Numerička matematika
2. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Uvodna priča o greškama:
    - Vrste grešaka (ponavljanje).
    - Analiza pojedinih vrsta grešaka.
        - Greške metode — teorija aproksimacija.
        - Greške u podacima — teorija perturbacija.
    - Uvjetovanost problema.
    - Približno računanje i perturbacije podataka.
    - Mjerenje grešaka — razne norme.
    - Stabilnost algoritma.
        - Primjeri stabilnih i nestabilnih algoritama.
    - Primjeri grešaka zaokruživanja.

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Tamo su kompletna predavanja od prošle dvije godine, a stizat će i nova (kako nastaju). Sredit će se ovaj vikend!

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Informacije — demonstratori

Kolegij "Numerička matematika" ima čak 3 demonstratora:

- Ervin Duraković, Nika Kenda i Marin Mišur.

Za upute za dogovor i termine demonstratura

- pogledajte oglase na oglasnoj ploči i
- web stranicu kolegija — pod "nastava".

Greške i uvjetovanost

Greške — ponavljanje

Pri numeričkom rješavanju nekog problema javljaju se različiti tipovi grešaka:

- greške modela — svođenje realnog problema na neki "matematički" problem,
- greške u ulaznim podacima (mjerenja i sl.),
- greške numeričkih metoda za rješavanje "matematičkog" problema,
- greške "približnog" računanja — obično su to
  - greške zaokruživanja u aritmetici računala.

Greške modela su "izvan" dosega numeričke matematike.

- Spadaju u fiziku, kemiju, biologiju, tehniku, ekonomiju, ...

Greške (nastavak)

Sljedeće tri kategorije (podaci, metoda, računanje) su vezane za "matematički" problem, i

- spadaju u domenu numeričke matematike!

O njima nešto "moramo reći".

Skica numeričkog rješavanja nekog problema sliči algoritmu:

Posebno, ako dozvolimo da, umjesto riječi "algoritam",

- piše i riječ "metoda".

Zamislite da pojam "algoritam" uključuje

- metodu i stvarno računanje rezultata!

Greške (nastavak)

Sve tri vrste grešaka — podaci, metoda, računanje,

- rezultiraju nekom greškom u konačnom rezultatu!

Ta greška nas “zanima”.

Uočite da greške u ulaznim podacima možemo gledati

- neovisno o metodi za rješenje problema,
- i tako dolazimo do pojma uvjetovanosti problema.

Za razliku od toga, greške metode i računanja, naravno,

- ovise o metodi, odnosno, algoritmu za rješenje problema.

Analiza grešaka

Greška metode

Gruba podjela numeričkih metoda – prema greškama:

Egzaktne metode

- daju egzaktno rješenje u konačnom broju "koraka" (računskih operacija).

Primjer:

- Gaussove eliminacije ili LR faktorizacija za linearne sustave.

Greška takvih metoda je nula, uz egzaktno računanje.

Približne ili neegzaktne metode

- daju približno rješenje problema, u konačnom broju "koraka" (računskih operacija).

Greška metode — približne metode

Mogu biti egzaktne — na nekom limesu!

Primjeri:

- zamjena kompliciranog modela jednostavnijim,
- greške diskretizacije (numerička integracija),
- greške odbacivanja/rezanja, konačne iteracije (rješavanje nelinearnih jednadžbi)

Analiza grešaka spada u teoriju aproksimacija.

Pošteno, to je standardni predmet proučvanja numeričke matematike, u širem smislu

- numerička analiza, funkcionalna analiza, itd.

Time se bavimo veći dio kolegija!

Greške u podacima

Ključno svojstvo problema je

- ovisnost rješenja o greškama ili pertubacijama ulaznih podataka.

To spada u teoriju perturbacije.

Da bi problem uopće imao smisla, očekujemo

- neku vrstu neprekidnosti rješenja,
- ili barem ograničenu osjetljivost na perturbacije.

Inače imamo "loše" postavljen problem!

Osjetljivost se obično mjeri tzv. brojem uvjetovanosti problema (engl. condition number). Može ih biti i više.

Uvjetovanost problema

Neformalno rečeno, uvjetovanost problema mjeri

- osjetljivost problema na greške u podacima.

Osnovno svojstvo uvjetovanosti:

- Ne ovisi o konkretnoj numeričkoj metodi za rješenje problema, već samo o problemu.

Svrha uvjetovanosti = daje odgovor na pitanje:

- Koju točnost rezultata možemo očekivati
- pri točnom računanju
- s (malo) pomaknutim — netočnim podacima?

Model problema

Matematički model problema, zovimo ga P:

- za zadani ulaz — podatak $x \in \mathcal{X}$,
- dobivamo izlaz — rezultat $y \in \mathcal{Y}$.

Slikica modela je

$$x \longrightarrow \boxed{P} \longrightarrow y$$

Problem P interpretiramo kao računanje vrijednosti funkcije

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

gdje su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ odgovarajući matematički objekti. Na primjer, vektorski prostori, a vrlo često su i normirani prostori (treba nam mjera za grešku).

Uvjetovanost problema (nastavak)

Ideja uvjetovanosti:

$$\text{greška u rezultatu} \approx \text{uvjetovanost} \cdot \text{greška u podacima}$$

Ovisi o obje vrijednosti: točnoj x i približnoj $\hat{x}$.

Napomene:

- Obično nas uvjetovanost posebno zanima za male perturbacije (greške, smetnje) podataka.
- Ako je f dovoljno glatka funkcija, možemo koristiti Taylorov razvoj u okolini točnog ulaznog podatka x
- i dobiti procjenu uvjetovanosti preko derivacija!

Više detalja malo kasnije, kad "sredimo" greške zaokruživanja!

Primjeri problema (nastavak)

Primjer 1. Računanje sume dva realna broja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

s tim da je $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$.

Primjer 2. Računanje produkta dva realna broja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

s tim da je opet $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ i $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$.

Primjeri problema (nastavak)

Primjer 3. Računanje sjecišta pravaca

$$P_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = x_1\},$$
$$P_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = x_1\}.$$

Smatramo da su koeficijenti a_{ij} i x_i, za $i, j = 1, 2$, ulazni podaci.

Ovaj problem pišemo u matričnom zapisu kao linearni sustav od dvije jednadžbe oblika $Ay = x$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Primjeri problema (nastavak)

Traženo sjecište je rješenje linearnog sustava $Ay = x$.

Ako pretpostavimo da je matrica A sustava regularna, tj. $\det A \neq 0$, onda je $y = A^{-1}x$. Dakle,

$$f(x) = A^{-1}x,$$

s tim da je $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$.

Približno računanje i perturbacije podataka

Interpretacija grešaka zaokruživanja

Kod približnog računanja — na pr. u aritmetici računala, imamo greške zaokruživanja

- spremanjem ulaznih podataka u algoritam,
- nakon svake pojedine aritmetičke operacije.

Ključna stvar za analizu tih grešaka je

- svođenje na teoriju perturbacija, u smislu
- egzaktnog računanja s perturbiranim polaznim podacima!

Kako to ide? Ilustracija na IEEE standardu.

Greške prikaza i aritmetike

Ako je ulazni podatak $x \in \mathbb{R}$

- unutar raspona brojeva prikazivih u računalu,

onda se, umjesto x, sprema zaokruženi prikazivi broj $f\ell(x)$, tako da vrijedi

$$f\ell(x) = (1 + \varepsilon)x, \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je

- ε relativna greška napravljena tim zaokruživanjem,
- a u je jedinična greška zaokruživanja.

Imamo malu relativnu grešku, a računalo dalje računa

- s perturbiranim polaznim podatkom $f\ell(x)$.

Slična stvar vrijedi i za aritmetičke operacije.

Zaokruživanje u aritmetici

Osnovna pretpostavka za realnu aritmetiku u računalu:

- za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput $\sqrt{\ }$, ali ne vrijedi za sve funkcije (na pr. za cos i sin u okolini nule).

Preciznije: Neka $\circ$ označava bilo koju operaciju $+$, $-$, $*$, $/$. Za prikazive brojeve u dozvoljenom rasponu $x, y \in \mathcal{F}$, takve da je i egzaktni rezultat $x \circ y$ u dozvoljenom rasponu (tj. u $\mathcal{F}$), vrijedi ocjena relativne greške

$$f\ell(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \le u.$$

Broj ε ovisi o x, y, operaciji $\circ$ i aritmetici računala.

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Ova ocjena je ekvivalentna idealnom izvođenju aritmetičkih operacija:

- egzaktno izračunaj rezultat operacije $x \circ y$,
- zaokruži ga, pri spremanju rezultata u memoriju.

To ne znači da računalo zaista tako i računa. Naime,

- za $+$, $-$, $*$ to bi se još i moglo napraviti (egzaktni rezultati imaju konačan binarni prikaz),
- ali kod dijeljenja to sigurno ne ide (egzaktni kvocijent može imati beskonačan binarni prikaz).

Dakle, važno je samo da dobijemo istu ocjenu greške kao u “idealnom” računanju, a nije važno kako se stvarno računa!

Širenje grešaka zaokruživanja

Kad imamo puno operacija — nastaje problem:

- greške se šire i
- treba procijeniti grešku u rezultatu.

kako to napraviti?

Za aritmetiku računala ne vrijedi:

- asocijativnost zbrajanja i množenja,
- distributivnost množenja prema zbrajanju.

Jedino vrijedi:

- komutativnost za zbrajanje i množenje.

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Za analizu grešaka zaokruživanja ne možemo koristiti nikakva "normalna" pravila za aritmetičke operacije u računalu, jer ti zakoni naprosto ne vrijede.

Stvarna algebarska struktura je izrazito komplicirana i postoje debele knjige na tu temu.

- Vrijede neka "zamjenska" pravila,

ali su neupotrebljiva za analizu iole većih proračuna.

Međutim, analiza pojedinih operacija postaje bitno lakša, ako uočimo da:

- greške zaokruživanja u aritmetici računala možemo interpretirati i kao egzaktne operacije, ali na "malo" pogrešnim podacima!

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Kako? Dovoljno je faktor $(1 + \varepsilon)$ u ocjeni greške

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

"zalijepiti" na x i/ili y. To je isto kao da operand(i) ima(ju) neku relativnu grešku na ulazu u operaciju, a operacija $\circ$ je egzaktna. Dakle,

- izračunati (ili "zaokruženi") rezultat jednak je egzaktnom, ali za malo promijenjene (tj. perturbirane) podatke (u relativnom smislu).

Što dobivamo ovom interpretacijom?

- Onda možemo koristiti "normalna" pravila aritmetike za analizu grešaka.

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Ne zaboravimo još da ε ovdje ovisi o x, y, i operaciji $\circ$. Kad takvih operacija ima više, pripadne greške obično označavamo nekim indeksom u ε.

Na primjer, ako je $\circ$ zbrajanje $(+)$, onda je

$$\begin{aligned} f\ell(x+y) &= (1+\varepsilon_{x+y})\,(x+y) \\ &= [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,x\,] + [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,y\,], \end{aligned}$$

uz $|\varepsilon_{x+y}| \leq u$, ako su x, y i $x+y$ u prikazivom rasponu.

Potpuno ista stvar vrijedi i za oduzimanje.

Kod množenja i dijeljenja možemo birati kojem ulaznom podatku ćemo "zalijepiti" faktor $(1+\varepsilon)$.

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Za množenje možemo pisati

$$\begin{aligned} f\ell(x * y) &= (1 + \varepsilon_{x*y})\,(x * y) \\ &= [\,(1 + \varepsilon_{x*y})\,x\,] * y = x * [\,(1 + \varepsilon_{x*y})\,y\,], \end{aligned}$$

a za dijeljenje

$$\begin{aligned} f\ell(x/y) &= (1 + \varepsilon_{x/y})\,(x/y) \\ &= [\,(1 + \varepsilon_{x/y})\,x\,]/y = x/[\,y/(1 + \varepsilon_{x/y})\,]. \end{aligned}$$

Postoje i druge varijante. Na primjer, da svakom operandu "zalijepimo" $\sqrt{1+\varepsilon}$ (odnosno $1/\sqrt{1+\varepsilon}$), ali to nije naročito važno. Bitno je samo da je izračunati rezultat egzaktan za malo perturbirane podatke.

Širenje grešaka (bilo kojih)

Zasad nije vidljivo koja je točno korist od ove interpretacije. Stvar se bolje vidi tek kad imamo više operacija zaredom.

Međutim, ova ideja s "malo pogrešnim podacima" je baš ono što nam treba za analizu širenja grešaka (i to bez obzira na uzrok grešaka), čim se sjetimo da

- rezultati ranijih operacija s nekom greškom ulaze u nove operacije.

Naime, uzroka grešaka može biti mnogo, ovisno o tome što računamo. Od grešaka modela i metode, preko grešaka mjerenja (u ulaznim podacima), do grešaka zaokruživanja.

Širenje grešaka u aritmetici računala

U aritmetici računala postupamo na potpuno isti način. Samo treba zgodno iskoristiti onu raniju interpretaciju da je

- izračunati (ili "zaokruženi") rezultat jednak egzaktnom, ali za malo perturbirane podatke (u relativnom smislu).

A širenje grešaka u egzaktnoj aritmetici znamo.

Svaka aritmetička operacija u računalu samo povećava perturbaciju ulaznih podataka za jedan faktor oblika $(1 + \varepsilon)$, uz ocjenu $|\varepsilon| \leq u$, ovisno o tome kojim operandima "zalijepimo" taj faktor.

Širenje grešaka u aritmetici računala

Na pr., uzmimo da računamo zbroj $x + y$, gdje su x i y spremljeni u računalu. Znamo da za izračunati rezultat vrijedi

$$
\begin{aligned}
f\ell(x+y) &= (1+\varepsilon_{x+y})\,(x+y) \\
&= [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,x\,] + [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,y\,],
\end{aligned}
$$

uz $|\varepsilon_{x+y}| \leq u$, ako su x, y i $x + y$ u prikazivom rasponu.

No, x i y već imaju neke greške obzirom na prave egzaktne vrijednosti. I to treba uvrstiti u ovu formulu.

Natuknice o analizi grešaka

- Bilo koja pojedina operacija, nakon, recimo prvog čitanja, ili ranijih operacija — tad ide kao ovo gore, ali svagdje imam dodatni faktor oblika $(1+\varepsilon)$ iz ocjene greške (ako je sve prikazivo u dozvoljenom rasponu).
- Dakle, faktori se "kote" i postoje razne oznake za to, da se lakše čita.
  - oznake: ε (s indeksima) — obično za "jedinične" greške (ispod u),
  - neko drugo slovo (na pr. η) s indeksima, za ostale (relativne) greške u analizi.

Natuknice o analizi grešaka (nastavak)

Pojmovi greške unaprijed (forward error), i greške unatrag (katkad se zove i obratna — backward error).

- Gledam algoritam kao preslikavanje: ulaz (domena) u izlaz (kodomena).
- Zanima me greška u rezultatu (kodomeni) — forward.
- To katkad ide, ali je, uglavnom, teško (ili daje loše ocjene). (Primjer - Zlatko, za normu u $\mathbb{R}^2$, i još dodaj scaling).
- Lakše je "unatrag" — ista interpretacija kao i za pojedine operacije.

Uočiti da se akumulacija faktora $(1 + \varepsilon)$ prirodno radi unatrag — inače moram znati grešku za operande (a to je rezultat unaprijed).

Natuknice o analizi grešaka (nastavak)

Postupak “unatrag”:

- Krajnji rezultati algoritma su “egzaktni” ali na ponešto perturbiranim podacima (i napravi se ocjena tih perturbacija u domeni).
- A zatim ide matematička teorija perturbacije, koja daje ocjene u kodomeni (izvod ide za egzaktni račun, pa vrijede normalna pravila).

I sad imam pojmove: stabilno i nestabilno računanje (algoritam) (“prigušivač” ili “pojačalo” grešaka).

- Slikice (skripta NA, Higham).
- Primjeri nestabilnosti — uklonjivi i NEuklonjivi.

Norme i uvjetovanost

Greška na ulazu – što na izlazu?

Zadatak numeričke analize je odrediti vezu između greške na ulazu i greške na izlazu.

Polazni podaci		Izlazni podaci
x_{inp}	Algoritam f	$y_{\mathrm{out}} = f(x_{\mathrm{inp}})$
imaju grešku	$\longrightarrow$	imaju grešku
$\Delta x := x_{\mathrm{inp}} - x$		$\Delta y := f(x_{\mathrm{inp}}) - f(x)$

Uzimamo da su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ (barem) vektorski prostori.

Kako mjeriti grešku?

Kad x_{inp} i $f(x_{\text{inp}})$ nisu brojevi, nego vektori ili matrice, grešku možemo mjeriti:

- po svakoj od komponenata, međutim to je malo previše brojeva,
- kao neku "ukupnu ili najveću" grešku — samo jedan broj i to korištenjem vektorskih/matričnih normi.

Prisjetite se: vektorski prostor na kojem je definirana norma zove se normirani prostor.

Vektorske norme

"Vektorska" norma na vektorskom prostoru V (nad poljem F, gdje je $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$) je

- je svaka funkcija $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$

koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \quad \forall \alpha \in F, \forall x \in V$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$
   (nejednakost poznata pod imenom nejednakost trokuta).

Najpoznatije vektorske norme

Kad je $V = \mathbb{R}^n$ ili $V = \mathbb{C}^n$ (kon. dim.), najčešće se koriste sljedeće tri norme:

1. 1-norma ili ℓ_1 norma $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
2. 2-norma ili ℓ_2 norma ili euklidska norma
$$\|x\|_2 = (x^* x)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$
3. ∞-norma ili ℓ_∞ norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Samo je 2-norma izvedena iz skalarnog produkta.

Norme na prostoru funkcija

Definicija vektorskih normi u sebi ne sadrži zahtjev da je vektorski prostor V konačno dimenzionalan.

Na primjer, norme definirane na vektorskom prostoru neprekidnih funkcija na $[a, b]$ (u oznaci $C[a, b]$) definiraju se slično normama na $\mathbb{R}^n$:

1. L_1 norma $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt$,
2. L_2 norma $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$,
3. L_∞ norma $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$.

Ekvivalentnost normi

Može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem. Na svakom konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru V sve su norme ekvivalentne, tj. za svake dvije norme $\| \; \|_a$ i $\| \; \|_b$ postoje konstante c i C takve da je

$$c\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C\|v\|_a, \quad \text{za sve } v \in V.$$

Na primjer,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Razlika između teorije i prakse — kad je n ogroman.

Matrične norme

Zamijenimo li u definiciji vektorske norme formalno vektor matricom, dobivamo matričnu normu.

Matrična norma je svaka funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Tome se često dodaje zahtjev konzistentnosti

4. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

kad god je matrični produkt AB definiran.

Matrične norme (nastavak)

Matrične norme nastaju na dva načina:

- Matricu A promatramo kao vektor s $m \times n$ elemenata i za taj vektor koristimo odgovarajuću vektorsku normu.

  Najpoznatija takva norma odgovara vektorskoj 2-normi i zove se euklidska, Frobeniusova, Hilbert–Schmidtova, ili Schurova norma

$$\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^* A))^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

- operatorske norme:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{ ili } \; = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|).$$

Matrične norme (nastavak)

Uvrštavanjem odgovarajućih vektorskih normi, dobivamo

1. matrična 1-norma, "maksimalna stupčana norma"

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

2. matrična 2-norma, spektralna norma

$$\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{1/2} = \sigma_{\max}(A),$$

3. matrična ∞-norma, "maksimalna retčana norma"

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

ρ je spektralni radijus matrice (po aps. vrijednosti maksimalna svojstvena vrijednost), a σ singularna vrijednost matrice.

Matrične norme (nastavak)

Svojstva:

- I matrične norme nisu međusobno neovisne (slično kao vektorske norme) — ekvivalentnost.
- Matrična 2-norma se teško računa pa se uobičajeno procjenjuje korištenjem ostalih normi.
- Za svaku operatorsku normu vrijedi

$$\|Ay\| \leq \|A\|\,\|y\|,$$

za svaki vektor y, što se često koristi kod ocjena. Formula direktno izlazi iz definicije operatorske norme.

Mjerenje grešaka i uvjetovanost

Relativna/apsolutna uvjetovanost problema mjeri koliko je problem osjetljiv na odgovarajuće promjene polaznih podataka.

- Apsolutna greška: $\|\Delta x\|$, $\|\Delta y\|$, (svaka norma u svom prostoru), gdje je

$$\Delta x = x - \hat{x}, \qquad \Delta y = y - \hat{y}.$$

- Apsolutna uvjetovanost:

$$\kappa_{\mathrm{abs}}(x) := \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|}.$$

Veza s derivacijom!

Mjerenje grešaka i uvjetovanost (nastavak)

U praksi se češće koristi relativna mjera za grešku (na primjer, zbog aritmetike računala).

- Relativna greška:

$$\delta_x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \qquad \delta_y := \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}.$$

- Relativna uvjetovanost:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) := \frac{\|\delta_y\|}{\|\delta_x\|}.$$

Problem je dobro uvjetovan ako je

- κ_{rel} što je moguće manji, za $\delta_x \to 0$.

Landauov simbol — red veličine

Neka su $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcije, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ i $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ norme i neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ako postoje konstante $C > 0$ i $\delta > 0$ takve da za sve x vrijedi

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|g(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C\|h(x)\|_{\mathbb{R}^m},$$

onda kažemo da je

"funkcija g reda $\mathcal{O}$ od h, za x koji teži prema x_0"

i to pišemo ovako

$$g(x) = \mathcal{O}(h(x)) \quad (x \to x_0).$$

Landauov simbol (nastavak)

Primjer. Za $m = n = 1$ je

$$\begin{aligned} \sin x &= \mathcal{O}(x) \quad (x \to a), \quad \text{za sve } a \in \mathbb{R}, \\ x^2 + 3x &= \mathcal{O}(x) \quad (x \to 0), \\ x^2 - x - 6 &= \mathcal{O}(x-3), \quad (x \to 3). \end{aligned}$$

Uvjetovanost i Taylorov teorem

Istražimo uvjetovanost problema za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Promatramo ponašanje f za male perturbacije Δx u okolini točke x. Neka je Δy pripadna perturbacija funkcijske vrijednosti $y = f(x)$, tj. $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$.
- Neka je f još dva puta neprekidno derivabilna. Korištenjem Taylorovog polinoma stupnja 1 dobivamo

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= f'(x)\Delta x + \frac{f''(x + \theta\Delta x)}{2!}(\Delta x)^2, \quad \theta \in (0, 1).
\end{aligned}
$$

Uvjetovanost i Taylorov teorem (nastavak)

- Za male perturbacije Δx, apsolutni oblik ove relacije je

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + O((\Delta x)^2),$$

odakle slijedi da je $f'(x)$ ili $|f'(x)|$ apsolutna uvjetovanost funkcije f (za male Δx).

- Ako je $x \neq 0$ i $y \neq 0$, onda joj je relativna forma
$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{x f'(x)}{f(x)}\,\frac{\Delta x}{x} + O\left(\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right),$$ pa relativnu uvjetovanost funkcije f možemo definirati kao

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = (\mathrm{cond}\, f)(x) := \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|.$$

Uvjetovanost – primjer

Primjer. Relativna uvjetovanost funkcije

$$f(x) = \ln x,$$

je

$$(\mathrm{cond}\, f)(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{1}{\ln x} \right|,$$

što je veliko za $x \approx 1$.

Pitanje: Apsolutna uvjetovanost?

Primjer uvjetovanosti problema

Rekurzija za integral

Ispitajmo uvjetovanost problema računanja integrala

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$

za fiksni prirodni broj n.

U ovom obliku, problem je napisan kao preslikavanje iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$ i ne "paše" ranijem pojmu problema.

- Domena nije $\mathbb{R}$, nego $\mathbb{N}$ (diskretan skup), pa nema smisla govoriti o neprekidnosti, derivabilnosti i sl.

Zato prvo transformiramo problem.

Rekurzija za integral (nastavak)

Nađimo vezu između I_k i I_{k-1}, s tim da I_0 znamo izračunati

$$I_0 = \int\limits_0^1 \frac{1}{t+5}\,dt = \ln(t+5)\,\Big|_0^1 = \ln\frac{6}{5}.$$

Za početak, očito vrijedi da je

$$\frac{t}{t+5} = 1 - \frac{5}{t+5},$$

Množenjem obje strane s t^{k-1} dobivamo

$$\frac{t^k}{t+5} = t^{k-1} - 5\,\frac{t^{k-1}}{t+5}.$$

Rekurzija za integral (nastavak)

Na kraju, integracijom na segmentu $[0,1]$ izlazi

$$I_k = \int_0^1 t^{k-1}\,dt - 5I_{k-1} = \frac{1}{k} - 5I_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dakle, I_k je rješenje (linearne, nehomogene) diferencijske jednadžbe

$$y_k = -5y_{k-1} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

uz početni uvjet $y_0 = I_0$.

Rekurzija za integral (nastavak)

Varijacija početnog uvjeta definira niz funkcija f_k, $y_k = f_k(y_0)$.

Zanima nas relativna uvjetovanost funkcije f_n u točki $y_0 = I_0$, u ovisnosti o $n \in \mathbb{N}$.

- I_0 nije egzaktno prikaziv,
- umjesto I_0 spremi se aproksimacija $\widehat{I}_0$,
- rezultat — neka aproksimacija $\widehat{I}_n = f_n(\widehat{I}_0)$.

Indukcijom se lako dokaže da vrijedi

$$y_n = f_n(y_0) = (-5)^n y_0 + p_n,$$

gdje je p_n ovisi samo o nehomogenim članovima rekurzije, ali ne i o y_0.

Rekurzija za integral (nastavak)

Relativna uvjetovanost je

$$(\operatorname{cond} f_n)(y_0) = \left| \frac{y_0 f_n'(y_0)}{y_n} \right| = \left| \frac{y_0 (-5)^n}{y_n} \right|.$$

Iz definicije integrala: I_n monotono padaju po n, čak

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0.$$

Zbrajanjima dobivamo sve manje i manje brojeve!

$$(\operatorname{cond} f_n)(I_0) = \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_n} > \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_0} = 5^n.$$

f_n je vrlo loše uvjetovana u $y_0 = I_0$, i to tim gore kad n raste.

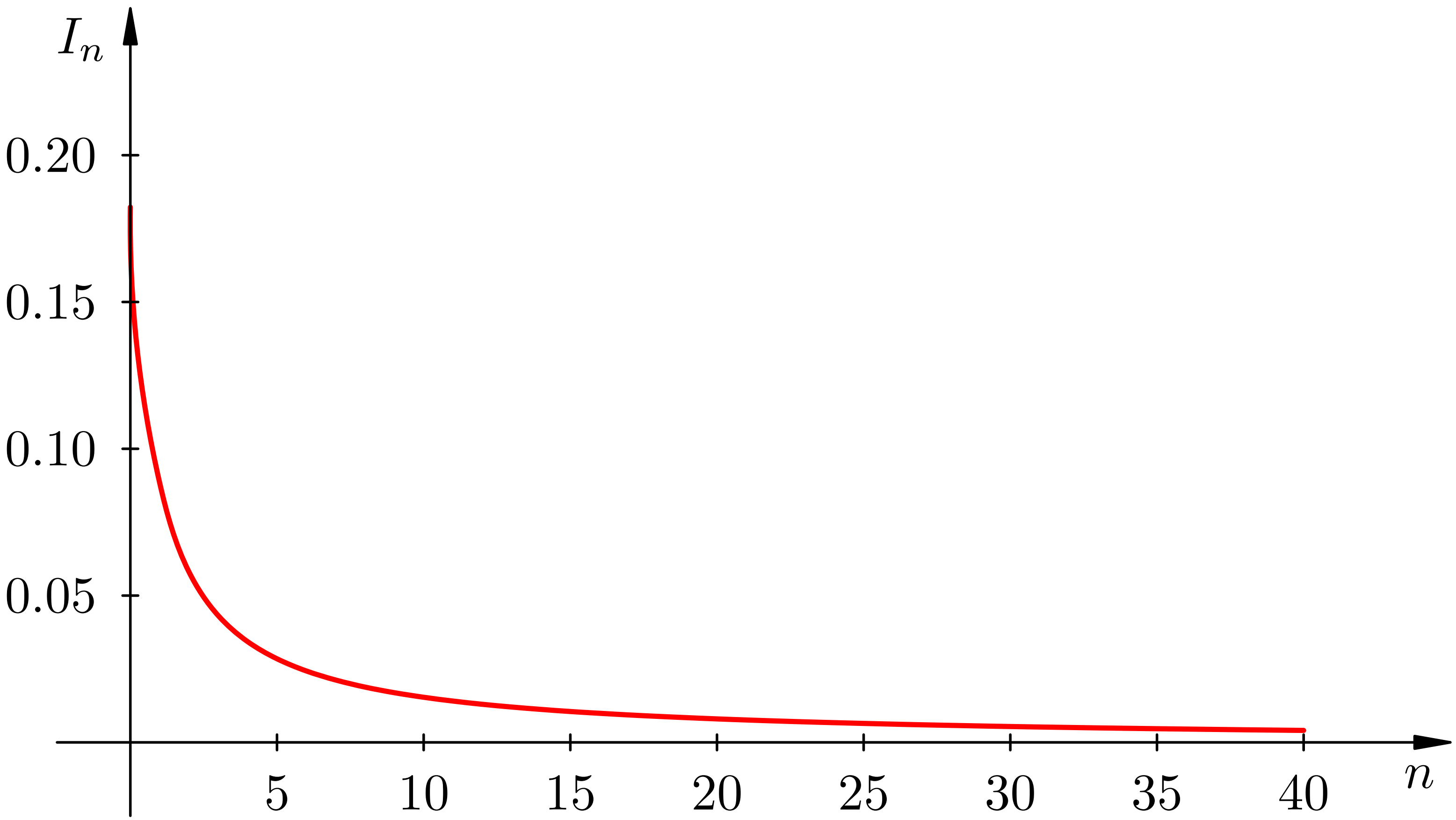
Rekurzija unaprijed — rezultati

Pitanje: Kako se loša uvjetovanost vidi, kad stvarno računamo $f_n(I_0)$?

Slikice!

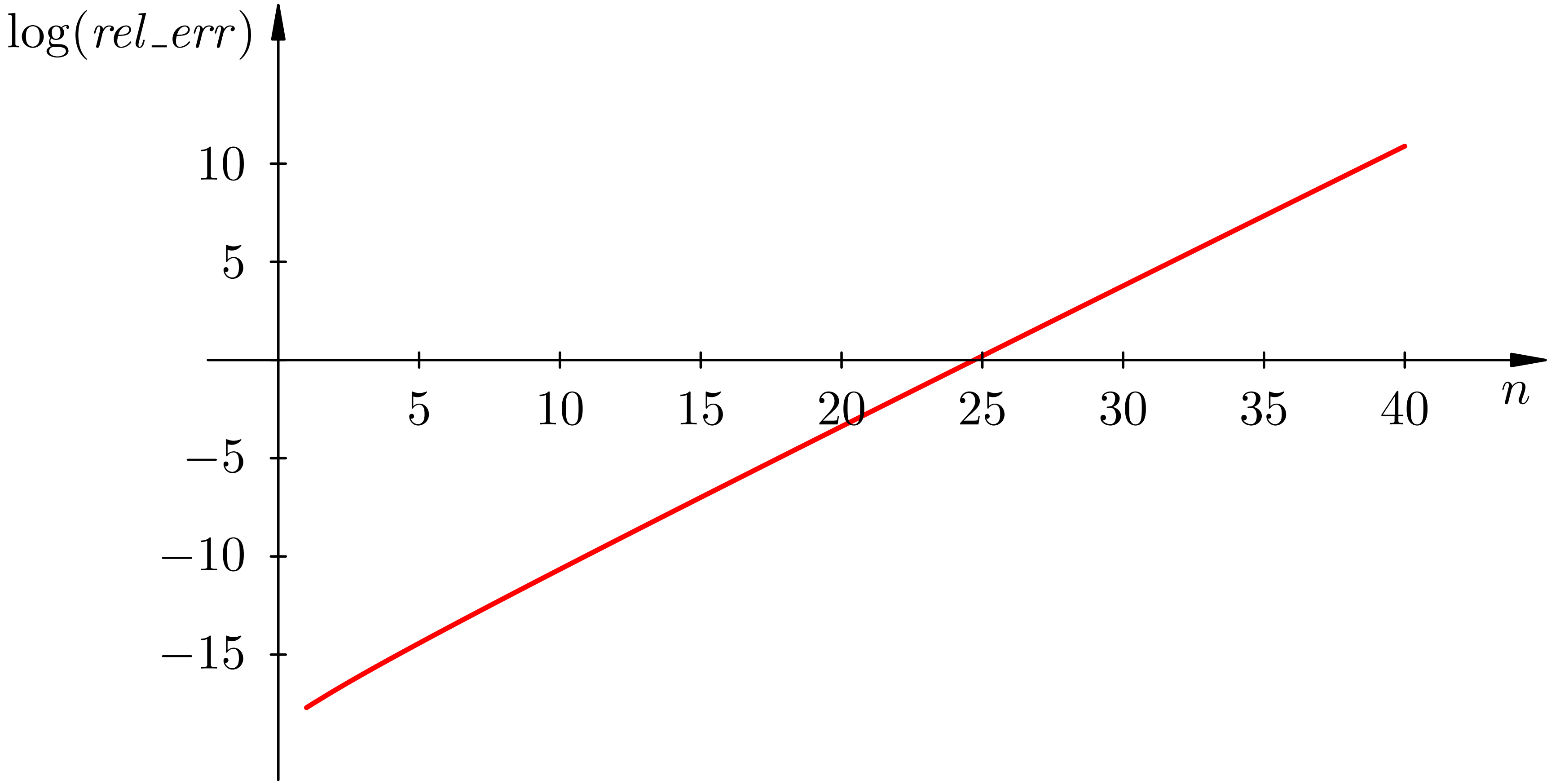
Pokaži program i rezultate!

Točne vrijednosti integrala



egzaktne/točne vrijednosti integrala I_n

Rekurzija unaprijed za I_n



($\log_{10}$) relativne greške izračunate vrijednosti integrala I_n rekurzijom unaprijed

Rekurzija za integral (nastavak)

Može li se loša uvjetovanost izbjeći?

- Može — okretanjem rekurzije.

Treba uzeti neki $\nu > n$ i "silazno" računati

$$y_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - y_k\right), \qquad k = \nu, \nu - 1, \ldots, n + 1.$$

Problem: kako izračunati početnu vrijednost y_ν.

Nova rekurzija definira niz funkcija g_k, koje vežu y_n i y_ν, uz $\nu > n$, tj.

$$y_n = g_n(y_\nu).$$

Rekurzija za integral (nastavak)

Relativna uvjetovanost za g_n

$$(\operatorname{cond} g_n)(y_\nu) = \left| \frac{y_\nu \, (-1/5)^{\nu-n}}{y_n} \right|, \quad \nu > n.$$

Za $y_\nu = I_\nu$, je $y_n = I_n$, a iz monotonosti I_n slijedi

$$(\operatorname{cond} g_n)(I_\nu) = \frac{I_\nu}{I_n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n,$$

što je ispod 1, tj. greške se prigušuju.

Rekurzija za integral (nastavak)

Ako je $\widehat{I}_\nu$ neka aproksimacija za I_ν, onda za relativne perturbacije vrijedi

$$\left|\frac{\widehat{I}_n - I_n}{I_n}\right| = (\operatorname{cond} g_n)(I_\nu) \cdot \left|\frac{\widehat{I}_\nu - I_\nu}{I_\nu}\right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n} \cdot \left|\frac{\widehat{I}_\nu - I_\nu}{I_\nu}\right|.$$

Zbog linearnosti funkcije g_n, ova relacija vrijedi za bilo kakve perturbacije, a ne samo male.

- Početna vrijednost $\widehat{I}_\nu$ uopće ne mora biti blizu prave I_ν.
- Možemo uzeti $\widehat{I}_\nu = 0$, čime smo napravili relativnu grešku od 100% u početnoj vrijednosti ...

Rekurzija za integral (nastavak)

- … a još uvijek dobivamo $\widehat{I}_n$ s relativnom greškom

$$\left|\frac{\widehat{I}_n - I_n}{I_n}\right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n.$$

- Povoljnim izborom ν, ocjenu na desnoj strani možemo napraviti po volji malom — ispod tražene točnosti ε.
- Dovoljno uzeti $\nu \geq n + \dfrac{\log(1/\varepsilon)}{\log 5}$, i $\widehat{I}_\nu = 0$ i računamo vrijednosti

$$\widehat{I}_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - \widehat{I}_k\right), \quad k = \nu, \nu-1, \ldots, n+1.$$

Rekurzija unatrag — rezultati

Pitanje: Kako se dobra uvjetovanost vidi, kad stvarno računamo $g_n(I_\nu)$?

Pokaži program i rezultate za $\varepsilon = 10^{-19}$!

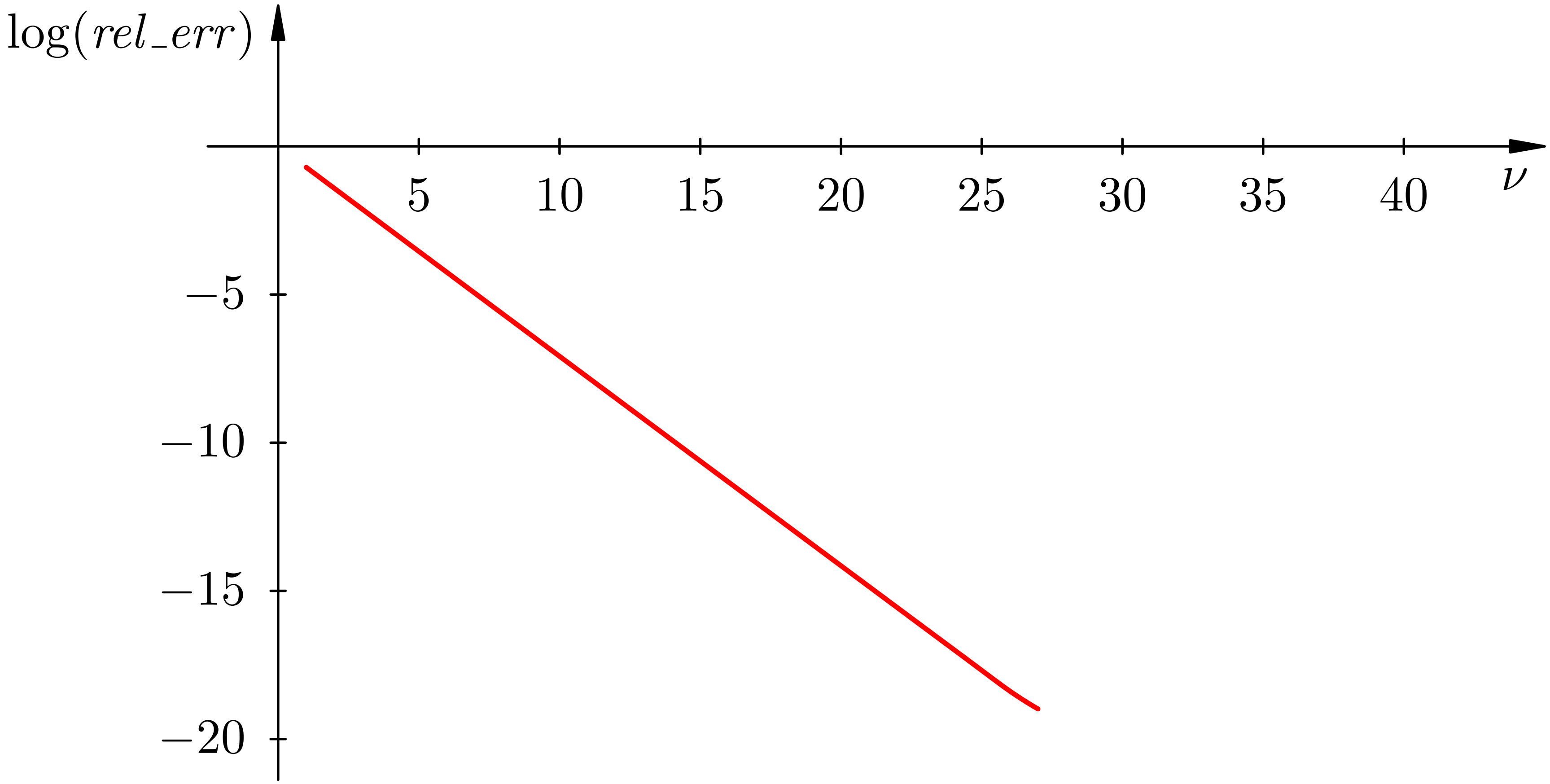
- Za ovaj ε dobijemo

$$\nu \geq n + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 5} \approx n + 28.$$

  Dakle, "silazno" računamo 28 vrijednosti.

- Stvarna početna vrijednost je $\widehat{I}_\nu = 0$.

Rekurzija unazad za I_{40} — ovisno o startu ν



($\log_{10}$) relativne greške izračunate vrijednosti integrala I_{40} obratnom rekurzijom za $I_{40+\nu} = 0$

Primjer grešaka zaokruživanja

Primjer rasprostiranja grešaka

Primjer. Vrijednost

$$f_n(x) = (x-n)^{10}, \quad n = 0, \ldots, 10,$$

računamo u aritmetici računala u okolini točke n.

Primijetite da je graf funkcije $(x-n)^{10}$ translatirani graf funkcije x^{10} za n jedinica udesno.

Funkcijsku vrijednost funkcija f_n možemo izračunati na više načina koji su matematički ekvivalentni, ali nisu numerički jednaki.

Primjer rasprostiranja grešaka (nastavak)

Računat ćemo:

- translacijom grafa funkcije x^{10} za n jedinica udesno,
- korištenjem binomne formule

$$(x-n)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k (-n)^{10-k},$$

s tim da polinom na desnoj strani računamo Hornerovom shemom.

Odgovor: U okolini točke n je $(x-n)^{10}$ mali broj. Članovi u sumi na desnoj strani su alternirajući po predznaku i rastu s porastom n.

Primjer rasprostiranja grešaka (nastavak)

Kako izgledaju grafovi?

- zeleno — graf dobiven translacijom,
- crveno — korištenjem binomne formule.

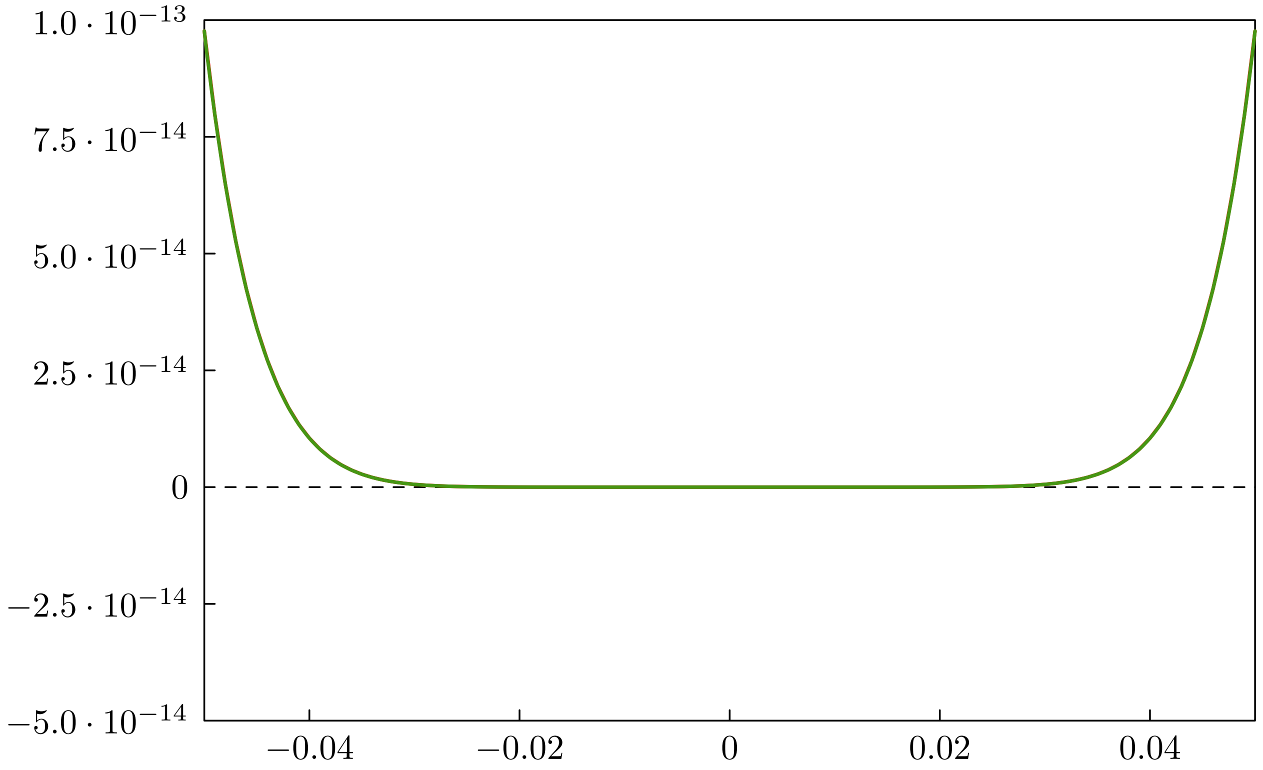
Za svaki n crtamo dvije slike grafa funkcije f_n:

- na intervalu $[n - 0.05, n + 0.05]$,
- na intervalu $[n - r, n + r]$, gdje je r odabran tako da ovaj interval sadrži numeričke nultočke od f_n.

Obratite pažnju na skale po x i y!

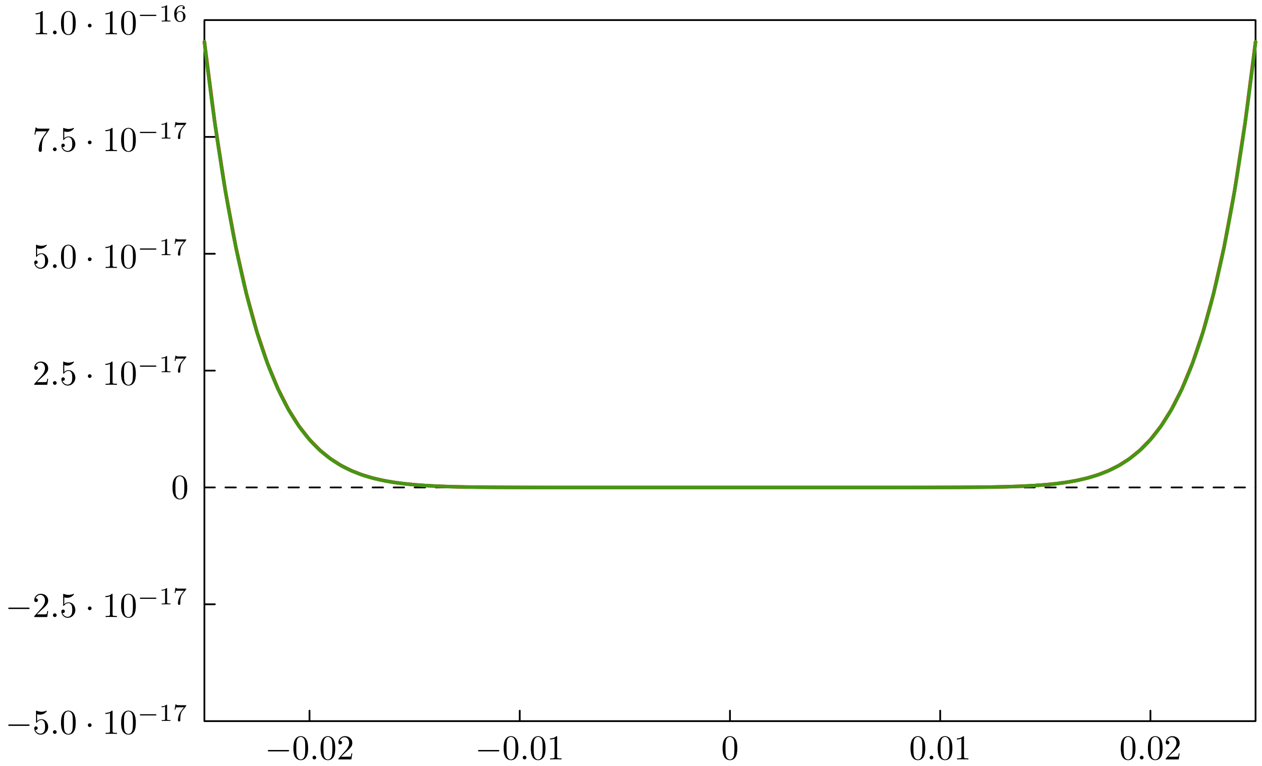
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 0$ (1)

$$(x-0)^{10} = x^{10}$$



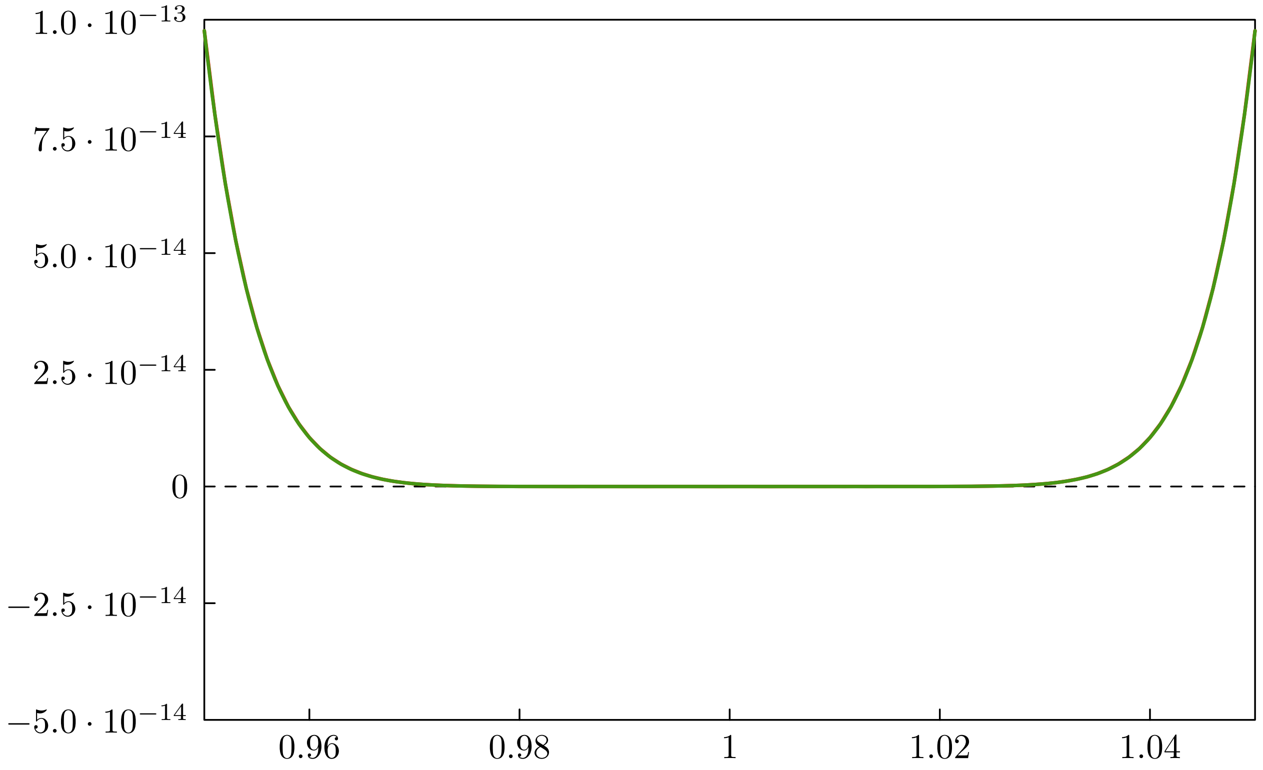
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 0$ *(2)*

$$(x-0)^{10} = x^{10}$$



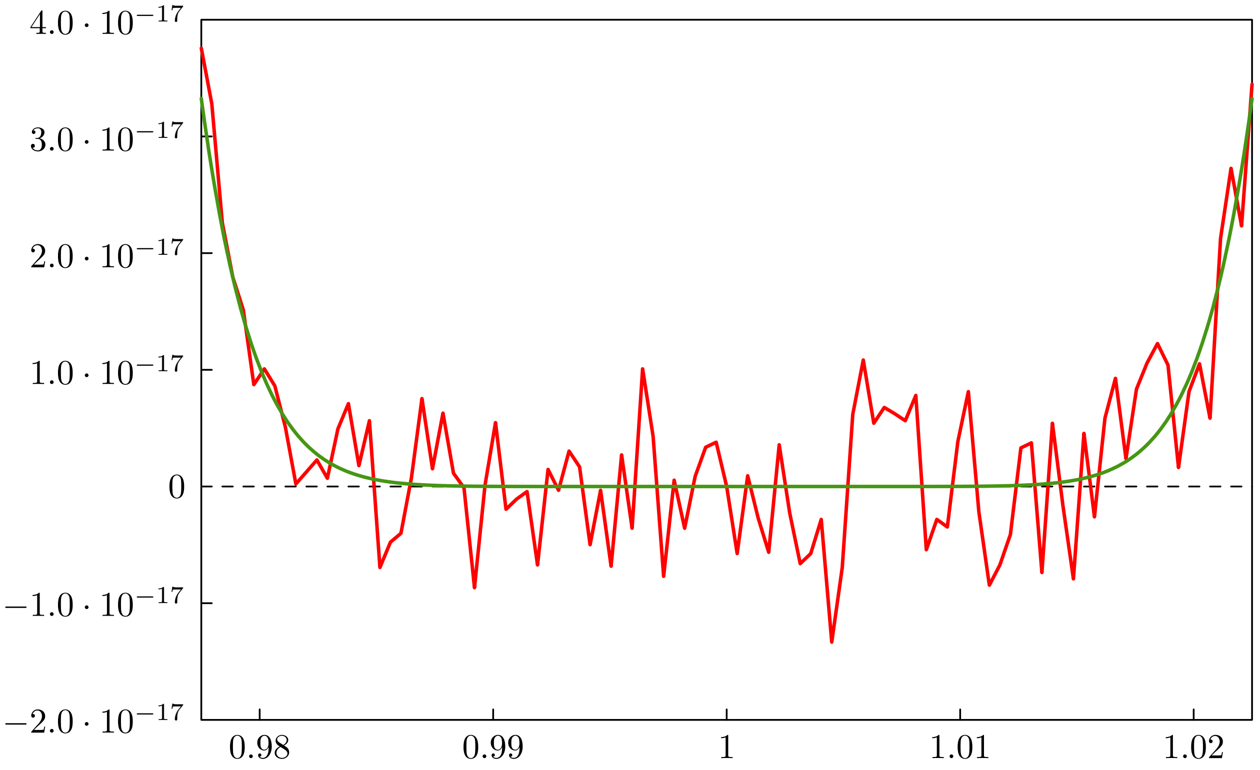
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 1$ (1)

$$(x-1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5$$
$$+ 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$



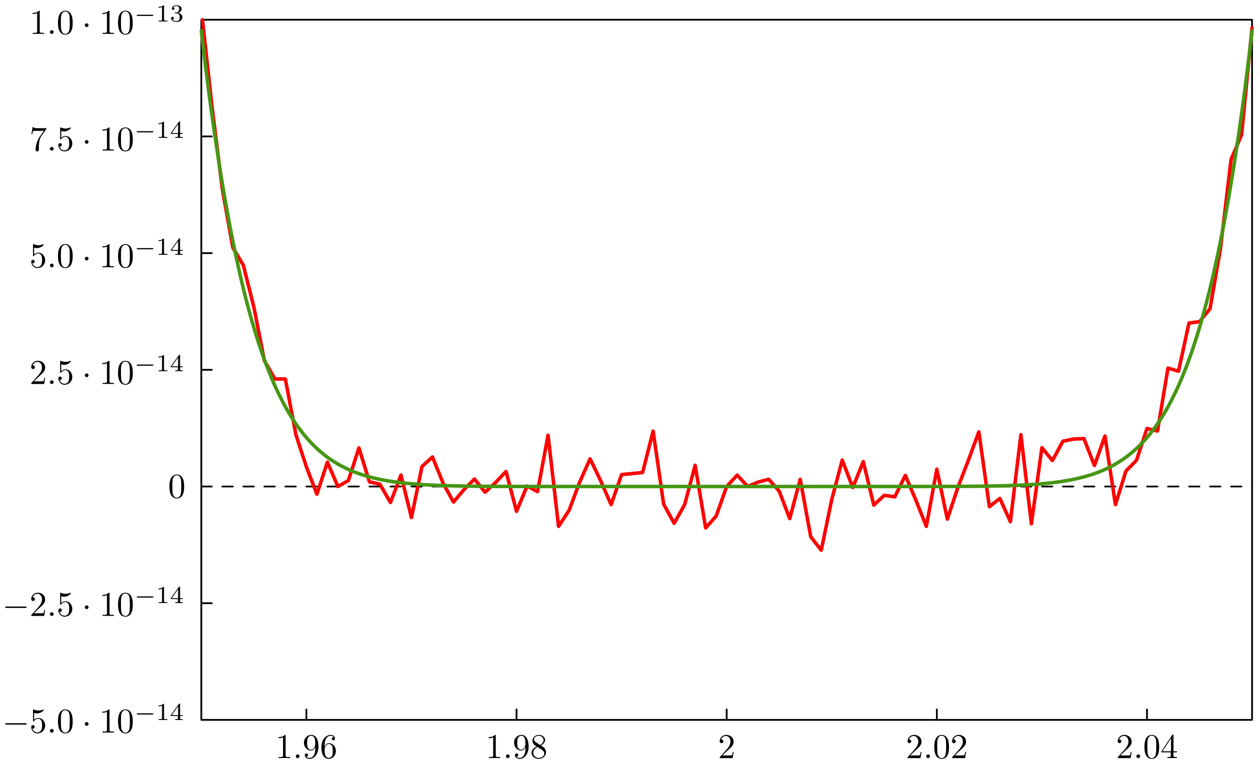
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 1$ (2)

$$(x-1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5$$
$$+ 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$



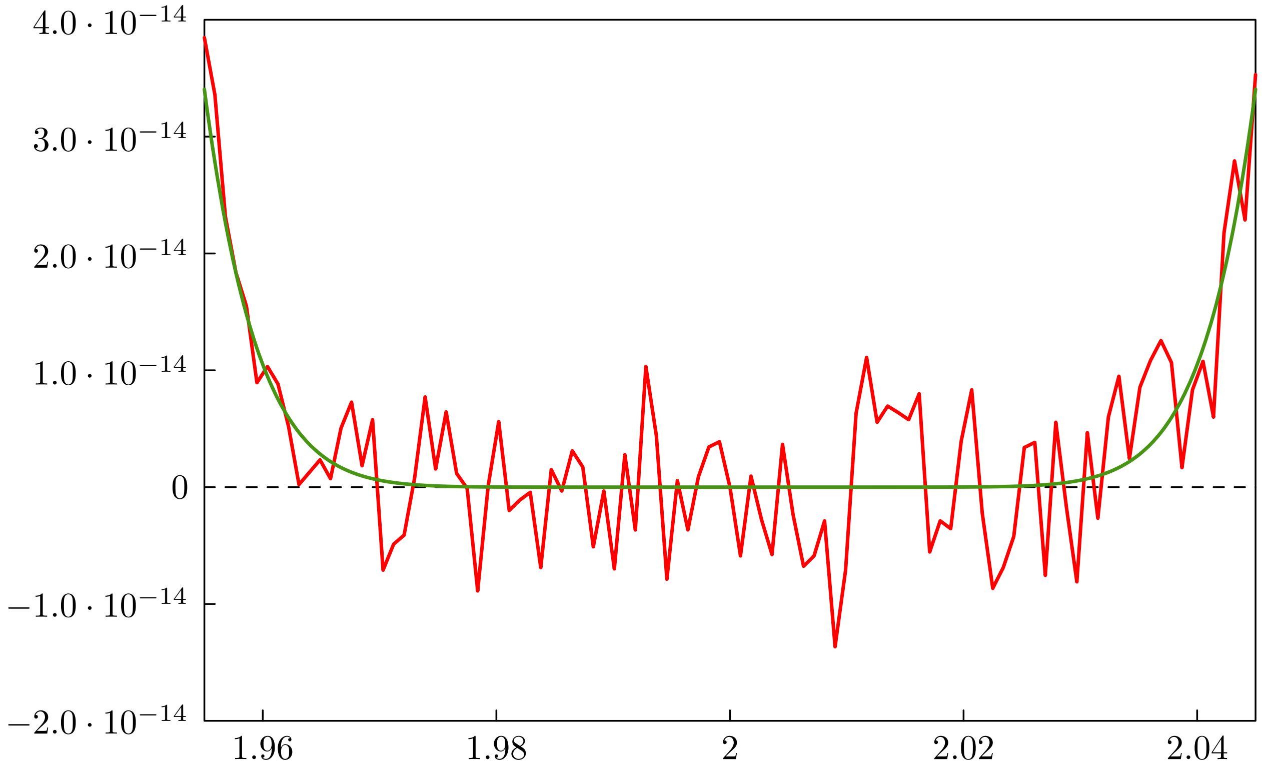
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 2$ (1)

$$(x-2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5$$
$$+ 13440x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



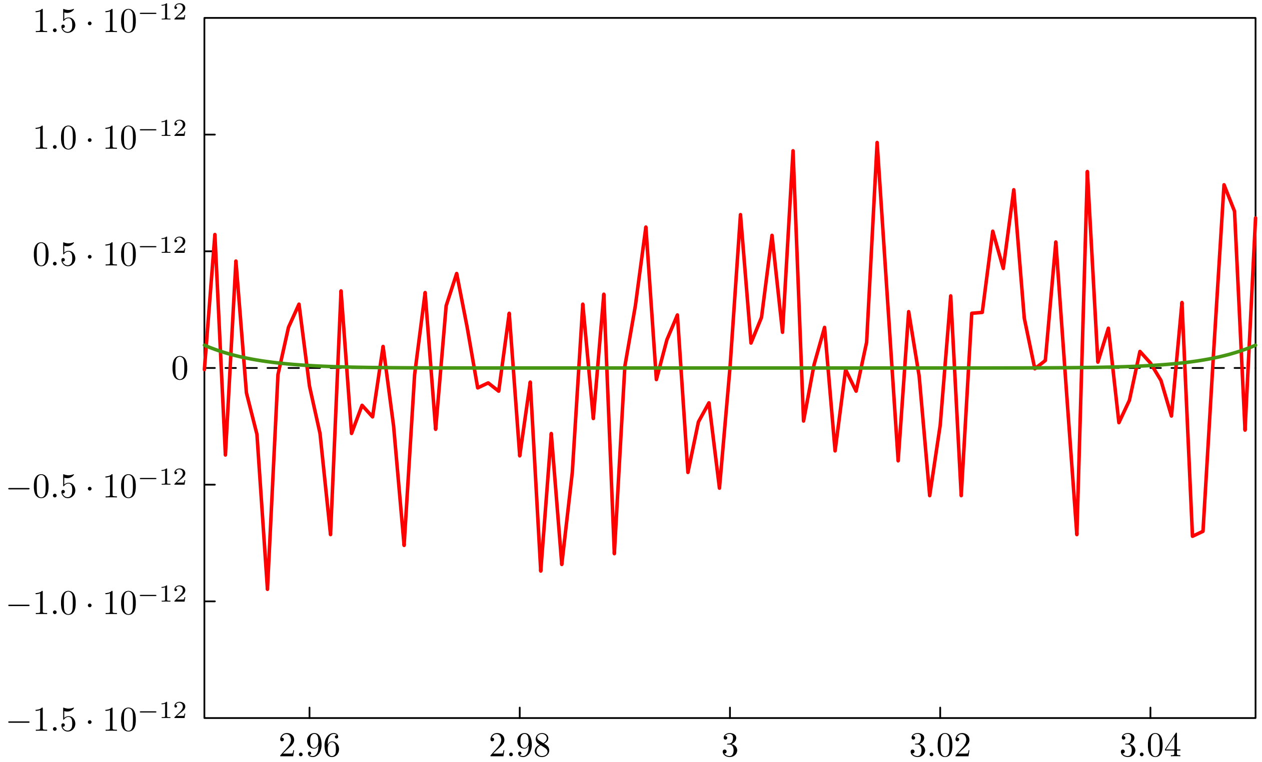
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 2$ *(2)*

$$(x-2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5 + 13440x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



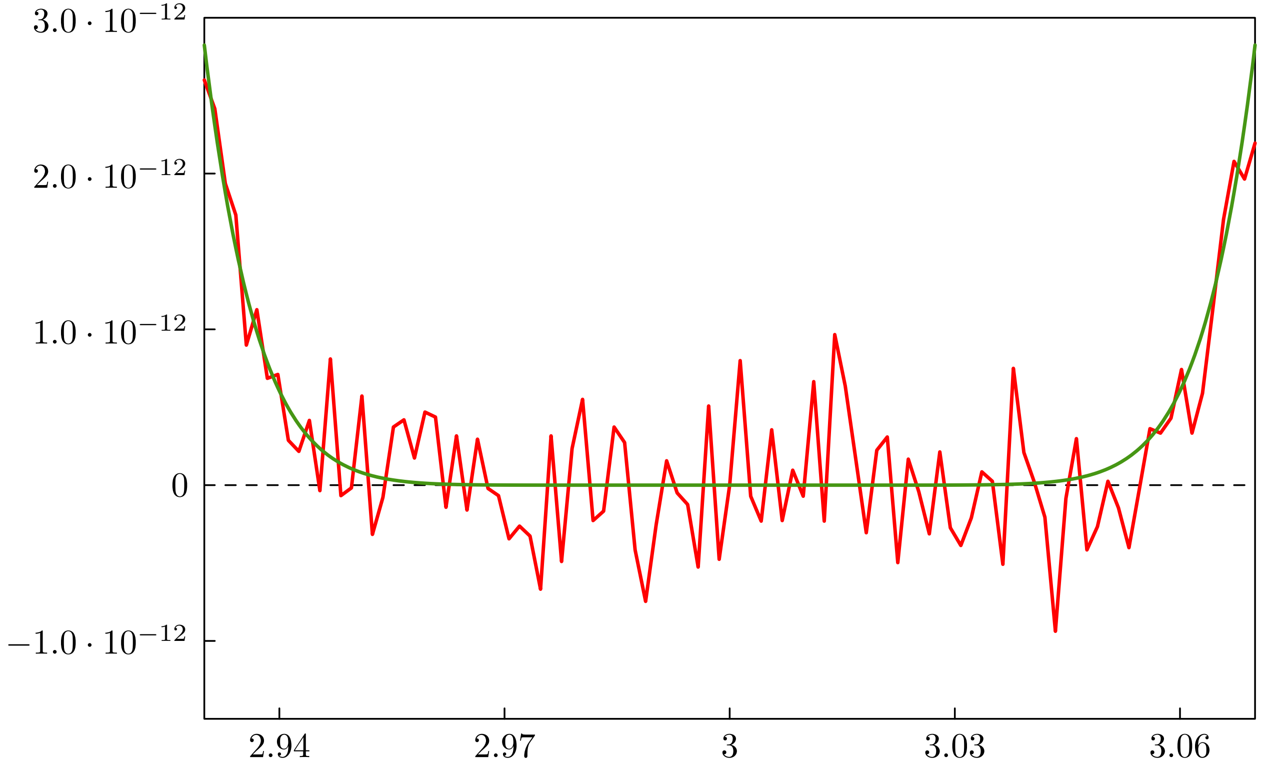
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 3$ (1)

$$(x-3)^{10} = x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 - 61236x^5 + 153090x^4 - 262440x^3 + 295245x^2 - 196830x + 59049$$



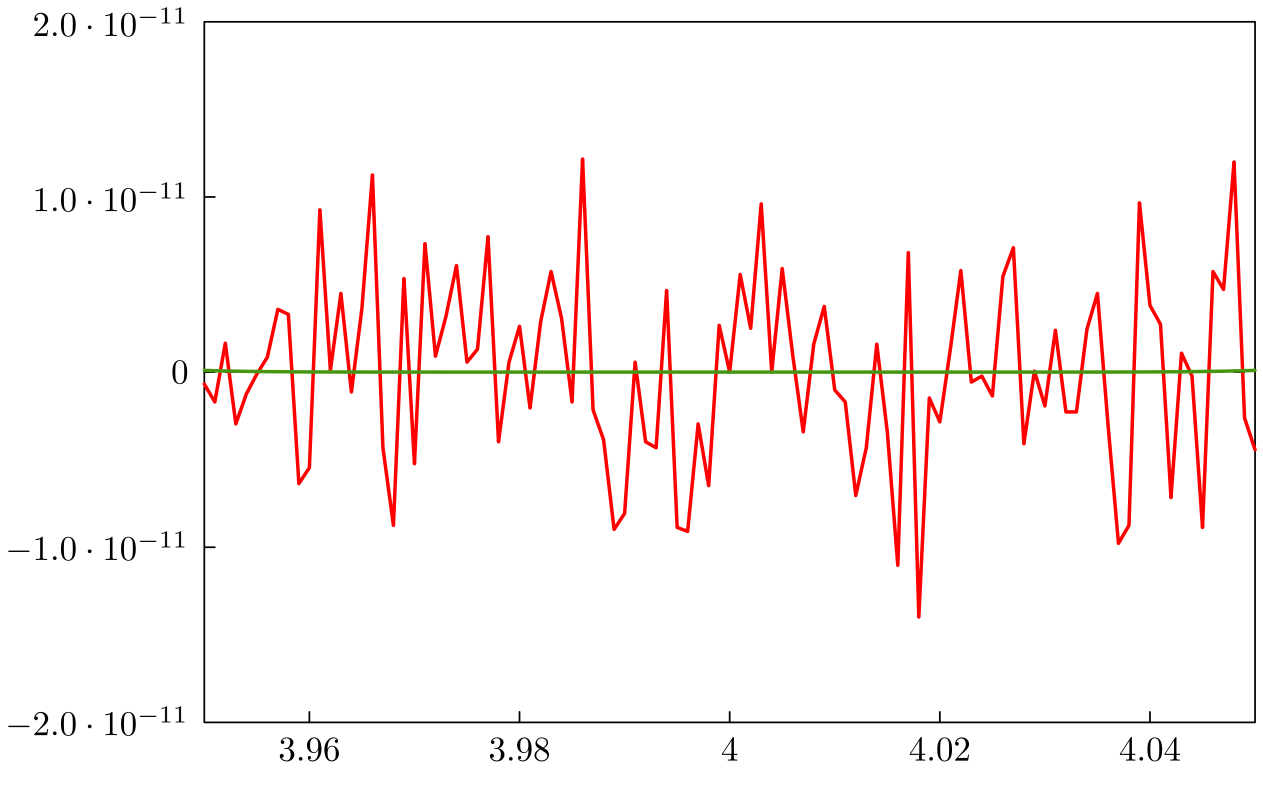
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 3$ (2)

$$(x-3)^{10} = x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 - 61236x^5$$
$$+ 153090x^4 - 262440x^3 + 295245x^2 - 196830x + 59049$$



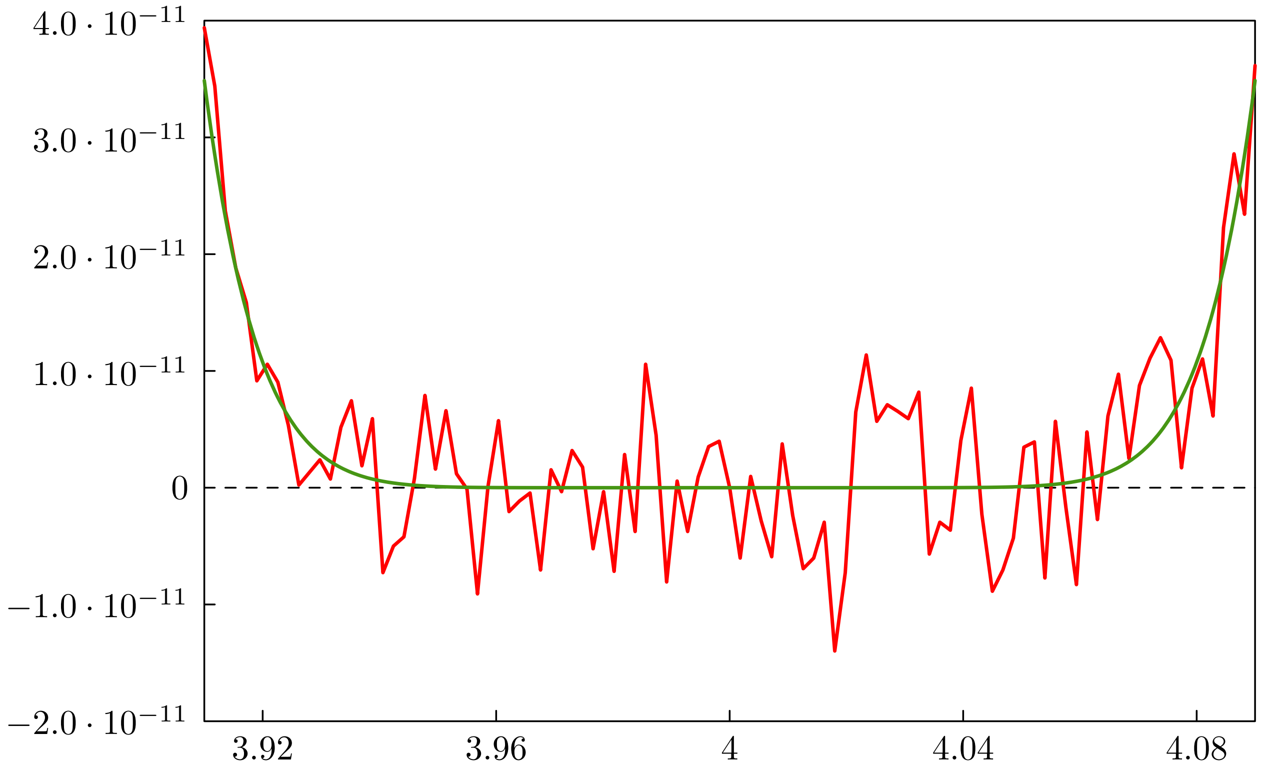
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 4$ (1)

$$
\begin{aligned}
(x-4)^{10} = x^{10} &- 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\
&- 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\
&+ 2949120x^2 - 2621440x + 1048576
\end{aligned}
$$



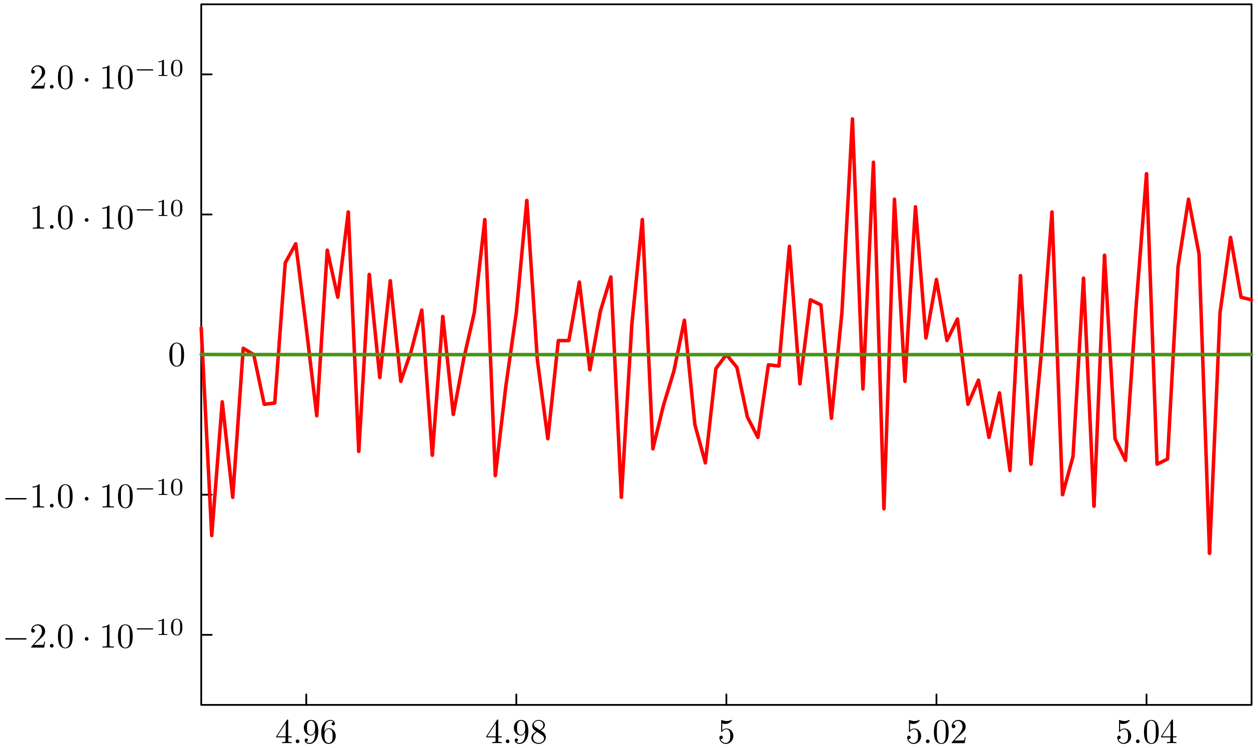
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 4$ (2)

$$
\begin{aligned}
(x-4)^{10} = x^{10} &- 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\
&- 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\
&+ 2949120x^2 - 2621440x + 1048576
\end{aligned}
$$



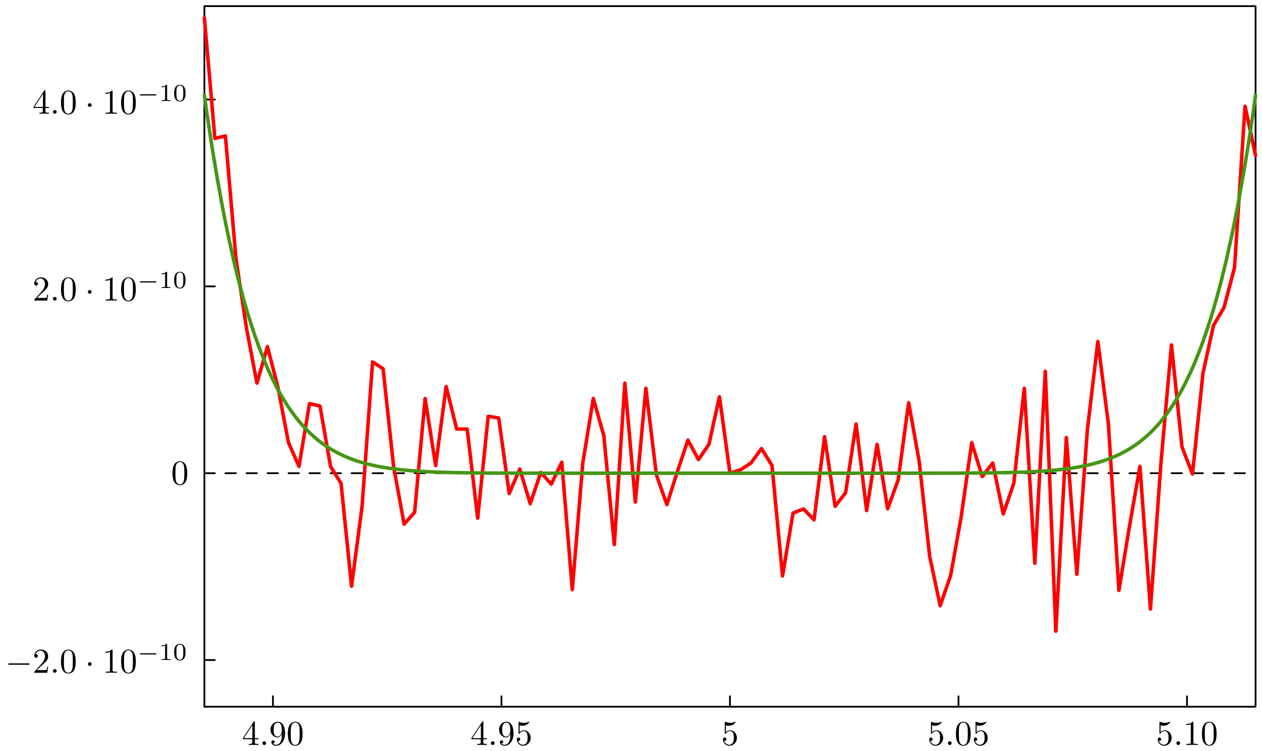
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 5$ *(1)*

$$
\begin{aligned}
(x-5)^{10} = x^{10} &- 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\
&- 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\
&+ 17578125x^2 - 19531250x + 9765625
\end{aligned}
$$



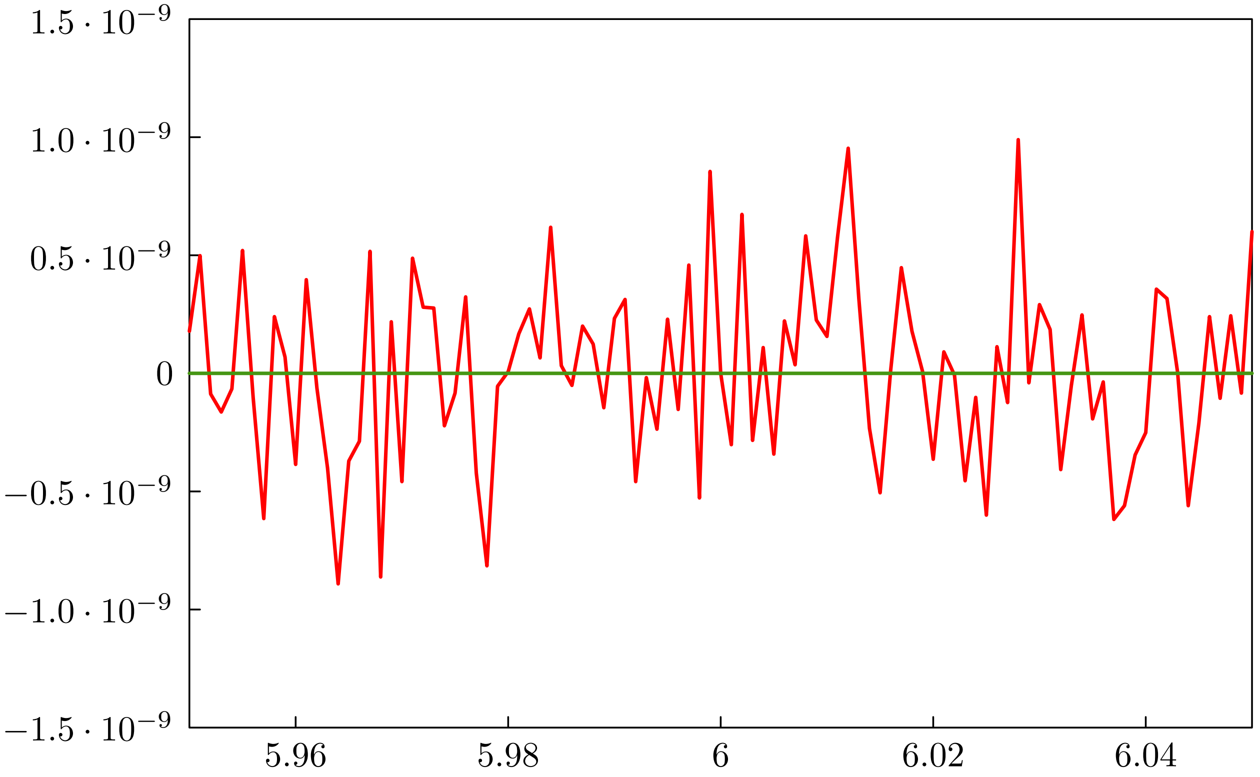
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 5$ (2)

$$
\begin{aligned}
(x-5)^{10} = x^{10} &- 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\
&- 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\
&+ 17578125x^2 - 19531250x + 9765625
\end{aligned}
$$



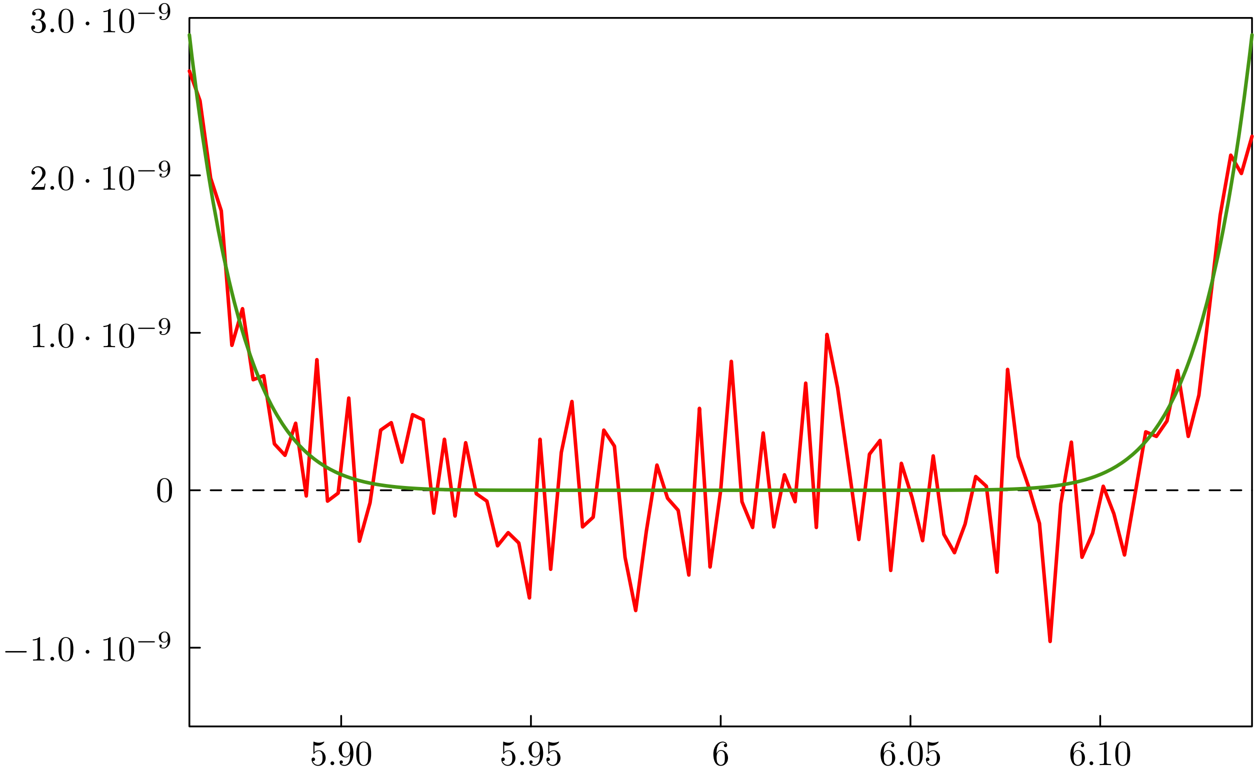
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 6$ *(1)*

$$
\begin{aligned}
(x-6)^{10} = x^{10} &- 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\
&- 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\
&+ 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176
\end{aligned}
$$



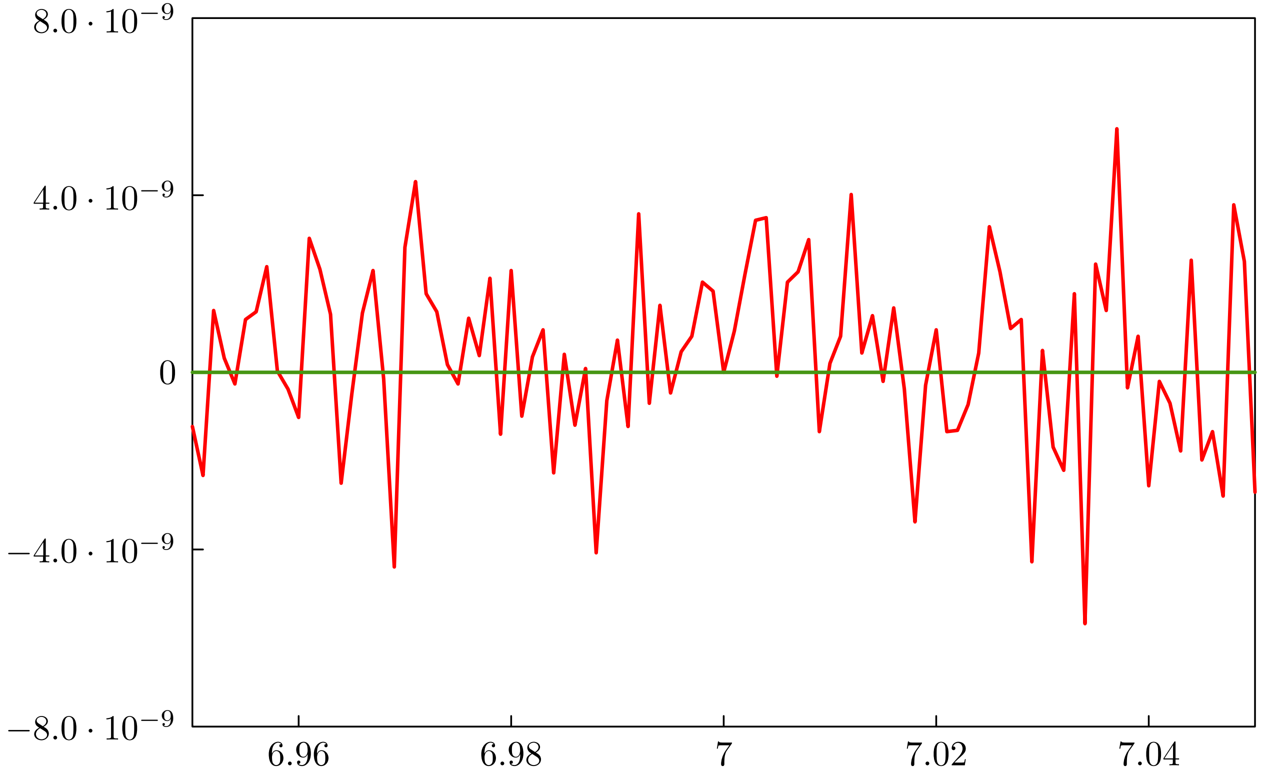
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 6$ (2)

$$
\begin{aligned}
(x-6)^{10} = x^{10} &- 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\
&- 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\
&+ 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176
\end{aligned}
$$



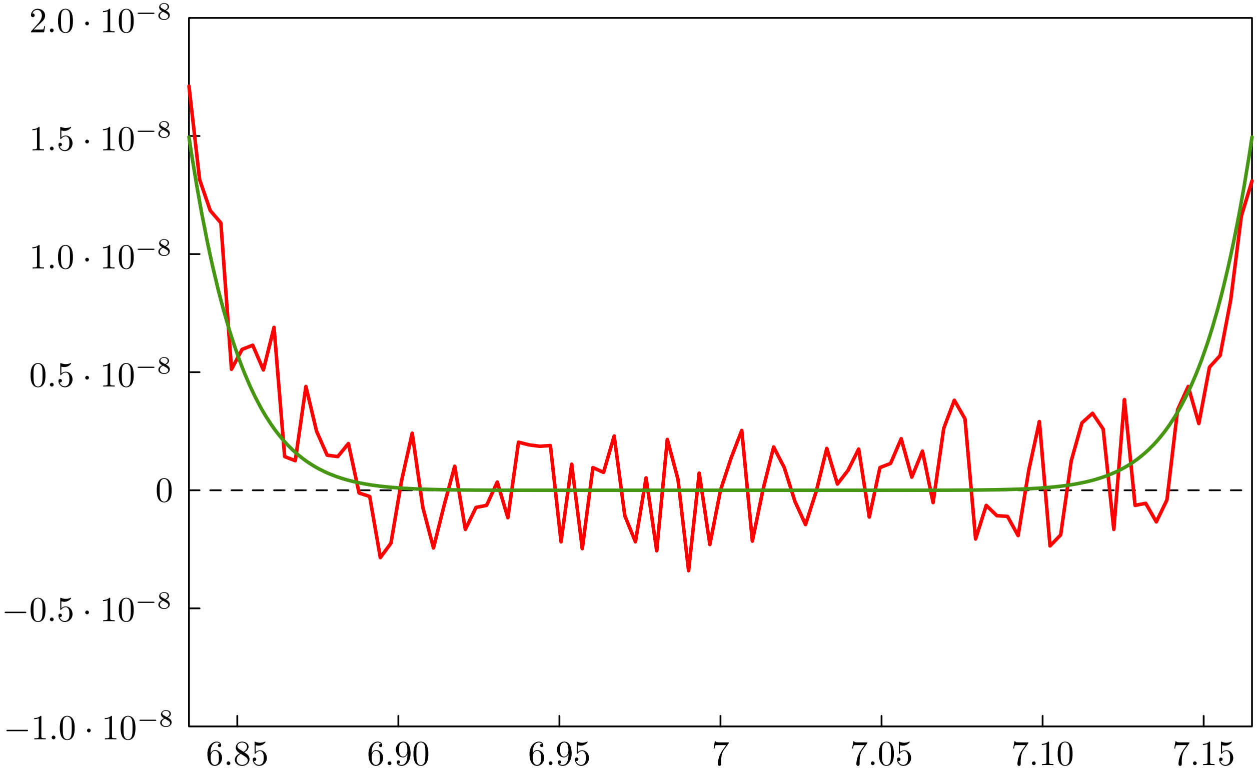
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 7$ (1)

$$
\begin{aligned}
(x-7)^{10} = x^{10} &- 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\
&- 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\
&+ 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249
\end{aligned}
$$



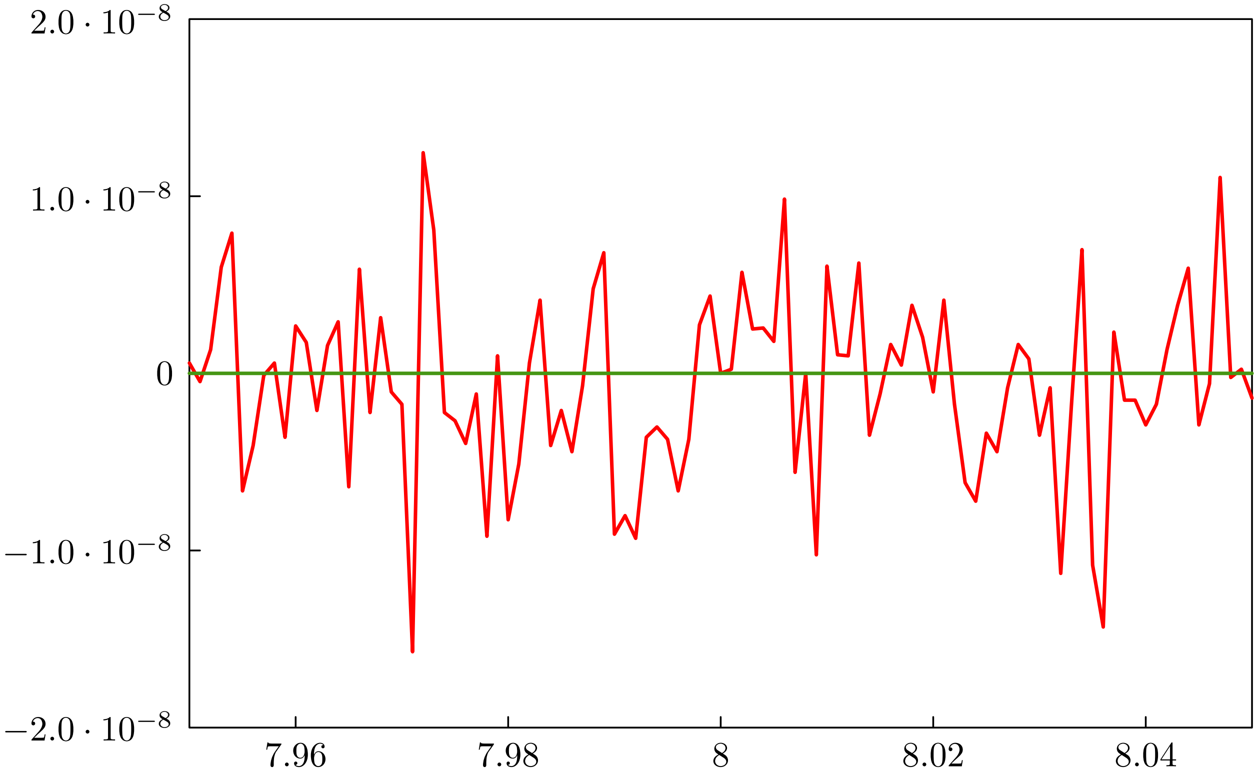
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 7$ (2)

$$
\begin{aligned}
(x-7)^{10} = x^{10} &- 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\
&- 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\
&+ 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249
\end{aligned}
$$



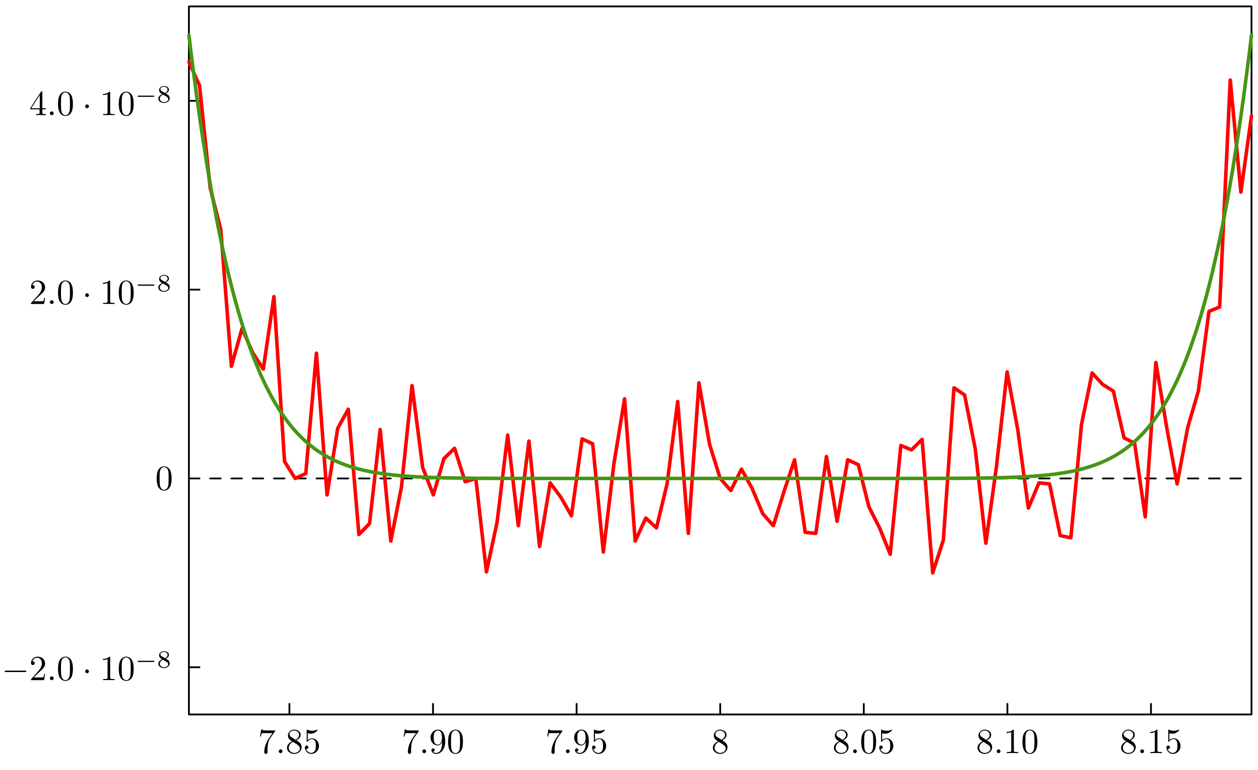
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 8$ *(1)*

$$
\begin{aligned}
(x-8)^{10} = x^{10} &- 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\
&- 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\
&+ 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824
\end{aligned}
$$



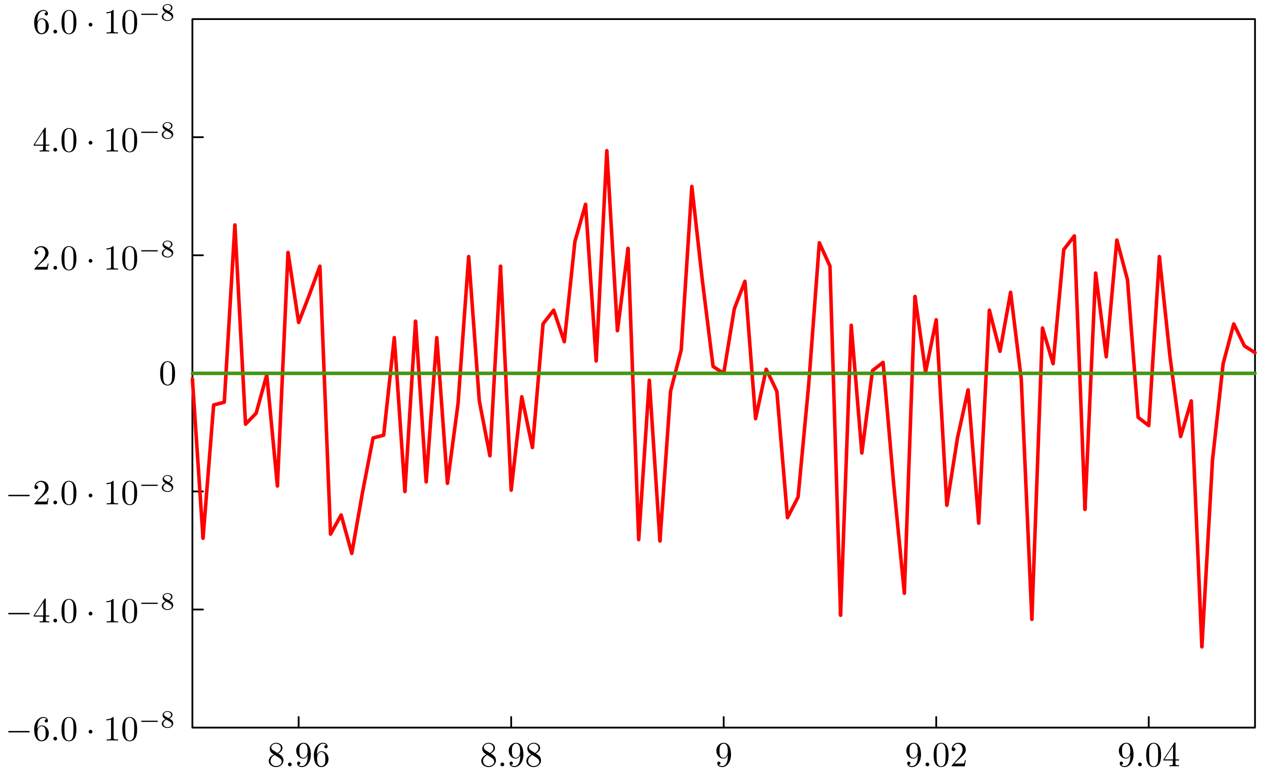
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 8$ (2)

$$\begin{aligned}(x-8)^{10} = x^{10} &- 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\ &- 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\ &+ 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824\end{aligned}$$



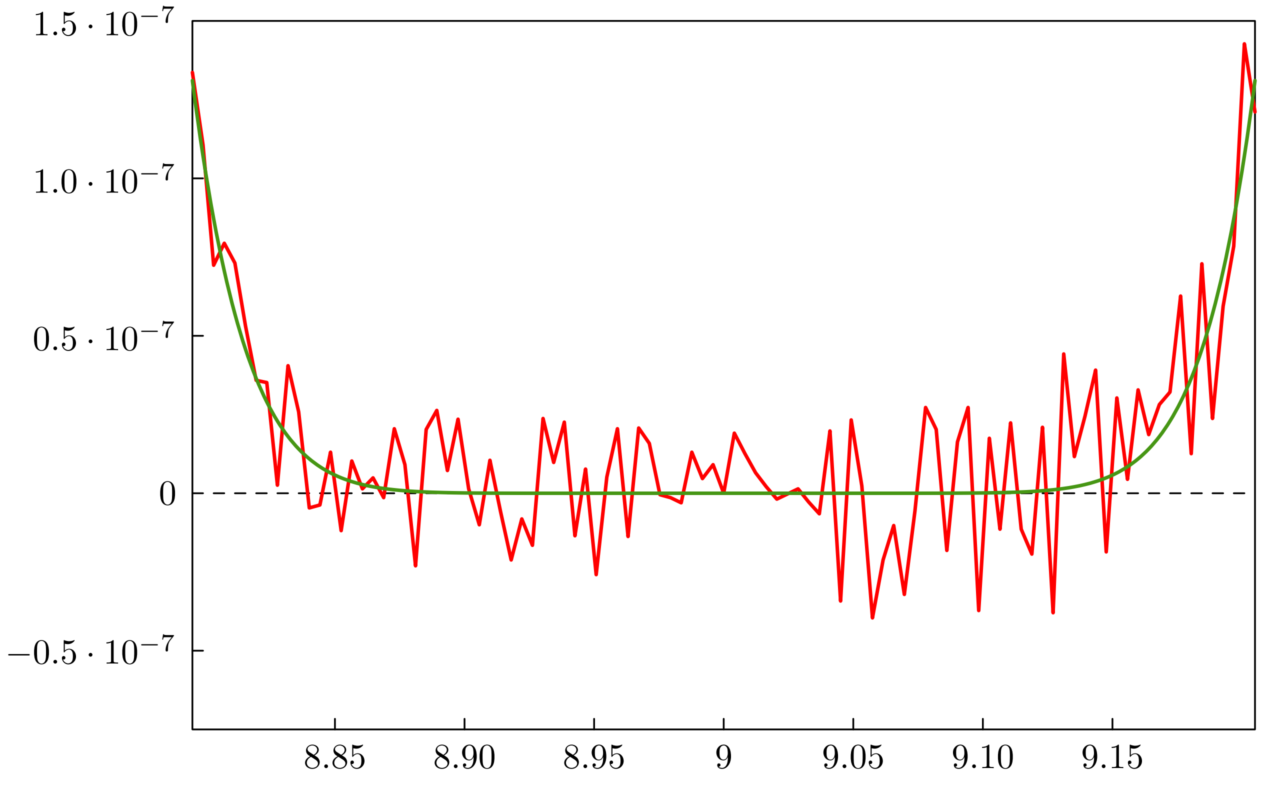
Primjer rasprostiranja grešaka** — $n = 9$ **(1)

$$(x-9)^{10} = x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\ - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\ + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401$$



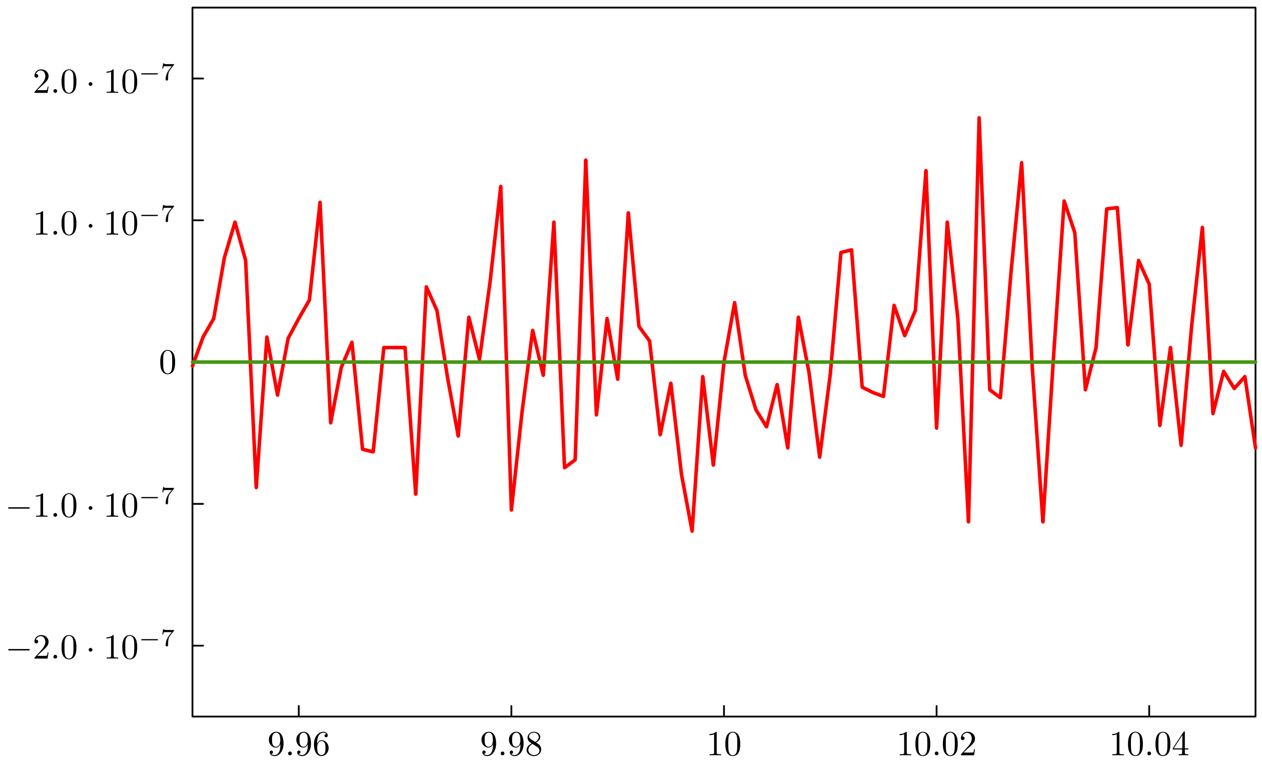
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 9$ (2)

$$\begin{aligned}(x-9)^{10} = x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\ - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\ + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401\end{aligned}$$



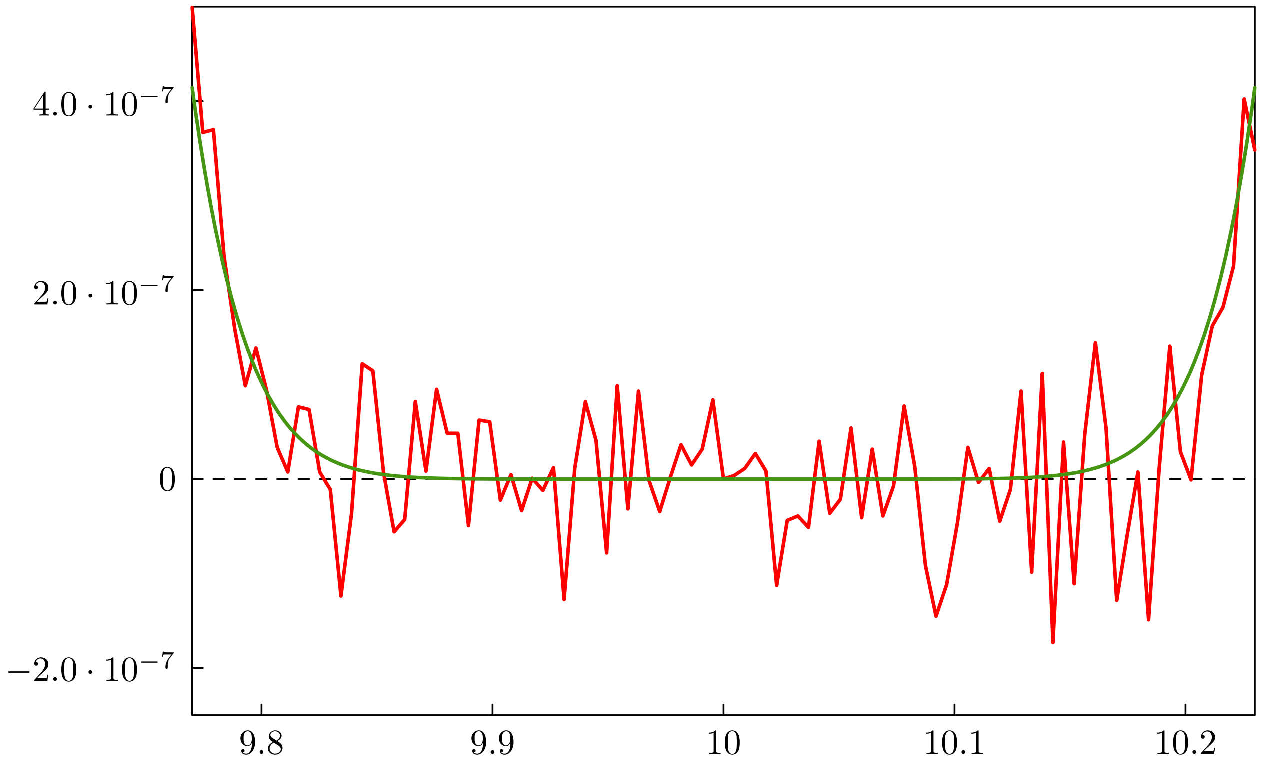
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 10$ (1)

$$
\begin{aligned}
(x-10)^{10} = x^{10} &- 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\
&- 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\
&+ 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000
\end{aligned}
$$



Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 10$ *(2)*

$$(x-10)^{10} = x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\ - 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\ + 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000$$



Primjeri izbjegavanja kraćenja

Kvadratna jednadžba

Uzmimo da treba riješiti (realnu) kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su a, b i c zadani, i vrijedi $a \neq 0$.

Matematički gledano, problem je lagan: imamo 2 rješenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Numerički gledano, problem je mnogo izazovniji:

- ni uspješno računanje po ovoj formuli,
- ni točnost izračunatih korijena,

ne možemo uzeti "zdravo za gotovo".

Kvadratna jednadžba — problem

Primjer: $x^2 - 56x + 1 = 0$. U aritmetici s 5 decimala dobijemo

$$x_1 = \frac{56 - \sqrt{3132}}{2} = \frac{56 - 55.964}{2} = 0.018000,$$

$$x_2 = \frac{56 + \sqrt{3132}}{2} = \frac{56 + 55.964}{2} = 55.982.$$

Točna rješenja su

$$x_1 = 0.0178628\ldots \quad \text{i} \quad x_2 = 55.982137\ldots .$$

Manji od ova dva korijena — x_1, ima samo dvije točne znamenke (kraćenje).

Kvadratna jednadžba — popravak

Prvo izračunamo većeg po apsolutnoj vrijednosti, po formuli

$$x_2 = \frac{-(b + \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a},$$

a manjeg po apsolutnoj vrijednosti, izračunamo iz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

(Vieta), tj. formula za x_1 je

$$x_1 = \frac{c}{x_2\, a}.$$

Opasnog kraćenja za x_1 više nema!

Kvadratna jednadžba (nastavak)

Ovo je bila samo jedna, od (barem) tri "opasne" točke za računanje. Preostale dvije su:

- "kvadriranje" pod korijenom — mogućnost za overflow. Rješenje — "skaliranjem".
- oduzimanje u diskriminanti (kraćenje) — nema jednostavnog rješenja.
  - To je odraz nestabilnosti problema, jer tad imamo dva bliska korijena koji su osjetljivi na male perturbacije koeficijenata jednadžbe.
  - Na primjer, pomak c = pomak grafa "gore–dolje".

Neki primjeri izbjegavanja kraćenja

Primjer. Treba izračunati

$$y = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x},$$

gdje su x i δ zadani ulazni podaci, s tim da je $x > 0$,

- a $|\delta|$ vrlo mali broj.

U ovoj formuli, očito, dolazi do velike greške zbog kraćenja — zaokruživanje korijena prije oduzimanja.

Ako formulu "deracionaliziramo" u oblik

$$y = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}},$$

problema više nema!

Neki primjeri izbjegavanja kraćenja

Primjer. Treba izračunati

$$y = \cos(x + \delta) - \cos x,$$

gdje su x i δ zadani ulazni podaci, s tim da je $|\cos x|$ razumno velik,

- a $|\delta|$ vrlo mali broj.

Opet, dolazi do velike greške zbog kraćenja.

Ako formulu napišmo u "produktnom" obliku

$$y = -2 \sin\frac{\delta}{2} \sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right),$$

problema više nema!