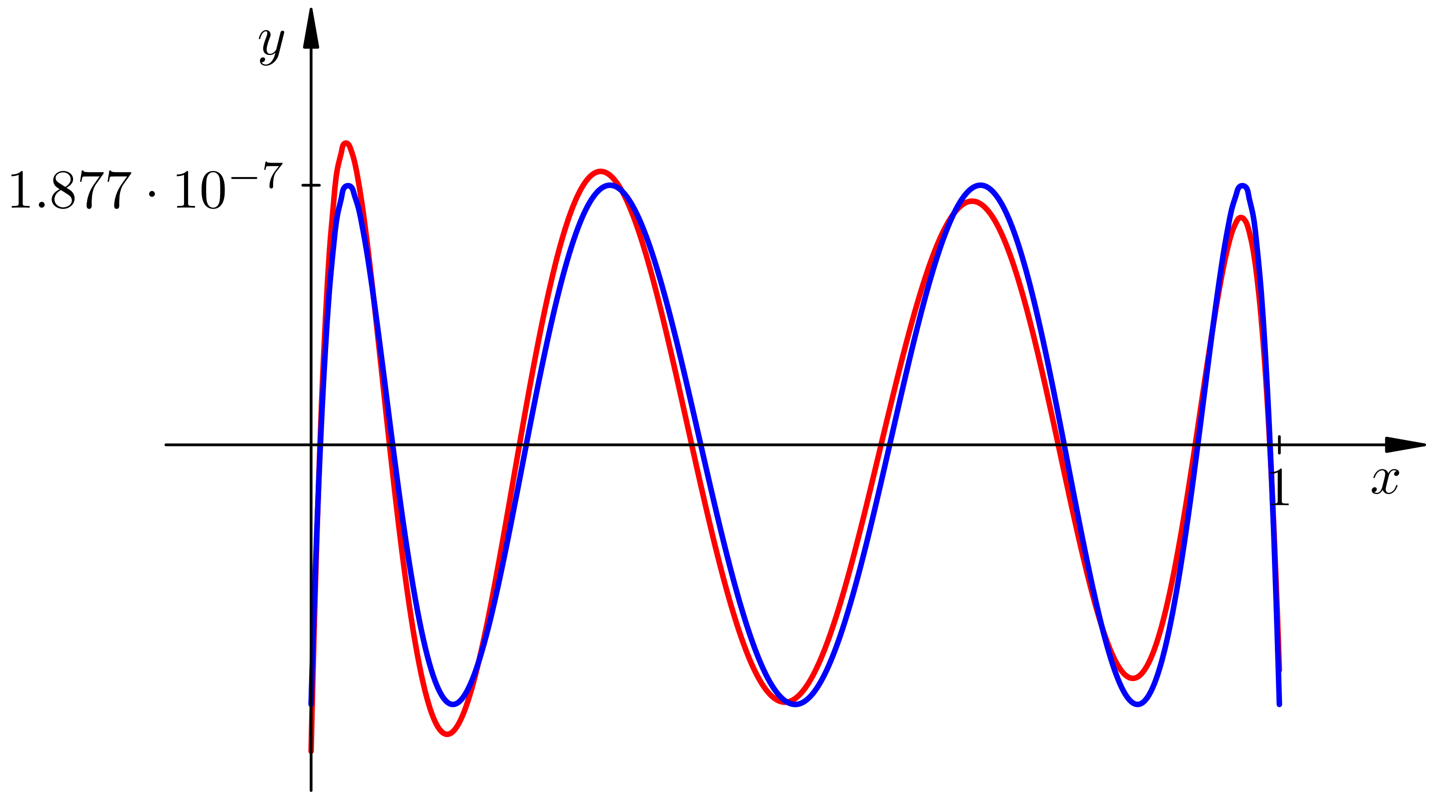
U prethodnom razvoju za $\ln(x+1)$ uzmemo samo članove do indeksa 7, tj. neka je prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$.

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k T_k^*(x), \quad e_7(x) = a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).$$

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$ plavom bojom.



Trigonometrijski polinomi — primjeri

Razvoj periodičkih funkcija

Za aproksimaciju periodičkih funkcija standardno koristimo Fourierove redove.

- Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je f periodička funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$.

Fourierov red za funkciju f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdje su

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Napomena. Granice integracije mogu (zbog periodičnosti) biti bilo koji c, $c + 2\pi$!

Konvergencija Fourierovog reda

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

Teorem. (Dirichlet) Pretpostavimo da je

(a) f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u tim točkama može imati i više vrijednosti),

(b) f je periodična s periodom 2π,

(c) f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Tada red Fourierov red konvergira prema

(1) $f(x)$ ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,

(2) $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ako u točki x funkcija ima prekid.

Razvoj periodičkih funkcija

Pretpostavimo da su koeficijenti a_n i b_n poznati i da želimo izračunati aproksimaciju trigonometrijskim polinomom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx),$$

gdje je N unaprijed zadan (zanemarimo poseban “status” a_0).

Trigonometrijski polinom sastoji se iz dva dijela: kosinusnog i sinusnog (to ćemo iskoristiti u algoritmu).

Nadalje, Fourierov red

- parne funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo kosinusni dio, a
- neparne funkcije $f(x) = -f(-x)$ samo sinusni dio razvoja.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f parna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

- U direktnoj sumaciji trebamo N računanja funkcije $\cos$, za $\cos(nx)$, uz $n \geq 1$.
- Možemo koristiti i generaliziranu Hornerovu shemu, samo treba naći tročlanu, homogenu rekurziju za

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu kosinusa pretvara u produkt

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Ako stavimo $a = (n+1)x$ i $b = (n-1)x$, dobivamo

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u općoj tročlanoj rekurziji treba uzeti

$$\alpha_n(x) = -2\cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$
$$B_n = a_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 1 + B_1 \big(\cos x - 2\cos x \cdot 1\big) \\ &= B_0 - B_1 \cos x. \end{aligned}$$

Sad imamo sve elemente za generaliziranu Hornerovu shemu.

Trigonometrijski polinom za parne funkcije

Fourierov “red” parne funkcije

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
alpha = 2 * cos(x);
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] + alpha * B_1 - B_2;
};
f_N(x) = B_0 - 0.5 * alpha * B_1;
```

Algoritam funkciju cos računa samo jednom.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f neparna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zbog sume koja ide od 1 treba biti oprezan. Zgodniji zapis je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

Sad očito treba definirati

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu sinusa pretvara u produkt

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

Ako stavimo $a = (n+2)x$ i $b = nx$, dobivamo

$$\sin((n+2)x) + \sin(nx) = 2 \sin((n+1)x) \cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2 \cos x \, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je potpuno isti oblik kao i za parne funkcije, odnosno za $p_n(x) = \cos(nx)$.

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik samo starta od $N-1$

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_{n+1} + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N-1, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i
$p_1(x) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot \sin x + B_1\big(2\sin x \cos x - 2\cos x \cdot \sin x\big) \\ &= B_0 \sin x. \end{aligned}$$

Algoritam napišite sami.

Razvoj periodičkih funkcija

Za opći Fourierov red koji ima i parni i neparni dio, treba spojiti prethodne algoritme.

Problem. Neparni je za 1 kraći, jer starta s $N-1$.

Rješenje. Umjetno definiramo $b_0 = 0$ i pišemo

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zatim uzmemo

$$p_n(x) = \sin(nx).$$

Razvoj periodičkih funkcija

Rekurzija za p_n je ista, a za B_n vrijedi "produljena" rekurzija

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \bigl(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\bigr) \\ &= B_0 \cdot 0 + B_1 \bigl(\sin x - 2\cos x \cdot 0\bigr) \\ &= B_1 \sin x. \end{aligned}$$

To pokazuje da B_0 uopće ne treba računati, ali baš to i očekujemo, kad smo rekurziju pomakli za jedan indeks naviše!

Fourierov red za $x + |x|$

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x + |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

može se razviti u Fourierov red

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu svih članova do uključivo $\cos(nx)$, odnosno, $\sin(nx)$.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$ i pogrešku $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ za razne n.

Fourierov red za $x + |x|$

Napomena. Fourierov red konvergira prema prekidnoj funkciji

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ 2x, & x \in (0, \pi), \\ \pi, & x = \pi. \end{cases}$$

Ova funkcija je “periodičko” proširenje od f, s tim da ima korektnu vrijednost u točki prekida.

Koeficijente u Fourierovom razvoju možemo računati direktno

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x \cos(kx)\, dx.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Sad razlikujemo dva slučaja $k = 0$ i $k \neq 0$. Za $k = 0$ imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi 2x\, dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^\pi = \pi.$$

Za $k \neq 0$ imamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi 2x \, \cos(kx)\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2\, dx \\ dv = \cos(kx)\, dx & v = \sin(kx)/k \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{k} \sin(kx) \Big|_0^\pi - \frac{2}{k} \int\limits_0^\pi \sin(kx)\, dx \right) = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2\pi} \big((-1)^k - 1\big).$$

Fourierov red za $x + |x|$

Odatle odmah slijedi da je

$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, \qquad a_{2k} = 0.$$

Za b_k, budući da je $k \neq 0$ imamo

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi 2x \sin(kx)\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = 2x & du = 2\, dx \\ dv = \sin(kx)\, dx & v = -\cos(kx)/k \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2x}{k} \cos(kx) \Big|_0^\pi + \frac{2}{k} \int\limits_0^\pi \cos(kx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi}{k} \cos(k\pi) + \frac{2}{k^2} \sin(kx) \Big|_0^\pi \right) = -\frac{2}{k} (-1)^k.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Posljednji rezultat možemo zapisati i kao

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

Koeficijente u Fourierovom redu mogli smo računati zbrajanjem Fourierovih razvoja funkcija

- x na $[-\pi, \pi]$, (neparna funkcija), pa razvoj ima samo b_n,
- $|x|$ na $[-\pi, \pi]$, (parna funkcija), pa razvoj ima samo a_n.

Fourierov red za $x + |x|$

Za vježbu pokažite da je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$x = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

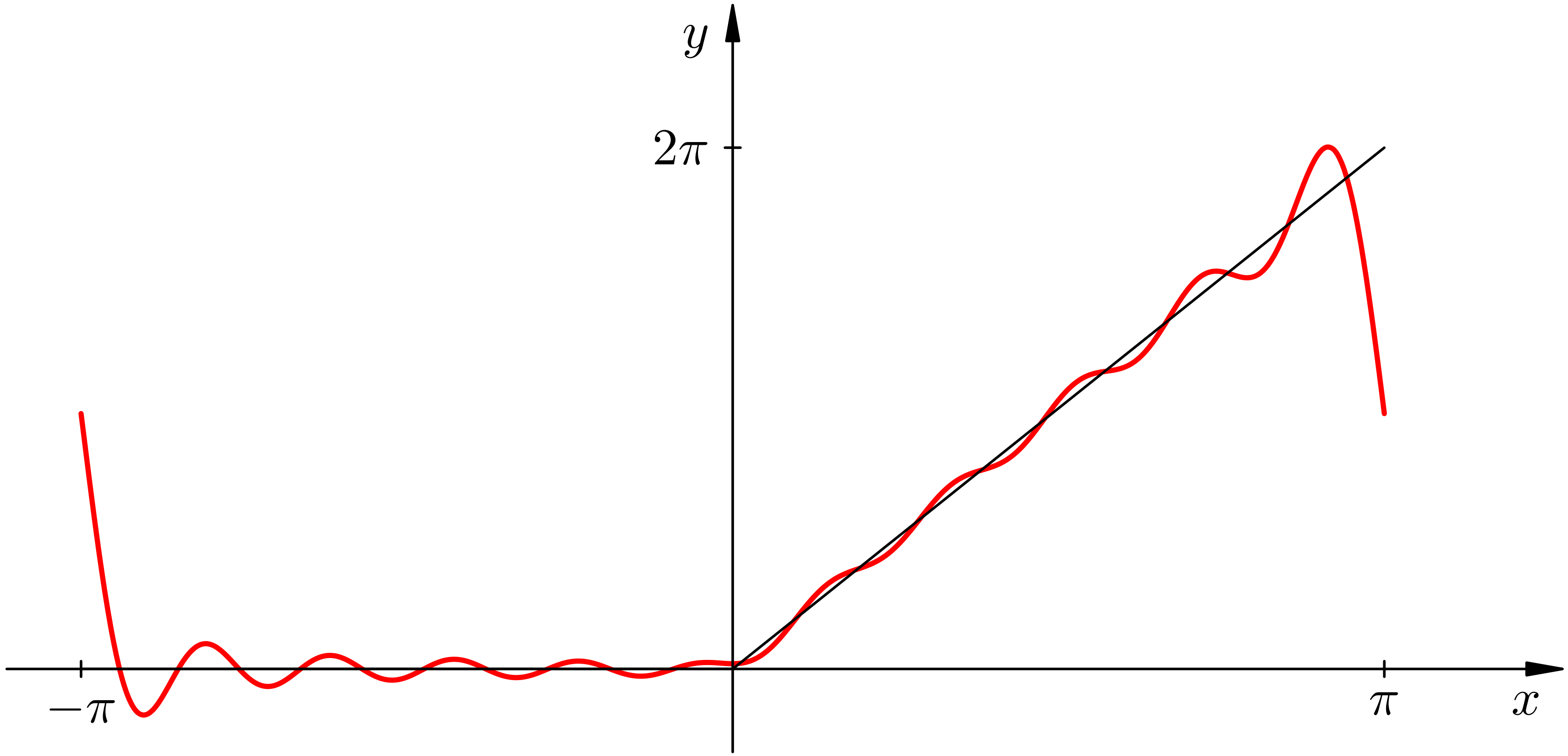
Zbog neprekidnosti periodičkog proširenja za $|x|$,

- koeficijenti a_k u razvoju trnu kao k^{-2}.

Periodičko proširenje za x ima prekid, pa

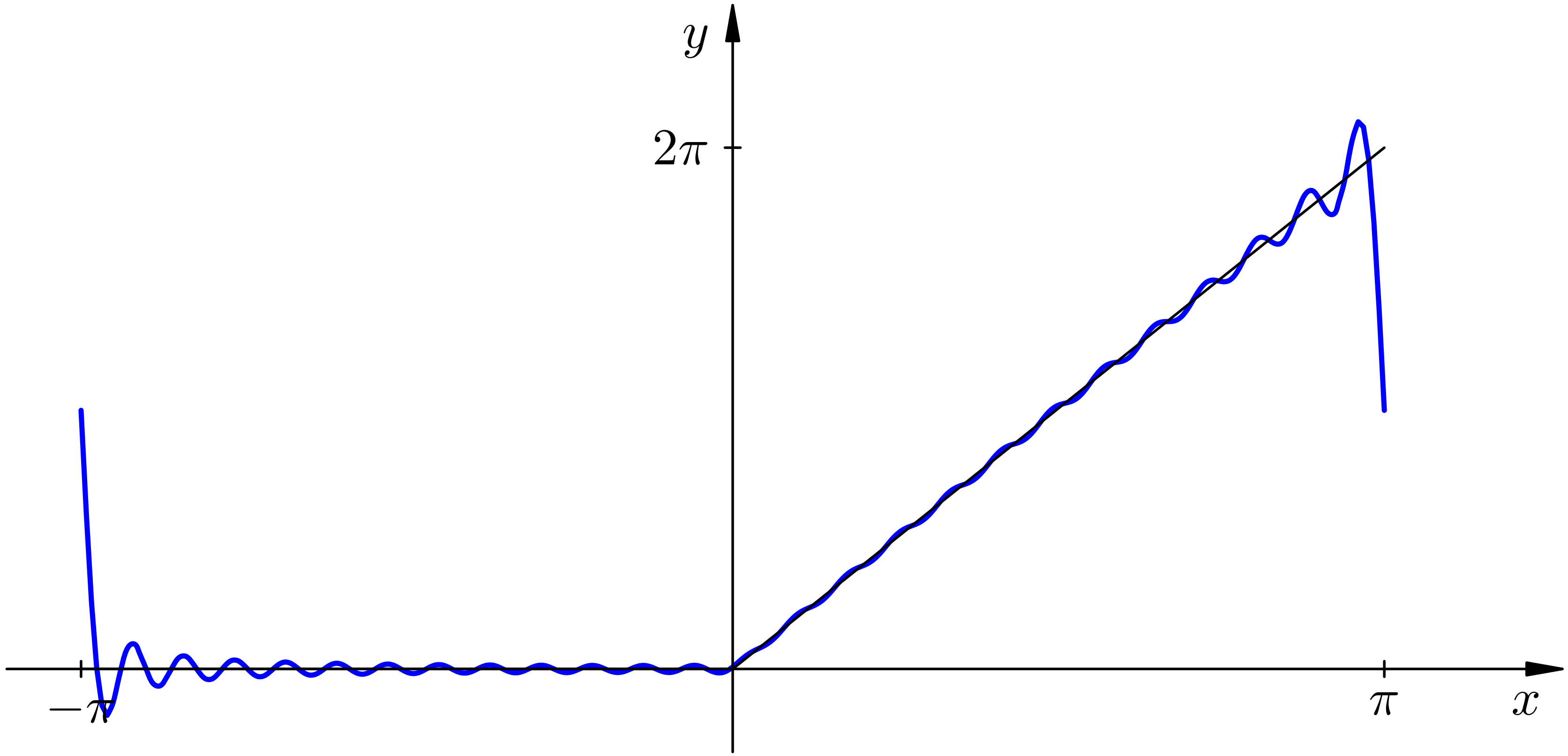
- koeficijenti b_k u razvoju trnu kao k^{-1}.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



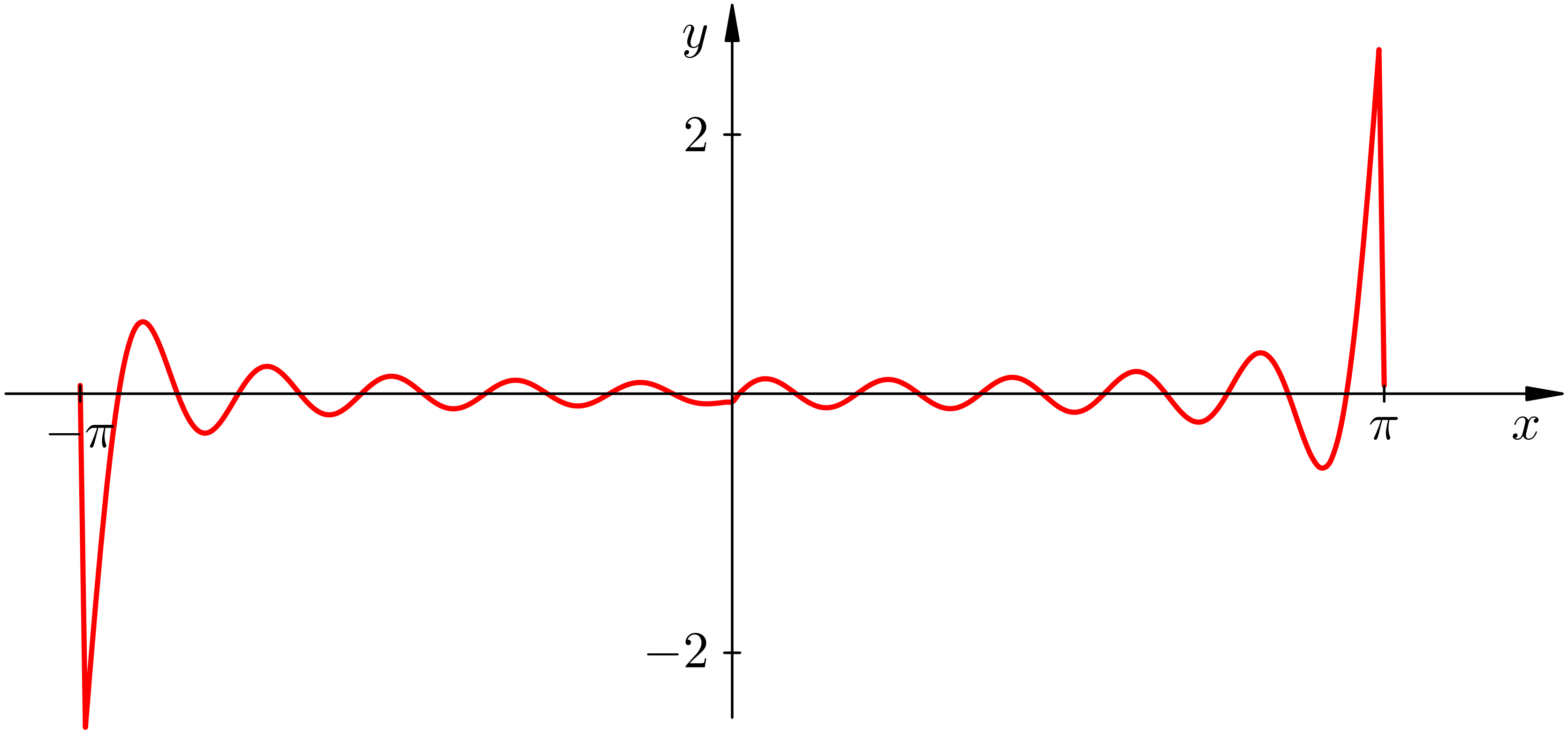
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



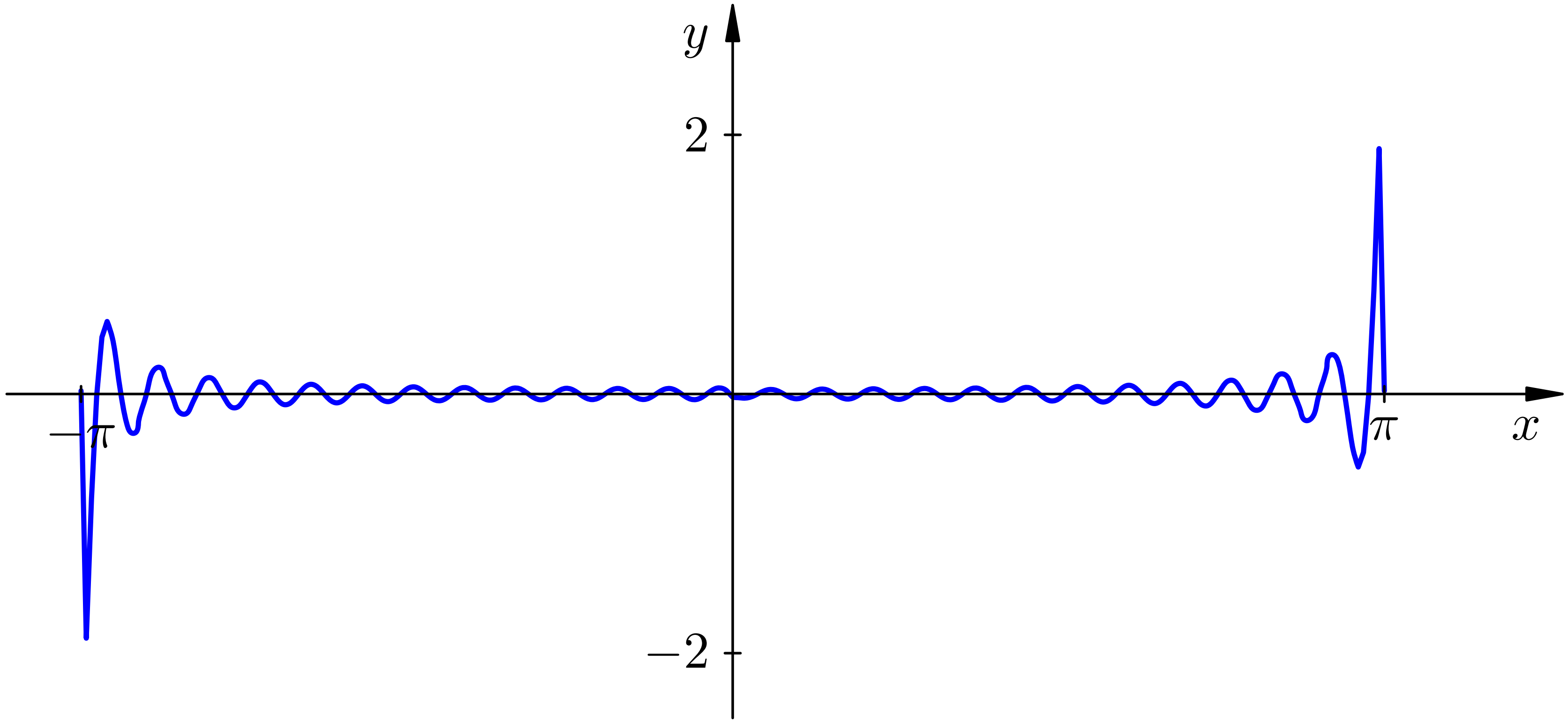
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za trigonometrijske funkcije, također, vrijede relacije diskretne ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome T_n.

Na mreži od $N+1$ točaka $0, 1, \ldots, N$, uz oznake $x_j = j$ i

$$x_{k,j} = \frac{2\pi}{N+1} k x_j, \quad x_{\ell,j} = \frac{2\pi}{N+1} \ell x_j, \quad j = 0, \ldots, N,$$

vrijede sljedeće relacije diskretne ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\sum_{j=0}^{N} \sin x_{k,j} \sin x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \text{ i } k = \ell = 0, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \sin x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = 0,$$

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

$$\sum_{j=0}^{N} \cos x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \\ N+1, & k = \ell = 0, \end{cases}$$

uz uvjet da je $k + \ell \leq N$.

Dokaz ovih relacija ide još malo jednostavnije nego za Čebiševljeve polinome.

- Produkt trigiometrijskih funkcija treba pretvoriti u zbroj ili razliku.
- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume.

Stabilnost rekurzija — primjeri

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Za rekurzije oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1,$$

možemo zaključiti da opasnost od kraćenja, pa onda i gubitak točnosti nastupa kad niz vrijednosti

$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_N(x)$$

naglo pada po apsolutnoj vrijednosti.

Dva su pitanja na koja bi bilo zgodno odgovoriti.

- Kako se tada ponaša silazni algoritam za računanje f_N?
- Može li se nekim trikom, poput okretanja rekurzije, popraviti stabilnost?

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Umjesto općeg odgovora, koji bi koji zahtijeva dublju analizu, ilustrirajmo situaciju na jednom klasičnom primjeru.

Primjer. Neka je $p_n(x) = e^{nx}$. Ove funkcije generiraju tzv. "eksponencijalne polinome" (umjesto x^n imamo eksponencijalne funkcije e^{nx})

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{nx}.$$

Za takve p_n možemo sastaviti razne rekurzije.

Dvočlana ima oblik

$$p_{n+1}(x) - e^x p_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stabilnost eksponencijalnih polinoma

Tročlana homogena rekurzija je slična onima za trigonometrijske funkcije,

$$p_{n+1}(x) - 2\,\mathrm{ch}\,x\,p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $\mathrm{ch}\,x = (e^x + e^{-x})/2$ kosinus hiperbolni od x. Očito je da $p_n(x)$

- monotono raste za $x > 0$
- monotono pada za $x < 0$.

Testirajmo stabilnost ove rekurzije i pripadne generalizirane Hornerove sheme za računanje $p_n(x) = e^{nx}$ u točkama $x = 1$ i $x = -1$.

- `EXP_STAB\exp_nx_p.out` za $x = 1$,
- `EXP_STAB\exp_nx_n.out` za $x = -1$.