Numerička matematika
14. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Rješavanje nelinearnih jednadžbi (nastavak):
  - Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka.
  - Metoda tangente — Newtonova metoda.
  - Metoda sekante.
  - Metoda jednostavne iteracije.
  - Newtonova metoda za višestruke nultočke.
  - Primjeri.
  - Primjeri metoda višeg reda konvergencije.

Informacije

Termin drugog kolokvija je:

- utorak, 1. 7., u 12 sati.

Bitno: Za domaće zadaće iz NM pogledajte

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

Rok za predaju zadaća je dan drugog kolokvija, tj. 1. 7.

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka

Konstrukcija iterativnih metoda

Kod konstrukcije metode bisekcije i regule falsi, koristili smo dvije startne pretpostavke o funkciji f i intervalu $[a, b]$ na kojem radimo. Te pretpostavke su:

- "glatkoća" — funkcija f je neprekidna na intervalu $[a, b]$,
- "lokacija nultočke" — u rubovima intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

  tj. funkcijske vrijednosti u rubovima intervala imaju različit predznak.

Uz prvu, druga pretpostavka osigurava da f ima bar jednu nultočku u $[a, b]$

- i ove rubne točke a, b su bitne za start iteracija.

Obje metode sigurno konvergiraju, ali sporo — linearno.

Konstrukcija iterativnih metoda

U nastavku, krećemo od drugačijih pretpostavki za konstrukciju iterativnih metoda.

Ako funkcija f ima veću glatkoću na nekoj domeni,

- smijemo koristiti vrijednosti prve derivacije f' u točkama,
- može i vrijednosti viših derivacija, ako postoje.

Do sada smo veću glatkoću koristili samo kod ocjene greške.

Što se lokacije tiče, krećemo od slabijih pretpostavki.

- Za konstrukciju iterativne metode — ne pretpostavljamo ništa, tj. lokacija nultočke nije bitna.

Kod analize konvergencije metode — lokacija nultočke, naravno, ima ključnu ulogu.

Konstrukcija iterativnih metoda

Opće ideje za konstrukciju iterativnih metoda za nalaženje nultočaka funkcije su sljedeće.

- Jednu ili više startnih točaka možemo, bar u principu, izabrati bilo gdje.

Zatim, počevši od tih startnih točaka,

- iterativno generiramo neki niz aproksimacija (= metoda).

U svakoj iteraciji, novu aproksimaciju generiramo tako da je

$$\text{aproksimacija nultočke} = \text{nultočka aproksimacije},$$

s tim da se aproksimacija određuje na osnovu jedne ili više prethodnih točaka — tzv. iteracijskom funkcijom.

Ideja iteracije je slična onoj kod integracijskih formula.

Konstrukcija iterativnih metoda

Na primjer, kod Newtonove metode, funkciju aproksimiramo

- tangentom u jednoj (zadnjoj) točki,

a kod metode sekante,

- sekantom kroz dvije (zadnje) točke.

Kod ovakvog pristupa, gubimo sigurnu konvergenciju, tj.

- može se dogoditi da metode ne konvergiraju, ovisno o startu iteracija.

Međutim, ako konvergiraju,

- konvergencija je brža — kad smo dovoljno blizu nultočke.

Za pojedine metode, navest ćemo i neke uvjete koji osiguravaju konvergenciju (slično kao kod regule falsi).

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Pretpostavimo da je funkcija f barem

- neprekidno derivabilna na nekoj domeni,
- idealno — na cijelom $\mathbb{R}$.

Nadalje, neka je zadana, ili nekako izabrana,

- početna točka x_0.

Ideja metode tangente je

- povući tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,

i definirati novu aproksimaciju x_1

- u točki gdje ta tangenta siječe os x.

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Drugim riječima, funkciju f

- aproksimiramo pravcem — tangentom u točki $(x_0, f(x_0))$,

a nepoznatu nultočku funkcije f

- aproksimiramo nultočkom tog pravca — te tangente na graf funkcije f u zadanoj točki.

Isti postupak možemo ponoviti u točki x_1 i dobiti sljedeću točku x_2.

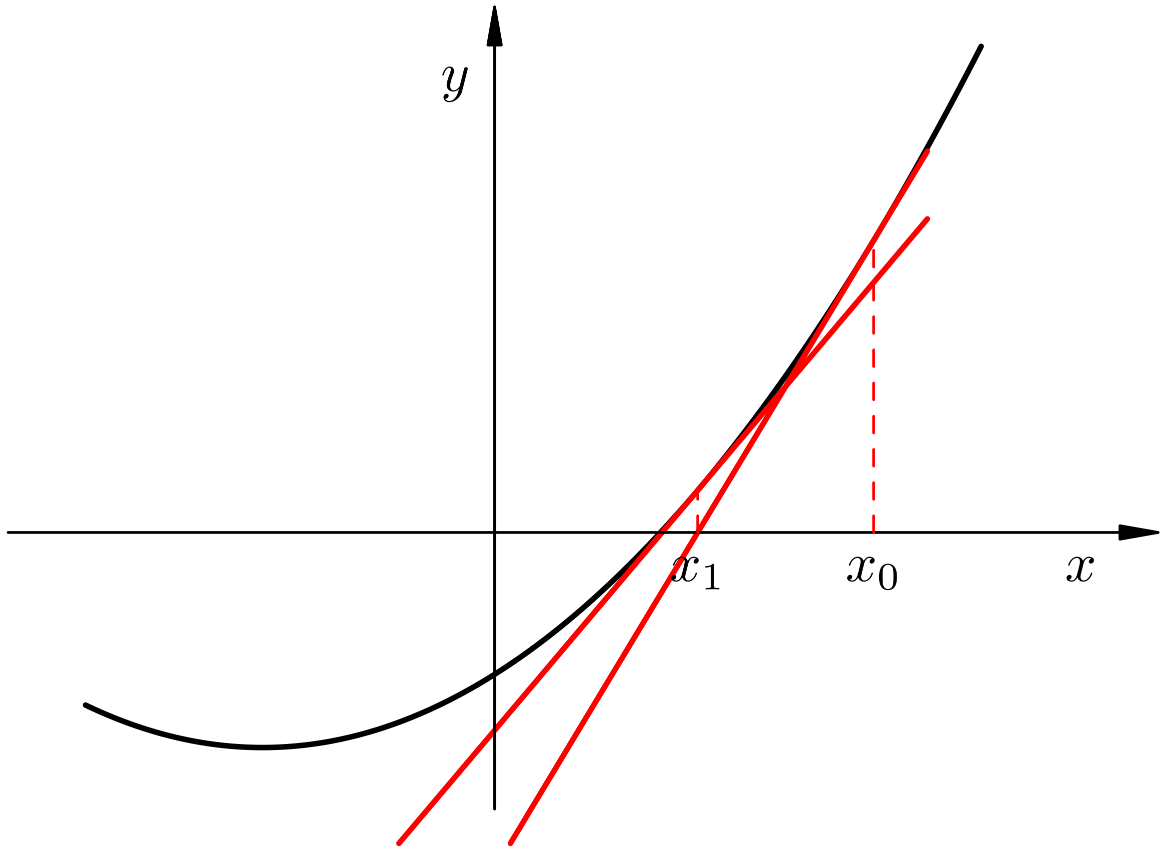
Kad ovaj postupak iteriramo — induktivno ponovimo u svakoj sljedećoj točki, dobivamo

- metodu tangente ili Newtonovu metodu

za nalaženje nultočke funkcije f.

Newtonova metoda — grafički

Grafički, Newtonova metoda za nalaženje nultočke izgleda ovako



Geometrijski izvod Newtonove metode

Geometrijski izvod metode je jednostavan.

- U točki x_n napišemo jednadžbu tangente i pogledamo gdje tangenta siječe os x.

Jednadžba tangente je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Iz zahtjeva $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je nova aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ postoji (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u svim točkama x_n.

Analitički izvod Newtonove metode

Do Newtonove metode može se doći i analitički,

- ali uz malo jače pretpostavke,
- iz kojih onda slijedi i izraz za grešku.

Neka je α neka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je

- f dva puta neprekidno derivabilna na nekom intervalu oko α.

Tj. pretpostavljamo da je $f \in C^2(I)$, gdje je I segment takav da je $\alpha \in I$.

Neka je $x_n \in I$ bilo koja točka — neka aproksimacija za α.

Onda funkciju f možemo razviti u Taylorov red oko x_n, do uključivo prvog člana.

Analitički izvod Newtonove metode

Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}\,(x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n, tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem nultočke $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}\,(\alpha - x_n)^2.$$

Premještanjem, uz pretpostavku $f'(x_n) \neq 0$, izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2\,\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Analitički izvod Newtonove metode

Ako pretpostavimo da je aproksimacija x_n dovoljno blizu α,

- tj. da je $|\alpha - x_n|$ mali,
- onda očekujemo da je $(\alpha - x_n)^2$ još puno manji.

Zato možemo "zanemariti" zadnji član u relaciji

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Time dobivamo novu aproksimaciju x_{n+1}

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

s idejom da je $x_{n+1} \approx \alpha$.

Relacija za grešku Newtonove metode

Oduzimanjem odmah dobivamo i izraz koji veže greške dviju susjednih iteracija

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Iz ovog "izvoda" samo očekujemo da se greška "smanjuje", ali to tek treba dokazati, uz odgovarajuće pretpostavke!

Sasvim općenito, to ne mora vrijediti!

Čak i kad startamo u nekom intervalu $I = [a, b]$ koji sadrži nultočku α, bez dodatnih pretpostavki — nema garancije

- da aproksimacije ostaju u tom intervalu I,
- a kamo li da konvergiraju (v. primjere kasnije).

Napomene o konvergenciji Newtonove metode

Dakle, Newtonova metoda ne mora konvergirati prema nultočki!

S druge strane, dokazat ćemo da ovaj zaključak vrijedi

- kad je x_n dovoljno blizu α.

Takva konvergencija se obično naziva

- lokalna konvergencija metode.

Zaključke o konvergenciji metode (uz dovoljno jake pretpostavke) možemo podijeliti u tri grupe:

- brzina (lokalne) konvergencije — ako niz konvergira,
- lokalna konvergencija metode,
- globalna konvergencija metode na nekom intervalu I.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Brzina lokalne konvergencije izlazi direktno iz izraza za grešku u susjednim iteracijama.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α.

Ako niz aproksimacija x_n generiran Newtonovom metodom konvergira prema α,

- onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna,

i na limesu vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Brzina konvergencije Newtonove metode

Dokaz. Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α.

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α. Onda mora vrijediti i $\xi_n \to \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I, pa dobivamo

$$f'(x_n) \to f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \to f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Zato smijemo prijeći na limes $x_n \to \alpha$ u relaciji za grešku.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Prijelazom na limes $x_n \to \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Odavde čitamo da je Newtonova metoda, kad konvergira,

- (barem) kvadratno konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i brža od kvadratne!

Ipak, treba biti oprezan, jer takav zaključak vrijedi

- samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. α je jednostruka nultočka.

Za višestruke nultočke ovo ne vrijedi, jer

- konvergencija može biti i samo linearna (v. malo kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Sljedeći rezultat o konvergenciji Newtonove metode je

- lokalna konvergencija za jednostruke nultočke α,

uz pretpostavku da je funkcija $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α.

Neformalno rečeno, tvrdnja kaže sljedeće:

- ako je početna točka x_0 dovoljno blizu nultočke α,
- onda je Newtonova metoda

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

  dobro definirana — tj. vrijedi $f'(x_n) \neq 0$ za sve $n \geq 0$,
- i ovaj niz konvergira prema α, i to (barem) kvadratno.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Prava formulacija je malo složenija, jer precizno opisuje što znači “dovoljno blizu”.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α.

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$. Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \qquad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Ako je ε toliko mali da vrijedi

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

onda je, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Dokaz. Zato što je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$. To znači da na limesu $\varepsilon \to 0$ dobivamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty,$$

pa postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$, takav da je $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Po definiciji I_ε, za svaku točku $x \in I_\varepsilon$ vrijedi $|x - \alpha| \leq \varepsilon$. To čemo iskoristiti nekoliko puta!

1. korak. Pokažimo da je $f'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Iz Taylorovog razvoja prve derivacije f' oko α (ili teorema srednje vrijednosti za f'), dobivamo

$$f'(x) = f'(\alpha) + f''(\zeta)(x - \alpha)$$

za neki ζ između α i x, pa je i $\zeta \in I_\varepsilon$.

Zbog $f'(\alpha) \neq 0$, u ovoj relaciji možemo izlučiti $f'(\alpha)$, pa je

$$f'(x) = f'(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)}\,(x - \alpha)\right).$$

Prvi faktor je, očito, različit od nule.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi član u drugom faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} \, (x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} \, \varepsilon = 2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za cijeli drugi faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} \, (x - \alpha) > 0.$$

Zbog toga je i $f'(x) \neq 0$. Osim toga, vidimo da

- $f'(x)$ ima isti predznak kao i $f'(\alpha)$, za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Ovo je jedini dio dokaza u kojem koristimo $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

U nastavku dokaza, bit će dovoljno samo $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

2. korak. Pokažimo da je α jedina nultočka funkcije f u I_ε.

Upravo smo pokazali da je $f'(x) \neq 0$ na I_ε, pa je funkcija f monotona na I_ε, tj. može imati najviše jednu nultočku.

Dakle, α je jedina nultočka od f u I_ε.

Isti zaključak se može dobiti i direktno, kao u prošlom koraku.

Iz Taylorovog razvoja oko α, za bilo koji $x \in I_\varepsilon$, imamo

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\xi)}{2}\,(x-\alpha)^2,$$

za neki ξ između α i x, pa je i $\xi \in I_\varepsilon$.

Znamo da je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, pa opet izlučimo $f'(\alpha)$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dobivamo

$$f(x) = f'(\alpha)(x-\alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}\,(x-\alpha)\right).$$

Prvi faktor je, očito, različit od nule. Za drugi član u trećem faktoru imamo ocjenu

$$\left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}\,(x-\alpha)\right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}\,\varepsilon = \varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za treći faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}\,(x-\alpha) > 0.$$

Dakle, $f(x) = 0$ za neki $x \in I_\varepsilon$, ako i samo ako je drugi faktor jednak nuli, tj. za $x = \alpha$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Neka je $x_0 \in I_\varepsilon$ bilo koja startna točka. Onda je $f'(x_0) \neq 0$, pa je prvi korak Newtonove metode dobro definiran

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Kad je $n = 0$, relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_1 = -(\alpha - x_0)^2 \, \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)},$$

gdje je ξ_0 između x_0 i α, pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Zatim, imamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_1| &\leq |\alpha - x_0|^2 \, M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_0| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_0| \, \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pa je $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$, što dokazuje da je $x_1 \in I_\varepsilon$.

Dakle, ako startamo u bilo kojoj točki $x_0 \in I_\varepsilon$, onda

- sljedeća aproksimacija x_1 po Newtonovoj metodi, ostaje unutar segmenta I_ε.

Induktivnom primjenom ovog argumenta (x_0 je proizvoljan), dobivamo da isto vrijedi i za svaku sljedeću aproksimaciju x_n.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dakle, za svaki $n \geq 0$, u točki x_n vrijedi $f'(x_n) \neq 0$, pa je sljedeća aproksimacija dobro definirana relacijom

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0,$$

i ostaje unutar polaznog segmenta, tj. vrijedi $x_{n+1} \in I_\varepsilon$.

Preostaje još samo dokazati konvergenciju niza x_n prema α.

Relacija za greške dviju susjednih iteracija je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Slično kao u prvom koraku, dobivamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 \, M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) \, |\alpha - x_n| \\ &\leq \ldots (\text{induktivno spuštamo } n \text{ do nule}) \\ &\leq \big(\varepsilon M(\varepsilon)\big)^{n+1} \, |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog $\varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1$, odavde odmah slijedi da $x_n \to \alpha$ kad $n \to \infty$. ■

Lokacija i osiguranje konvergencije

U nekim situacijama možemo iskoristiti ovaj rezultat o lokalnoj konvergenciji za osiguranje konvergencije Newtonove metode.

Pretpostavimo da smo locirali nultočku funkcije f u segmentu $[a, b]$ i znamo da je $f \in C^2[a, b]$. Neka je "globalno"

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Pretpostavimo još da je

- f strogo monotona na $[a, b]$, što je ekvivalentno s $m_1 > 0$.

Tada f ima jedinstvenu jednostruku nultočku α u $[a, b]$.

Lokacija i osiguranje konvergencije

To znači da imamo sve osnovne pretpostavke prethodnog teorema o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode

- i još znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$.

Umjesto "lokalnog" $M(\varepsilon)$, izračunamo "globalnu" veličinu

$$M := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Sad možemo pokušati izabrati ε tako da vrijedi

- $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$, pa mora biti $M \geq M(\varepsilon)$,
- i da je $\varepsilon M < 1$.

Ne treba zahtijevati jači uvjet $2\varepsilon M < 1$, jer već znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$ (ostatak dokaza koristi samo slabiji uvjet).

Lokacija i osiguranje konvergencije

Na primjer, ako vrijedi

$$\frac{b-a}{2}\,M < 1,$$

onda možemo uzeti $\varepsilon = (b-a)/2$. Za startnu točku x_0 treba uzeti polovište intervala, $x_0 := (a+b)/2$. Onda je

$$|x_0 - \alpha| \leq \varepsilon = \frac{b-a}{2},$$

što znači $x_0 \in I_\varepsilon$, pa imamo sigurnu konvergenciju iteracija prema nultočki.

Ako vrijedi i jači uvjet

$$(b-a)M < 1,$$

onda bilo koja startna točka $x_0 \in [a,b]$ daje sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da sve iteracije x_n leže unutar intervala $[a, b]$. Onda možemo dobiti i ocjenu

- lokalne greške susjednih iteracija u Newtonovoj metodi,

u terminima veličina M_2 i m_1.

Iz ranije relacije za grešku

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \, \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} između nultočke α i x_{n-1}, odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} \, (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer nultočku α ne znamo. Tražimo ocjenu preko veličina koje znamo izračunati.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Za dvije susjedne iteracije x_{n-1} i x_n u Newtonovoj metodi, također, vrijedi veza preko Taylorove formule

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n.

Po definiciji iteracija u Newtonovoj metodi, vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Sad iskoristimo pretpostavku da je x_{n-1}, $x_n \in [a, b]$, pa onda mora biti i $\xi_{n-1} \in [a, b]$. Dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode bisekcije, ako je $m_1 > 0$, vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo ocjenu greške za svaku iteraciju x_n u Newtonovoj metodi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Ova ocjena se može iskoristiti. Ako je ε tražena točnost, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, do na greške zaokruživanja.

Pripadni test zaustavljanja iteracija u Newtonovoj metodi je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Naravno, uz ovaj, možemo koristiti i raniji test zaustavljanja

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

Veznik između ova dva testa je ili, tj. pitamo je li ispunjen jedan ili drugi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
- uz odgovarajući izbor startne točke x_0,

slično kao kod regule falsi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je $f \in C^2[a, b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako prva i druga derivacija f' i f'' nemaju nultočku u $[a, b]$, tj.

- ako f' i f'' imaju konstantan predznak na $[a, b]$,

onda Newtonova metoda konvergira prema

- jedinstvenoj jednostrukoj nultočki α funkcije f u $[a, b]$,

i to za svaku startnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo jedan od četiri moguća slučaja za predznake f' i f''.

U ostalim slučajevima, dokaz ide potpuno analogno.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Uzmimo, na primjer, da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

- f monotono rastuća i konveksna na $[a, b]$.

U tom slučaju, jer f raste, mora biti $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$.

Zbog $f'' > 0$, startna aproksimacija x_0

- mora zadovoljavati $f(x_0) > 0$, tj. $\alpha < x_0$, jer f raste.

U praksi možemo uzeti $x_0 = b$, jer je to jedina točka za koju sigurno znamo da vrijedi $f(x_0) > 0$.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz bilo koje startne točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Globalna konvergencija Newtonove metode

Za početak, znamo da je $x_0 > \alpha$. Tvrdimo da je

- $\alpha < x_n \leq x_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz ide indukcijom, a bazu već imamo.

Za korak indukcije, pretpostavimo da je $\alpha < x_n \leq x_0$. Onda je

$$f(x_n) > f(\alpha) = 0.$$

Osim toga, jer f raste, znamo da je $f'(x_n) > 0$, pa dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n \leq x_0,$$

što pokazuje da niz (x_n) monotono pada.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Iz Taylorove formule je

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je $\xi_n \in (\alpha, x_n) \subset [a, b]$. Zbog toga je $f''(\xi_n) > 0$, pa je

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Dakle, niz (x_n) je odozdo ograničen s α i monotono pada, pa postoji limes

$$\alpha' := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Odmah znamo i da je $\alpha \le \alpha' \le x_0$, tj. $\alpha' \in [a, b]$.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Prijelazom na limes u formuli za Newtonove iteracije dobivamo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

Zbog $f'(\alpha') \neq 0$, odavde odmah slijedi $f(\alpha') = 0$.

No, znamo da f ima

- jedinstvenu nultočku α u intervalu $[a, b]$,

pa mora biti $\alpha = \alpha'$.

Preostala tri slučaja za predznake prve i druge derivacije dokazuju se potpuno analogno. ■

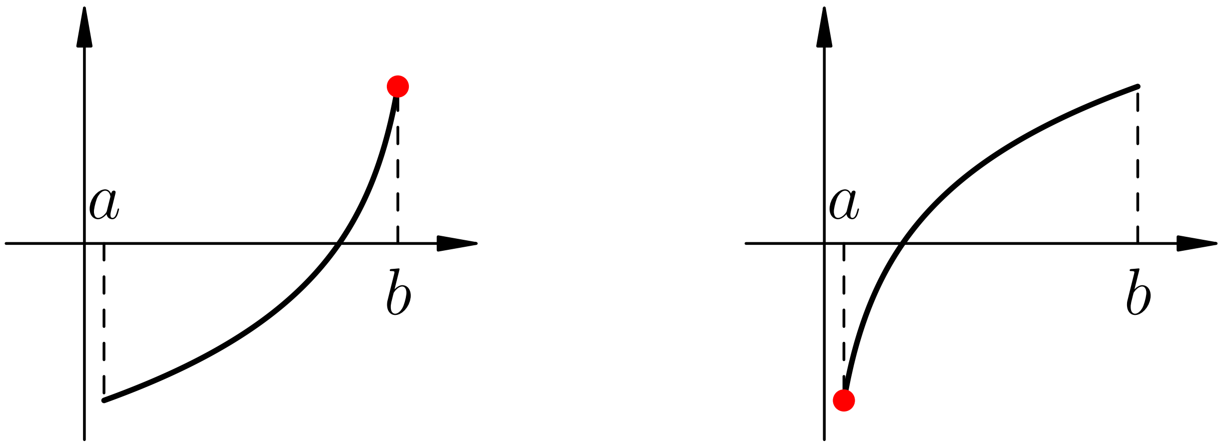
Uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ na izbor startne točke u prethodnom teoremu ima vrlo jednostavnu geometrijsku interpretaciju.

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

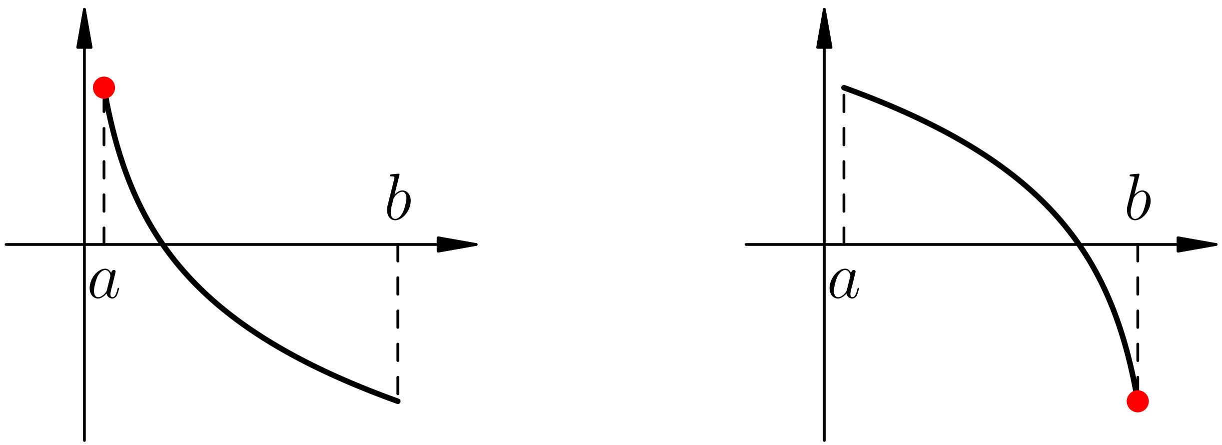
- treba odabrati na "strmijoj" strani grafa funkcije.

Izbor startne točke x_0 ako je $f' > 0$.



Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Izbor startne točke x_0 ako je $f' < 0$.



Newtonova metoda — komentari

Prednosti:

- brza = kvadratna konvergencija.

Potencijalna mana: osim vrijednosti funkcije,

- trebamo i vrijednost prve derivacije u svakoj točki.

Ako se f' komplicirano računa,

- Newtonova metoda može biti sporija od metode sekante,
- iako ima veći red konvergencije.

Metoda sekante

Uvodno o metodi sekante

U Newtonovoj metodi koristimo

- tangentu u točki x_0 kao aproksimaciju funkcije f.

Ako ne znamo derivaciju f' funkcije f, ili se ona teško računa, onda možemo

- tangentu aproksimirati sekantom kroz dvije startne točke x_0 i x_1.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Tako dobivamo metodu sekante.

Ideja metode sekante

Počinjemo s dvije početne točke x_0 i x_1.

Ideja metode sekante je

- povući sekantu grafa funkcije f kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$,

i definirati novu aproksimaciju x_2

- u točki gdje ta sekanta siječe os x.

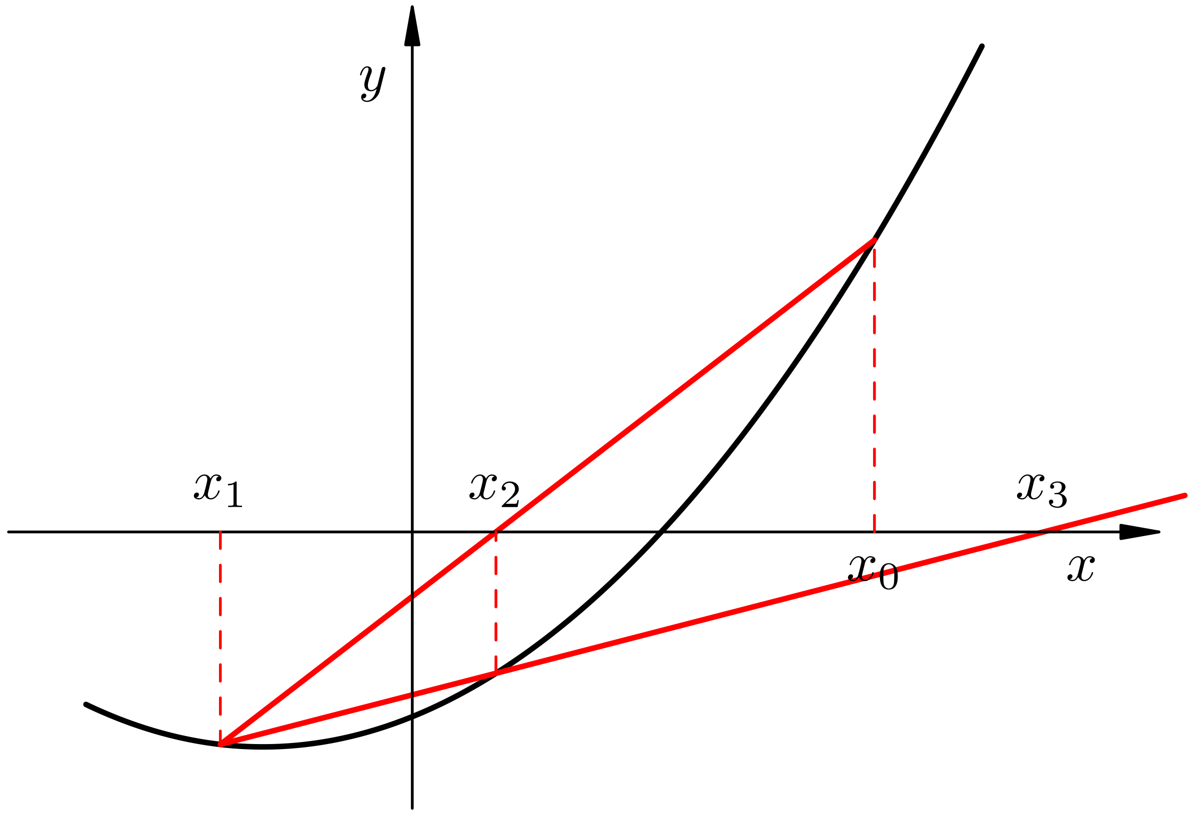
Postupak nastavljamo povlačenjem sekante

- kroz posljednje dvije točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$,

i tako redom.

Metoda sekante — grafički

Grafički, metoda sekante za nalaženje nultočke izgleda ovako



Primijetite da je treća iteracija izašla izvan početnog intervala, pa metoda sekante ne mora konvergirati.

Geometrijski izvod metode sekante

Geometrijski izvod metode je jednostavan.

- Napišemo jednadžbu sekante u točkama x_{n-1} i x_n i pogledamo gdje taj pravac siječe os x.

Jednadžba sekante je

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \, (x - x_n).$$

Iz zahtjeva $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je nova aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \, \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da je $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ u svim "susjednim" točkama x_{n-1} i x_n.

Formula za iteracije u metodi sekanti

Formulu za metodu sekante možemo dobiti i iteriranjem početne formule za regulu falsi.

Izraz za novu aproksimaciju možemo napisati i ovako

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]},$$

za $n \geq 1$.

Relacija koja "veže" greške susjednih aproksimacija izvodi se na isti način kao kod regule falsi i ima oblik

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)\,(\alpha - x_{n-1})\,\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

gdje je ζ_n između x_{n-1}, x_n i α, a ξ_n između x_{n-1} i x_n.

Red konvergencije metode sekante

Iz ove relacije može se izračunati red konvergencije metode sekante, uz odgovarajuće pretpostavke. Dobivamo

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

a izvod (dokaz) je dosta kompliciran.

Metoda jednostavne iteracije

Uvodno o metodi jednostavne iteracije

Pretpostavimo da tražimo α, rješenje jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Definiramo jednostavnu iteracijsku funkciju (iteracijsku funkciju koja "pamti" samo jednu prethodnu točku) s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

uz x_0 kao početnu aproksimaciju za α. Rješenja, tj. točke za koje je $x = \varphi(x)$, zovu se fiksne točke funkcije φ.

Newtonova metoda, također, pripada klasi jednostavnih iteracija, jer je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Reformulacija problema $f(x) = 0$

Uobičajeno, rješavamo $f(x) = 0$, pa taj problem treba reformulirati na problem jednostavne iteracije, za što postoji mnogo načina.

Primjer. Reformulirajmo problem

$$x^2 - a = 0, \quad a > 0$$

u oblik jednostavne iteracije. Na primjer, to možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = 0.5\,(x + a/x)$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Prirodno je pitanje kako se različite jednostavne iteracije ponašaju. Odgovor dobivamo nizom tvrdnji.

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a,b]$ i neka je

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a,b],$$

u oznaci $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$. Tada jednostavna iteracija $x = \varphi(x)$ ima bar jedno rješenje na $[a,b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $\varphi(x) - x$ na $[a,b]$ vrijedi

$$\varphi(a) - a \geq 0, \quad \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $\varphi(x) - x$ je promijenila predznak na $[a,b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku (neprekidna je!). $\blacksquare$

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Nadalje, pretpostavimo da postoji konstanta q, $0 < q < 1$, takva da vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Tada $x = \varphi(x)$ ima jedinstveno rješenje α unutar $[a, b]$. Također, niz iteracija

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \geq 1$$

konvergira prema α za proizvoljni $x_0 \in [a, b]$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, postoji bar jedno rješenje $\alpha \in [a, b]$. Pokažimo da ne postoji više od jednog rješenja.

Pretpostavimo suprotno, tj. postoje barem dva rješenja. Uzmimo bilo koja dva od tih rješenja i nazovimo ih α i β. Budući da su to rješenja, vrijedi

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta.$$

Po pretpostavci o postojanju konstante q, dobivamo

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

ili drugim riječima

$$(1 - q)\,|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Budući da je $1 - q > 0$, mora biti $\alpha = \beta$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokažimo još konvergenciju jednostavnih iteracija za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$. Uočimo da $x_{n-1} \in [a, b]$ povlači da je $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a, b]$. Nadalje, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}|,$$

odnosno indukcijom po n dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq q^n|\alpha - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Ako pustimo $n \to \infty$, onda $q^n \to 0$, pa vrijedi $x_n \to \alpha$. ■

Primijetimo da posljednja formula znači da jednostavna iteracija konvergira linearno s faktorom q.

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Ako je φ derivabilna na $[a, b]$, onda je po teoremu srednje vrijednosti

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y), \quad \xi \text{ između } x \text{ i } y$$

za sve $x, y \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|,$$

onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x \in [a, b].$$

Primijetite q može biti veći od 1!

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a,b]$ takva da je $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$ i neka je

$$q := M_1 = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1.$$

Tada vrijedi:

1. $x = \varphi(x)$ ima točno jedno rješenje $\alpha \in [a,b]$,
2. za proizvoljni $x_0 \in [a,b]$ i jednostavnu iteraciju $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,$$

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \varphi'(\alpha).$$

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Dokaz. Sve tvrdnje teorema su dokazane u prethodne dvije leme, osim tvrdnje o brzini konvergencije.

Po teoremu srednje vrijednosti imamo

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \geq 0,$$

gdje je ξ_n neki broj između α i x_n. Budući da $x_n \to \alpha$, onda i $\xi_n \to \alpha$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(\alpha).$$

■

Bitna pretpostavka

Pretpostavka $q < 1$ u prethodnom teoremu je značajna.

Pretpostavimo da je $|\varphi'(\alpha)| > 1$. Tada, ako imamo niz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ i rješenje $\alpha = \varphi(\alpha)$, vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n).$$

Za x_n dovoljno blizu α je $|\varphi'(\xi_n)| > 1$, pa je

$$|\alpha - x_{n+1}| \geq |\alpha - x_n|$$

i konvergencija metode nije moguća.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Uz uvjete iz prethodnog teorema, lako se izvodi ocjena greške za metodu jednostavne iteracije.

Za dvije susjedne iteracije $x_n = \varphi(x_{n-1})$ i $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$ vrijedi

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \\ &= |\varphi'(\xi_{n-1})| \, |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|, \end{aligned}$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-2} i x_{n-1}. Prethodnu relaciju možemo raspisati kao

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Sada promatrajmo ponašanje sljedećeg niza

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq q^p |x_n - x_{n-1}| + \cdots + q|x_n - x_{n-1}| \\
&= q(q^{p-1} + \cdots + 1)|x_n - x_{n-1}| \\
&= q\frac{1-q^p}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = (\text{vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\
&\leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.
\end{aligned}$$

Na limesu za $p \to \infty$ vrijedi $x_{n+p} \to \alpha$,

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

tj. niz je Cauchyjev i vrijedi sljedeća ocjena pogreške

$$
\begin{aligned}
|\alpha - x_n| &\le \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \\
&= (\text{iskoristimo ocjenu za } |x_n - x_{n-1}| \text{ preko } |x_1 - x_0|) \\
&\le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.
\end{aligned}
$$

Ako želimo da je $|\alpha - x_n| \le \varepsilon$, dovoljno je staviti da je desna strana prethodne nejednakosti manja ili jednaka ε.

Za desnu stranu možemo uzeti

$$
\frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon,
$$

pa ćemo dobiti, ...

Kriteriji zaustavljanja

dinamički kriterij za zaustavljanje procesa

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{q}.$$

Ako želimo unaprijed znati broj iteracija, treba zahtijevati

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon,$$

pa dobivamo

$$n \geq \frac{\log \dfrac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon + \log(1-q) - \log |x_1 - x_0|}{\log q}.$$

Kriteriji zaustavljanja

Kriterij zaustavljanja možemo napisati i ovisno o "rubovima" intervala a i b. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
|x_1 - \alpha| &= |\varphi(x_0) - \varphi(\alpha)| \leq q|x_0 - \alpha| \\
|x_2 - \alpha| &= |\varphi(x_1) - \varphi(\alpha)| \leq q|x_1 - \alpha| \leq q^2|x_0 - \alpha| \\
&\vdots \\
|x_n - \alpha| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\alpha)| \leq \cdots \leq q^n|x_0 - \alpha|.
\end{aligned}
$$

Budući da je $|x_0 - \alpha| \leq |b - a|$, dobivamo $|x_n - \alpha| \leq q^n|b - a|$, odakle slijedi još jedan statički kriterij zaustavljanja

$$
n \geq \frac{\log \dfrac{\varepsilon}{|b-a|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon - \log |b-a|}{\log q}.
$$

Pojednostavljeni teorem

Teorem o konvergenciji možemo napisati i malo drugačije.

Teorem. Neka je α rješenje jednostavne iteracije $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α i neka je $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Tada vrijede svi rezultati prethodnog teorema, uz pretpostavku da je x_0 dovoljno blizu α.

Dokaz. Uzmimo $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ takav da je

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$, jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)||\alpha - x| \leq q|\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. ■

Primjer iteracijskih funkcija

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, $a > 0$ definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = 0.5\,(x + a/x)$.

Ispitajte konvergenciju tih triju iteracijskih funkcija.

1. Ako je $\varphi(x) = x^2 + x - a$, onda je $\varphi'(x) = 2x + 1$ i u nultočki $\alpha = \sqrt{a}$ je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

pa ta iteracijska funkcija neće konvergirati.

Primjer iteracijskih funkcija

U općenitijem je slučaju $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je $\varphi'(x) = 1 + 2cx$ i

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$

Da bismo osigurali konvergenciju, mora biti

$$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1,$$

odnosno

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

Primjer iteracijskih funkcija

2. Ako je $\varphi(x) = a/x$, onda je $\varphi'(x) = -a/x^2$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

što znači da iteracijska funkcija neće konvergirati.

3. Ako je $\varphi(x) = 0.5\,(x + a/x)$, onda je $\varphi'(x) = 0.5\,(1 - a/x^2)$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0,$$

što znači da iteracijska funkcija konvergira u okolini nultočke $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je Newtonova metoda za $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još Babilonci.

Iterativne metode viših redova

Jednostavne iteracijske funkcije mogu se koristiti za konstrukciju iterativnih metoda proizvoljno visokog reda p.

Teorem. Neka je α rješenje od $x = \varphi(x)$ i neka je φ p puta neprekidno diferencijabilna za sve x u okolini α, za neki $p \geq 2$. Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna vrijednost x_0 dovoljno blizu α, iteracijska funkcija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0$$

imat će red konvergencije p i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Iterativne metode viših redova

Dokaz. Razvijmo φ u okolini α u Taylorov polinom do uključivo $(p-1)$-ve potencije i napišimo ostatak. Zatim uvrstimo $x = x_n$, pa dobivamo

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,$$

za neki ξ_n između x_n i α. Iskoristimo li da je $\varphi(\alpha) = \alpha$ i pretpostavku da su sve derivacije funkcije $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$ za $k = 1, \ldots, p-1$, slijedi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,$$

Iterativne metode viših redova

odnosno

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}\,(x_n - \alpha)^p.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem, koji pokazuje da će iteracijska funkcija konvergirati u okolini α.

Nadalje, to znači da $x_n \to \alpha$, pa i $\xi_n \to \alpha$, što dijeljenjem, pa uzimanjem limesa daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}. \quad \blacksquare$$

Analiza Newtonove metode

Korištenjem prethodnog teorema možemo analizirati i Newtonovu metodu za koju je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem dobivamo da je

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

uz pretpostavku da je $f'(\alpha) \neq 0$, (tj. nultočka je jednostruka).

Analiza Newtonove metode

Na sličan način, dobivamo

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

pa ako je $f''(\alpha) \neq 0$, možemo pokazati da je red konvergencije Newtonove metode jednak 2. Ako je $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) = 0$, onda će red konvergencije biti barem 3.

Newtonova metoda za višestruke nultočke

Konvergencija za višestruku nultočku

Promotrimo što će se dogoditi s konvergencijom Newtonove metode, ako funkcija f ima neprekidnih prvih $p+1$ derivacija i p-struku, $p \geq 2$ nultočku u α. Tvrdimo da tada vrijedi

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Dovoljno je pokazati da derivacija funkcije f, koja ima p-struku nultočku u α, ima $(p-1)$-struku nultočku u α. Tada gornji zaključak slijedi matematičkom indukcijom po p.

Napišimo f u obliku

$$f(x) = (x-\alpha)^p\, h(x), \quad h(\alpha) \neq 0.$$

Konvergencija za višestruku nultočku

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x-\alpha)^{p-1}h(x) + (x-\alpha)^p h'(x) \\ &= (x-\alpha)^{p-1}\big(ph(x) + (x-\alpha)h'(x)\big) := (x-\alpha)^{p-1}k(x), \end{aligned}$$

s tim da je

$$k(\alpha) = ph(\alpha) + (\alpha-\alpha)h'(\alpha) = ph(\alpha) \neq 0,$$

što pokazuje da f' ima $(p-1)$-struku nultočku u α.

Ograničimo se samo na cjelobrojne p i promatrajmo Newtonovu metodu kao jednostavnu iteraciju,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Konvergencija za višestruku nultočku

Uvrstimo li pretpostavku o obliku funkcije f i njezine derivacije f', imamo

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}.$$

Deriviranjem funkcije φ dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = 1 &- \frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)} \\ &- (x-\alpha)\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}\right),\end{aligned}$$

tako da je $\varphi'(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{p} \neq 0$ za $p > 1$, što pokazuje linearnu konvergenciju.

Konvergencija za višestruku nultočku

Prema već dokazanom teoremu, faktor konvergencije bit će $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/p$, što je vrlo sporo. U prosjeku to je podjednako brzo kao bisekcija za $p = 2$ ili čak lošije od bisekcije za $p \geq 3$.

Newtonovu metodu možemo popraviti na dva načina

- ako točno znamo red nultočke,
- ako ne znamo red nultočke.

Želimo popraviti Newtonovu metodu za p-struku nultočku, $p \geq 2$, ako znamo p. Definiramo iteracijsku funkciju

$$\varphi(x) = x - p\,\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Tada je

$$\varphi'(x) = 1 - p\,\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - p + p\,\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Iskoristimo li oblik funkcije f, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^p h(x) \\ f'(x) &= (x-\alpha)^{p-1}[ph(x) + (x-\alpha)h'(x)] \\ f''(x) &= (x-\alpha)^{p-2}[p(p-1)h(x) \\ &\qquad + 2p(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h''(x)], \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Odatle odmah slijedi

$$\lim_{x \to \alpha} \varphi'(x) = 0,$$

što pokazuje da ova modifikacija osigurava barem kvadratno konvergentnu metodu.

Što ćemo napraviti ako unaprijed ne znamo p? Primijetimo da funkcija

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\alpha)^p h(x)}{(x-\alpha)^{p-1}[ph(x) + (x-\alpha)h'(x)]}$$
$$= \frac{(x-\alpha)h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}$$

ima jednostruku nultočku u α.

Newtonova metoda kad ne znamo red nultočke

Drugim riječima, obična Newtonova metoda, ali primijenjena na $u(x)$ konvergirat će kvadratno,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)}\, u(x),$$

što pokazuje da ćemo dobiti kvadratnu konvergenciju, iako ne znamo red nultočke, ali uz računanje još jedne derivacije funkcije (f'').

Metoda sekante kad ne znamo red nultočke

Slično vrijedi i za metodu sekante, koju ćemo ubrzati, kao da radimo s jednostrukim nultočkama, ako primijenimo metodu sekante za funkciju u

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

I u ovom slučaju postoji "cijena", a to je računanje f'.

Primjeri za nultočke

Numerički red konvergencije

U praksi se može sasvim dobro numerički procijeniti red konvergencije iterativne metode.

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ koji konvergira prema nultočki α je eksponent p, $p \geq 1$ za koji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0,$$

gdje je x_n niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke.

Ovako dobiveni p i c su "teorijske" vrijednosti koje vrijede asimptotski — na limesu $n \to \infty$.

Numerički red konvergencije

Definicijsku relaciju ne možemo direktno iskoristiti za računanje p i c, jer ne znamo α.

Ako smo dovoljno blizu nultočke α onda limes možemo "zaboraviti", pa je

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

za dovoljno velike k.

Nadalje, ako smo dovoljno blizu nultočke, onda možemo uzeti da je $\alpha \approx x_n$, a $k = n-1, n-2$, pa vrijedi i

$$|x_n - x_{n-1}| = c_n|x_n - x_{n-2}|^{p_n},$$

$$|x_n - x_{n-2}| = c_n|x_n - x_{n-3}|^{p_n},$$

s tim da očekujemo da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$ za dovoljno velike n.

Numerički red konvergencije

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|} \right)^{p_n},$$

pa logaritmiranjem izlazi

$$p_n = \frac{\log |x_n - x_{n-1}| - \log |x_n - x_{n-2}|}{\log |x_n - x_{n-2}| - \log |x_n - x_{n-3}|}.$$

Nakon toga, c_n možemo dobiti iz prve relacije kao

$$c_n = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|^{p_n}}.$$

Jednostavni primjer

Primjer. Za uspoređivanje metoda za nalaženje nultočaka, izračunajmo $\sqrt[3]{1.5}$. Problem možemo interpretirati kao traženje realne, pozitivne nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Nije teško locirati nultočku $\alpha \in [1, 2]$. Iz neprekidnosti funkcije f i

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0,$$

znamo da sigurno postoji nultočka $\alpha \in [1, 2]$. To je i jedina nultočka funkcije f, jer f strogo raste na $\langle -\infty, 0\rangle$ (gdje je svagdje manja od 0) i na $\langle 0, \infty\rangle$.

Svo računanje je provedeno u preciznosti `extended`.

Metoda bisekcije

Pokažimo kako se ponaša metoda bisekcije ako je $[a, b] = [1, 2]$, a tražena točnost je

- $\varepsilon = 10^{-8}$,
- $\varepsilon = 10^{-18}$.

Na sljedeće dvije folije sa z je označena veličina

$$z := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

Primijetite da pogrešno očitan predznak od z (umjesto < 0 očitan > 0 ili obratno)

- možemo detektirati samo gledanjem $f(x_n)$ — uglavnom $f(x_n) \not\to 0$,
- ali i dalje ne znamo točno mjesto gdje smo pogriješili.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a	b	x	$f(x)$	z
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	−0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	−0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	−0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	−0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a	b	x	$f(x)$	z
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	−0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	−0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	−0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	−0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	−0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	−0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	−0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	−0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	−0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	−0.000000010	

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-18}$

Izračunata rješenja su (ispisane sve znamenke):

- za točnost 10^{-8} rješenje je $x_{27} = 1.1447142399847507 5$,
- za točnost 10^{-18} rješenje je $x_{50} = 1.144714242553332 1$.

Na prethodne dvije folije:

- vidi se spora konvergencija metode (broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, linearno povećava),
- ponegdje, kao u x_{13} dolazi do čudnog povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$.

  Objašnjenje: slučajno smo u raspolavljanju stigli blizu nultočke iako je duljina intervala još uvijek prevelika.

Uočite broj iteracija potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Nije teško pokazati da će Newtonova metoda na $[1, 2]$ sigurno konvergirati ako krenemo sa strmijeg ruba (to je 2), jer su f' i f'' fiksnog znaka na $[1, 2]$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.00000000000000	6.50000000000000	0.54166666666667
1	1.45833333333333	1.60149016203704	0.25100907029478
2	1.20732426303855	0.25983433061998	0.05941928477199
3	1.14790497826656	0.01257813452771	0.00318187490882
4	1.14472310335774	0.00003483308497	0.00000886073582
5	1.14471424262192	0.00000000026963	0.00000000006859
6	1.14471424255333	0.00000000000000	0.00000000000000
7	1.14471424255333	0.00000000000000	

Nultočka ispisana na sve izračunate znamenke je
$x_7 = 1.1447142425533187$.

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li korekcije napisane u znanstvenoj notaciji, vidimo područje kvadratne konvergencije, gdje se broj točnih znamenki u svakom koraku udvostručava.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.2073242630385487	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.1479049782665624	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.1447231033577387	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.1447142426219193	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i bez znanstvene notacije — pogledajte kako se povećava broj vodećih nula u korekciji.

Newtonova m., numerički red konvergencije

Prema formuli s početka ovog dijela folija, možemo izračunati i numerički red konvergencije za Newtonovu metodu.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.4583333333333333	—	—
2	1.20732426303854875	—	—
3	1.14790497826656245	1.63738	4.03440E−01
4	1.14472310335773870	1.84894	5.34225E−01
5	1.14471424262191933	1.97750	7.64767E−01
6	1.14471424255333187	1.99937	8.67206E−01
7	1.14471424255333187	—	—

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu sekante potrebne su dvije stratne točke i to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$, a izračunata nultočka x_{10} ima sve znamenke jednake aproksimaciji x_7 izračunatoj Newtonovom metodom.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	
1	1.500000000000000	1.875000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

M. sekante, numerički red konvergencije

Red konvergencije metode sekante je $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.6180$, a numerički red konvergencije ga dobro aproksimira.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.5000000000000000	—	—
2	1.2972972972972973	—	—
3	1.1810642065045196	1.07039	3.94966E−01
4	1.1490731618947491	1.77904	9.54986E−01
5	1.1448494396862039	1.49493	6.02649E−01
6	1.1447147560212947	1.63923	9.97717E−01
7	1.1447142426139705	1.60467	8.29830E−01
8	1.1447142425533319	1.62274	9.74858E−01
9	1.1447142425533318	1.61618	8.86501E−01
10	1.1447142425533318	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer. Nultočka funkcije

$$f(x) = \mathrm{arctg}(x)$$

je $x = 0$, ali Newtonova metoda neće konvergirati iz svake startne točke x_0.

- Sigurnu konvergenciju ne možemo osigurati jer f'' mijenja znak baš u nultočki.

Naći ćemo točku β za koju vrijedi

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| & \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| & \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| & \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ ciklira.} \end{cases}$$

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Kako ćemo naći točku "cikliranja"? Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je neparna, pa je dovoljno je da

- tangenta na f u točki β presiječe os x u točki $-\beta$.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \operatorname{arctg} \beta = \frac{1}{1+\beta^2}(x - \beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$, ako je

$$\operatorname{arctg} \beta = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

čime smo dobili nelinearnu jednadžbu po β.

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka, i možemo ih izračunati metodom bisekcije

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

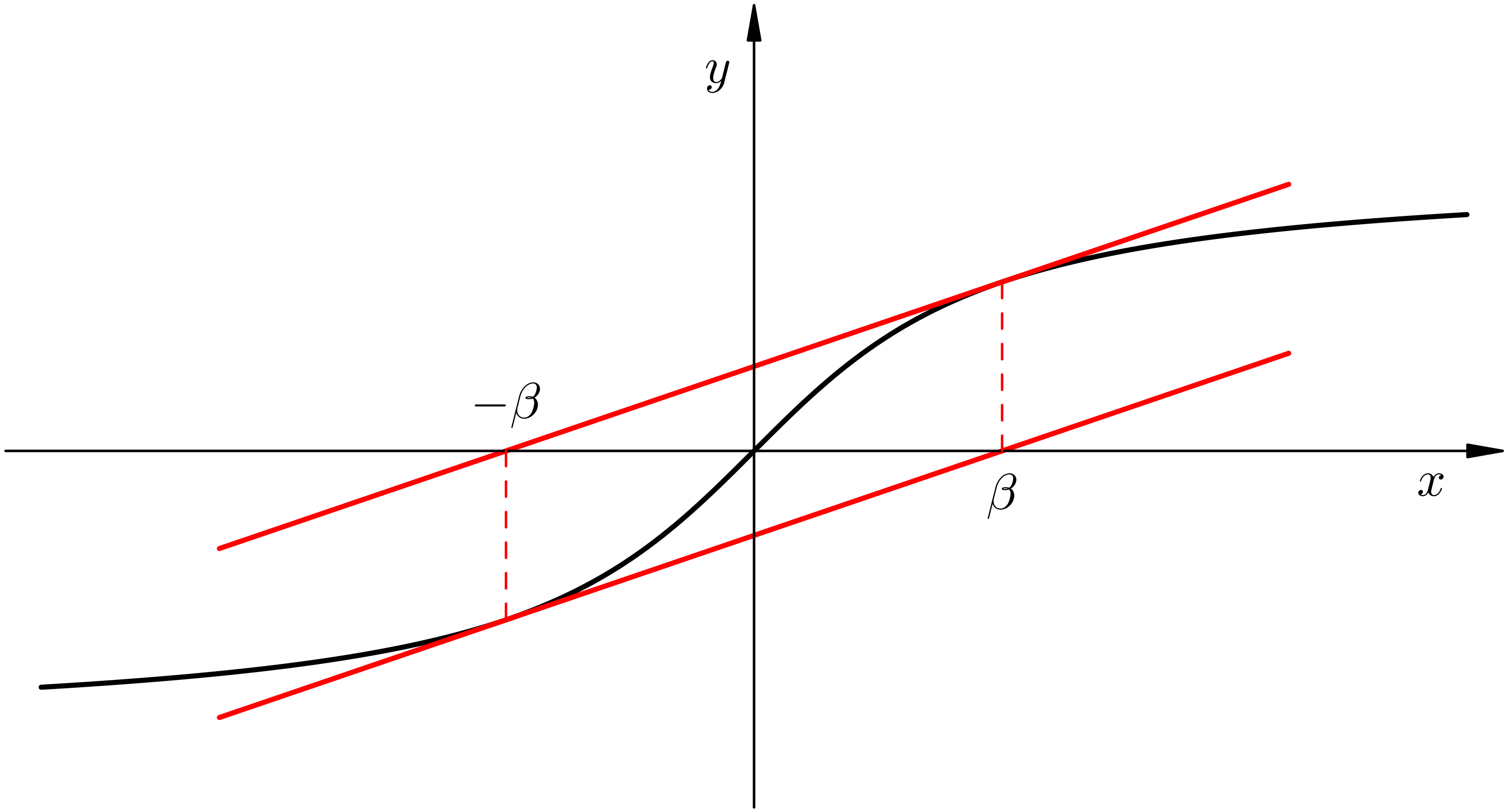
Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako je startna točka

$$x_0 = \beta, \quad 1, \quad 1.5,$$

a zaustavljamo se ili ako postignemo točnost 10^{-10} ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode

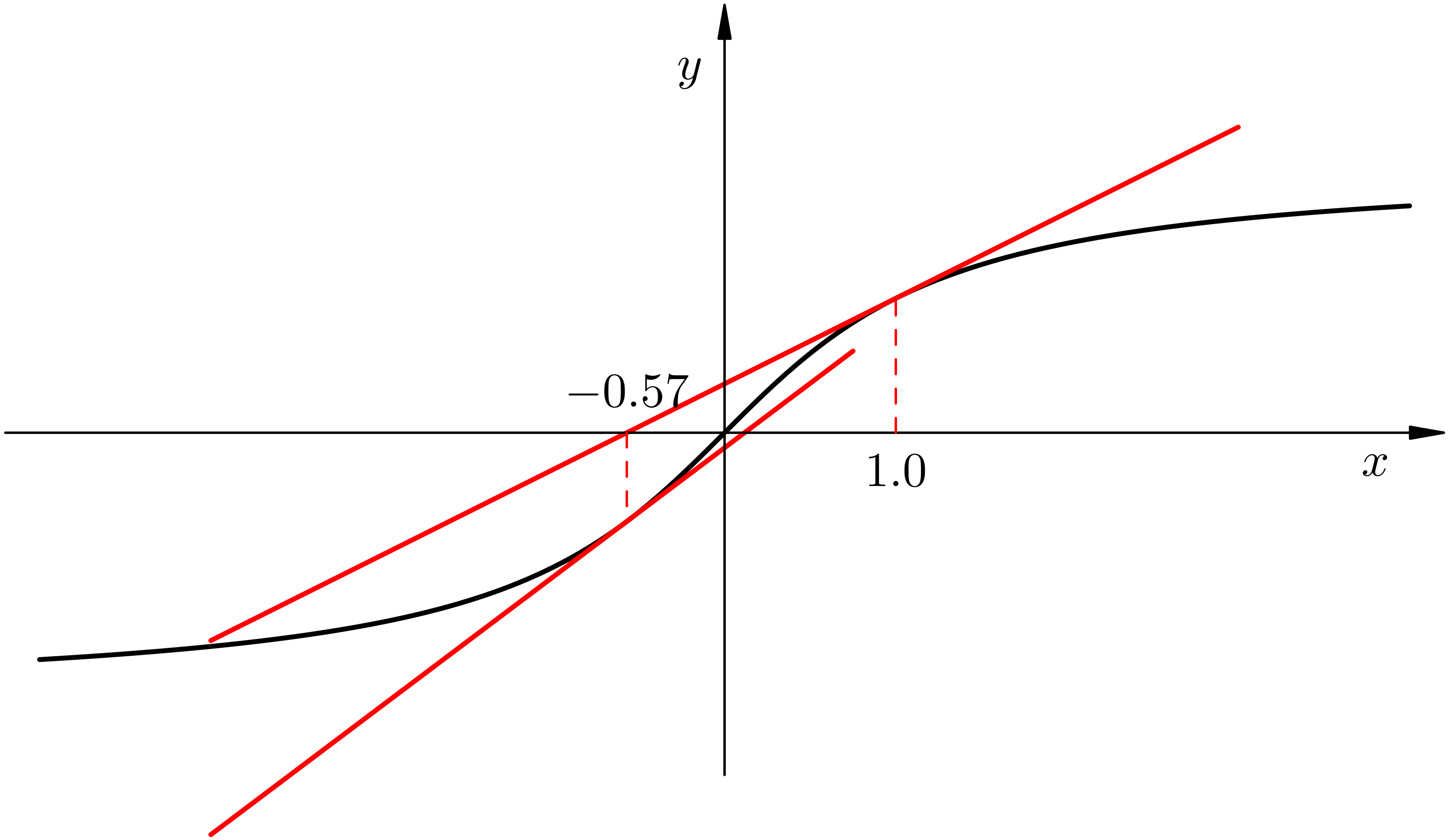
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	−1.391745200270735	−0.947747133516990	−2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	−1.391745200270734	−0.947747133516990	−2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	−1.391745200270732	−0.947747133516989	−2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	−1.391745200270713	−0.947747133516983	−2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	−1.391745200270584	−0.947747133516939	−2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



Primjer konvergencije Newtonove metode

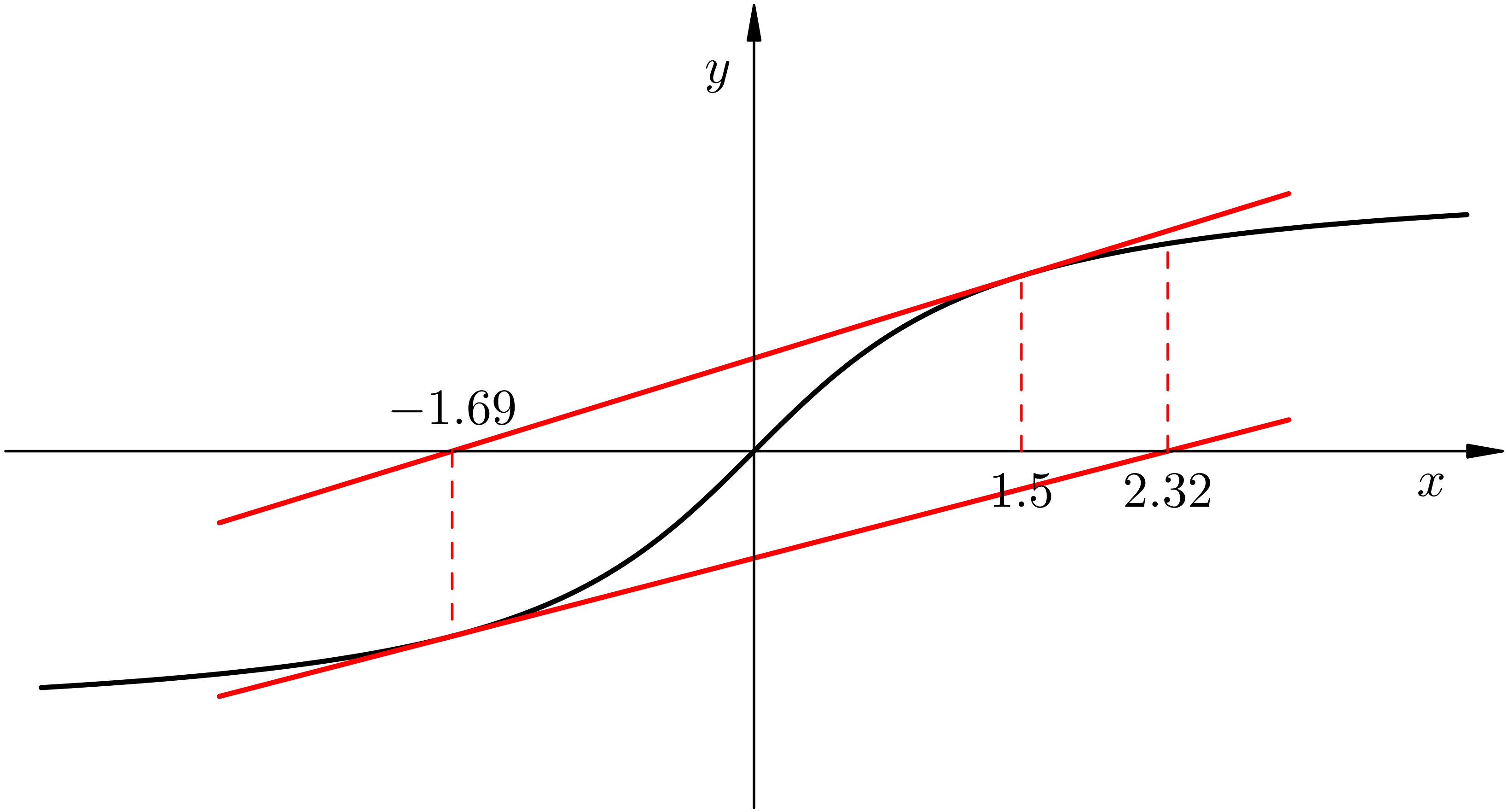
Točnost se postiže nakon 6 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	−0.570796326794897	−0.518669369255017	−0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	−0.001061022117045	−0.001061021718890	−0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	−0.000000000000000	−0.000000000000000	−0.000000000000000
6	0.000000000000000	−0.000000000000000	

Metoda kvadratno konvergira, ali ne konvergira monotono prema nultočki.

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Primjer divergencije Newtonove metode

Metoda divergira, ali $f(x)$ konvergira prema $\pm\frac{\pi}{2}$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	−1.6940796006E+000	−1.0375463591379	−4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	−5.1140878368E+000	−1.3776945287028	−3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	−1.5753169508E+003	−1.5701615339901	−3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	−2.3830288974E+013	−1.5707963267949	−8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	−1.2499045994E+054	−1.5707963267949	−2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u $x = 1.23$.

Pokažimo redom ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku, stavljeno $p = 2$ kao faktor za korekciju,
- obične Newtonove metode, za funkciju $u = f/f'$.

Tražena točnost je $\varepsilon = 10^{-15}$.

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

Pažljivo promatrajte kako se ponaša korekcija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	−0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	−0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	−0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	−0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	−0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	−0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	−0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	−0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	−0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	−0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	−0.000000023314476	0.000055832614098

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x	$f(x)$	korekcija
12	1.230055829280006	−0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	−0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	−0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	−0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	−0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	−0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	−0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	−0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	−0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	−0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	−0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	−0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	−0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	−0.000000000000000	0.000000003389306

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x	$f(x)$	korekcija
26	1.230000003419030	−0.000000000000000	0.000000001729681
27	1.230000001689349	−0.000000000000000	0.000000000823684
28	1.230000000865665	−0.000000000000000	0.000000000401855
29	1.230000000463810	0.000000000000000	−0.000000000000000
30	1.230000000463810	0.000000000000000	

Korekcija sporije teži u nulu nego $f(x)$, jer je

- funkcijska vrijednost za višestruke nultočke relativno mala čak i kad smo daleko od nultočke, tj.
- graf funkcije s višestrukom nultočkom se u okolini nultočke bolje "priljubi" uz os x nego graf funkcije koja ima jednostruku nultočku.

Modificirana Newtonova metoda, $p = 2$

Metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	−0.001173009833879	−0.024718265674538
2	1.229837719599453	−0.000000049250590	−0.000162273360038
3	1.229999992959491	−0.000000000000000	−0.000000007049176
4	1.230000000008667	0.000000000000000	−0.000000026758865
5	1.230000026767532	−0.000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.229999999995655	0.000000000000000	

Da smo pogriješili p dobili bismo linearnu konvergenciju!

- Isto se događa ako pogriješite derivaciju, a tražite jednostruku nultočku.

Newtonova metoda za funkciju u

Metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju prema jednostrukoj nultočki funkcije $u = f/f'$.

Cijena:

- računanje vrijednosti druge derivacije funkcije f.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.500000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	

Primjeri metoda višeg reda konvergencije

Uvodno o primjerima

Dosad smo promatrali samo metode do reda konvergencije 2 za jednostruke nultočke. Mogu li se napisati i koristiti metode višeg reda?

Navest ćemo (samo kao ilustraciju) neke primjere metoda višeg reda i pokazati kako one rade za jednostavni primjer nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5,$$

na intervalu $[1, 2]$, uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-18}$.

Korigirane Newtonove metode

Neka je f funkcija koja je u okolini nultočke α

- različita of nula i
- njezina derivacija $f^{(p)}$ je neprekidna na toj okolini.

Tada postoji inverzna funkcija $\mathcal{F} := f^{-1}$ funkcije f i njezina p-ta derivacija je neprekidna u okolini nultočke.

Razvijemo li funkciju $\mathcal{F}$ u Taylorov polinom do člana s $(p-1)$-vom derivacijom u okolini $y = f(x)$,

$$E_p(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(y)}{n!}(t-y)^n,$$

te stavimo $t = 0$, dobivamo metodu p-tog reda.

Korigirane Newtonove metode

Uz malo truda oko deriviranja inverznih funkcija,

$$E_p = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(f(x))}{n!} (-f(x))^n$$

definira metodu $x_{n+1} = E_p(x_n)$, a za male p, dobivamo iteracijske funkcije ($\varphi := E_p$)

$E_2(x) = x - u,$ (obična Newtonova m.)

$E_3(x) = E_2 - A_2 u^2,$ (korigirana Newtonova m. E_3)

$E_4(x) = E_3 - (2A_2^2 - A_3)u^3,$ (korigirana Newtonova m. E_4).

pri čemu je

$$u = \frac{f}{f'}, \quad A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n)}}{f'}.$$

E_3 ***metoda, točnost*** $\varepsilon = 10^{-18}$

Startna točka je $x_0 = 2$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.688368055555556
1	1.311631944444444	0.756503210473290	0.162957102798705
2	1.148674841645739	0.015623490256523	0.003960520886559
3	1.144714320759180	0.000000307435976	0.000000078205848
4	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_5 = 1.1447142425533319$.

E_3 metoda, kubna konvergencija

Ispišemo li rezultat u znanstvenoj notaciji, vidimo da se broj točnih znamenki približno utrostručuje.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	6.88368055556E−01
1	1.3116319444444444	7.56503210473E−01	1.62957102799E−01
2	1.1486748416457390 3	1.56234902565E−02	3.96052088656E−03
3	1.1447143207591800 1	3.07435976264E−07	7.82058481467E−08
4	1.1447142425533318 7	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
5	1.1447142425533318 7	1.08420217249E−19	

E_3 m., numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije pokazuje da je metoda zaista kubno konvergentna.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.3116319444444444	—	—
2	1.14867484164573903	—	—
3	1.14471432075918001	2.28964	2.38750E−01
4	1.14471424255333187	2.89555	7.06390E−01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz Taylorovih polinoma

Funkciju f možemo aproksimirati njezinim Taylorovim polinomom stupnja s u okolini točke x.

Izjednačimo li s nulom polinom stupnja 1, dobili smo običnu Newtonovu metodu, a izjednačimo li polinom stupnja 2,

$$0 = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)(t - x)$$

i riješimo po t, dobivamo iteracijsku funkciju φ za Laguerreovu metodu, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, pri čemu je

$$\varphi(x) = x - \frac{2u}{1 \pm (1 - 4A_2 u)^{1/2}}, \qquad (\text{kraćenje} \Longrightarrow + \text{ znak})$$

Za metode viših redova moraju se rješavati polinomne jednadžbe sve viših stupnjeva.

Laguerreova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za početnu točku uzimamo $x_0 = 1$, jer za $x_0 = 2$ drugi korijen koji javlja u metodi ne daje realan broj.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.000000000000000	−0.500000000000000	−0.145497224367903
1	1.145497224367903	0.003080095095887	0.000782981936678
2	1.144714242431225	−0.000000000480015	−0.000000000122107
3	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
4	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_4 = 1.1447142425533187$.

Laguerreova metoda, kubna konvergencija

Ponovno korekcija pokazuje da se broj točnih znamenki približno utrostručava.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.0000000000000000	−5.00000000000E−01	−1.45497224368E−01
1	1.1454972243679028	3.08009509589E−03	7.82981936678E−04
2	1.1447142424312250	−4.80015464226E−10	−1.22106786356E−10
3	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
4	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Laguerreova m., numerički red konvergencije

Kao što i očekujeno, numerički red konvergencije je 3.

n	x	p_n	c_n
0	1.00000000000000000	—	—
1	1.14549722436790281	—	—
2	1.14471424243122508	—	—
3	1.14471424255333187	3.00297	2.59843E−01
4	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Razvijemo li funkciju $1/f$ u Taylorov polinom, dobivamo metode za nalaženje nultočaka funkcija.

Na primjer, iteracijska funkcija za Halleyevu metodu je

$$\varphi(x) = x - \frac{u}{1 - A_2 u},$$

i to je metoda s kubnom konvergencijom.

Halleyeva metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Ponovno startamo iz $x_0 = 2$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.742857142857143
1	1.257142857142857	0.486798833819242	0.111805016364194
2	1.145337840778664	0.002452770217608	0.000623598102057
3	1.144714242676607	0.000000000484607	0.000000000123275
4	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
$x_5 = 1.1447142425533187$.

Halleyeva metoda, kubna konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa uočavamo numerički kubnu konvergenciju.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E−00	7.42857142857E−01
1	1.2571428571428571	4.86798833819E−01	1.11805016364E−01
2	1.1453378407786635	2.45277021761E−03	6.23598102057E−04
3	1.1447142426766066	4.84607030069E−10	1.23274793178E−10
4	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
5	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Halleyeva m., numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije Halleyeve metode.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.25714285714285714	—	—
2	1.14533784077866351	—	—
3	1.14471424267660666	2.56001	1.67754E−01
4	1.14471424255333187	2.97168	4.12474E−01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode s pamćenjem

Metode s pamćenjem imaju barem dvije startne točke. Takva je, na primjer, metoda sekante.

I za metode s pamćenjem možemo konstruirati metode višeg reda. Na primjer, metoda ${}^*E_{1,2}$ definirana iteracijskom funkcijom

$$ {}^*E_{1,2} = x_n - u_n - \frac{u_n^2}{f_n'} \cdot \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \Big(2f_n' + f_{n-1}' - 3f[x_n, x_{n-1}] \Big) \right] $$

ima svojstvo da treba jednako izvrednjavanja funkcije kao i Newtonova metoda.

Indeksi u formuli znače izvrednjavanje u odgovarajućoj točki!

Njezin red konvergencije je $p \approx 2.73$.

Metoda ${}^*E_{1,2}$, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Metodu startamo iz $x_0 = 2$, tako da x_1 dobijemo po Newtonovoj metodi, pa imamo dvije startne točke.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.294212878320100
2	1.164120455013233	0.077588606715436	0.019397373047930
3	1.144723081965303	0.000034748987607	0.000008839411970
4	1.144714242553333	0.000000000000003	0.000000000000001
5	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
6	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je $x_6 = 1.1447142425533187$.

Metoda $^*E_{1,2}$, konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa uočavamo brzu konvergenciju metode.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.41666666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.94212878320E−01
2	1.16412045501323302	7.75886067154E−02	1.93973730479E−02
3	1.14472308196530270	3.47489876068E−05	8.83941196996E−06
4	1.14471424255333275	3.45318391937E−15	8.78424181034E−16
5	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.75800369996E−20
6	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Metoda $^*E_{1,2}$, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije metode $^*E_{1,2}$.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.4583333333333333	—	—
2	1.1641204550132330 2	—	—
3	1.1447230819653027 0	2.77393	4.83862E−01
4	1.1447142425533327 5	2.76510	4.79113E−01
5	1.1447142425533318 7	2.99347	1.17873E+00
6	1.1447142425533318 7	—	—