

Numerička matematika

11. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Numerička integracija:
 - Općenito o integracijskim formulama.
 - Newton–Cotesove formule.
 - Trapezna formula.
 - Simpsonova formula.
 - Formula srednje točke.
 - Teorija integracijskih formula.
 - Težinske Newton–Cotesove formule.
 - Produljene Newton–Cotesove formule.
 - Produljena trapezna formula za trigonometrijske polinome.

Informacije

Termin drugog kolokvija je:

● utorak, 1. 7., u 12 sati.

Bitno: Za domaće zadaće iz NM pogledajte

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

Rok za predaju zadaća je dan drugog kolokvija, tj. 1. 7.

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Konačno je stigla!

Općenito o numeričkim integracijskim formulama

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval (može biti i beskonačan). Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- takav se integral može **egzaktno** izračunati,
- pa jedino preostaje približno, **numeričko** računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je računanje $I(f)$ korištenjem:

- **vrijednosti** funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom **konačnom** skupu točaka.

Općenito o integracijskim formulama

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m + 1$ broj korištenih **točaka** (čvorova integracije),
- $I_m(f)$ pripadna **aproksimacija** integrala,
- $E_m(f)$ pritom napravljena **greška**.

Ako koristimo **samo** funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

pri čemu je m neki unaprijed **zadani** prirodni broj.

Općenito o integracijskim formulama

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se **čvorovi integracije**, a brojevi $w_k^{(m)}$ **težinski koeficijenti**.

U **općem** slučaju, za **fiksni** m , moramo odrediti $2m + 2$ **nepoznatih** koeficijenata.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule **egzaktne** na vektorskom prostoru **polinoma** \mathcal{P}_n što višeg stupnja.

Zbog **linearnosti** integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

dovoljno je gledati egzaktnost tih formula na **nekoj bazi** vektorskog prostora — recimo na $\{1, x, x^2, \dots, x^m, \dots\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su čvorovi fiksirani, recimo ekvidistantni, onda dobivamo Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma \mathcal{P}_m , baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednažbi koji je regularan.
- Pokazat će da se te formule mogu dobiti i kao integrali interpolacijskih polinoma stupnja m za funkciju f na zadanoj (ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Možemo i **fiksirati samo neke** čvorove, ili dozvoliti da su **svi** čvorovi “**slobodni**”.

Ako su **svi** čvorovi **slobodni**, integracijske formule se zovu formule **Gaussovog tipa**.

Kod Gaussovih, ali i **težinskih** Newton–Cotesovih formula, integracijska formula se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. **težinska funkcija**. Ideja je “**razdvojiti**” podintegralnu funkciju na **dva** dijela, tako da eventualni **singulariteti** budu uključeni u w .

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Gaussove integracijske formule su **egzaktne** na vektorskom prostoru **polinoma** \mathcal{P}_{2m+1} , tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor **dvostruko** veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove se formule nikad **ne** računaju “**direktno**” iz uvjeta **egzaktnosti**, jer to vodi na **nelinearni** sustav jednažbi.
- Pokazat ćemo **vezu** Gaussovih formula, funkcije w i **ortogonalnih polinoma** obzirom na w na intervalu $[a, b]$.
 - To omogućava **efikasno** računanje **svih** parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule **nema** puno smisla tražiti **produljene** formule.

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste dva tipa Newton–Cotesovih formula:

- **zatvorene** formule — rubovi intervala a i b su čvorovi,
- **otvorene** formule — rubovi intervala a i b nisu čvorovi.

Za **zatvorenu** (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m + 1$ točaka, $[a, b]$ podijelimo na m podintervala. Čvorovi su

$$x_k^{(m)} = x_0 + kh_m, \quad k = 0, \dots, m, \quad h_m = \frac{b - a}{m},$$

pa je **osnovni** oblik **zatvorenih** Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_0 + kh_m).$$

Tipovi Newton–Cotesovih formula

Da bismo dobili **otvorene** Newton–Cotesove formule s $m + 1$ točaka, definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_{m+1} := b.$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na $m + 2$ podintervala, tj. stavimo

$$x_k^{(m)} = x_0 + kh_m, \quad k = 0, \dots, m, \quad h_m = \frac{b - a}{m + 2},$$

pa je **osnovni** oblik **otvorenih** Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_0 + kh_m).$$

Ova suma ide samo po “**unutarnjim**” točkama.

Osnovna trapezna formula

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$, zove se **trapezna formula**. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b - a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m , promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,

- tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za **točno određenu** formulu (**fiksni** m).
- **Dogovor:** ako **znamo** za koji red formule m računamo, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula

Dakle, osnovna **trapezna** formula ima oblik

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći **težinske** koeficijente w_0 i w_1 , tako da

- integracijska formula **egzaktno** integrira **bazu** $\{1, x, \dots\}$ vektorskog prostora **polinoma** \mathcal{P}_n što višeg stupnja.

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k dx, \quad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \dots$

Osnovna trapezna formula

Vrijedi

$$\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

☞ Za $k = 0$, tj. za $f(x) = 1 = x^0$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednačba **nije dovoljna** za određivanje **dva** nepoznata parametra, pa zahtijevamo **egzaktnost** i na polinomima stupnja **1**.

Osnovna trapezna formula

• Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo **dvije** jednačbe s **dvije** nepoznanice

$$w_0 + w_1 = b - a$$

$$aw_0 + bw_1 = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Množenjem **prve** jednačbe s $-a$ i dodavanjem **drugoj**, izlazi

$$(b - a)w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b - a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula

Budući da je $a \neq b$, dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2} (b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednadžbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2} (b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(a) + f(b)).$$

Zadatak. Ponovite izvod na “simetričnoj” bazi $1, x - (a + b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime **trapeznoj** formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a),$$

vidimo da je

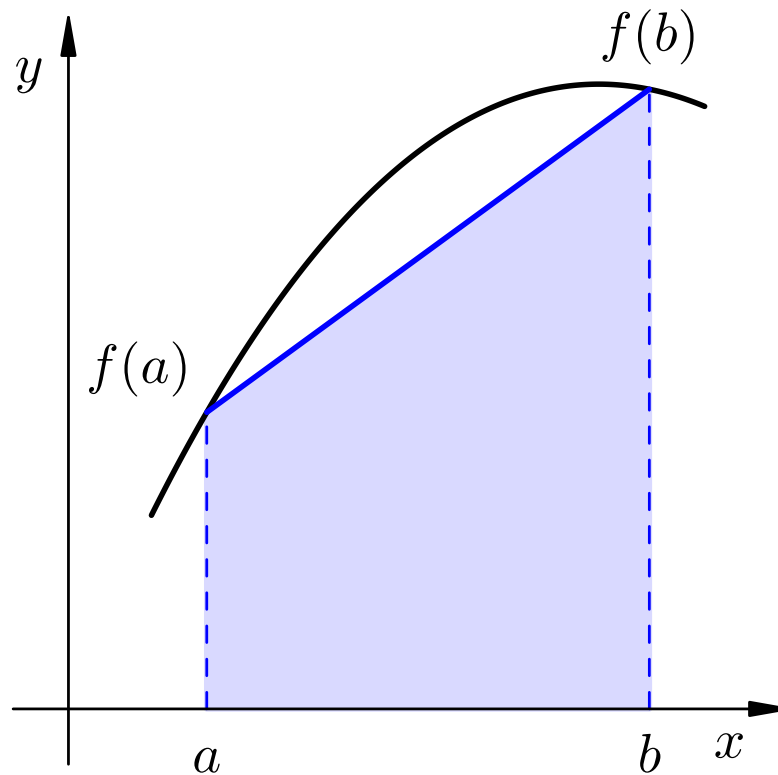
- $(f(a) + f(b))/2 =$ **srednjica** trapeza (stoji okomito), a
- $b - a =$ **visina** trapeza (leži vodoravno, kao “širina”),

za **trapez** na slici — sljedeća folija.

Drugim riječima, **površinu** ispod **krivulje** zamijenili smo (tj. aproksimirali) **površinom trapeza**.

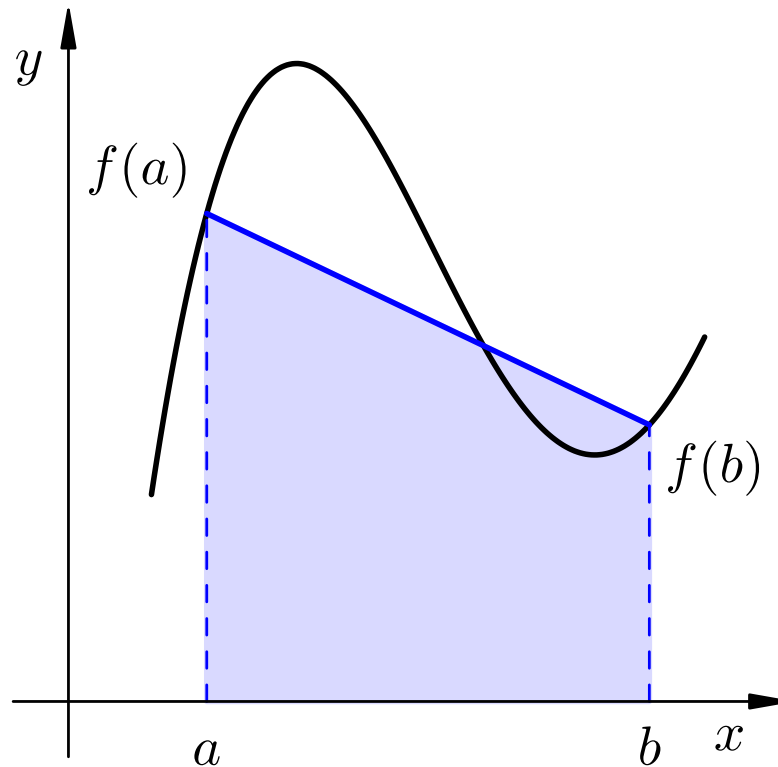
Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije **integrala** funkcije f površinom **trapeza**.



Zašto baš trapezna formula?

Ovisno o “obliku” funkcije f , slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo **izveli** iz uvjeta **egzaktnosti** prostoru polinoma \mathcal{P}_1 stupnja 1.

- Zato formula **egzaktno** integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona **neće** egzaktno integrirati **sve** polinome stupnja 2, jer **ne** integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2} (b - a).$$

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Povučemo li kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f ,
- a zatim ga **egzaktno** integriramo,

dobivamo opet **trapeznu** formulu (dokaz je na sljedećoj foliji).

Dakle, vidimo da vrijedi

$$\text{aproksimacija integrala} = \text{integral aproksimacije (interpolacije)}.$$

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje **greške trapezne** formule! Slično vrijedi i za **ostale** integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski **pravac** za funkciju f koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ je

$$p_1(x) = f(a) + f[a, b] (x - a).$$

Njegov **integral** na $[a, b]$ je

$$\begin{aligned} \int_a^b p_1(x) dx &= \left(f(a)x - a f[a, b]x + f[a, b] \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b \\ &= (b - a)f(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f[a, b] \\ &= (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao **integral** greške interpolacijskog polinoma.

Neka je funkcija $f \in C^2[a, b]$.

- Greška **interpolacijskog** polinoma stupnja 1 koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ na intervalu $[a, b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - a)(x - b) \frac{f''(\xi)}{2}.$$

- **Greška trapezne** formule je

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x) dx = \int_a^b (x - a)(x - b) \frac{f''(\xi)}{2} dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem. (Teorem srednje vrijednosti za integrale) Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a, b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x) dx \leq \int_a^b w(x)g(x) dx \leq M \int_a^b w(x) dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x),$$

pa integriranjem izlazi traženo (monotonost integrala). ■

Teorem. (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama)

Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a, b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ , $m \leq \mu \leq M$, takav da vrijedi

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = \mu \int_a^b w(x) dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a, b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a, b]$ takav da je

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = g(\zeta) \int_a^b w(x) dx.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x) dx = 0,$$

onda je, po teoremu srednje vrijednosti za integrale, i

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj

$$\int_a^b w(x) dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema srednje vrijednosti za **integrale**, dijeljenjem dobivamo

$$m \leq \mu \leq M, \quad \text{za} \quad \mu := \frac{\int_a^b w(x)g(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}.$$

Zaključak o **neprekidnom** g slijedi iz

- činjenice da **neprekidna** funkcija na segmentu postiže **sve vrijednosti** između **minimuma** i **maksimuma**, pa mora postići i μ (**neprekidna** slika **segmenta** je **segment**).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a, b]$ takav da je $\mu = g(\zeta)$. ■

Greška trapezne formule

Iskoristimo teoreme srednje vrijednosti za računanje **greške trapezne** formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x - a)(x - b) \frac{f''(\xi)}{2} dx.$$

Pritom je

$$\frac{(x - a)(x - b)}{2} \leq 0 \quad \text{na} \quad [a, b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -\frac{(x - a)(x - b)}{2}, \quad g(x) = -f''(\xi).$$

Greška trapezne formule

Ako je $f \in C^2[a, b]$, onda da je $f'' \in C[a, b]$. Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, vrijedi da je

$$E_1(f) = -f''(\zeta) \int_a^b -\frac{(x-a)(x-b)}{2} dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} dx = -\frac{(b-a)^3}{12} = -\frac{h^3}{12},$$

pa postoji $\zeta \in [a, b]$ za koji je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$

Osnovna Simpsonova formula

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo sljedeću (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$, poznatu pod imenom **Simpsonova formula**. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b - a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse. Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1 f\left(\frac{a + b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula

Imamo tri nepoznata parametra, pa moramo postaviti **najmanje** tri uvjeta za egzaktnost formule na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

• Za $f(x) = 1$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$

• Za $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x dx = w_0 \cdot a + w_1 \frac{a + b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula

• Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx = w_0 \cdot a^2 + w_1 \frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s **tri** jednačbe i **tri** nepoznanice

$$w_0 + w_1 + w_2 = b - a$$

$$aw_0 + \frac{a+b}{2} w_1 + bw_2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$a^2w_0 + \frac{(a+b)^2}{4} w_1 + b^2w_2 = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Osnovna Simpsonova formula

Rješavanjem ovog sustava, dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz egzaktnosti na svim polinomima stupnja **manjeg ili jednakog 2** glasi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2,

● **egzaktno** integrira i sve polinome stupnja 3. Dovoljno je pokazati da egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

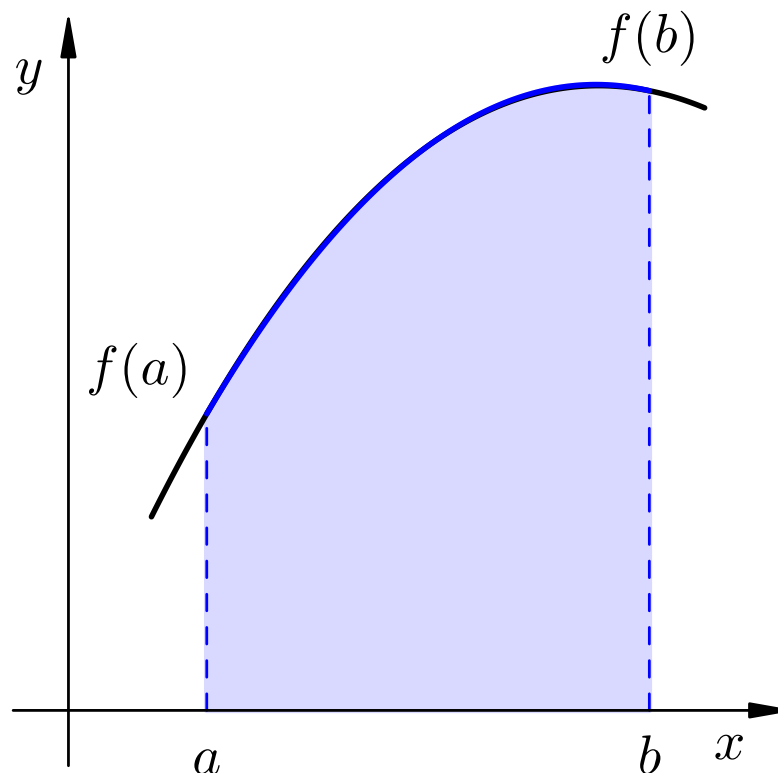
$$\begin{aligned} I_2(x^3) &= \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + b^3 \right) \\ &= \frac{b-a}{4} (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}. \end{aligned}$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula **interpolacijska**.

- Ako povučemo **kvadratni** interpolacijski polinom kroz $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ i $(b, f(b))$, a zatim ga **egzaktno** integriramo od a do b , dobivamo Simpsonovu formulu.

Točnost Simpsonove formule

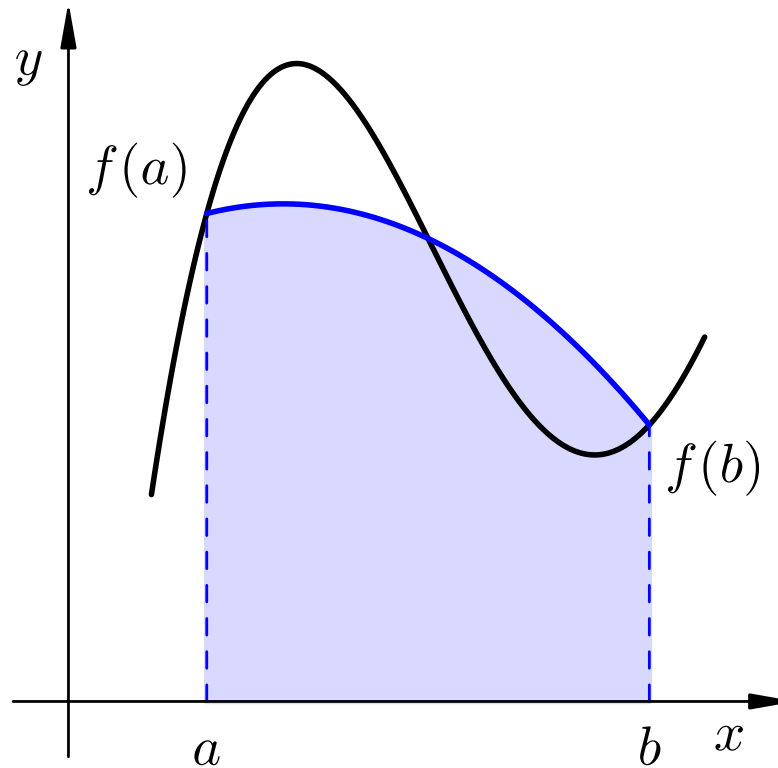
Ilustrirajmo kako **Simpsonova** formula funkcionira na **integralu** kojeg smo aproksimirali **trapeznom** formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala **vrlo dobra**.

Točnost Simpsonove formule

Ovisno o “obliku” funkcije f , slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija **ne mora** biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, **integracijom greške** kvadratnog interpolacijskog polinoma

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x - a) \left(x - \frac{a + b}{2} \right) (x - b) \frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Za grešku **Simpsonove formule** vrijedi

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x) dx.$$

Nažalost, funkcija

$$(x - a) \left(x - \frac{a + b}{2} \right) (x - b)$$

nije fiksnog znaka na $[a, b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti.

Greška Simpsonove formule

Pretpostavimo da je $f \in C^4[a, b]$. Označimo

$$c := \frac{a + b}{2}$$

i definiramo

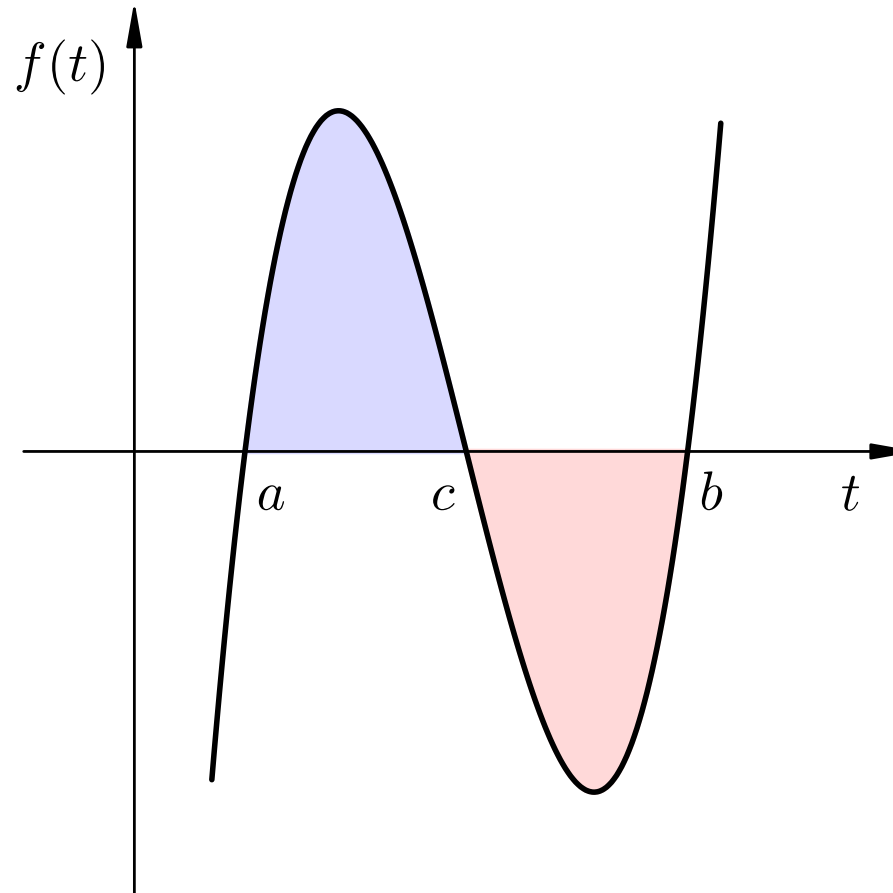
$$w(x) = \int_a^x (t - a)(t - c)(t - b) dt.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a, b).$$

Skiciramo li funkciju $f(t) = (t - a)(t - c)(t - b)$ odmah vidimo da je ona **centralno simetrična** oko srednje točke ...

Greška Simpsonove formule



pa će integral **rasti** od 0 do svog maksimuma (**plava** površina),
a zatim **padati** (kad dođe u **crveno** područje) do 0 .

Greška Simpsonove formule

Ostaje samo još napisati grešku interpolacijskog polinoma kao **podijeljenu razliku**. Za $n = 3$ vrijedi

$$f[a, b, c, x] = \frac{f'''(\xi)}{6},$$

pa grešku Simpsonove formule možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b w'(x) f[a, b, c, x] dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x) f[a, b, c, x] \Big|_a^b - \int_a^b w(x) \frac{d}{dx} f[a, b, c, x] dx.$$

Greška Simpsonove formule

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Ostaje još “srediti” drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s **dvostrukim** čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Na sličan je način **derivacija** treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x ,
- **četvrta** podijeljena razlika s **dvostrukim** čvorom x .

Prema tome, dobivamo formulu greške u obliku

$$E_2(f) = - \int_a^b w(x) f[a, b, c, x, x] dx.$$

Greška Simpsonove formule

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a, b, c, \eta, \eta] \int_a^b w(x) dx,$$

gdje je $a \leq \eta \leq b$. Napišemo $f[a, b, c, \eta, \eta]$ kao derivaciju, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int_a^b w(x) dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w .

Greška Simpsonove formule

Vrijedi

$$\begin{aligned}w(x) &= \int_a^x (t - a)(t - c)(t - b) dt \\&= (\text{zamjena varijable } y = t - c) \\&= \int_{-h}^{x-c} (y - h)y(y + h) dy = \int_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2y) dy \\&= \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-h}^{x-c} = \frac{(x - c)^4}{4} - h^2 \frac{(x - c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}.\end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule

Nadalje je

$$\int_a^b w(x) dx = \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2 \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dx$$

$$= \text{(zamjena varijable } y = x - c)$$

$$= \int_{-h}^h \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^5}{20} - h^2 \frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4} \right) \Big|_{-h}^h$$

$$= 2 \left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4} \right) = \frac{4}{15} h^5.$$

Greška Simpsonove formule

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15} h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja no što bi po upotrijebljenom interpolacijskom polinomu trebala biti.

Osnovna formula srednje točke

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo otvorenu Newton–Cotesovu formulu za $m = 0$, poznatu pod imenom **formula srednje točke** ili pod engleskim nazivom **midpoint formula**.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$ takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke

• Za $f(x) = 1$, imamo

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

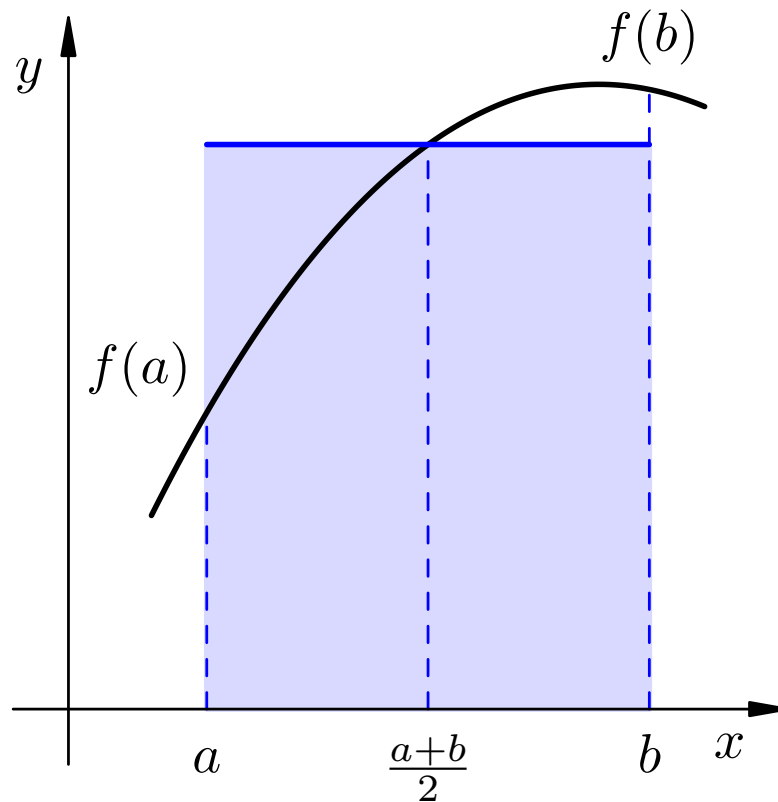
$$\int_a^b f(x) \, dx \approx 2hf \left(\frac{a+b}{2} \right) = (b-a)f \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

I ova formula je interpolacijska, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f interpoliramo polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u **srednjoj** točki $(a+b)/2$,
- a onda **egzaktno** integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

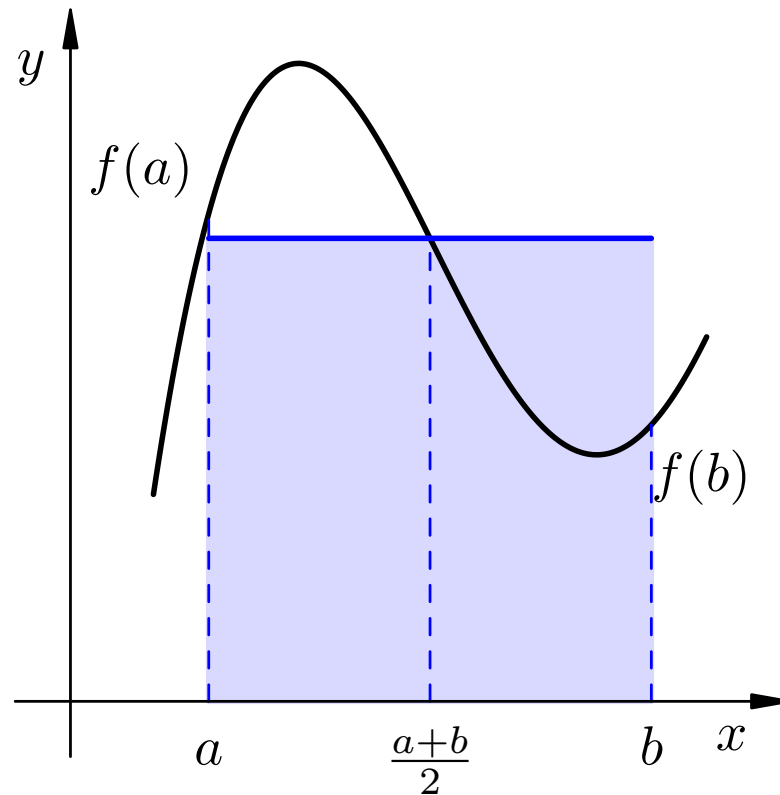
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija **integrala** funkcije f površinom **pravokutnika**.



Pravokutna formula u srednjoj točki

Ovisno o “obliku” funkcije f , slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke **egzaktno** integrira i polinome stupnja za **jedan** većeg — sljedećeg **neparnog** stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke **egzaktno** integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) = (b - a) \frac{a + b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška te integracijske formule je **integral** greške interpolacijskog polinoma stupnja 0 (konstante), koji f interpolira u srednjoj točki.

Ako definiramo

$$w(x) = \int_a^x (t - c) dt, \quad c := \frac{a + b}{2},$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je **greška** formule **srednje točke**

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x) dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\zeta).$$

Teorija integracijskih formula

Interpolacijske formule

Nije teško pokazati da su sve Newton–Cotesove formule **integrali interpolacijskih polinoma** na ekvidistantnoj mreži.

Vrijedi i općenitiji rezultat za bilo kakvu **težinsku** integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}).$$

Napomena. Zbog jednostavnosti pisanja, ponovno ispustimo gornje indekse m .

Interpolacijske formule

Definicija. Za integracijsku formulu reći ćemo da ima **polinomni** stupanj egzaktnosti d ako je

$$E_m(f) = 0 \quad \text{za sve } f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je \mathcal{P}_d vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d .

Za formulu ćemo reći da je **interpolacijska** ako je $d = m$. ■

Interpolacijske formule

Teorem. Integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k)$$

ima egzaktnost m ako i samo ako je to integral interpolacijskog polinoma funkcije f u čvorovima x_0, \dots, x_m . Pritom su težinski koeficijenti w_k

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 0, \dots, m,$$

pri čemu je ℓ_k , $k = 0, \dots, m$, k -ti polinom Lagrangeove baze.

Interpolacijske formule

Dokaz.

1. smjer

Formula za koeficijente w_k integrira egzaktno sve polinome stupnja manjeg ili jednakog m , jer egzaktno integrira bazu ℓ_k tog vektorskog prostora polinoma. Odalje slijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^m w_k f(x_k) &= \sum_{k=0}^m f(x_k) \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) \left(\sum_{k=0}^m f(x_k) \ell_k(x) \right) dx = \int_a^b w(x) p_m(x) dx,\end{aligned}$$

pa je integracijska formula integral interpolacijskog polinoma.

Interpolacijske formule

2. smjer

Ako je integracijska formula ima red m , onda za funkciju f možemo staviti polinome Lagrangeove baze ℓ_r , $r = 0, \dots, m$, pa mora vrijediti

$$\int_a^b w(x) \ell_r(x) dx = \sum_{k=0}^m w_k \ell_r(x_k) = w_r, \quad r = 0, \dots, m.$$

Korolar. Newton–Cotesove formule su integrali interpolacijskih polinoma na **ekvidistantnoj** mreži.

Prethodni korolar kaže još i ovo: ako interpolacijski polinomi **loše** aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule **neće** biti ništa bolje!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Primjer. Pokažimo na primjeru Runge kako se ponašaju **aproksimacije** integrala $I_m(f)$ ako dižemo red formule m . Prava vrijednost integrala je

$$\int_{-5}^5 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 5 \approx 2.74680153389003172.$$

Tablice na sljedećim stranicama su **aproksimacije** integrala izračunate **Newton–Cotesovim** formulama raznih redova i pripadne greške.

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.38461538461538462	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	-4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	-1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	-0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	-1.92649902176346704

Zelene znamenke u aproksimaciji su **točne**, ostale **nisu**!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.24477294027858525	-0.49797140638855353
12	-0.31293651575343889	3.05973804964347061
13	1.91979721683238891	0.82700431705764282
14	7.89954464085193082	-5.15274310696189909
15	4.15555899270655713	-1.40875745881652541
16	-6.24143731477308329	8.98823884866311501
17	0.26050944143760372	2.48629209245242800
18	18.87662129010920670	-16.12981975621917490
19	7.24602608588196936	-4.49922455199193763
20	-26.84955208882447960	29.59635362271451140

Očito je da aproksimacije **ne konvergiraju** prema pravoj vrijednosti integrala.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f .

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red zatvorene Newton–Cotesove formule.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k :

- dovoljno je napisati samo w_k , za $0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil$,
- a za $\lceil m/2 \rceil < k \leq m$ vrijedi $w_k = w_{m-k}$.

Radi preglednosti tablice, koeficijenti w_k zapisani su kao zajednički faktor A pomnožen s W_k , tj.

$$w_k = A W_k h, \quad h = (b - a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m + 1, & \text{za } m \text{ neparan,} \\ k = m + 2, & \text{za } m \text{ paran.} \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f .

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_k
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f .

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red otvorene Newton–Cotesove formule.

Slično kao kod zatvorenih formula, u tablici je naveden samo dio w_k .

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m + 2, & \text{za } m \text{ paran,} \\ k = m + 1, & \text{za } m \text{ neparan.} \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f .

m	A	W_0	W_1	W_2	C_k
0	2	1			$\frac{1}{3}$
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama za veće m

- poprimaju i pozitivne i negativne znakove,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog **kraćenja** može doći do velike **greške** u rezultatu.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f .

Zadatak. Pokažite da težinski **koeficijenti** Newton–Cotesovih formula moraju biti **simetrični**, tj. ako je

$$\int_a^b f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m , onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil \quad (\text{može i do } m).$$

Uputa. Uzeti “**simetričnu**” (par–nepar) **bazu potencija** oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^k, \quad k = 0, \dots, m,$$

i napisati jednadžbe **egzaktne** integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f .

Alternativa: Zbog **ekvidistantnosti** i simetrije čvorova, Lagrangeova baza ℓ_k , $k = 0, \dots, m$, mora biti “**simetrična**” oko polovišta intervala, pa zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x) dx, \quad k = 0, \dots, m.$$

Isti zaključak **vrijedi** i za **težinske** Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

uz **pretpostavku** da je težinska funkcija w **parna** oko polovišta intervala.

Produljene Newton–Cotesove formule

Produljene formule

Umjesto **dizanja** reda m formule, bolje je

- interval $[a, b]$ **podijeliti** na n podintervala,
- na **svakom** podintervalu primijeniti **osnovnu** formulu,
- a rezultate **zbrojiti**.

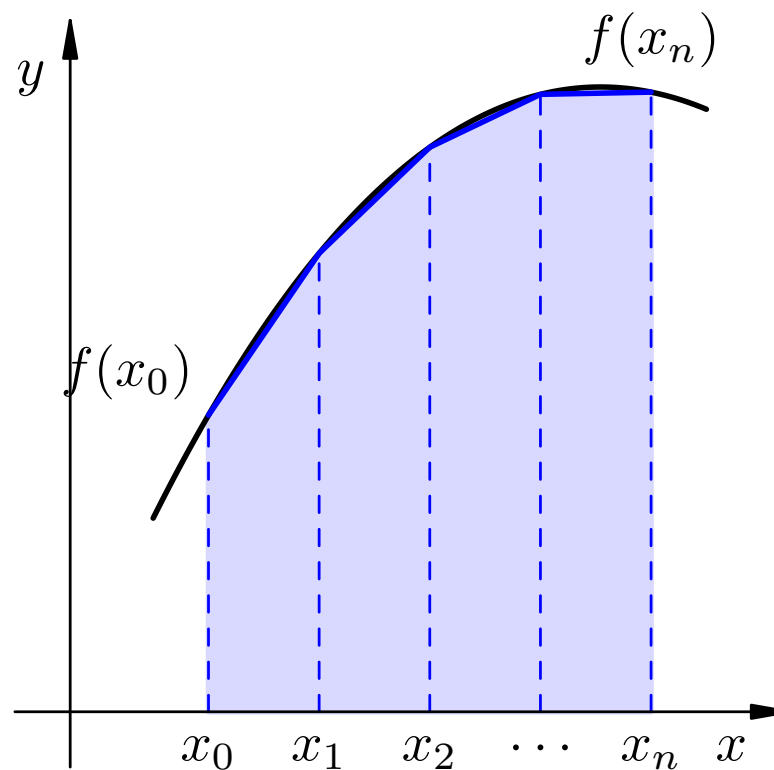
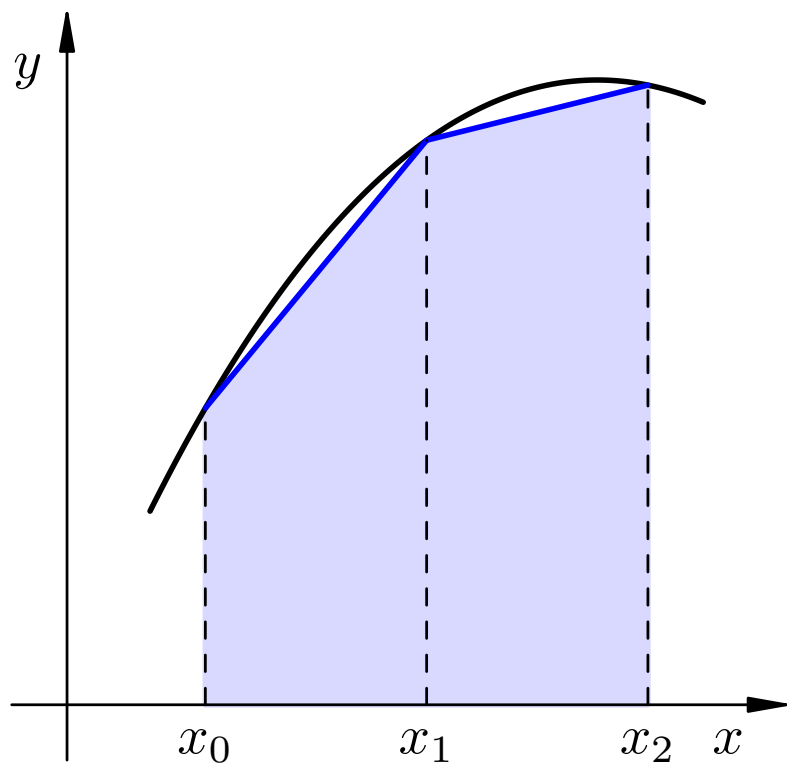
Tako dobivene formule zovemo **produljene** formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se **osnovna** formula izvodi za odgovarajući **broj** podintervala.

- Na primjer, **osnovna Simpsonova** formula zahtijeva **2** podintervala, pa n mora biti **paran**.

Produljene formule

Na primjer, **produljene trapezne** formule s 2 i $n = 4$ podintervala izgledaju ovako.



Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

Na **svakom** podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$,

- iskoristimo “običnu” trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije **zbrojimo** u **produljenu** trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h . To znači da je

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_{k-1} + f_k) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula

Znamo da za greške vrijedi

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{h}{2}(f_{k-1} + f_k) + E_{1,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{2}((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n E_{1,k}(f). \end{aligned}$$

Produljena trapezna formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) + E_n^T(f),$$

U ovoj formuli

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapezних formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^n E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^n -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška ovako napisana nije naročito korisna, pa je treba napisati u drugačijem obliku

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k .
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Budući da je f'' neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule

Dakle, postoji točka $\xi \in [a, b]$ takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k).$$

Stoga formulu za grešku možemo pisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n potreban da se postigne neka zadanu točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

odnosno,

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i **produljena Simpsonova formula**, koja mora imati **paran** broj podintervala. Ograničimo se samo na **ekvidistantni** slučaj. Imamo

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx,$$

tako da na **svakom** podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \dots, n/2$, primijenimo “**običnu**” Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula

Obična Simpsonova formula na svakom pojedinom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna **greška**

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Produljena Simpsonova formula

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3} (f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) + E_{2,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{3} ((f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots \\ &\quad + (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena Simpsonova formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Ponovno, **grešku** je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Sličnim zaključivanjem kao kod trapezne formule, izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

odnosno, da je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli **produljenu formulu srednje točke**, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n **paran** broj.

U **ekvidistantnom** slučaju

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n,$$

aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx,$$

tako da na **svakom** podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \dots, n/2$, primijenimo “**običnu**” formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = 2h f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$I_n(f) = 2h(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a, b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti **paran**.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se **produljena** formula **srednje točke** piše s “**polovičnim**” indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom **obične** formule srednje točke

• na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$,

• s tim da n više **ne mora** biti paran,

tj., **isto** kao kod produljene trapezne formule.

U **ekvidistantnom** slučaju je

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Ovaj h odgovara **ranijem** $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 1, \dots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \dots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = h f_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}) + E_n^M(f),$$

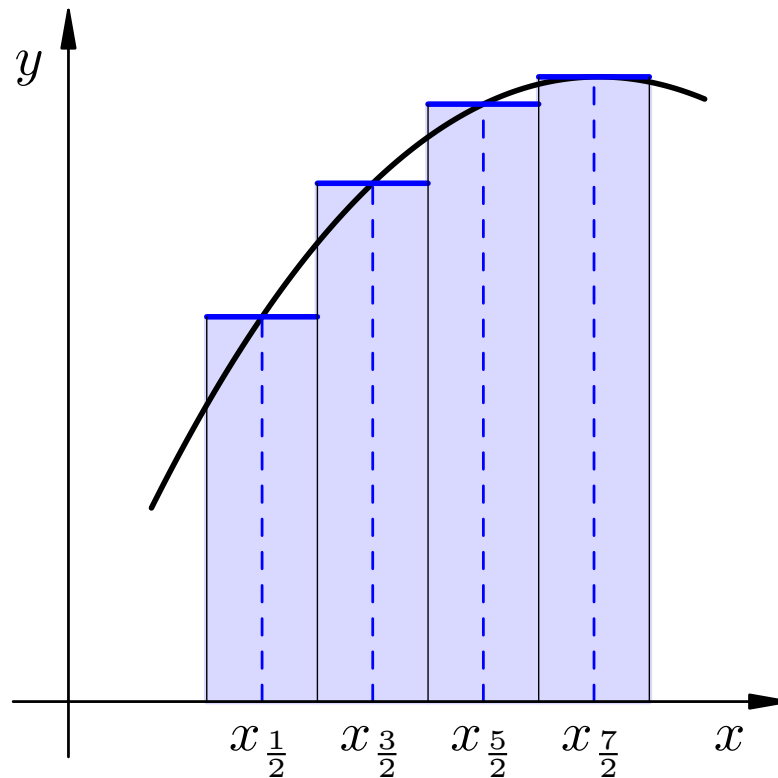
a greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^n \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a, b]$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako.



Produljena trapezna formula za periodičke funkcije

Prednosti produljene trapezne metode

Iako produljena **trapezna** metoda **egzaktno** integrira samo polinome stupnja 1, ona “puno bolje” integrira **trigonometrijske funkcije**.

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je $[a, b]$ interval $[0, 2\pi]$ i neka je \mathcal{T}_N familija trigonometrijskih funkcija,

$$\mathcal{T}_N[0, 2\pi] = \left\{ f \mid f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\}.$$

Tvrdnja. Neka je $E_n^T(f)$ greška **produljene** trapezne formule s n podintervala za funkciju f . Tada vrijedi

$$E_n^T(f) = 0 \quad \text{za svaki } f \in \mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi],$$

tj. imamo **egzaktnu** integraciju na prostoru $\mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi]$.

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Dokaz. Provjeru je najlakše napraviti korištenjem kompleksne eksponencijalne funkcije

$$e_k(x) := e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Greška **produljene trapezne formule** za funkciju e_k je prava vrijednost integrala **minus** aproksimacija po trapeznoj formuli

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e_k(x) dx - \frac{\pi}{n} \left(e_k(0) + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} e_k\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + e_k(2\pi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n}. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Kad je $k = 0$, onda je

$$E_n^T(e_0) = \int_0^{2\pi} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = x \Big|_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Kad je $k > 0$, imamo

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n} \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} = 0 \right\} = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (e^{2\pi ki/n})^\ell. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Ako $n|k$, tj. ako je $k = 0 \pmod{n}$, onda je $e^{2\pi ki/n} = 1$, pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = -2\pi.$$

Ako $n \nmid k$, tj. ako je $k \neq 0 \pmod{n}$, onda je $e^{2\pi ki/n} \neq 1$, pa je

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (e^{2\pi ki/n})^\ell = \text{(geometrijski red)} \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - e^{2\pi kin/n}}{1 - e^{2\pi ki/n}} = -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi ki/n}} = 0. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Zaključujemo da je

$$E_n^T(e_k) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Uzimanjem **realnog** i **imaginarnog** dijela dobivamo

$$E_n^T(\cos(kx)) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}, \end{cases}$$

$$E_n^T(\sin(kx)) = 0.$$

Posebno, iz prve relacije odmah **slijedi** da je

$$E_n^T(e_k) = 0 \quad \text{za } k = 0, \dots, n-1. \quad \blacksquare$$

Integral Fourierovog reda

Neka je f periodička funkcija s periodom 2π , koja ima **uniformno konvergentan** Fourierov razvoj (smijemo integrirati član po član!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

pri čemu su a_k i b_k **Fourierovi koeficijenti** za funkciju f . Greška aproksimacije za integral funkcije f korištenjem produljene trapezne formule je

$$E_n^T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k E_n^T(\cos(kx)) + b_k E_n^T(\sin(kx))) = -2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell \cdot n}.$$

Što je funkcija f **gladja** Fourierovi koeficijenti brže teže u 0.

Integral Fourierovog reda

Preciznije, neka je $f \in C^r(\mathbb{R})$ (f ima r neprekidnih derivacija na \mathbb{R}). Onda je

$$a_k = O(k^{-r}) \quad \text{za } k \rightarrow \infty.$$

Slično vrijedi i za b_k . To znači da je greška u $E_n^T(f)$ **približno jednaka** prvom članu greške za $\ell = 1$, tj.

$$E_n^T(f) \approx -2\pi a_n,$$

tj.

$$E_n^T(f) = O(n^{-r}) \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Budući da je općenito $h = (b - a)/n$ (ovdje je $h = 2\pi/n$), onda ocjenu možemo zapisati kao

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za } h \rightarrow 0.$$

Integral Fourierovog reda

Ako je $r > 2$, onda je ocjena za $E_n^T(f)$ periodičkih funkcija **bolja** od

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = O(h^2), \quad \text{za } h \rightarrow 0,$$

koja vrijedi za **neperiodičke** funkcije f .

(Prethodnu asimptotsku ocjenu možemo napisati i kao $E_n^T(f) = O(n^{-2})$, za $n \rightarrow \infty$.)

Posebno, ako je $r = \infty$, onda trapezna formula konvergira brže od **bilo koje** potencije od h .

Još jedno dobro svojstvo produljene trapezne f .

Neka je f definirana na \mathbb{R} i za neki $r \geq 1$ ima sljedeća svojstva:

$$f \in C^{2r+1}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2r+1)}(x)| dx < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(2\rho-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(2\rho-1)}(x) = 0, \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Tada se može pokazati da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) + E(f; h),$$

pri čemu greška zadovoljava $E(f; h) = O(h^{2r+1})$, za $h \rightarrow 0$, pa za $r = 1, 2, 3, \dots$ greška **brže** teži u nulu od bilo koje potencije od h .

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Primjer. Korištenjem produljene trapezne formule izračunajte

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

za razne vrijednosti h .

Podintegralna funkcija zadovoljava svojstva s prethodne folije, pa možemo upotrijebiti formulu za integraciju

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh).$$

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Prethodnu formulu upotrebljavamo tako da u sumi umjesto ∞ uzmemo **dovoljno velik** realni broj M , pa dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-M}^M f(kh).$$

Budući da e^{-x^2} **brzo trne**, odredimo M tako da je $Mh = 10$, što odgovara granicama integracije od -10 do 10 .

Prava vrijednost integrala je 1 , a za razne h dobivamo

h	n	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	20	1.000103446372407640	-0.000103446372407639
0.5	40	1.00000000000000000010	-0.00000000000000000015
0.25	80	1.00000000000000000000	-0.00000000000000000000

Integracija singularne funkcije

Pretpostavimo sada da je integriramo funkciju f na konačnoj domeni, ali takvu da je singularna u jednoj ili obje granice.

Ideja. Napraviti takvu transformaciju da

- granice integracije postanu $\pm\infty$, a
- funkcija zadovoljava “lijepa svojstva” za brzu integraciju produljenom trapeznom formulom.

Pretpostavimo da izračunavamo integral

$$I := \int_a^b f(x) dx,$$

takav da su obje granice a i b konačne.

Integracija singularne funkcije

Konstruiramo preslikavanje

$$z = z(x) \quad (\text{ili ekvivalentno}) \quad x = x(z),$$

takvo da je

$$z(a) = -\infty, \quad z(b) = \infty.$$

Tada se zamijeni varijabla u integralu I , pa imamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x(z)) \left(\frac{dx}{dz} \right) dz.$$

Točnost numeričke integracije ovisi o izabranoj transformaciji.

Integracija singularne funkcije

Primjeri takvih transformacija:

● eksponencijalna transformacija

$$x = \frac{1}{2}(a + b + (b - a) \operatorname{th}(z)),$$

odnosno

$$z = \operatorname{Arth} \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right),$$

● dvostruka eksponencijalna transformacija (jako dobra)

$$x = \frac{1}{2} \left[a + b + (b - a) \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right) \right],$$

pri čemu je

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\pi}{4}(b - a) \operatorname{ch} z}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right)}.$$