

Numerička matematika

1. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Dobar dan, dobro došli

Sadržaj predavanja (početak)

- Uvod u kolegij:
 - Tko sam, što sam i kako do mene.
 - Pravila lijepog ponašanja.
 - Cilj kolegija “**Numerička matematika**”.
 - Pregled sadržaja kolegija.
 - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
 - “**Pravila igre**” ili način polaganja ispita.
 - Literatura.
 - Moja web–stranica.
 - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.

Sadržaj predavanja (nastavak)

- Uvodna priča o greškama:
 - Problemi numeričke matematike (zašto ona postoji).
 - Pojam greške, apsolutna i relativna greška.
 - Izvori grešaka — model, metoda, mjerenje, zaokruživanje.
 - Ilustracija grešaka na modelnim primjerima.
 - Prikaz brojeva u računalu i greške zaokruživanja (ponavljanje).
 - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
 - Opasno ili “katastrofalno” kraćenje.
 - “Širenje” grešaka zaokruživanja, stabilni i nestabilni algoritmi.
 - Primjeri iz prakse — posljedice grešaka.

Kolegiji prethodnici

Bez obzira što piše na faklutetskom webu (na raznim mjestima), ovaj kolegij **ima** prethodnike i to su:

- LA1 = Linearna algebra 1,
- MA2 = Matematička analiza 2.

Stvarno trebamo i **više** od toga:

- LA2 = Linearna algebra 2,
- DRFVV = Diferencijalni račun funkcija više varijabli (parcijalne derivacije, ekstremi).

Uvod u kolegij

Sadržaj

- Uvod u kolegij:
 - Tko sam, što sam i kako do mene.
 - Pravila lijepog ponašanja.
 - Cilj kolegija “**Numerička matematika**”.
 - Pregled sadržaja kolegija.
 - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
 - “**Pravila igre**” ili način polaganja ispita.
 - Literatura.
 - Moja web–stranica.
 - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.

Na samom početku

- **Moja malenkost** (u punom “sjaju”):

doc. dr. sc. **Saša Singer**

- **Službeni osobni podaci:**

- ured (soba, kabinet): **227**, drugi kat,

- e-mail: **singer@math.hr**
(Molim **plain text** poruke.)

- web stranica: **http://web.math.hr/~singer/**
(ona “službena”: **http://www.math.hr/~singer/**
je, uglavnom, **beskorisna**)

- **Konzultacije** (zasad):

- **srijeda, 10–11 sati, petak, 19–20 sati.**

Osnovna pravila “lijepog” ponašanja

Imam nekoliko lijepih **zamolbi** u rubrici “**kultura**”.

● Prva i osnovna je

razumna tišina,

tj. da pričanjem **ne ometate** izvođenje nastave.

● Zatim, **ne kasnite** na predavanje.

● Održavajte **razuman red** u predavaonici.

● **Mobilne telefone**, molim, **utišajte**.

Cilj kolegija Numerička matematika

Većina ostalih kolegija na studiju (do sada) bavi se

- tzv. “egzaktom” ili “pravom” matematikom,

koja izgleda otprilike ovako:

- definicija, teorem, dokaz,

uz tek pokoji primjer.

Ovaj kolegij se ponešto razlikuje od toga:

- orijentiran je prema rješavanju konkretnih praktičnih problema,

- baziran je na pojmu greške, odnosno, aproksimacije.

Cilj kolegija Numerička matematika (nastavak)

Zato ima **nekoliko** dosta različitih **osnovnih ciljeva**:

- spoznavanje **neminovnosti** pojave **grešaka** u praktičnom svijetu (izvori i vrste grešaka, važnost ocjene pogreške),
- pregled osnovnih **numeričkih** metoda za rješavanje nekih “standardnih” problema,
- samostalna **primjena** tih **metoda**,
- razvijanje **kritičnosti** u **interpretaciji** dobivenih rezultata.

Pregled sadržaja kolegija

Cijeli kolegij ima 8 “većih” cjelina (poglavlja):

- Uvod u kolegij — greške, uvjetovanost problema, stabilnost algoritama.
- Rješavanje linearnih sustava — tzv. direktne metode (Gaussove eliminacije, LR faktorizacija, faktorizacija Choleskog).
- Aproksimacija i interpolacija — općenito o problemu aproksimacije funkcija, interpolacija polinomom i splineom.
- Metoda najmanjih kvadrata — opći diskretni problem, linearizacija, matična formulacija, QR faktorizacija. Neprekidni problem i ortogonalni polinomi.

Pregled sadržaja kolegija (nastavak)

- Ortogonalni polinomi i generalizirana Hornerova shema.
- Numeričko integriranje — Newton–Cotesove i Gaussove formule.
- Rješavanje nelinearnih jednadžbi — bisekcija, Newton, sekanta.
- Uvod u optimizaciju bez ograničenja (ako stignemo).

Pravila polaganja i ocjenjivanja (1)

Elementi ocjenjivanja su:

- domaće zadaće — 10%,
- 1. kolokvij — 40%,
- 2. kolokvij — 50%,
- eventualni završni ispit — 25%.

Zbroj je 125% — nije greška, v. objašnjenje malo niže.

Idemo redom ...

Pravila polaganja i ocjenjivanja (2)

Domaće zadaće iz NM:

- Realizacija ide “automatski” — preko web aplikacije, slično kao na Prog1.

Pogledajte (za jedno 7 dana)

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

Trenutno ima 7 zadataka iz raznih područja. Bodovi idu prema broju točno riješenih zadaća.

- Zasad: 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10.

Rok za predaju zadaća je

- dan drugog kolokvija, do 24 sata (ponoć).

Aplikacija se tada “zatvara za javnost” — bodovi su konačni.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (3)

Kolokviji. Tijekom semestra pišu se dva kolokvija.

- 1. kolokvij — ima (najmanje) 40 bodova,

- 2. kolokvij — ima (najmanje) 50 bodova,

tj. oba kolokvija mogu imati “bonus” bodove.

- Na kolokvijima se postavljaju i teoretska pitanja.

Studenti koji ne pristupe nekom od kolokvija tijekom semestra, a svoj nedolazak

- pravovremeno opravdaju na odgovarajući način

 - na pr. medicinskom dokumentacijom,

- kolokvij će polagati u dogovoru s nastavnicima.

Realizacija: Predati molbu s dokumentacijom u referadu.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (4)

Za **prolaznu** ocjenu potrebno je:

- skupiti **najmanje 45 bodova** (iz kolokvija i zadaća),
- od čega **barem 40 bodova** mora biti na **kolokvijima**.

“Prva” **ocjena** se formira na temelju

- **zbroja** bodova iz kolokvija i zadaća.

Zato prva **3** elementa ocjenjivanja zbrojeno daju **100%**.

Ako se **zadovoljni** ocjenom, to je (uglavnom) to!

Pravila polaganja i ocjenjivanja (5)

Završni ispit:

- U načelu — završnog usmenog ispita **NEMA**.

Mogući izuzeci su:

- po **želji** — ako **niste zadovoljni** “prvom” ocjenom,
- po **kazni** — nastavnik **IMA PRAVO** pozvati studenta na usmeni ispit (na pr. zbog **prepisivanja** na kolokviju).

Na završnom ispitu moguće je ostvariti **najviše** još **25** bodova (v. skalu za ocjene).

Oprez:

- Student može svojim **neznanjem** na završnom ispitu dobiti i **negativnu** ocjenu — **pasti**.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (6)

Popravni ispit.

- Studenti koji su tijekom semestra na kolokvijama skupili **barem 10** bodova,
- a **nisu** položili kolegij,

mogu pristupiti **popravnom** kolokviju.

Popravni kolokvij obuhvaća gradivo **cijelog** kolegija

- i na njemu je moguće ostvariti **100** bodova.

Na popravni kolokvij primjenjuje se **isto** pravilo o **završnom** ispitu kao za redovne kolokvije.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (7)

Tablica ocjenjivanja:

Bodovi	Ocjena
0 – 44	1
45 – 59	2
60 – 74	3
75 – 89	4
90 i više	5

Literatura (1)

Osnovna literatura su, naravno,

- predavanja i vježbe,

s popratnim materijalima (predavanja su dostupna na webu).

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja od prošle godine, a stizat će i nova (kako nastaju).

Materijale za predavanja doc. Grubišića možete naći na

<http://web.math.hr/~luka/indexh.html>

Napomena: to nije zamjena za “živu” nastavu!

Literatura (2)

Postoji i “stvarna” literatura — u “pisanom” obliku:

• tzv. “skripta” iz Numeričke matematike (ili analize).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Još će se skratiti za par dana!

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Literatura (3)

Ako nekog zanima, originalna “velika” skripta je:

- Z. Drmač i ostali,
Numerička analiza (skripta),
PMF–MO, 2003.

Izravni “link” na “veliku” skriptu je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf

Literatura (4)

Dodatna literatura:

- **K. E. Atkinson**,
An Introduction to Numerical Analysis (second edition),
John Wiley and Sons, 1989.

i hrpa malo **starijih** knjiga iz numeričke analize (matematike).

Možete potražiti i knjigu:

- **Wolfgang Dahmen** i **ostali**,
Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,

Pripadni nastavni materijali su na stranici

<http://www.igpm.rwth-aachen.de/node/161/>

(koristite Firefox!)

Korisni linkovi

Službena web stranica kolegija je:

<http://web.math.hr/nastava/unm/>

“User’s guide for everything” — Wikipedia:

<http://en.wikipedia.org/>

Ima li pitanja?

Slušam ...

Numerička matematika

Problemi numeričke matematike

U **matematici** postoji niz **problema** koje

- ne znamo **egzaktno riješiti**,

tj. prisiljeni smo tražiti **približno** rješenje.

Neki klasični “**zadaci**” u numeričkom računanju:

- rješavanje **sustava linearnih i nelinearnih** jednadžbi,

- računanje **integrala**,

- računanje **aproksimacije** neke zadane funkcije (zamjena podataka nekom funkcijom),

- minimizacija** (maksimizacija) zadane funkcije, uz eventualna **ograničenja** (obično, u domeni),

- rješavanje **diferencijalnih i integralnih** jednadžbi ...

Problemi numeričke matematike (nastavak)

Neke probleme čak **znamo** egzaktno riješiti (bar u principu),

☛ poput sustava **linearnih** jednadžbi (ponoviti LA1),
no to **predugo** traje, pa koristimo **računala**.

Međutim, tada imamo **dodatni** problem, jer

☛ računala **ne** računaju **egzaktno**, već **približno!**

Oprez, tada ni **osnovne** aritmetičke operacije **nisu** egzaktne.

Dakle, ključni pojam u **numerici** je

☛ **približna** vrijednost, odnosno, **greška**.

Ciljevi numeričke matematike

U skladu s tim, osnovni **zadatak** numeričke matematike je naći (dati) odgovore na sljedeća pitanja:

- **kako** riješiti neki problem — **metoda**,
- **koliko** je “dobro” izračunato rješenje — **točnost**, **ocjena greške**.

Malo preciznije, za svaku od navedenih klasa problema, treba **proučiti** sljedeće “**teme**” (potprobleme):

1. **Uvjetovanost** problema — **osjetljivost** problema na **greške**, prvenstveno u početnim **podacima** (tzv. teorija perturbacije ili smetnje — vezana uz sam **problem**).
2. **Konstrukcija** standardnih **numeričkih metoda** za **rješavanje** danog problema.

Ciljevi numeričke matematike (nastavak)

Kad jednom “stignemo” do **numeričkih metoda**, treba još **proučiti** sljedeće “**teme**” (potprobleme):

3. **Stabilnost** numeričkih metoda — njihova **osjetljivost** na “smetnje” problema.
4. **Efikasnost** pojedine **numeričke metode** — orijentirano prema implementaciji na **računalu**:
 - broj računskih **operacija** i potreban **memorijski** prostor za rješavanje problema.
(= **Složenost**).
5. **Točnost** numeričkih metoda, u smislu neke “**garancije**” točnosti izračunatog **rješenja**.

Ilustracija ovih “potproblema” na primjerima — malo kasnije.

Greške

Greške

Pri **numeričkom** rješavanju nekog problema javljaju se različiti tipovi **grešaka**:

- greške **modela** — svođenje **realnog** problema na neki “**matematički**” problem,
- greške u **ulaznim podacima** (mjerjenja i sl.),
- greške **numeričkih metoda** za rješavanje “**matematičkog**” problema,
- greške “**približnog**” **računanja** — obično su to
 - greške **zaokruživanja** u **aritmetici računala**.

Greške **modela** su “**izvan**” dosega **numeričke matematike**.

- Spadaju u fiziku, kemiju, biologiju, tehniku, ekonomiju, ...

Mjere za grešku

Oznake:

- prava vrijednost — x ,
- izračunata ili približna vrijednost — \hat{x} .

Standardni naziv: \hat{x} je aproksimacija za x .

Nije bitno odakle (iz kojeg skupa) su x i \hat{x} — zamislite da su realni brojevi.

Mjere za grešku (nastavak)

Apsolutna greška:

- mjeri udaljenost izračunate vrijednosti \hat{x} obzirom na pravu vrijednost x .

Ako imamo vektorski prostor i normu, onda je

- udaljenost = norma razlike.

Dakle, apsolutna greška je definirana ovako:

$$E_{\text{abs}}(x, \hat{x}) := |\hat{x} - x|.$$

Često se koristi i oznaka $\Delta x = \hat{x} - x$ (na pr. u analizi), pa je $E_{\text{abs}}(x, \hat{x}) = |\Delta x|$.

Mjere za grešku (nastavak)

Primjer. Dojam o “veličini” greške:

- ako smo umjesto 1 izračunali 2, to nam se čini lošije nego
- ako smo umjesto 100 izračunali 101.

Relativna greška:

- mjeri relativnu točnost aproksimacije \hat{x} obzirom na veličinu broja x ,
- na pr. koliko se vodećih znamenki brojeva x i \hat{x} podudara.

Relativna greška definirana je za $x \neq 0$,

$$E_{\text{rel}}(x, \hat{x}) := \frac{|\hat{x} - x|}{|x|}.$$

Često se koristi i oznaka δ_x .

Mjere za grešku (nastavak)

Ideja relativne greške: ako \hat{x} napišemo kao $\hat{x} = x(1 + \rho)$, onda je njegova **relativna** greška

$$E_{\text{rel}}(x, \hat{x}) := |\rho|.$$

Sad možemo detaljnije opisati one **četiri** vrste **grešaka**:

- greške **modela**,
- greške u **ulaznim podacima** (mjerenjima),
- greške **metoda za rješavanje modela**,
- greške **aritmetike računala**.

Greške modela

Mogu nastati:

- zanemarivanjem utjecaja nekih sila
 - na primjer, zanemarivanje utjecaja otpora zraka ili trenja (v. primjer),
- zbog zamjene kompliciranog modela jednostavnijim
 - na primjer, sustavi nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi se lineariziraju, da bi se dobilo barem približno rješenje,
- zbog upotrebe modela u graničnim slučajevima
 - na primjer, kod matematičkog njihala se $\sin x$ aproksimira s x , što vrijedi samo za male kutove.

Modelni primjer — Problem gađanja

Primjer. Imamo **top** (ili **haubicu**) u nekoj točki — recimo, ishodišu.

- Treba pogoditi **cilj** koje se nalazi u nekoj **drugoj** točki.

Najjednostavniji model za ovaj problem je poznati **kosi hitac**. Projektil ispaljujemo prema cilju,

- nekom **početnom** brzinom v_0 (vektor),
- pod nekim **kutem** α , obzirom na horizontalnu ravninu.

Slikica!

Cijela stvar se odvija pod utjecajem **gravitacije** (prema dolje). Ako **zanemarimo otpor** zraka, dobijemo “obični” **kosi hitac**.

Modelni primjer — Jednadžba

Osnovna jednadžba je

$$F = ma,$$

gdje je m masa projektila (neće nam trebati na početku), a

- a je **akceleracija** — vektor u **okomitoj** (x, y) -ravnini,
- F je sila **graviracije**, prema dolje, tj. $F_x = 0$ i $F_y = -mg$.

Gornja jednadžba je **diferencijalna** jednadžba drugog reda u **vremenu**. Ako je $(x(t), y(t))$ **položaj** projektila u danom trenutku, jednadžba ima oblik po komponentama:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y.$$

Akceleracija je **druga** derivacija položaja.

Modelni primjer — Rješenje jednačbe

Neka je projektil ispaljen u trenutku $t_0 = 0$.

Nakon integracije, za **brzinu** $v =$ **prva** derivacija položaja, imamo jednačbu

$$mv = F \cdot t + mv_0,$$

ili, po komponentama (masa se skrati)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Još jednom integriramo (početni položaj je $x_0 = 0, y_0 = 0$).

Za **položaj** projektila u trenutku t dobivamo:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Reklo bi se — znamo sve!

Modelni primjer — Još neke relacije

Jednadžba “putanje” projektila u (x, y) -ravnini je

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Najveća visina projektila je

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g},$$

a maksimalni domet na horizontalnoj x -osi je

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Modelni primjer — Stvarnost

Nažalost, s ovim modelom **nećemo** ništa **pogoditi**.

- Fali otpor zraka, tlak pada s visinom, vjetrovi i sl.

Praksa:

- Koeficijent za otpor ovisi o obliku projektilu — mjeri se.
- Izračunate tablice se eksperimentalno “upucavaju” i korigiraju.
- Primjena u praksi ide obratno — znam daljinu, tražim kut.

Greške modela (nastavak)

Primjer. Među prvim primjenama jednog od prvih brzih paralelnih računala na svijetu ([ASCI Blue Pacific](#)) bilo je

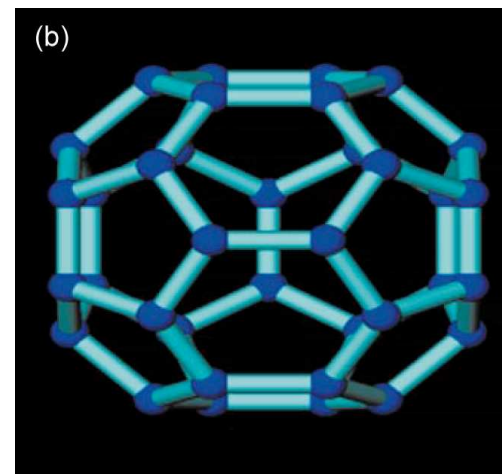
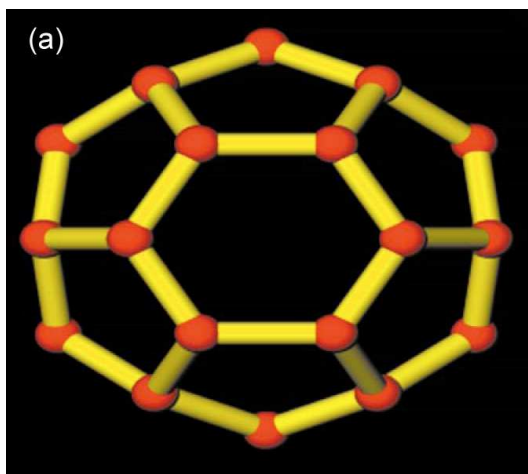
- određivanje trodimenzionalne strukture i elektronskog stanja **ugljik-36 fulerena**.

Primjena spoja je višestruka:

- supravodljivost na visokim temperaturama,
- precizno doziranje lijekova u stanice raka.

Greške modela (nastavak)

Prijašnja istraživanja kvantnih kemičara dala su **dvije** moguće strukture tog spoja.



Te dvije strukture imaju **različita** kemijska svojstva.

Greške modela (nastavak)

Stanje stvari:

- eksperimentalna mjerenja pokazivala su da je struktura (a) stabilnija,
- teoretičari su tvrdili da je stabilnija struktura (b).

Prijašnja računanja,

● zbog pojednostavljivanja i interpolacije, kao odgovor davala su prednost “teoretskoj” strukturi.

Definitivan odgovor,

● proveden računanjem bez pojednostavljivanja, pokazao je da je struktura (a) stabilnija.

Greške u ulaznim podacima

- Greške u ulaznim podacima javljaju se zbog **nemogućnosti** ili **besmislenosti** točnog mjerenja.
- Primjer, tjelesna temperatura se obično mjeri na desetinku stupnja Celzusa točno. Pacijent je podjednako loše ako ima tjelesnu temperaturu 39.5° ili 39.513462° .

Bitno **praktično** pitanje:

- Mogu li **male** greške u ulaznim podacima bitno **povećati** grešku rezultata?

Nažalost **MOGU!**

- Takvi problemi zovu se **loše uvjetovani problemi**.

Greške u ulaznim podacima (nastavak)

Primjer.

Zadana su dva sustava linearnih jednadžbi — recimo, umjesto ispravnih (prvih) koeficijanata, izmjerili smo druge:

$$\begin{aligned}2x + 6y &= 8 \\2x + 6.0001y &= 8.0001,\end{aligned}$$

i

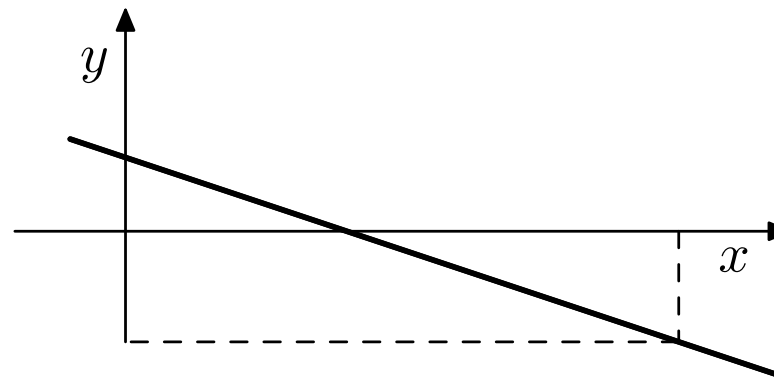
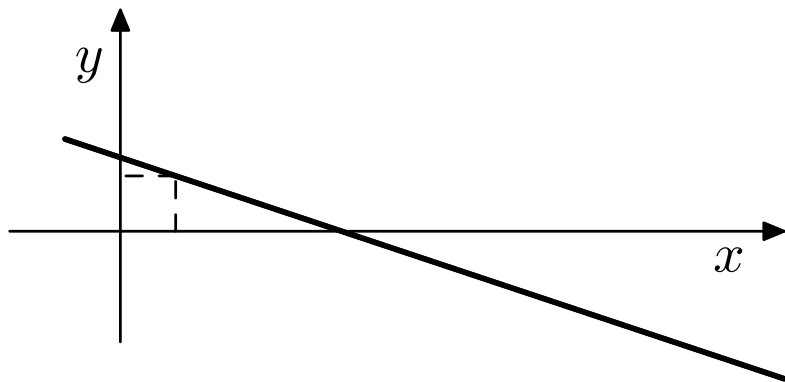
$$\begin{aligned}2x + 6y &= 8 \\2x + 5.99999y &= 8.00002.\end{aligned}$$

Perturbacije koeficijenata: reda veličine 10^{-4} . Je li se rezultat također promijenio za red veličine 10^{-4} ?

Greške u ulaznim podacima (nastavak)

- Rješenje prvog problema: $x = 1$, $y = 1$.
- Rješenje drugog problema: $x = 10$, $y = -2$.

Grafovi presjecišta dva pravca za prvi i drugi sustav:



Greške metoda za rješavanje problema

Najčešće nastaju kad se nešto **beskonačno** zamjenjuje nečim **konačnim**. Razlikujemo **dvije** kategorije:

- **greške diskretizacije** koje nastaju zamjenom kontinuuma konačnim diskretnim skupom točaka, ili “beskonačno” malu veličinu h ili $\varepsilon \rightarrow 0$ zamijenjujemo nekim “konačno” malim brojem;
- **greške odbacivanja** koje nastaju “rezanjem” beskonačnog niza ili reda na konačni niz ili sumu, tj. odbacujemo ostatak niza ili reda.

Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške diskretizacije:

- aproksimacija funkcije f na $[a, b]$, vrijednostima te funkcije na konačnom skupu točaka (tzv. mreži)
 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$,
- aproksimacija derivacije funkcije f u nekoj točki x . Po definiciji je

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

a za približnu vrijednost uzmemo dovoljno mali $h \neq 0$ i

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške odbacivanja:

- zaustavljanje iterativnih procesa nakon dovoljno velikog broja n iteracija (recimo kod računanja nultočka funkcije);
- zamjena beskonačne sume konačnom kad je greška dovoljno mala (recimo kod sumiranja Taylorovih redova).

Taylorov red, Taylorov polinom, ...

Za dovoljno glatku funkciju f , Taylorov red oko točke x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

možemo aproksimirati Taylorovim polinomom p

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \quad p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

pri čemu je $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ **greška**

odbacivanja, a ξ neki broj između x_0 i x . $R_{n+1}(x)$ obično ocjenjujemo po apsolutnoj vrijednosti.

Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Primjer.

- Funkcije e^x i $\sin x$ imaju Taylorove redove oko točke 0 koji **konvergiraju** za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$.
- Zbrajanjem dovoljno mnogo članova tih redova, možemo, barem u principu, dobro **aproksimirati** vrijednosti funkcija e^x i $\sin x$.
- Traženi Taylorovi polinomi s istim brojem članova (ali ne istog stupnja) su

$$e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Za grešku odbacivanja trebaju nam derivacije:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

pa su pripadne greške odbacivanja

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad R_{2n+3}(x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{2n+3}{2}\pi\right) x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

Pretpostavimo sada da je $x > 0$. Iz $\xi \leq x$ dobivamo

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |R_{2n+3}(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Zbrojimo li članove reda sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod **zadane točnosti** $\varepsilon > 0$, napravili smo **grešku odbacivanja** manju ili jednaku

$$\begin{cases} e^x \varepsilon, & \text{za } e^x, \\ \varepsilon, & \text{za } \sin x. \end{cases}$$

U **prvom** slučaju očekujemo

• **malu relativnu** grešku,

a u **drugom** slučaju očekujemo

• **malu apsolutnu** grešku.

Provjerimo to eksperimentalno — u **aritmetici računala!**

Primjeri “grešaka” iz prakse

Promašaj raketa Patriot

- U Zaljevskom ratu, 25. veljače 1991. godine, Patriot rakete iznad Dhahrana u Saudijskoj Arabiji nisu uspjele oboriti iračku Scud raketu.
- Raketa je pukim slučajem pala na američku vojnu bazu usmrтивši 28 i ranivši stotinjak ljudi.



Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Istraga otkriva sljedeće:

- Računalo koje je upravljalo Patriot raketama, vrijeme je brojilo u desetinkama sekunde proteklim od trenutka paljenja.
- Desetinka sekunde binarno

$$0.1_{10} = (0.00011)_2.$$

- To računalo prikazivalo je realne brojeve korištenjem nenormalizirane mantise duljine 23 bita.
- Spremanjem 0.1 u registar takvog računala radi se (apsolutna) greška $\approx 9.5 \cdot 10^{-8}$.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Detalji:

- Računalo je bilo u pogonu 100 sati, pa je ukupna greška zaokruživanja bila

$$100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 9.5 \cdot 10^{-8} = 0.34 \text{ s.}$$

- Scud raketa putuje brzinom $\approx 1.6 \text{ km/s}$, pa je tražena više od pola kilometra daleko od stvarnog položaja.
- Greška uočena dva tjedna ranije nakon 8 sati rada sustava. Modifikacija programa stigla dan nakon nesreće.
- Posade sustava mogle su (ali nisu) dobiti uputu o “isključivanju i uključivanju računala” svakih nekoliko sati.

Samouništenje Ariane 5

- Raketa Ariane 5 lansirana 4. lipnja 1995. godine iz Kouroua (Francuska Gvajana) nosila je u putanju oko Zemlje komunikacijske satelite vrijednost 500 milijuna USD.
- 37 sekundi nakon lansiranja izvršila je samouništenje.



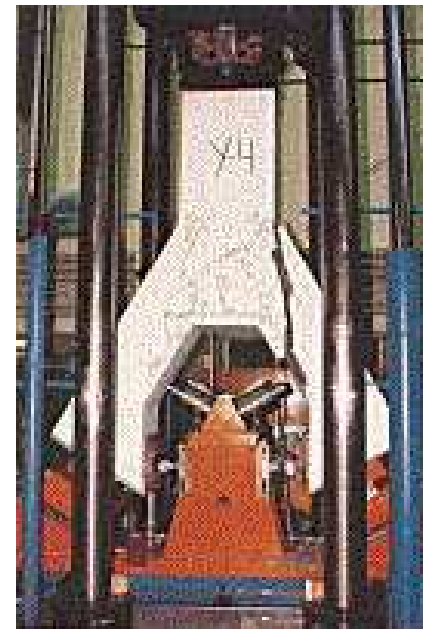
Samouništenje Ariane 5 (nastavak)

Objašnjenje:

- U programu za vođenje rakete postojala je varijabla koja je horizontalnu brzinu rakete (nije koristila ničemu).
- Greška je nastupila kad je program pokušao pretvoriti preveliki 64-bitni realni broj u 16-bitni cijeli broj.
- Računalo je javilo grešku, što je izazvalo samouništenje.
- Isti program bio korišten u prijašnjoj sporijoj verziji Ariane 4, pa do katastrofe nije došlo.

Potonuće naftne platforme

- Naftna platforma Sleipner A potonula je prilikom sidrenja, 23. kolovoza 1991. u blizini Stavangera.
- Baza platforme su 24 betonske ćelije, od kojih su 4 produljene u šuplje stupove na kojima leži paluba.



Potonuće naftne platforme (nastavak)

- Prilikom uronjavanja baze došlo je do pucanja veza među ćelijama (v. sliku).
- Rušenje je izazvalo potres jačine 3.0 stupnja po Richterovoj ljestvici i štetu od 700 milijuna USD.
- Greška je nastala u projektiranju, primjenom standardnog paketa programa, kad je upotrijebljena metoda konačnih elemenata s nedovoljnom točnošću.
- Proračun je dao naprezanja 47% manja od stvarnih.
- Točnijim proračunom utvrđeno je da su ćelije morale popustiti na dubini od 62 metra, a popustile su na 65 metara!