Numerička matematika
5. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Interpolacija polinomima:
  - Problem interpolacije polinomima.
  - Egzistencija i jedinstvenost.
  - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
  - Lagrangeova baza.
  - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
  - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.
  - Newtonova baza i podijeljene razlike.
  - Računanje Newtonovog oblika IP.
  - Newton za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
  - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
  - Primjer Runge.

Informacije — zadaće

Bitno: "Oživile" su i domaće zadaće iz NM.

- Realizacija ide "automatski" — preko web aplikacije, slično kao na Prog1.

Pogledajte na službeni web kolegija, pod "zadaće".

- Tamo su početne upute.

Skraćeni link je

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

Direktni link na aplikaciju za zadaće je

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Tamo su kompletna predavanja od prošle dvije godine, a stizat će i nova (kako nastaju).

- Prva 2 su još nesređena — onako kako ste ih vidjeli!

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Informacije — demonstratori

Kolegij "Numerička matematika" ima čak 3 demonstratora:

- Ervin Duraković, Nika Kenda i Marin Mišur.

Za upute za dogovor i termine demonstratura

- pogledajte oglase na oglasnoj ploči i
- web stranicu kolegija — pod "nastava".

Interpolacija polinomima

Interpolacija polinomima

Neka je funkcija f zadana na

- diskretnom skupu različitih točaka x_k, za $k = 0, \ldots, n$, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Komentar. Kad bismo dozvolili da je $x_i = x_j$, za neke $i \neq j$,

- ili f nije funkcija (ako je $f_i \neq f_j$),
- ili imamo redundantan podatak (ako je $f_i = f_j$).

Ako je $[a, b]$ segment, u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b,$$

ali to ovdje nije bitno.

Egzistencija i jedinstvenost

Pitanja.

- Uz koje uvjete postoji interpolacijski polinom?
- Je li jedinstven?

Odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za zadane točke (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstveni interpolacijski polinom $\varphi \in \mathcal{P}_n$, stupnja najviše n

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Egzistencija i jedinstvenost

Dokaz. Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinom stupnja najviše n. Uvjete interpolacije napišimo u obliku linearnog sustava s nepoznanicama $a_0, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\ p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n. \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava regularna, pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Egzistencija i jedinstvenost

Provjeru regularnosti napravit ćemo računanjem vrijednosti determinante.

Pripadna determinanta je tzv. Vandermondeova determinanta

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Egzistencija i jedinstvenost

Definiramo determinantu koja "naliči" na D_n, samo umjesto x_n, stavimo da je posljednji redak u $V_n(x)$ funkcija od x:

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$D_n = V_n(x_n).$$

Promatrajmo $V_n(x)$ kao funkciju varijable x.

Egzistencija i jedinstvenost

Razvojem po posljednjem retku uočavamo da je

- $V_n(x)$ polinom stupnja najviše n u varijabli x,
- koeficijent tog polinoma uz x^n je D_{n-1} — "križanje" zadnjeg retka i stupca.

Ako u determinantu $V_n(x)$, redom, uvrštavamo $x_0, \ldots, x_{n-1}$,

- determinanta $V_n(x_k)$, za $k = 0, \ldots, n-1$, ima dva jednaka retka,

pa je

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \cdots = V_n(x_{n-1}) = 0,$$

tj. točke $x_0, \ldots, x_{n-1}$ su nultočke polinoma $V_n(x)$ stupnja n.

Egzistencija i jedinstvenost

Za polinom $V_n(x)$ stupnja n znamo

- vodeći koeficijent — D_{n-1},
- sve nultočke — $x_0, \ldots, x_{n-1}$,

pa $V_n(x)$ možemo napisati kao

$$V_n(x) = D_{n-1}\,(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Uvrštavanjem $x = x_n$, dobivamo rekurzivnu relaciju za D_n

$$D_n = D_{n-1}\,(x_n - x_0)\,(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Odmah vidimo da je $D_0 = 1$ (lijevi gornji kut!), pa je

$$D_n = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Egzistencija i jedinstvenost

Budući da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, onda je

$$D_n \neq 0,$$

tj. matrica linearnog sustava je regularna, pa

- postoji jedinstveno rješenje $a_0, \ldots, a_n$ za koeficijente polinoma p_n,

odnosno jedinstveni interpolacijski polinom. ■

Napomena. Nadalje ćemo se baviti

- raznim formama interpolacijskog polinoma,
- koje će uvijek predstavljati isti interpolacijski polinom,

samo zapisan u raznim bazama.

Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ izaberemo bazu $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, onda interpolacijski polinom p_n možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente $a_0, \ldots, a_n$ ima oblik

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \cdots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0 \\ p_n(x_1) &= a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \cdots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n(x_n) &= a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \cdots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n. \end{aligned}$$

Pitanje: Može li se relativno jednostavno pronaći baza $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ za koju je matrica ovog sustava jedinična matrica?

Izbor baze za interpolaciju

Primjer

Primjer. Rješavanjem linearnog sustava za koeficijente, nađite interpolacijski polinom stupnja 40 koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin x,$$

na intervalu $[0, 20\pi]$ na ekvidistantnoj mreži točaka.

Vandermondeov linearni sustav je katastrofalno uvjetovan,

$$\kappa_2 \approx 5.027 \cdot 10^{82},$$

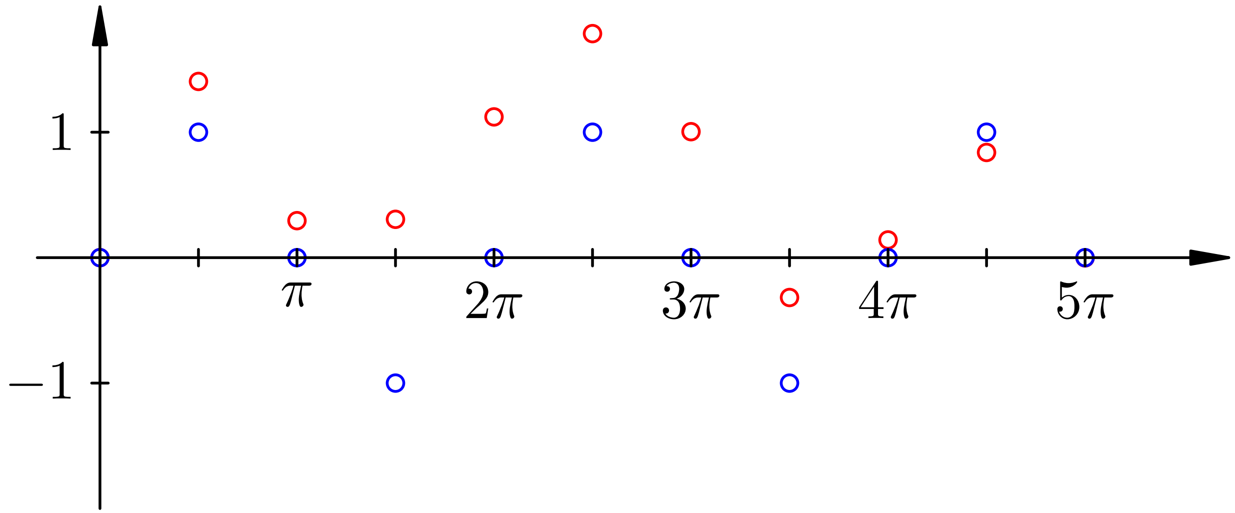
pa se očekuju greške u rješenju.

Kad izračunamo vrijednost u čvorovima interpolacije, greške su tolike da interpolacijski polinom ne interpolira zadane podatke — tj., ni rezidual nije malen.

Primjer (nastavak)

Legenda. Na slici je prikazan samo dio podataka

- plavim kružićima označeni su čvorovi interpolacije,
- crvenim kružićima označene su izračunate vrijednosti u čvorovima interpolacije.



Zaključak. Treba naći brži način računanja, koji u čvorovima daje grešku 0.

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Pogledajmo uvjetovanost Vandermondeovih matrica za neke standardne izbore mreža čvorova, u ovisnosti o broju čvorova.

Oznaka: Za zadani $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ promatramo mrežu s $n+1$ čvorova

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad x_0^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}.$$

Pripadnu Vandermondeovu matricu reda $n+1$ označavamo s

$$V^{(n+1)} = V^{(n+1)}\big(x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}\big),$$

a njezini elementi su

$$\big(V^{(n+1)}\big)_{ij} = \left(x_{i-1}^{(n)}\right)^{j-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n+1.$$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 1. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[-1,1]$,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^{0}$
2	$3.226 \cdot 10^{0}$
3	$8.012 \cdot 10^{0}$
4	$2.353 \cdot 10^{1}$
5	$6.383 \cdot 10^{1}$
6	$1.898 \cdot 10^{2}$
7	$5.354 \cdot 10^{2}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
8	$1.605 \cdot 10^{3}$
10	$1.395 \cdot 10^{4}$
12	$1.234 \cdot 10^{5}$
14	$1.105 \cdot 10^{6}$
16	$9.983 \cdot 10^{6}$
18	$9.085 \cdot 10^{7}$
20	$8.314 \cdot 10^{8}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
25	$2.131 \cdot 10^{11}$
30	$5.642 \cdot 10^{13}$
35	$1.496 \cdot 10^{16}$
40	$4.044 \cdot 10^{18}$
45	$1.093 \cdot 10^{21}$
50	$2.989 \cdot 10^{23}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
60	$2.253 \cdot 10^{28}$
70	$1.722 \cdot 10^{33}$
80	$1.329 \cdot 10^{38}$
90	$1.033 \cdot 10^{43}$
100	$8.083 \cdot 10^{47}$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 2. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[0,1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$2.618 \cdot 10^{0}$
2	$1.510 \cdot 10^{1}$
3	$9.887 \cdot 10^{1}$
4	$6.864 \cdot 10^{2}$
5	$4.924 \cdot 10^{3}$
6	$3.606 \cdot 10^{4}$
7	$2.678 \cdot 10^{5}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
8	$2.009 \cdot 10^{6}$
10	$1.156 \cdot 10^{8}$
12	$6.781 \cdot 10^{9}$
14	$4.032 \cdot 10^{11}$
16	$2.421 \cdot 10^{13}$
18	$1.465 \cdot 10^{15}$
20	$8.920 \cdot 10^{16}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
25	$2.628 \cdot 10^{21}$
30	$7.896 \cdot 10^{25}$
35	$2.404 \cdot 10^{30}$
40	$7.391 \cdot 10^{34}$
45	$2.289 \cdot 10^{39}$
50	$7.132 \cdot 10^{43}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
60	$7.018 \cdot 10^{52}$
70	$6.998 \cdot 10^{61}$
80	$7.048 \cdot 10^{70}$
90	$7.151 \cdot 10^{79}$
100	ne ide

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 3. Neekvidistantna “harmonijska” mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$6.342 \cdot 10^{0}$
2	$5.965 \cdot 10^{1}$
3	$7.532 \cdot 10^{2}$
4	$1.217 \cdot 10^{4}$
5	$2.404 \cdot 10^{5}$
6	$5.620 \cdot 10^{6}$
7	$1.518 \cdot 10^{8}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
8	$4.650 \cdot 10^{9}$
10	$6.033 \cdot 10^{12}$
12	$1.129 \cdot 10^{16}$
14	$2.878 \cdot 10^{19}$
16	$9.586 \cdot 10^{22}$
18	$4.041 \cdot 10^{26}$
20	$2.102 \cdot 10^{30}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
25	$9.112 \cdot 10^{39}$
30	$1.037 \cdot 10^{50}$
35	$2.649 \cdot 10^{60}$
40	$1.356 \cdot 10^{71}$
45	$1.277 \cdot 10^{82}$
50	$2.071 \cdot 10^{93}$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Za dani n, čvorovi "harmonijske" mreže su, redom,

$$x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \ldots\,, \quad x_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2}, \quad x_n^{(n)} = \frac{1}{1},$$

pa zato i naziv "harmonijska". Prvi čvor teži prema 0, kad $n \to \infty$.

Može se pokazati da je

$$\kappa_2(V^{(n+1)}) > (n+1)^{n+1}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, nije potrebno (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom p_n možemo napisati korištenjem tzv. Lagrangeove baze $\{\ell_k, k = 0, \ldots, n\}$ prostora polinoma $\mathcal{P}_n$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \qquad k = 0, \ldots, n.\end{aligned}$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Polinomi ℓ_k su stupnja n, pa je p_n polinom stupnja najviše n i vrijedi

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Kad to uvrstimo u p_n, vidimo da se suma svodi na jedan jedini član — za $i = k$, tj. da vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k,$$

čime smo pokazali da se radi o interpolacijskom polinomu u čvorovima (x_k, f_k), za $k = 0, \ldots, n$.

Iz oblika ℓ_k vidi se da je za računanje polinoma u Lagrangeovoj formi potrebno $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

zovemo polinom čvorova.

Polinome $\ell_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$\ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega_k(x_k)}.$$

Nadalje, lako se vidi da je $\omega_k(x_k) = \omega'(x_k)$, pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\, \omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$, za $k = 0, \ldots, n$ (za $x = x_k$ znamo da je $p_n(x_k) = f_k$). Broj operacija za svaku točku x je $O(n)$, tj. linearan u n.

Ipak, svrha Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma

- nije računanje vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za teoretske svrhe (dokaze).

Ako znamo neke informacije o funkciji f, možemo napraviti i ocjenu greške interpolacijskog polinoma. Razumno u praksi:

- f je "malo više" netrivijalno glatka od polinoma.

Greška interpolacijskog polinoma

Teorem. Pretpostavimo da

- funkcija f ima $(n+1)$-u derivaciju na segmentu $[a,b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $x_k \in [a,b]$, $k = 0, \ldots, n$, su međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- p_n je interpolacijski polinom za f u tim čvorovima.

Za bilo koju točku $x \in [a,b]$, postoji točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Greška interpolacijskog polinoma

Dokaz. 1. slučaj — ako je $x = x_k$, tj. x je čvor interpolacije.

Tada je $\omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan. Dakle, tvrdnja vrijedi!

2. slučaj — pretpostavimo da x nije čvor interpolacije.

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran (broj), čim x nije čvor.

Fiskirajmo x, a zatim definiramo funkciju $g = g_x$ u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t)\,\frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$

Greška interpolacijskog polinoma

Zaključak:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f, i one su neprekidne kad su to i derivacije od f;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g. Ako za t uvrstimo čvor x_k, dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k) \frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n + 2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Greška interpolacijskog polinoma

Budući da je g derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$,

- Rolleov teorem $\Longrightarrow g'$ ima barem $n+1$ nultočku unutar $(x_{\min}, x_{\max})$.

Tu koristimo $n \geq 0$, pa g' postoji.

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima bar $n+2-j$ nultočaka na $(x_{\min}, x_{\max})$, za $j = 0, \ldots, n+1$;
- za $j = n+1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Nultočka ξ, naravno, ovisi o x, kao i funkcija g.

Greška interpolacijskog polinoma

Nadalje,

- p_n je polinom stupnja najviše n, pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja $n + 1$,

pa je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!.$$

Uvrštavanjem $e^{(n+1)}(t)$ u $(n+1)$-u derivaciju za g, dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\, \frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\, \frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Greška interpolacijskog polinoma

Konačno, ako uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno,

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

što smo trebali dokazati. ■

Uočite: u dokazu je bitno

- samo da $f^{(n+1)}(x)$ postoji, za svaki $x \in [a, b]$,

bez daljnih zahtjeva (ograničenost, neprekidnost, i sl.).

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Pojačnje tvrdnje.

- Ako je $f^{(n+1)}$ ograničena na $[a, b]$, ili, jače,
- ako je $f \in C^{n+1}[a, b]$, tj. f ima neprekidnu $(n+1)$-u derivaciju na $[a, b]$,

onda vrijedi sljedeća "globalna" ocjena greške interpolacijskog polinoma p_n za funkciju f, u bilo kojoj točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \qquad M_{n+1} := \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost M_{n+1}.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- nije pogodan za povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji Newtonova forma interpolacijskog polinoma

- koja se izvodi tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije, tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Interpolacijski polinom stupnja 0

Nađimo konstantu koja interpolira funkciju f u točki x_0. Očito

$$p_0(x) = f_0.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Interpolacijski polinom stupnja 1

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1.
Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Uočimo

- r_1 mora biti stupnja 1;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

  tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$, odnosno r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0),$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

- iz uvjeta interpolacije u x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$, pa je

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Interpolacijski polinom stupnja 2

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2.
Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Uočimo

- r_2 mora biti stupnja 2;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 i x_1 imamo

$$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \qquad k = 0, 1$$

tj. mora biti $r_1(x_k) = 0$, odnosno r_2 mora imati oblik

$$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

- koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u x_2.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nastavimo li postupak, konstruirali smo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

tj. konstruirali smo "donju trokutastu" Newtonovu bazu

$$1, \quad (x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots\,, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n.

Sada samo treba odrediti koeficijente a_k.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da dižemo stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k ovisi samo o funkciji f i točkama $x_0, \ldots, x_k$.

Oznaka:

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k],$$

a veličinu $f[x_0, \ldots, x_k]$ zovemo k-ta podijeljena razlika.

Katkad se koristi "operatorska" oznaka $[x_0, \ldots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema. Za međusobno različite točke $x_0, \ldots, x_n$, podijeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_n]$ ne ovisi o permutaciji točaka σ, tj.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k — ako je poredak točaka $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k — ako je poredak točaka $x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \cdots + b_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Podijeljene razlike

Budući da se radi o istom polinomu

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije od x moraju biti jednaki;
- uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$.

∎

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \ldots, x_n]$.

Lema. Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$.

Podijeljene razlike

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k — ako je poredak točaka $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k — ako je poredak točaka $x_n, \ldots, x_0$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \cdots + b_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1}.

Podijeljene razlike

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao zbroj dva koeficijenta:

- koeficijent uz pretposljednji član u p_n, što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u posljednjem članu — u produktu faktora $\prod_{k=\cdots}^{\cdots}(x - x_k)$, uzmemo iz jedne zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x,

odnosno

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

Podijeljene razlike

pa dobivamo

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$

Budući da je

$$\begin{aligned} a_n &= f[x_0, \ldots, x_n], \\ a_{n-1} &= f[x_0, \ldots, x_{n-1}], \\ b_{n-1} &= f[x_n, \ldots, x_1] = f[x_1, \ldots, x_n], \end{aligned}$$

odmah izlazi tražena rekurzija.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz konstantnog interpolacijskog polinoma. ■

Tablica podijeljenih razlika

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & f[x_0, \ldots, x_n] \\
 & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & \iddots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo "gornji rub". To se može izračunati u jednom jednodimenzionalnom polju.

Algoritam računanja podijeljenih razlika

```
za i = 1 do n radi {
  za j = n do i radi {
    f[j] = (f[j] - f[j - 1])/(x[j] - x[j - i]);
  };
};
```

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nakon završetka algoritma za računanje podijeljenih razlika

- "gornji rub" $f[x_0, \ldots, x_i]$ se nalazi redom u polju `f`.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma u nekoj točki x ima oblik Hornerove sheme.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma

```
sum = f[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * (x - x[i]) + f[i];
};
/* Na kraju je p_n(x) = sum. */
```

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Grešku interpolacijskog polinoma (jednaku onoj iz Lagrangeove forme), možemo pisati korištenjem podijeljenih razlika.

Ideja. Dodajmo još jedan čvor x_{n+1} u Newtonov oblik polinoma, tako da je $x_{n+1} \in \langle a, b \rangle$, s tim da x_{n+1} nije jednak ni jednom od polaznih čvorova $x_0, \ldots, x_n$. Tada je

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0) \cdots (x - x_n). \\ = p_n(x) &+ (x - x_0) \cdots (x - x_n)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Budući da je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}),$$

onda je

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= p_n(x_{n+1}) \\ &\qquad + (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n)\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \\ &= p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Usporedimo to s ocjenom greške iz u Lagrangeovog oblika, (napisanoj u točki x_{n+1}, a ne x)

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \frac{\omega(x_{n+1})}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Iz prethodne formule odmah čitamo da je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ova se formula uobičajeno piše u ovisnosti o varijabli x, (tj. x_{n+1} se zamijeni s x), pa je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Zanimljivo je da ova formula vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti (v. Hermiteova interpolacija).

Podijeljene razlike visokog reda za polinome

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ polinom stupnja najviše n, onda je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0, \quad \text{za} \quad k \geq n+1,$$

za bilo koji izbor točaka $x_0, \ldots, x_k$.

Dokaz. Tada je $f^{(k)}(\xi) = 0$ u svakoj točki ξ. ∎

Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

- ako su čvorovi ekvidistantni.

Prisjetimo se, Newtonov interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja radi se u

- podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$,
- faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Pojednostavnimo prvo podijeljenu razliku.

Točke su ekvidistantne s “razmakom” (ili korakom) h, ako je

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Konačnu razliku unaprijed definiramo kao

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo operator konačnih razlika unaprijed.

Konačnu razliku reda k, za $k \in \mathbb{N}$, definiramo rekurzivno kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor (definiciju) $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Nađimo vezu podijeljenih i konačnih razlika.

Lema. Ako su točke x_j ekvidistantne, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!\, h^k} \Delta^k f_j.$$

Dokaz. Ide indukcijom po redu k.

Za $k = 0$, rezultat je očito istinit — po definiciji.

Baza indukcije. Za $k = 1$ imamo

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h},$$

pa tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Podijeljene i konačne razlike

Korak indukcije. Pretpostavimo da za sve uzastopne točke $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$, za bilo koji "dozvoljeni" j, vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}] = \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \, \Delta^{k-1} f_j.$$

Zaključak. Ako je $j + k \leq n$, onda je

$$\begin{aligned} f[x_j, \ldots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \\ &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{k \cdot h} = (\text{pretp. ind.}) \\ &= \frac{1}{kh} \left(\frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \, \Delta^{k-1} f_{j+1} - \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \, \Delta^{k-1} f_j \right) \\ &= \frac{1}{k!\, h^k} (\Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j) = \frac{1}{k!\, h^k} \, \Delta^k f_j. \end{aligned}$$

■

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Zapišimo prvo točku x preko početnog čvora x_0 i koraka h,

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

s tim da s može biti i realan broj. Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} \big((s - j)h\big) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Po definiciji binomnih koeficijenata, s tim da smije biti i $s \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{s}{0} = 1, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Odavde odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

Sada možemo napisati Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s ekvidistantnim čvorovima.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Uočimo da se faktor $h^k k!$ skrati:

- u nazivniku dolazi od konačnih razlika,
- a u brojniku od produkta $\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$,

pa interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ = \Delta^0 f_0 + \binom{s}{1} \Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica svih potrebnih konačnih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f_k & \Delta f_k & \Delta^2 f_k & \cdots & \Delta^n f_k \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \Delta^n f_0 \\
 & & \Delta f_{n-2} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Ova tablica se računa u jednom jednodimenzionalnom polju, kao i kod podijeljenih razlika.

Koliko je “dobar” interpolacijski polinom?

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera.

Legenda:

- crna boja — funkcija f,
- crvena boja — interpolacijski polinom p_n.

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo grafove interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

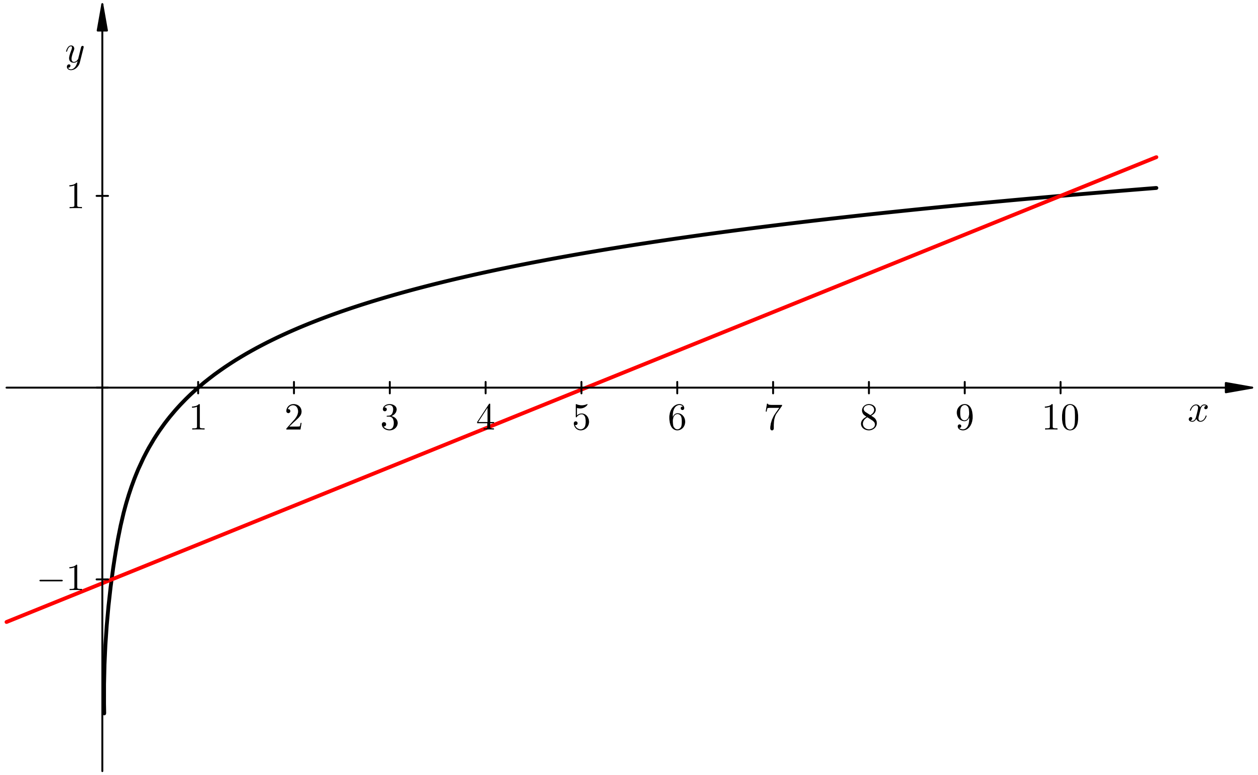
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je vrlo blizu tog singulariteta.

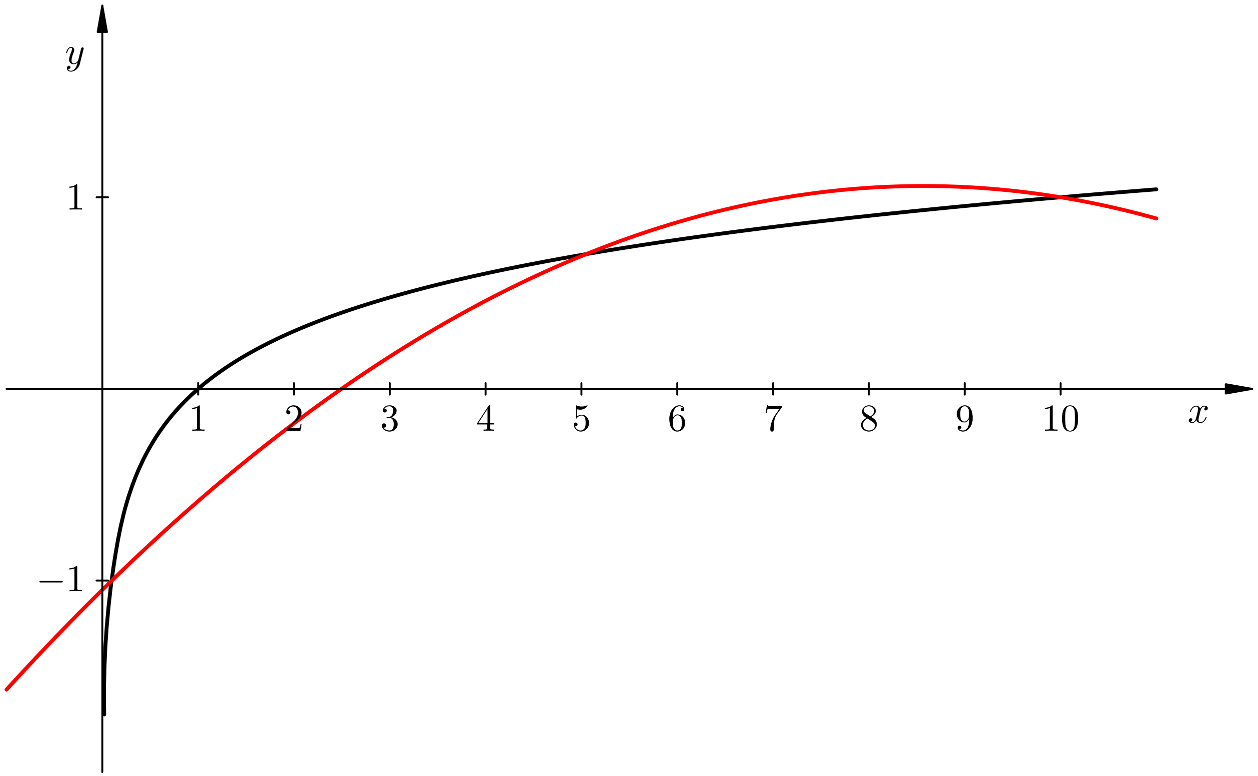
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša izvan intervala interpolacije.

Logaritam — ekvidistantna mreža



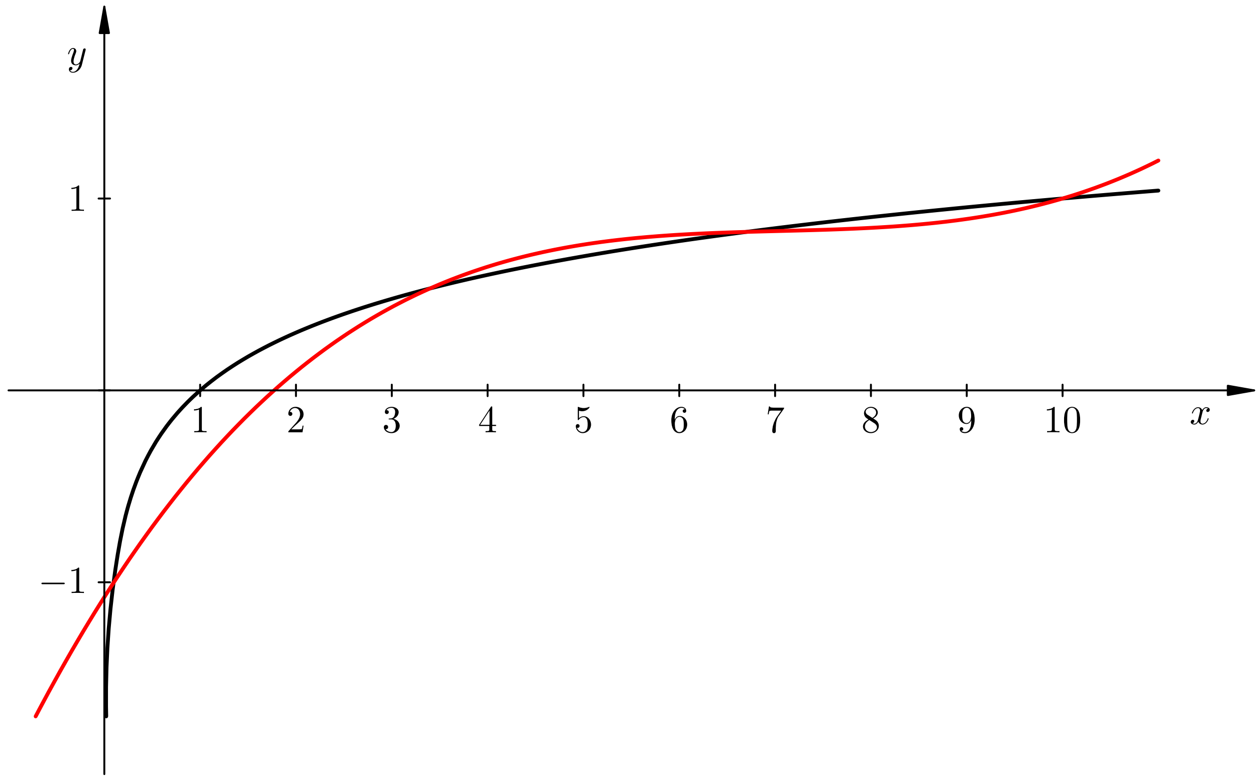
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



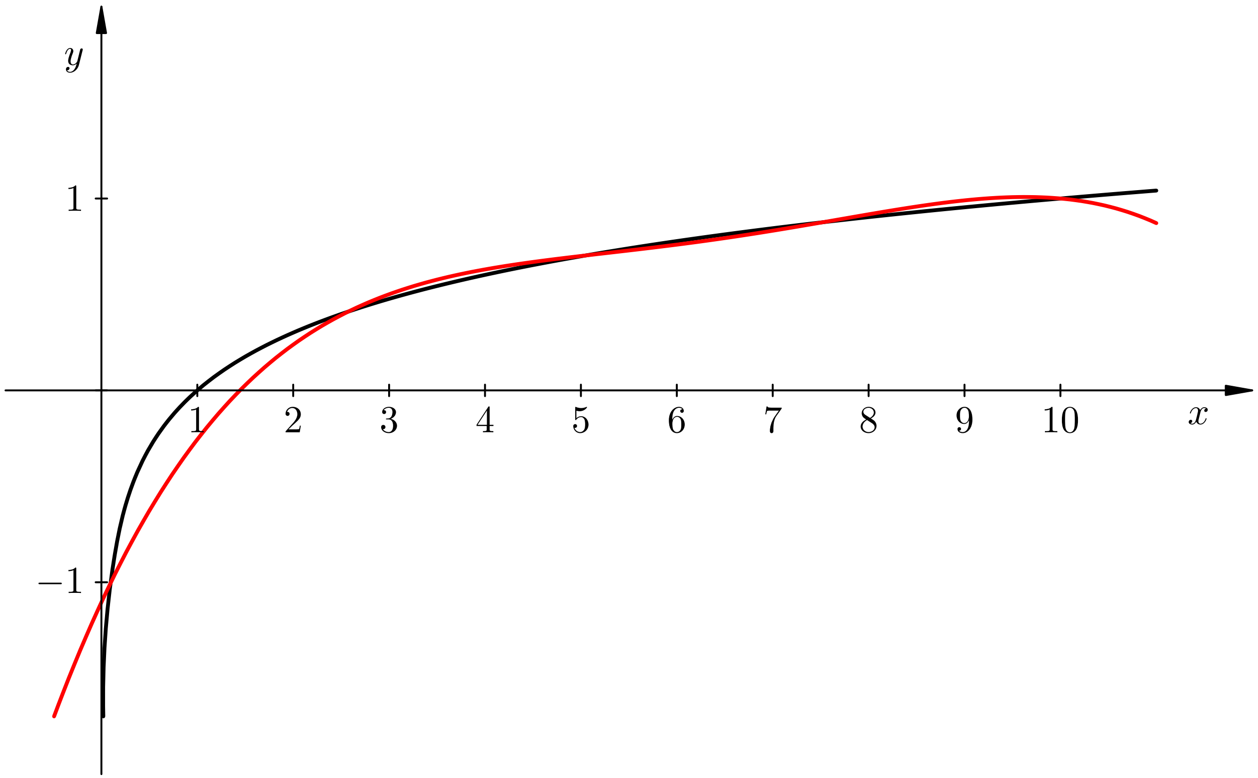
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



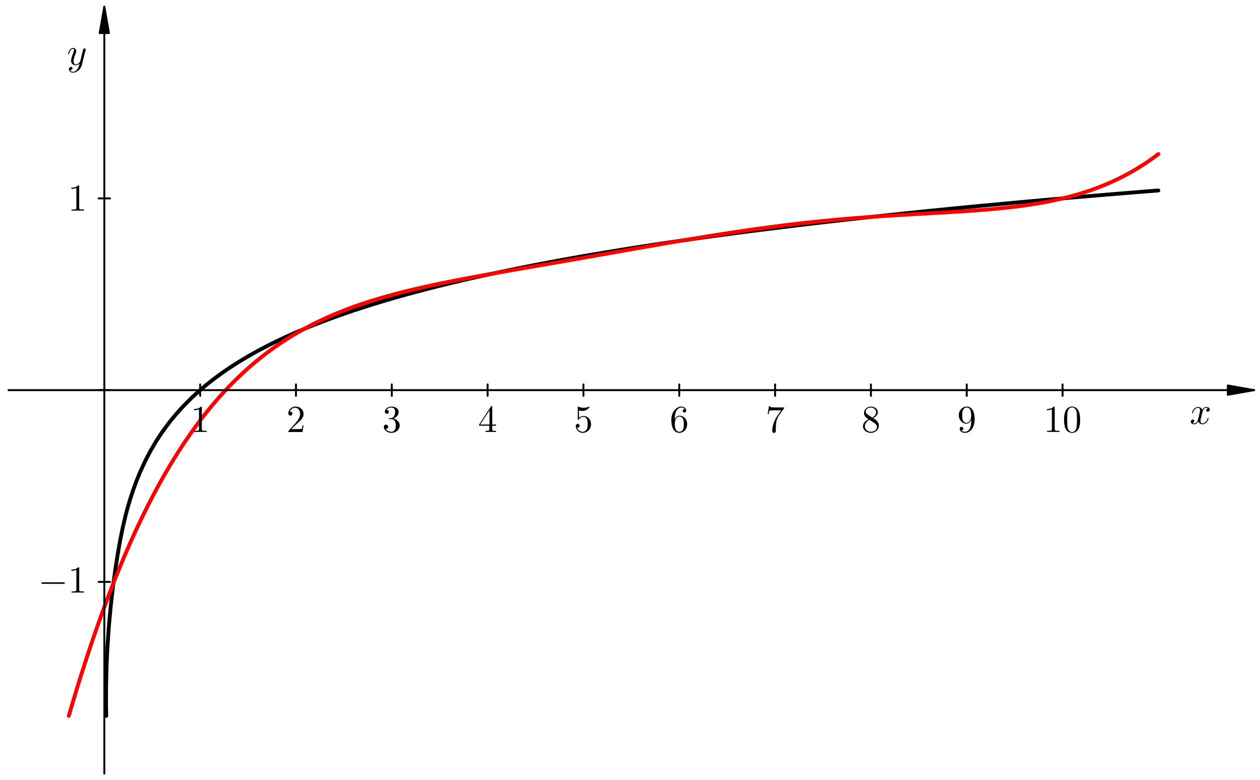
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



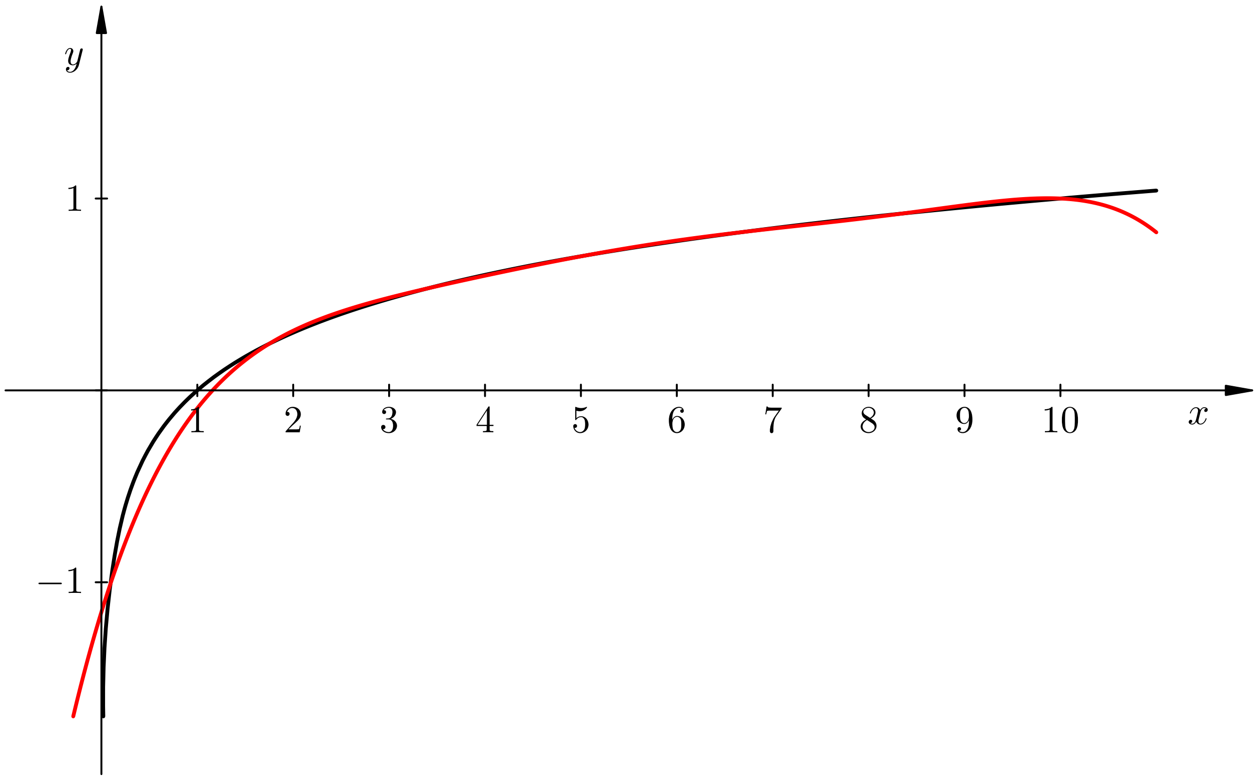
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



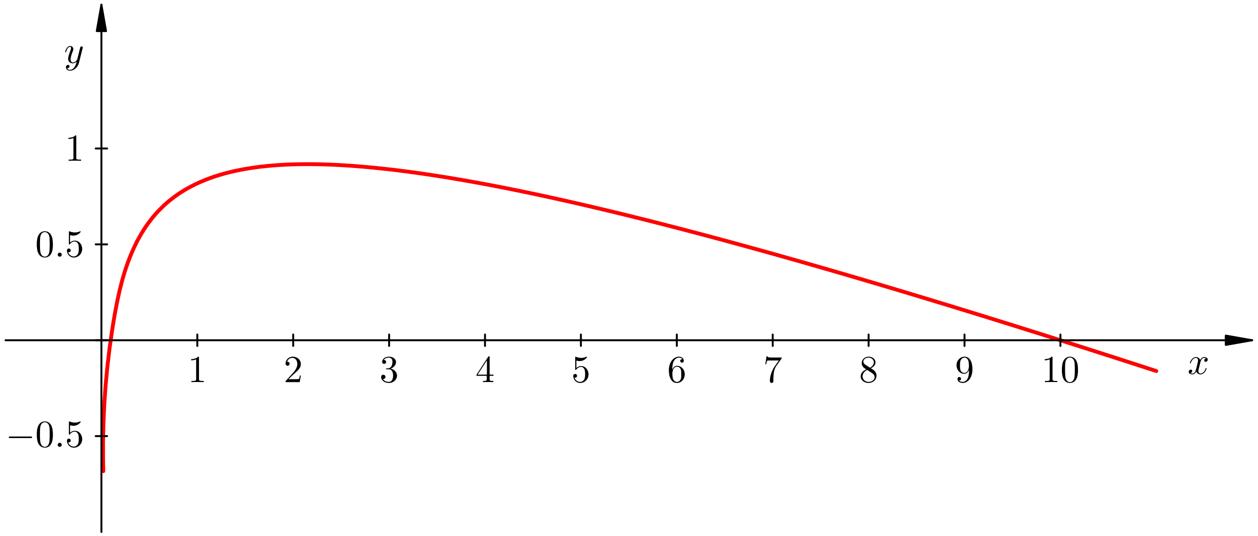
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

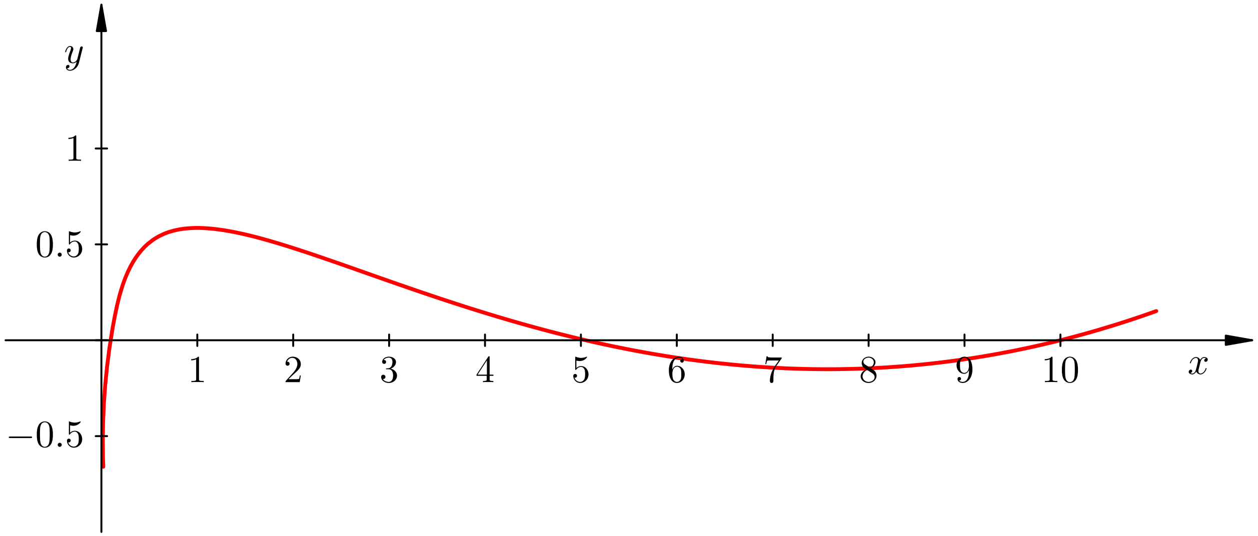
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite skalu na y-osi.

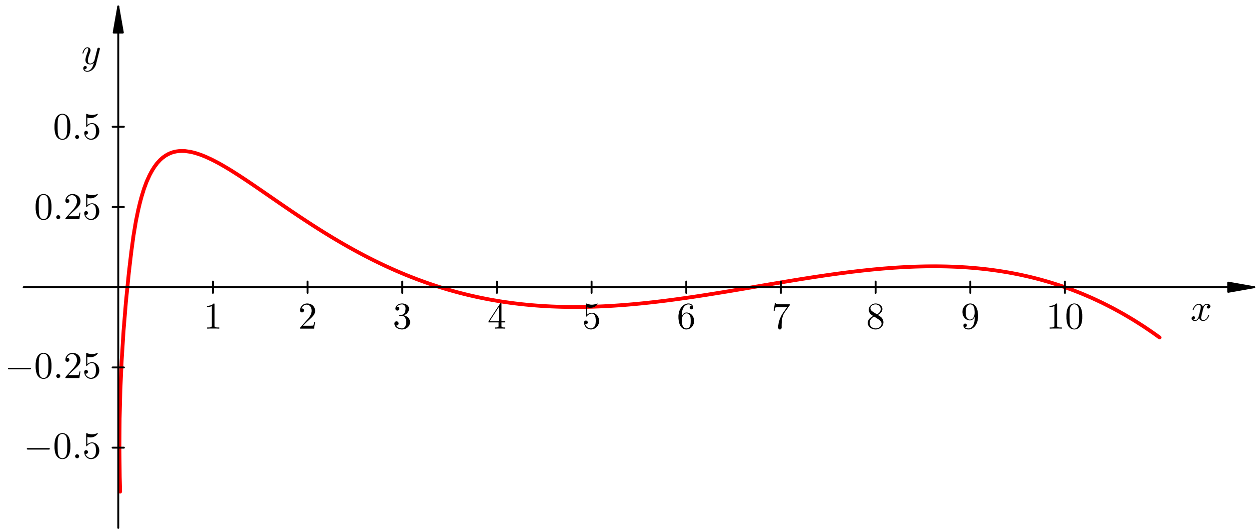
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Pratite skalu na y-osi.

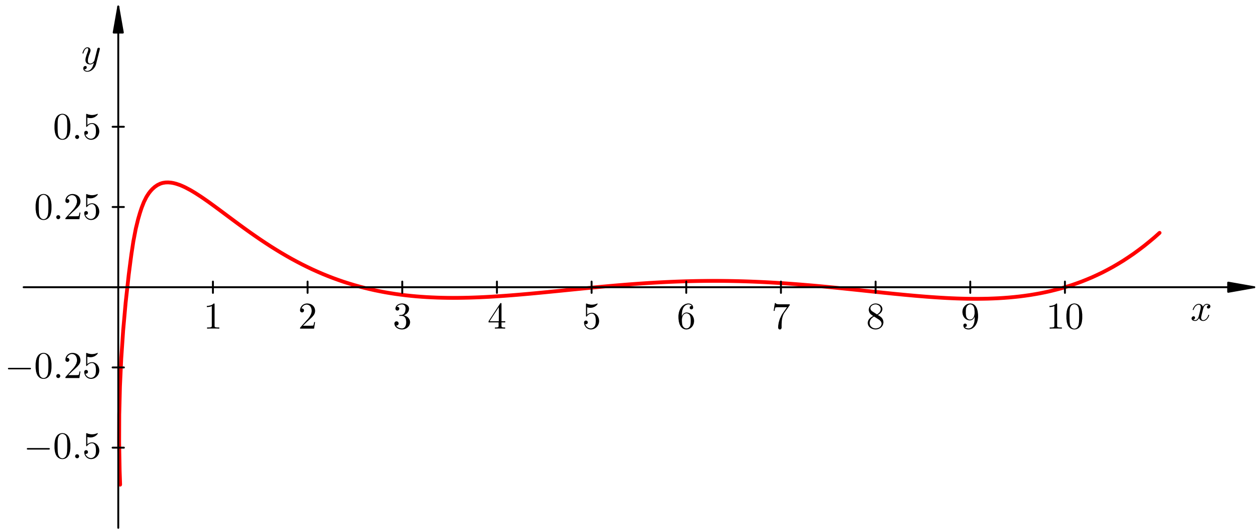
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite skalu na y-osi.

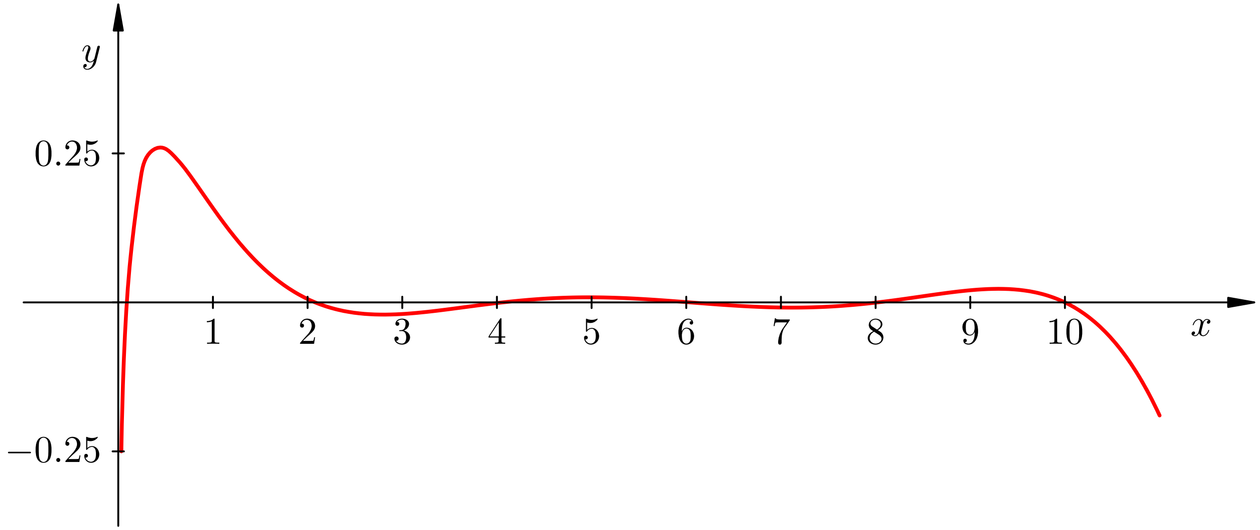
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite skalu na y-osi.

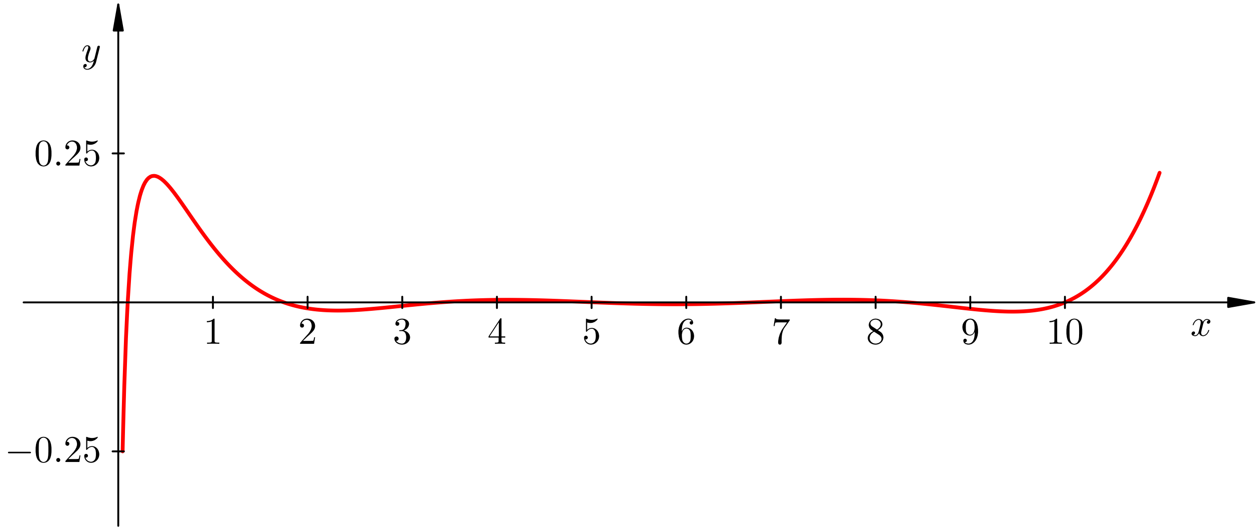
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite skalu na y-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite skalu na y-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar Runge prvi je uočio

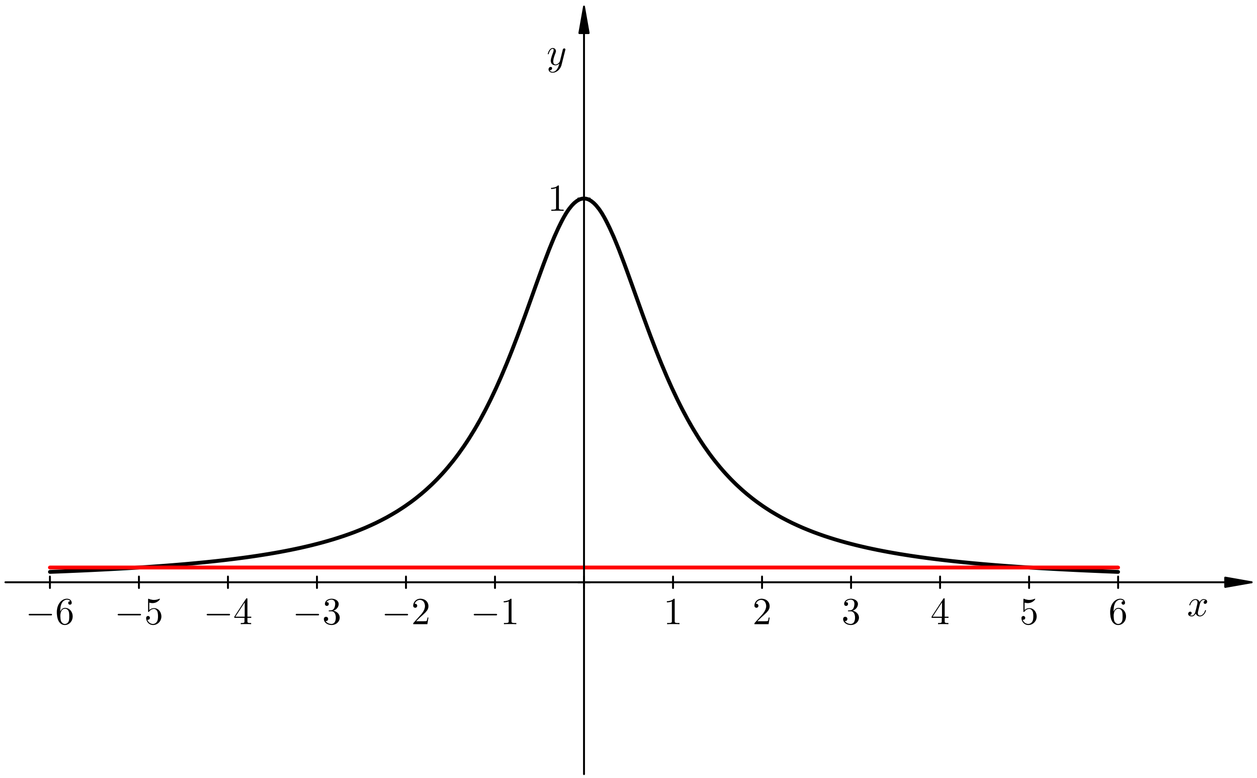
- probleme koji nastupaju kod interpolacije polinomima na ekvidistantnoj mreži.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao funkcija Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{na} \quad [-5, 5],$$

  takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira prema toj funkciji.

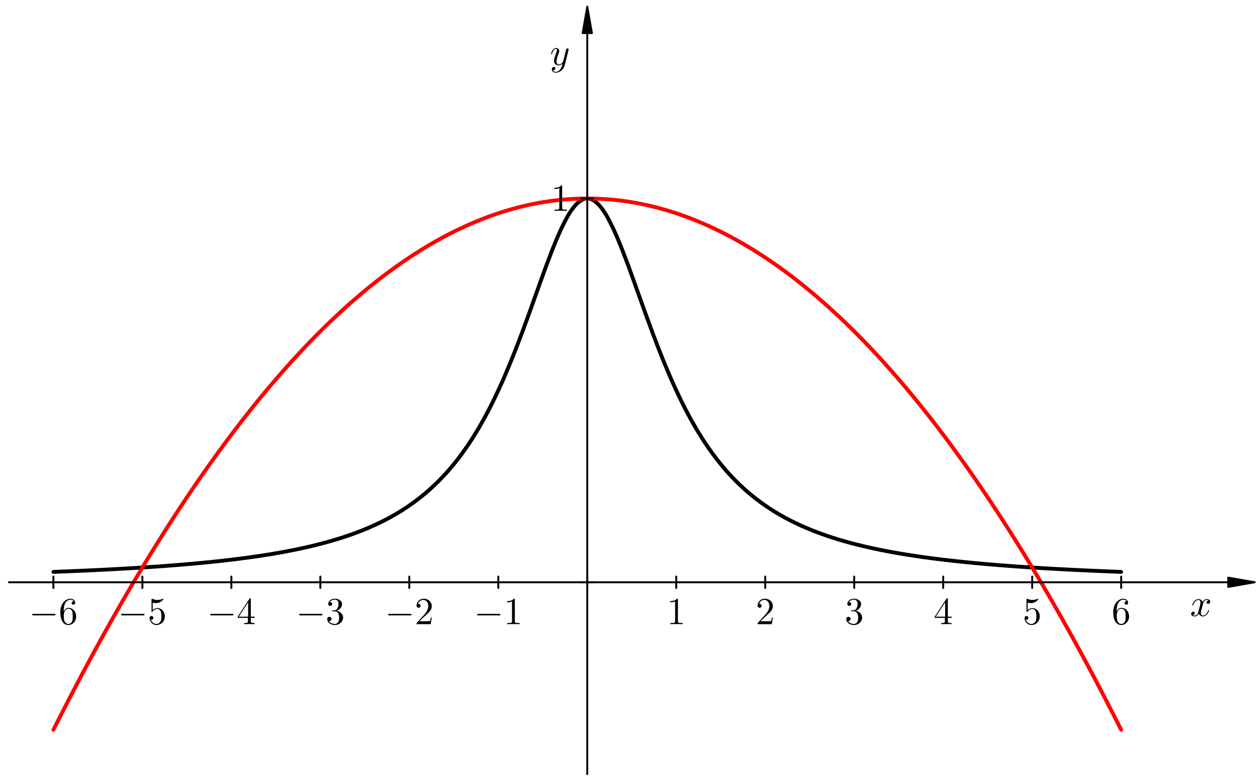
Promotrimo interpolaciju na ekvidistantnoj mreži polinomima stupnjeva 1–6, 8, 10, 12, 14 i 16 (parnost funkcije!).

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



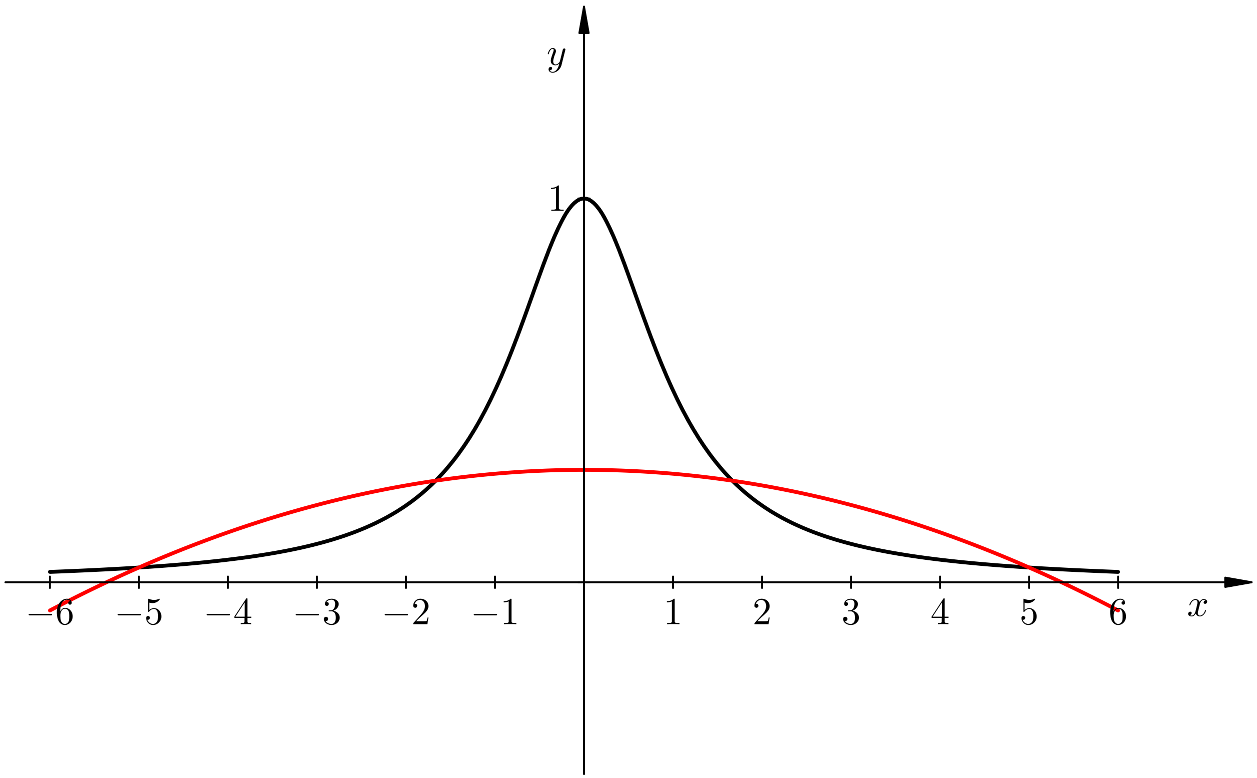
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



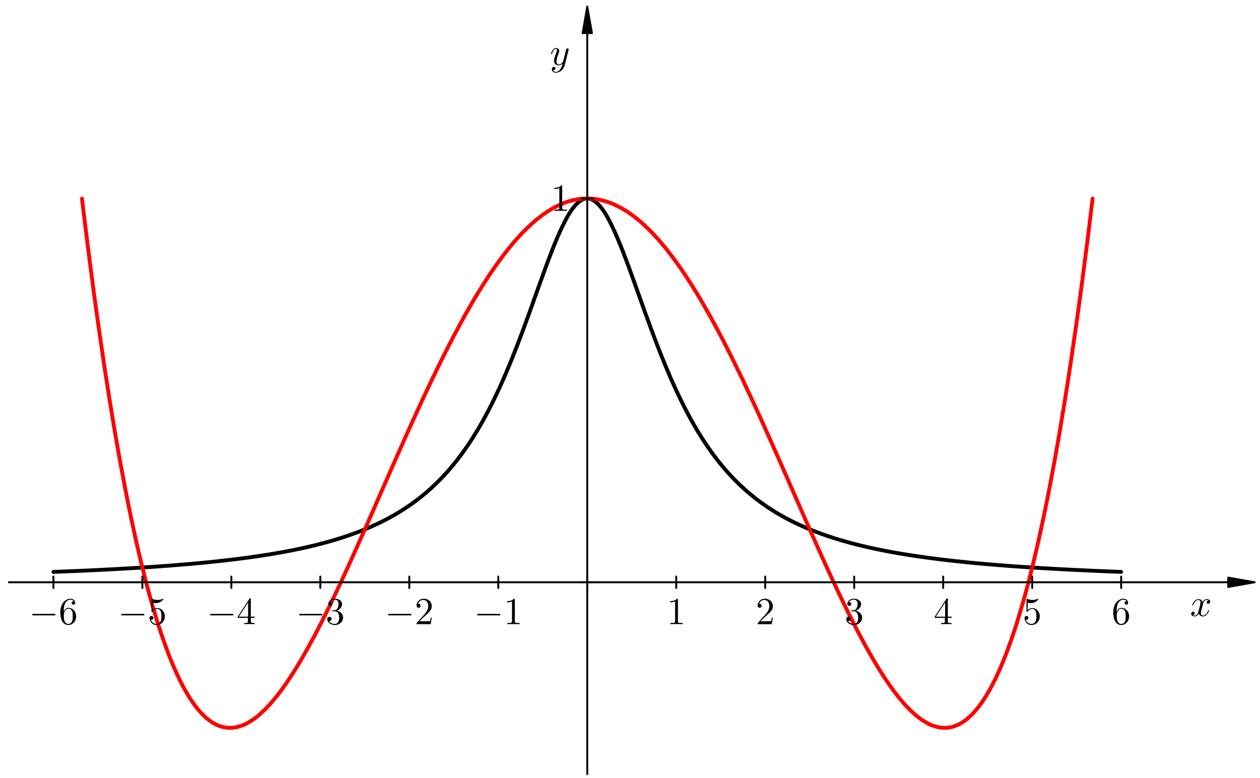
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



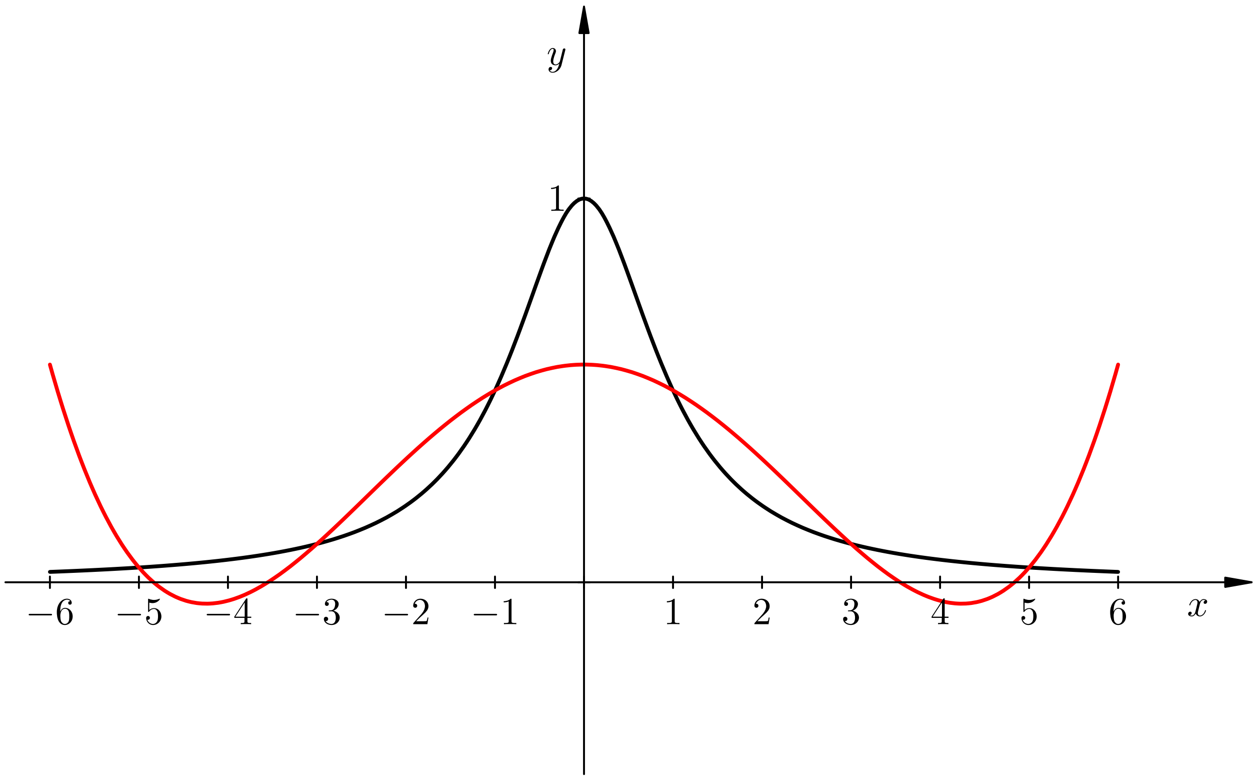
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



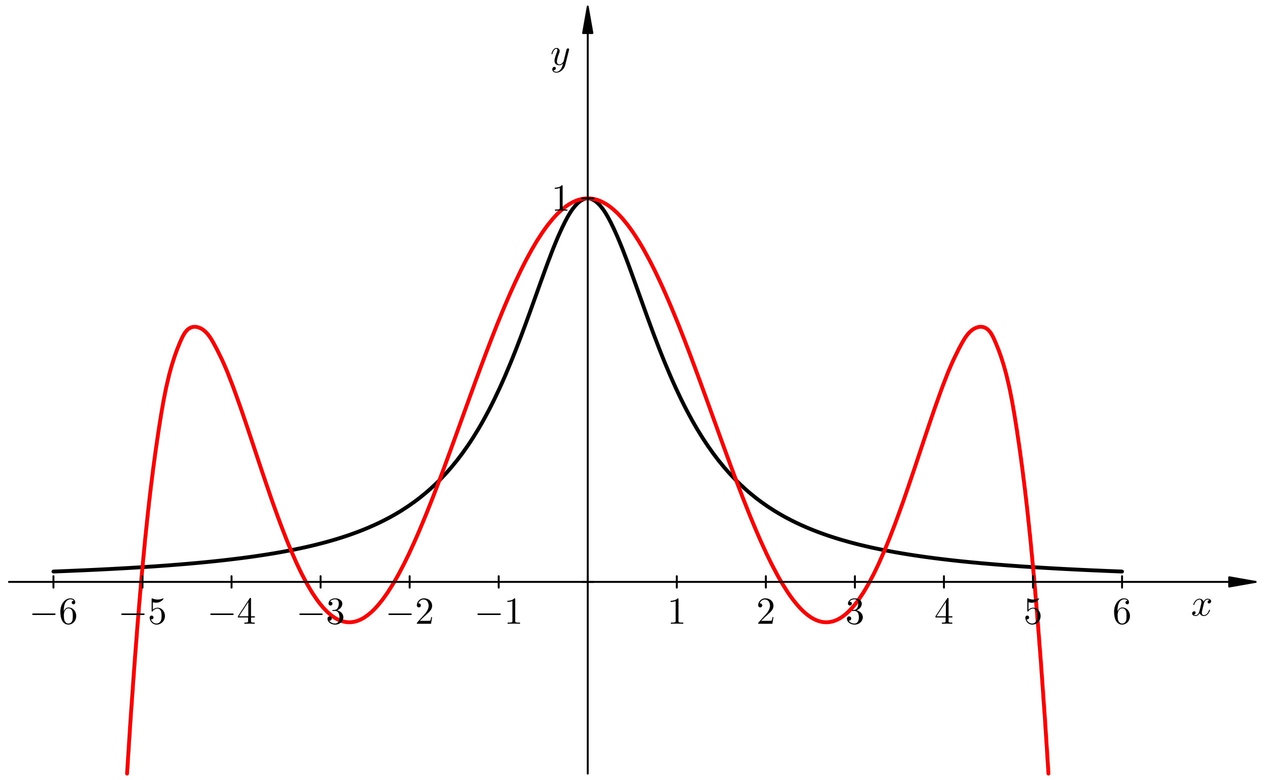
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



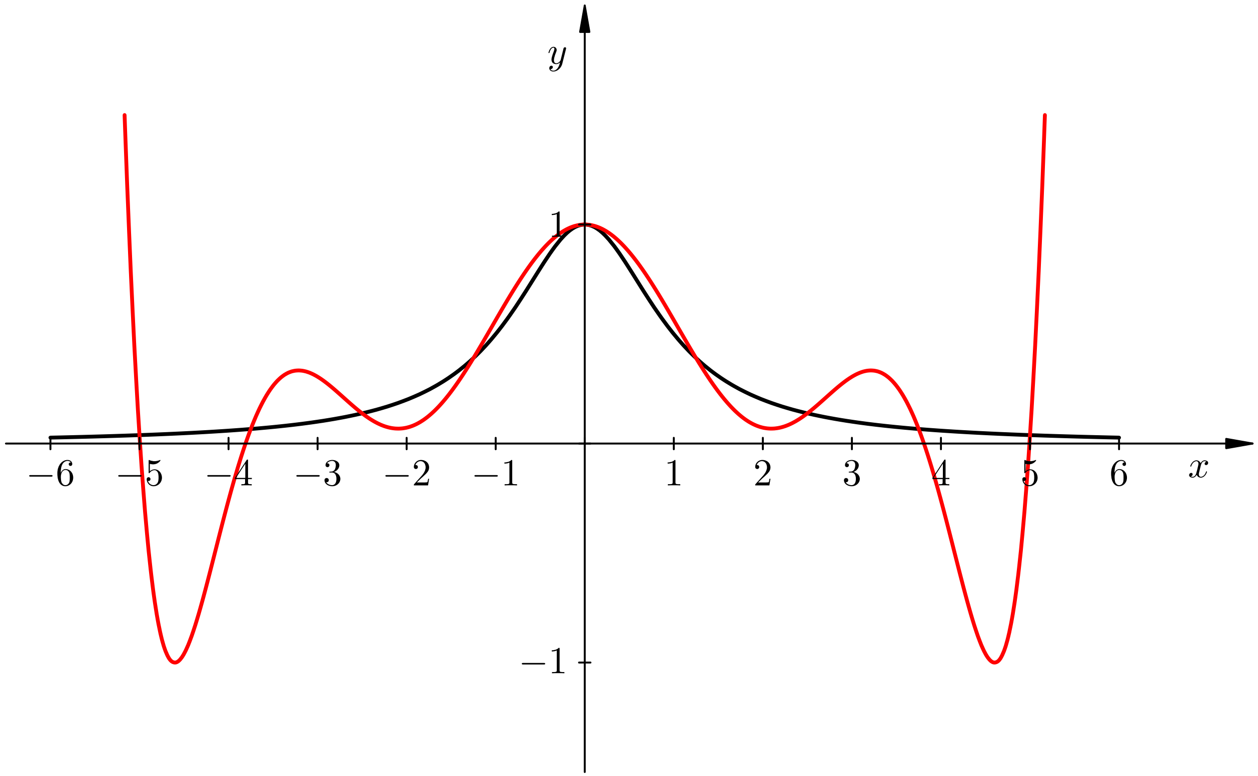
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



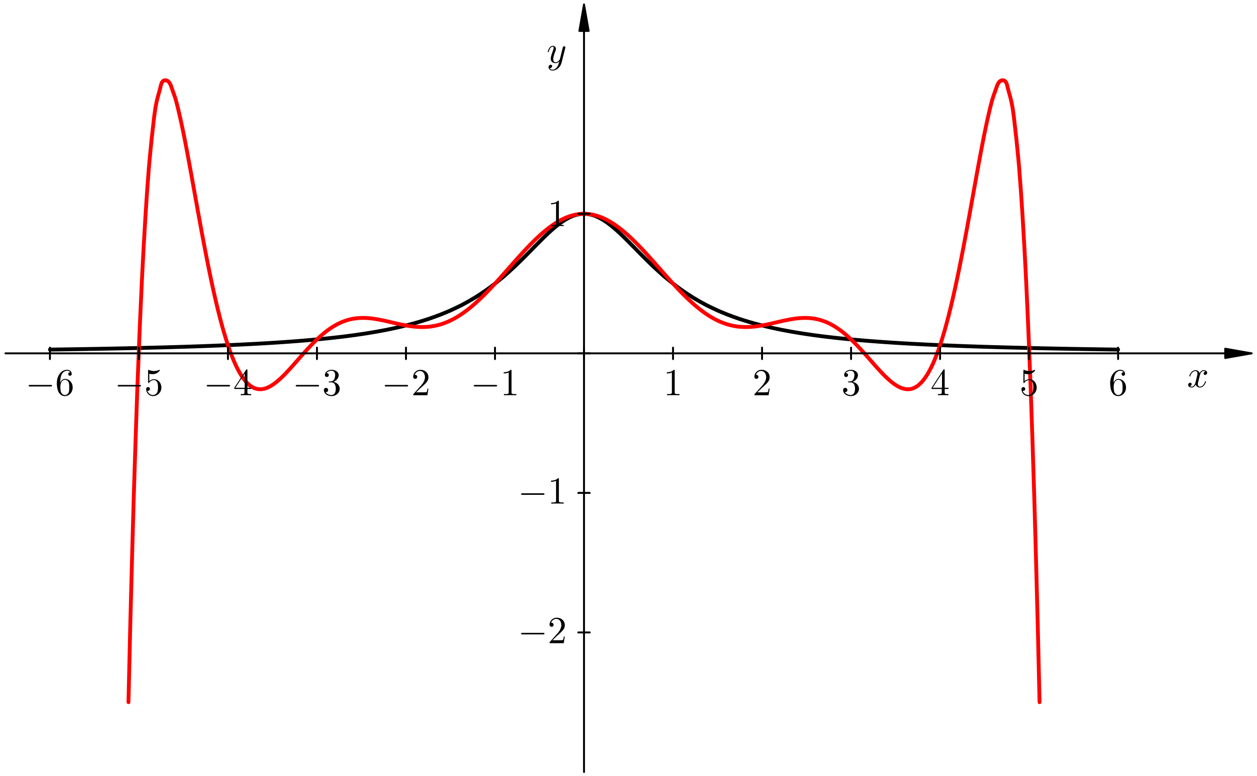
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



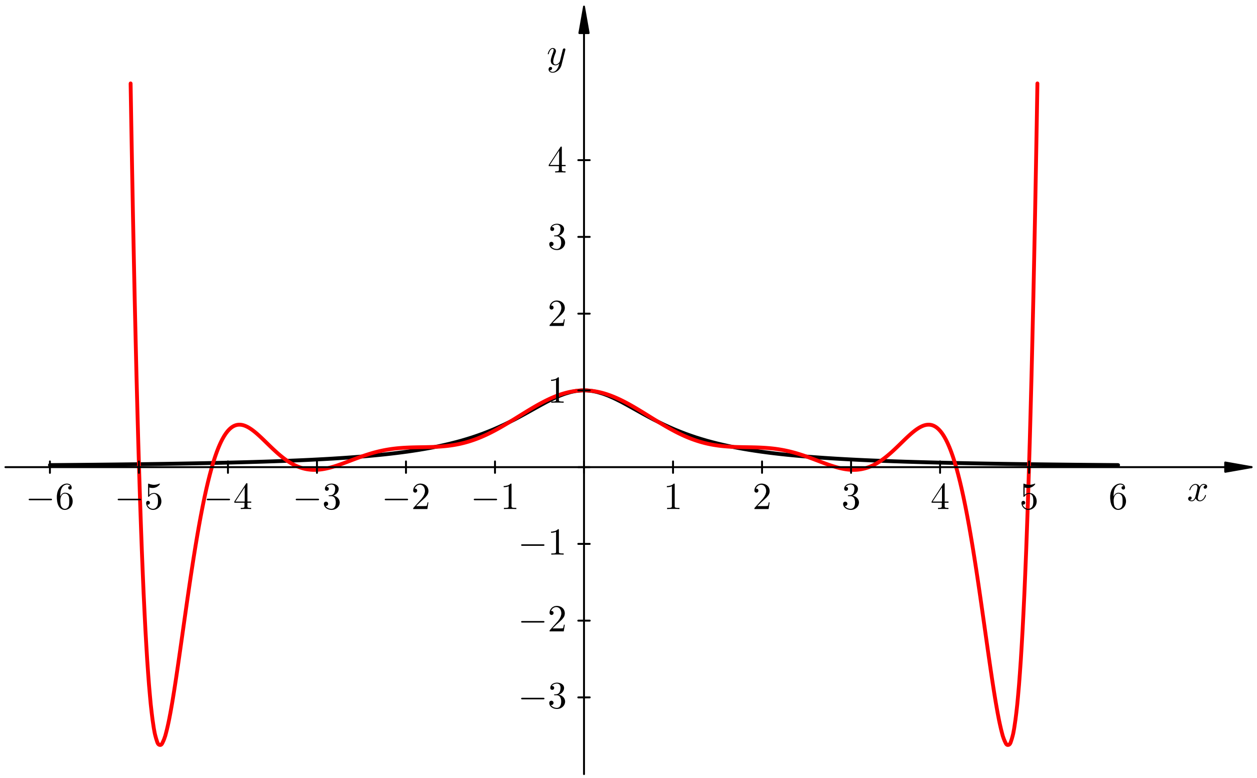
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



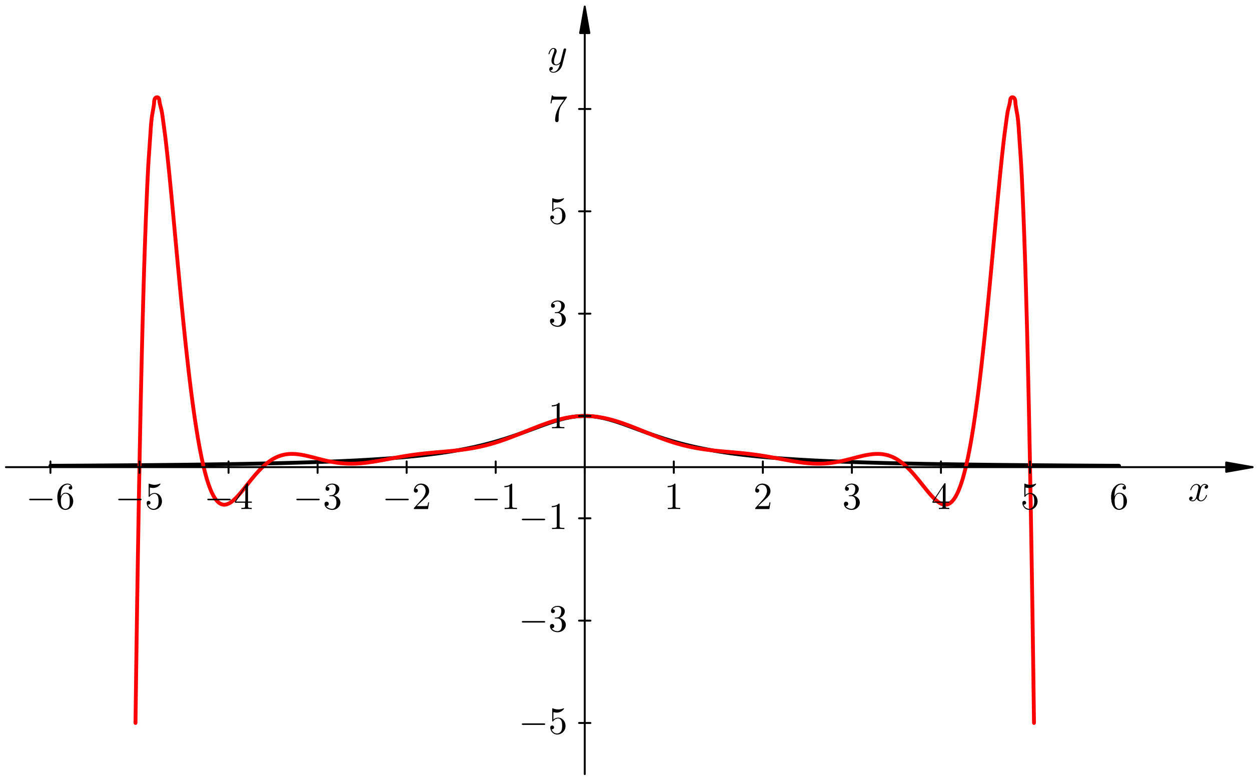
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



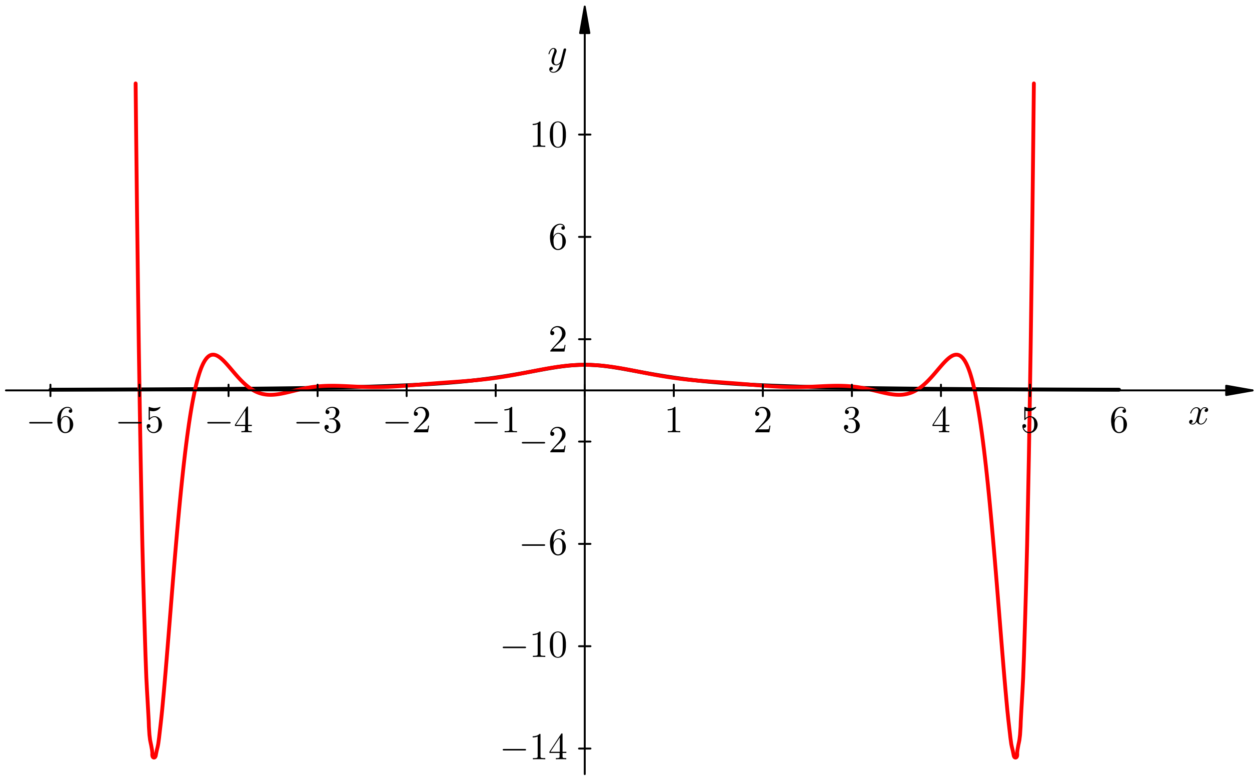
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



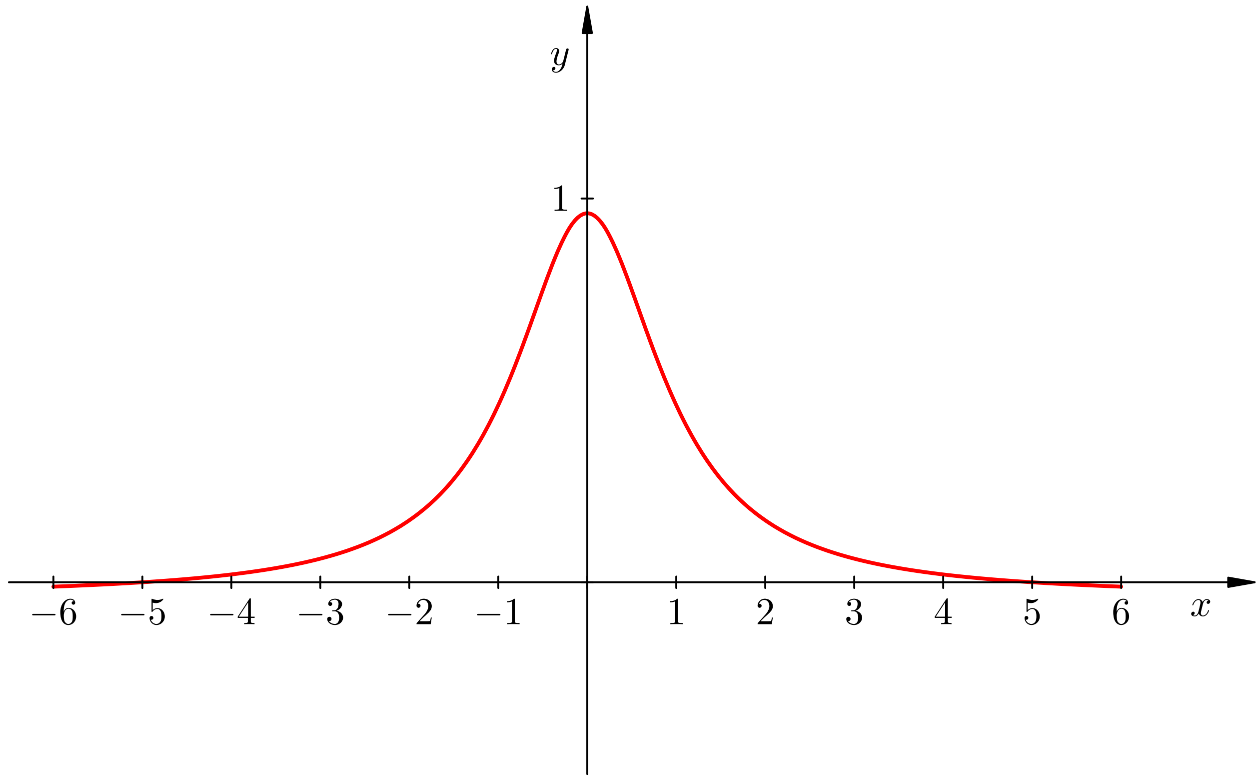
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



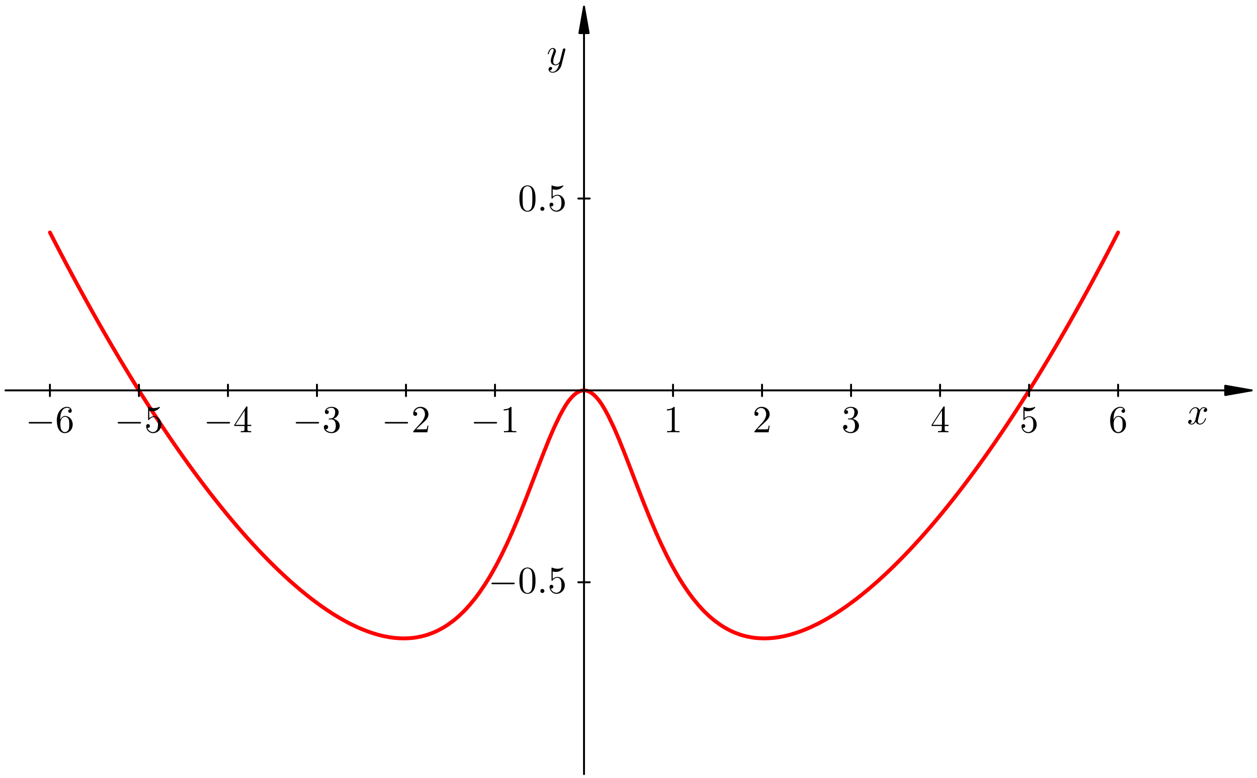
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



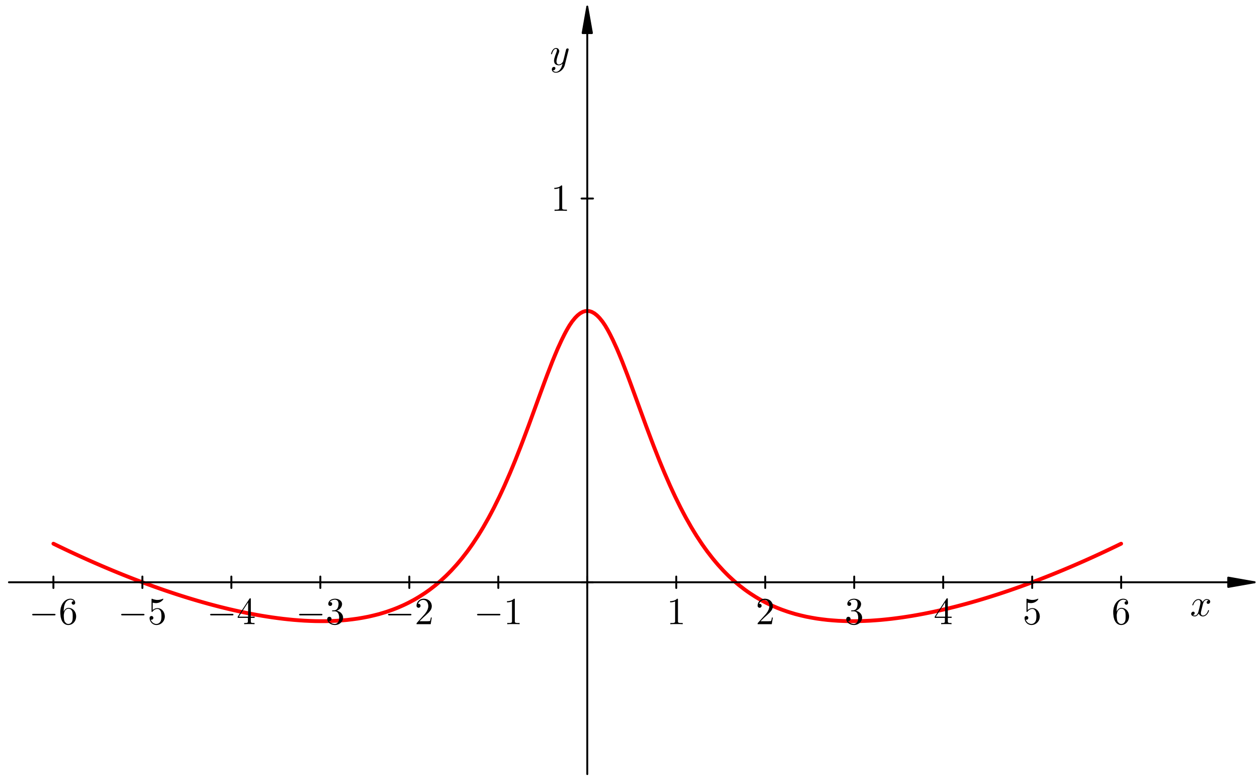
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



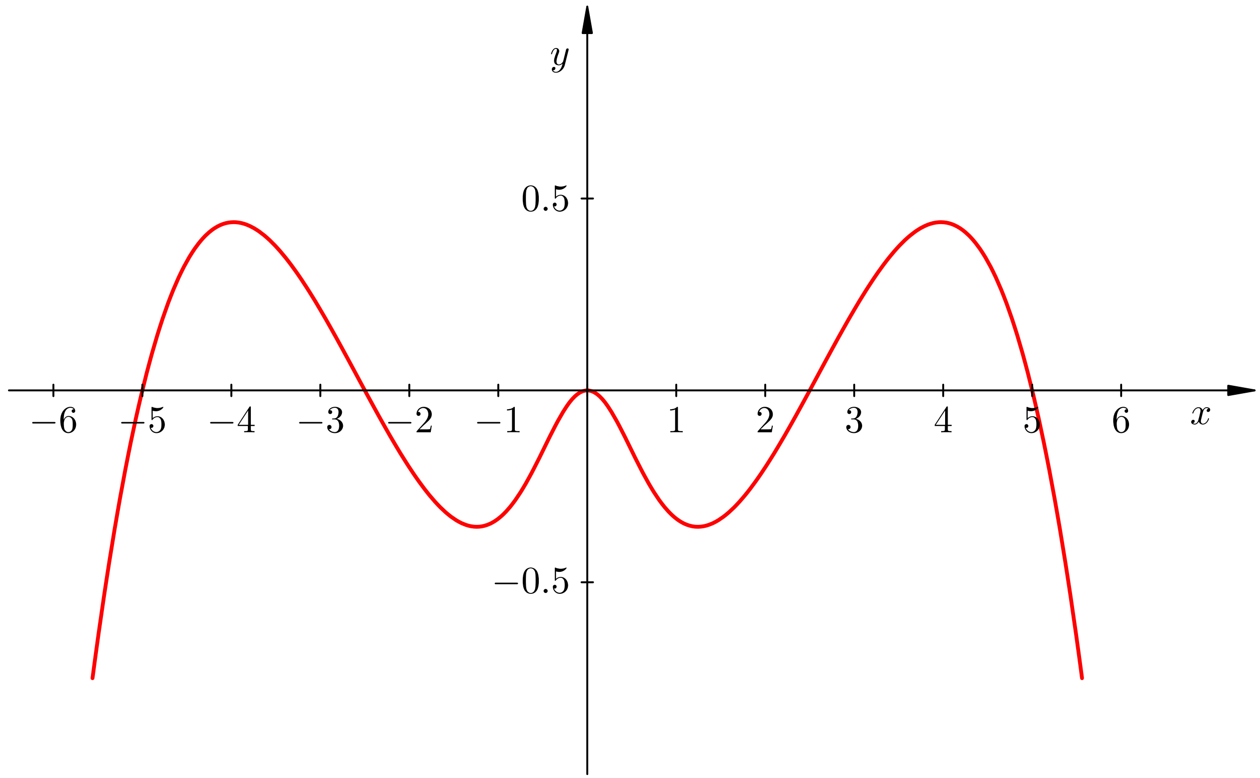
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



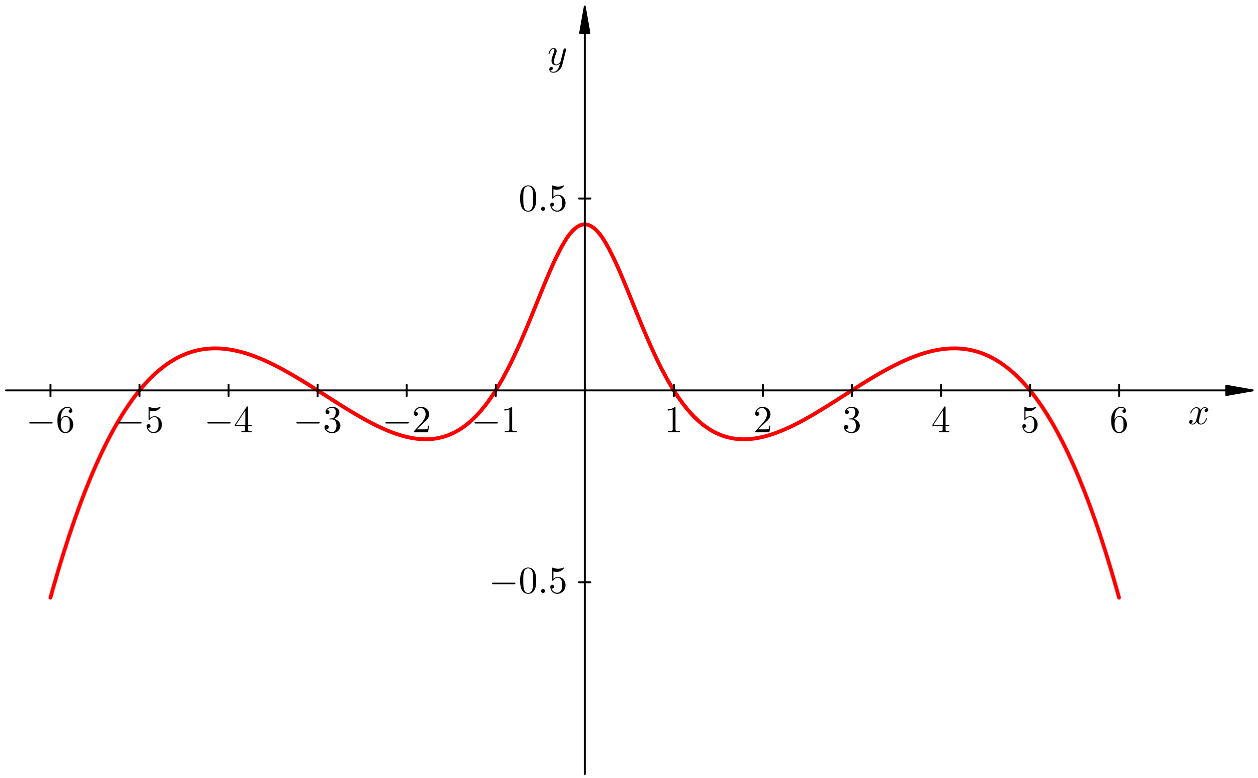
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



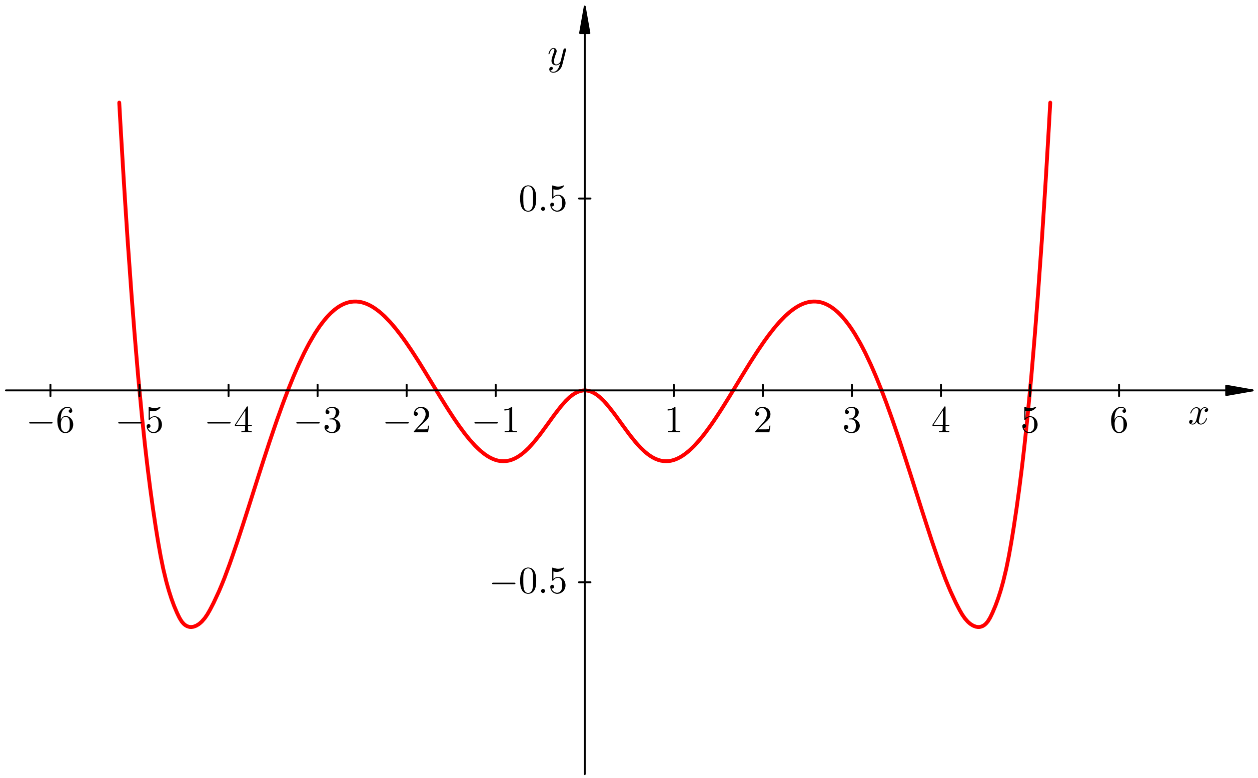
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



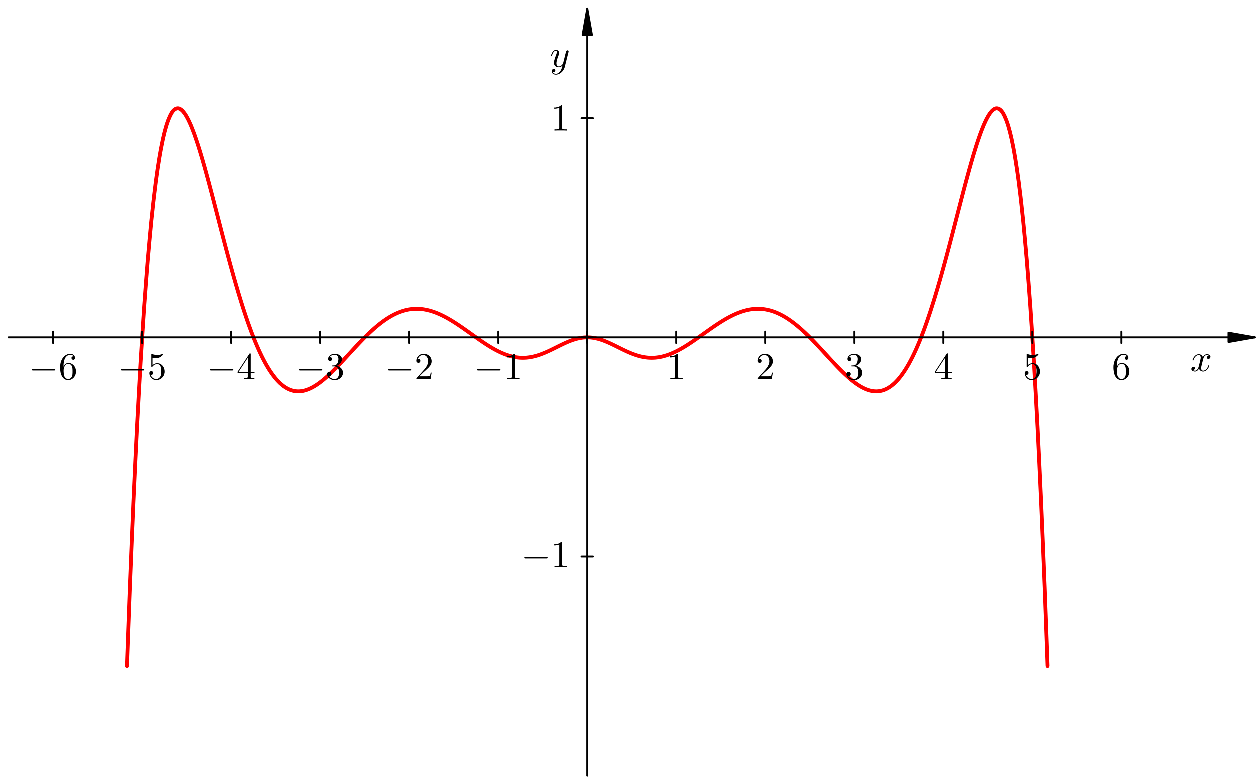
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



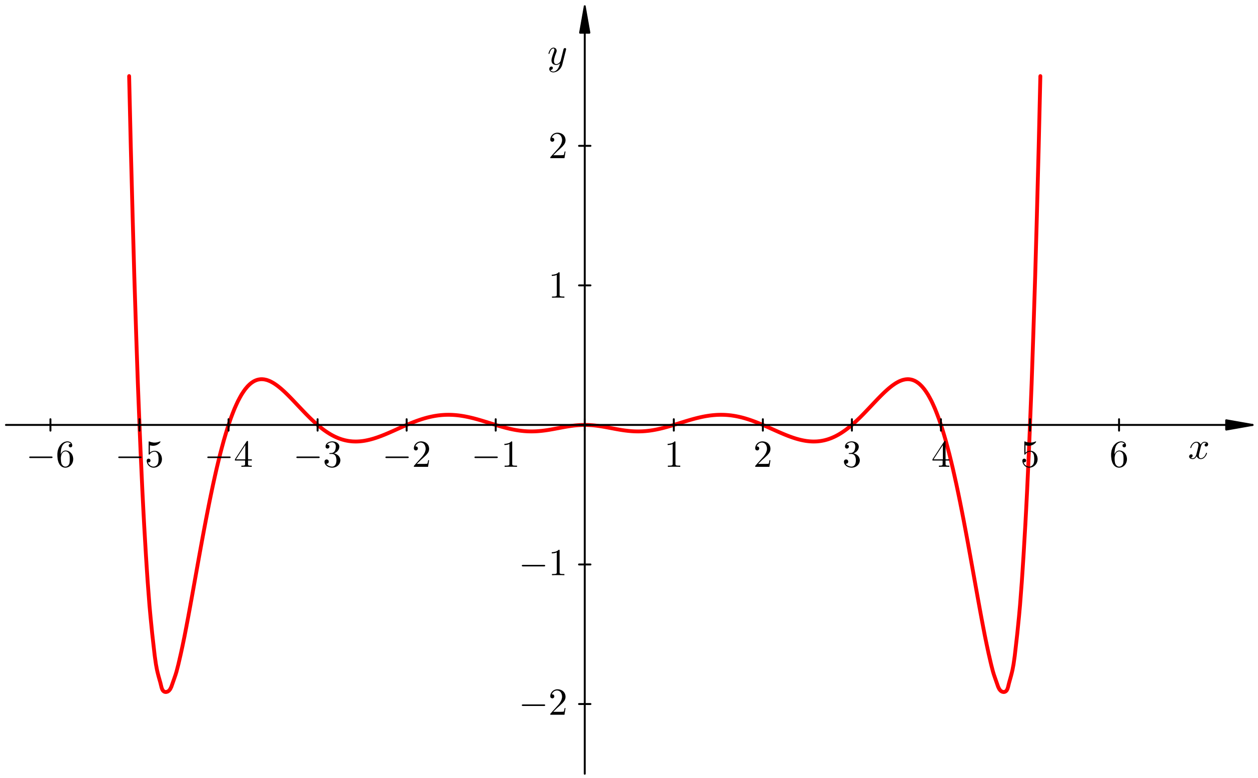
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



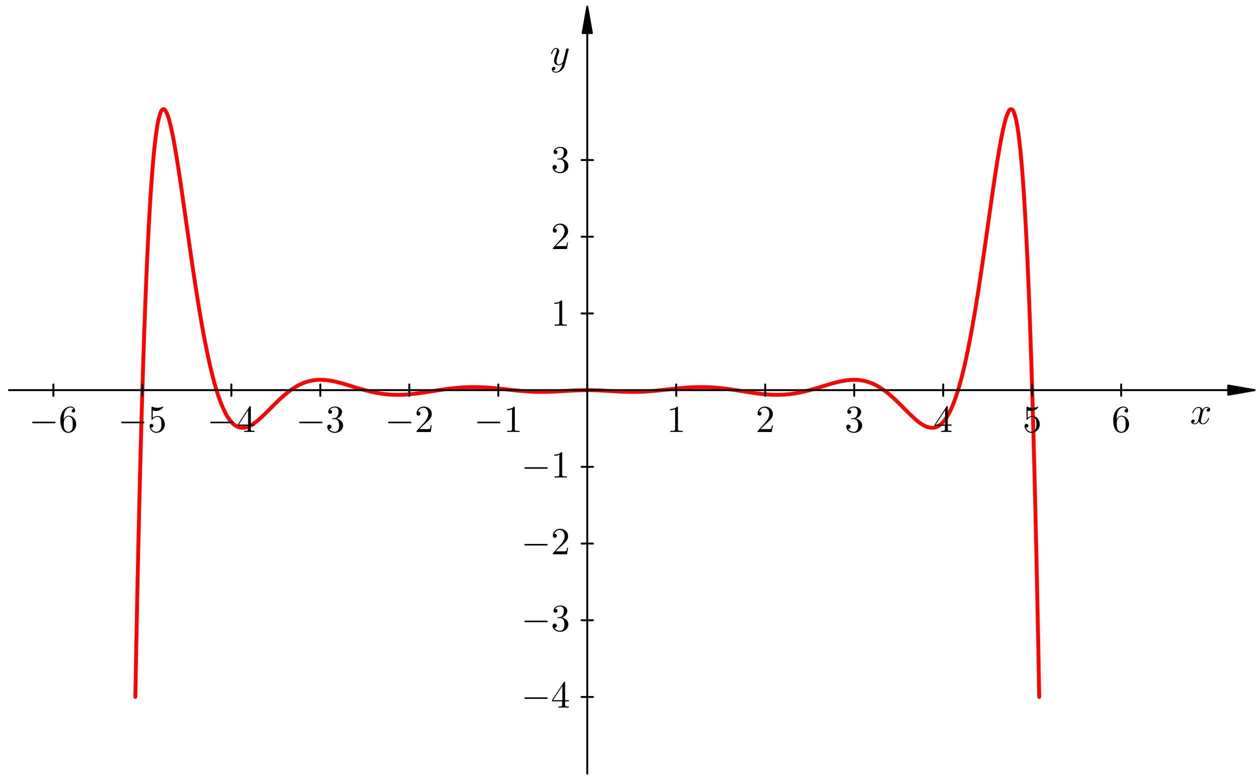
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



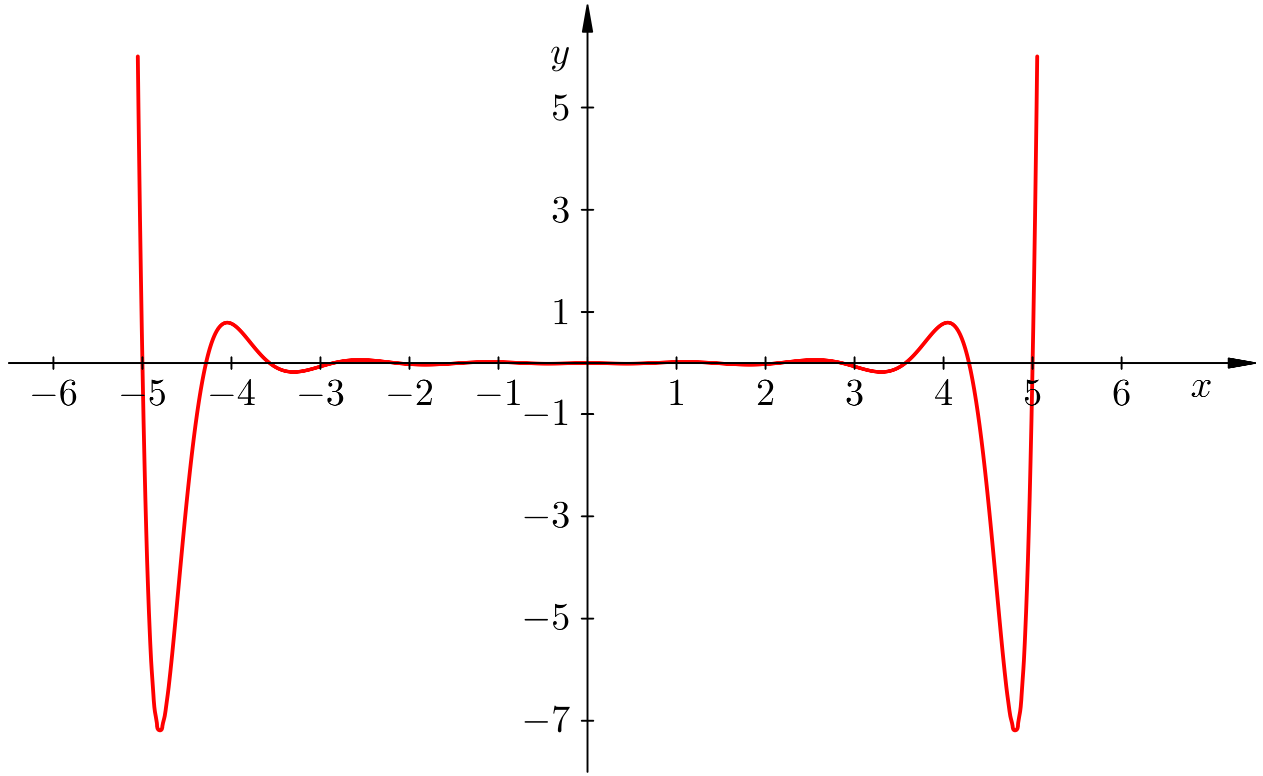
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



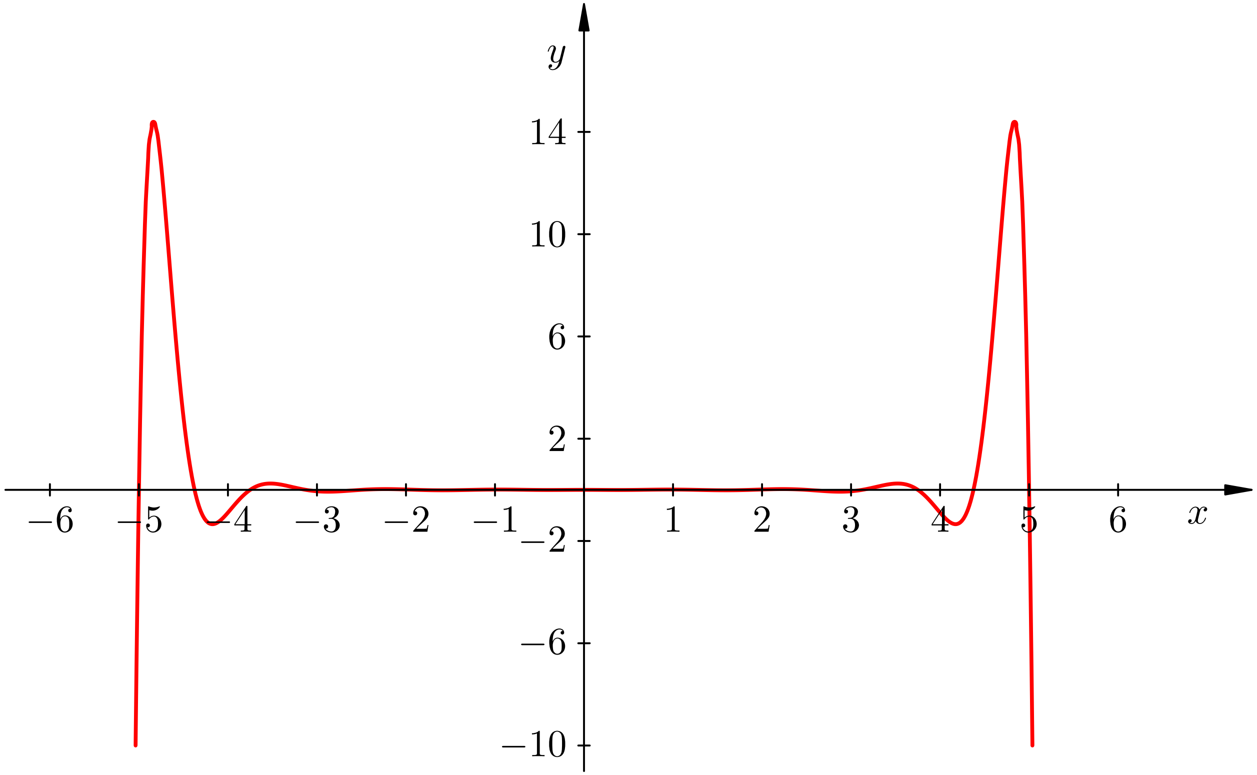
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63\ldots$, a interpolira se u ekvidistantnim točkama, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — niz interpolacijskih polinoma konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Bernstein, 1912.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n+1$ ekvidistantnih točaka na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji Runge "pomoći"? Može!

Ako umjesto ekvidistantnih točaka interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije,

- tzv. Čebiševljeve točke,

onda će, porastom stupnja n, niz interpolacijskih polinoma p_n

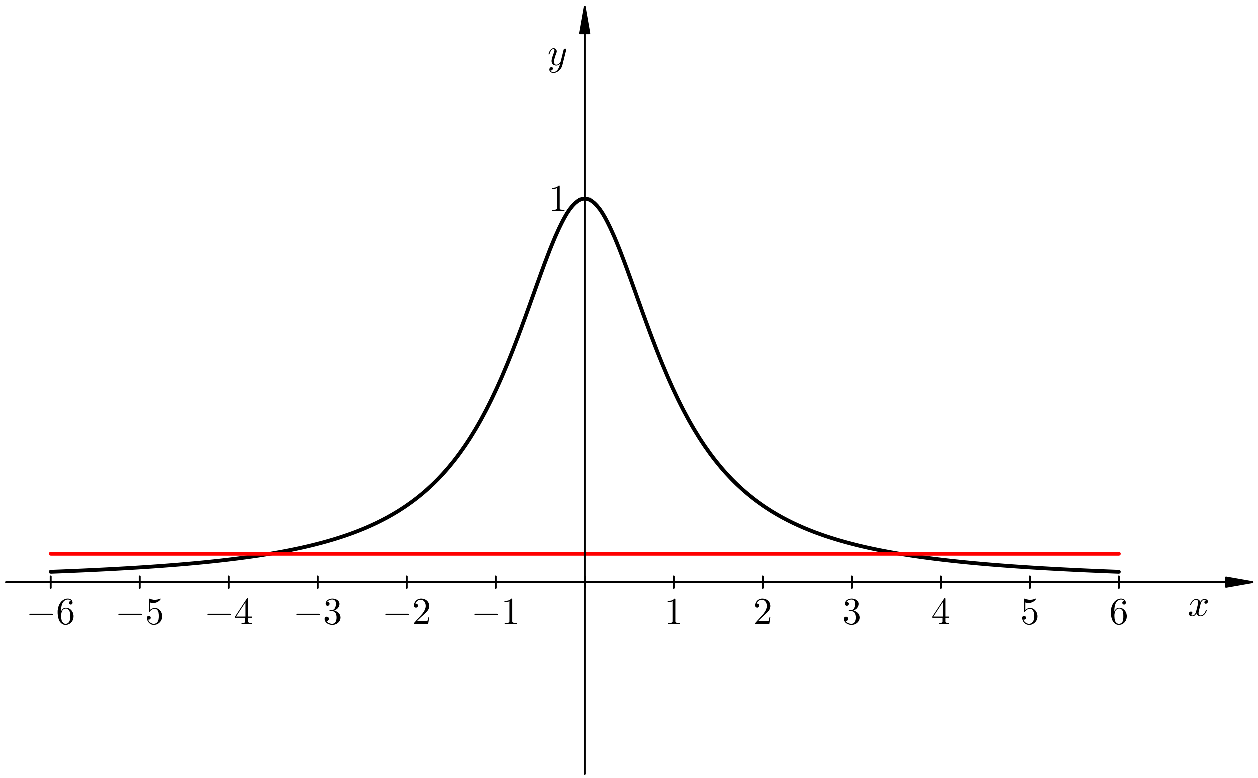
- konvergirati (i to uniformno) prema funkciji f.

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

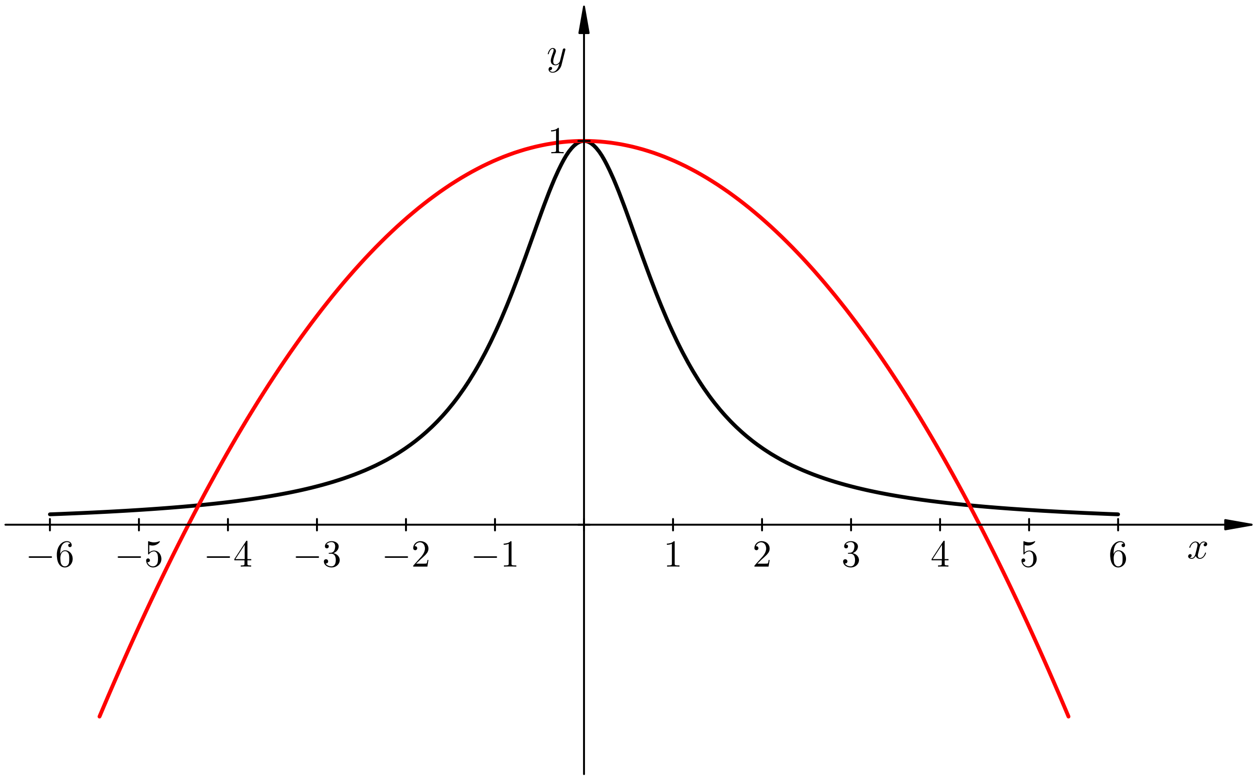
O njima više — malo kasnije. Prvo primjer za funkciju Runge.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



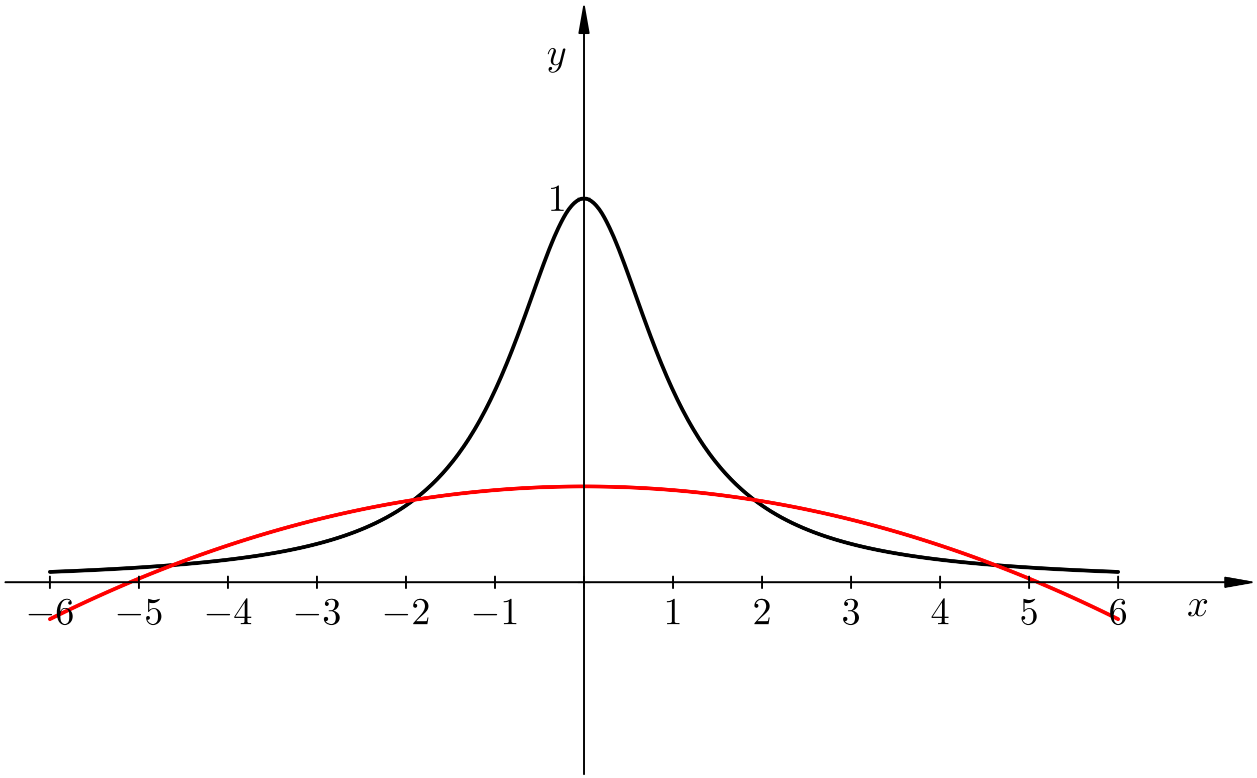
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



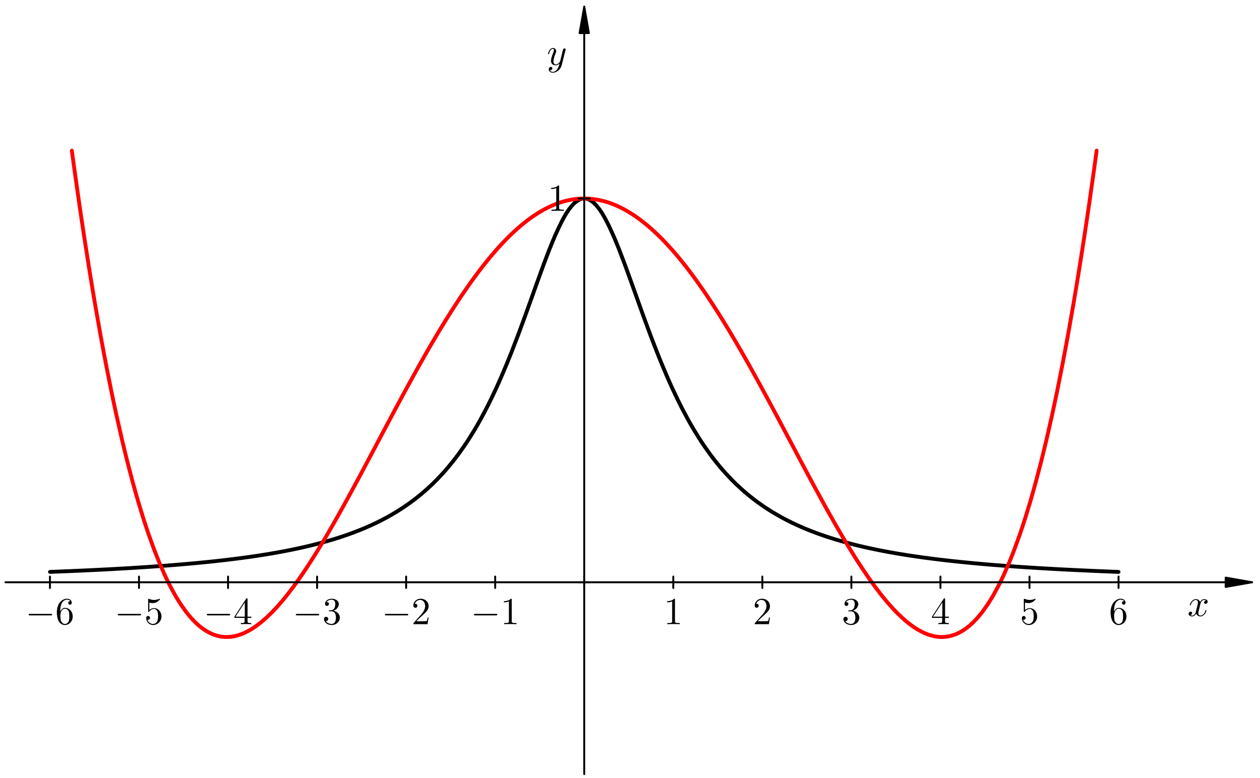
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



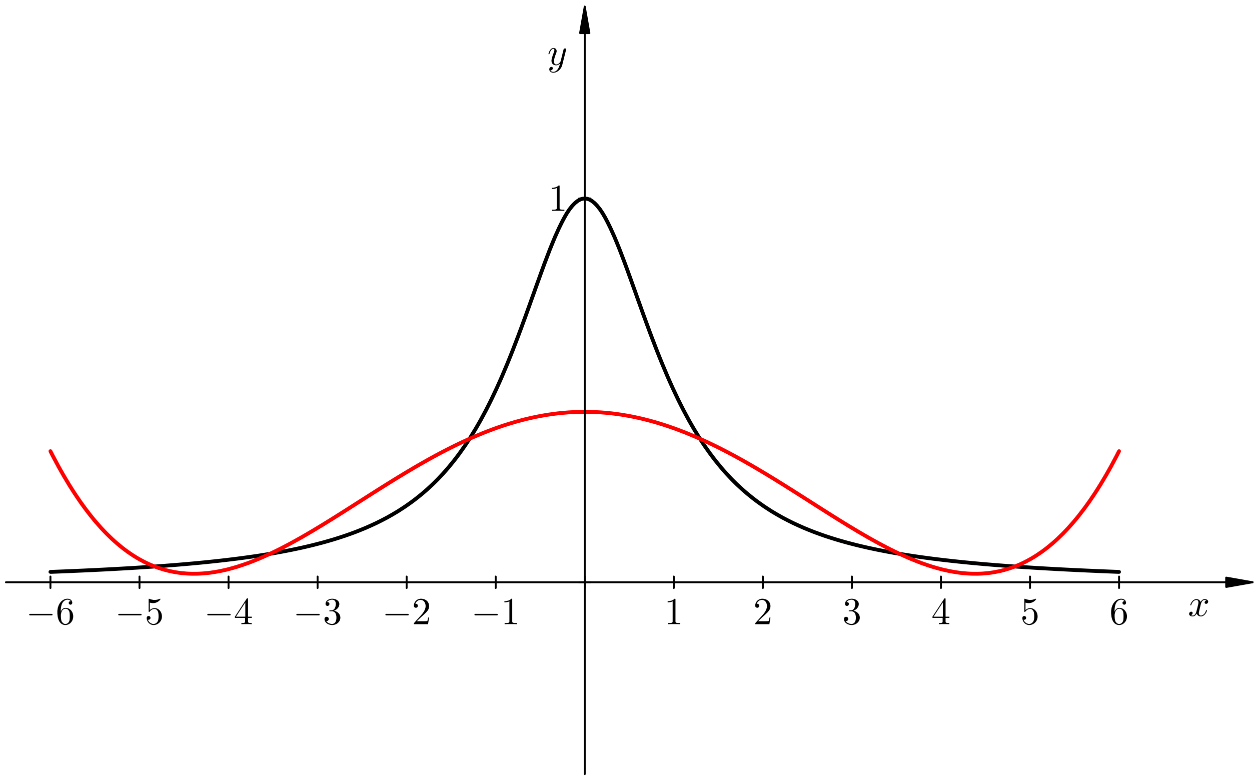
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



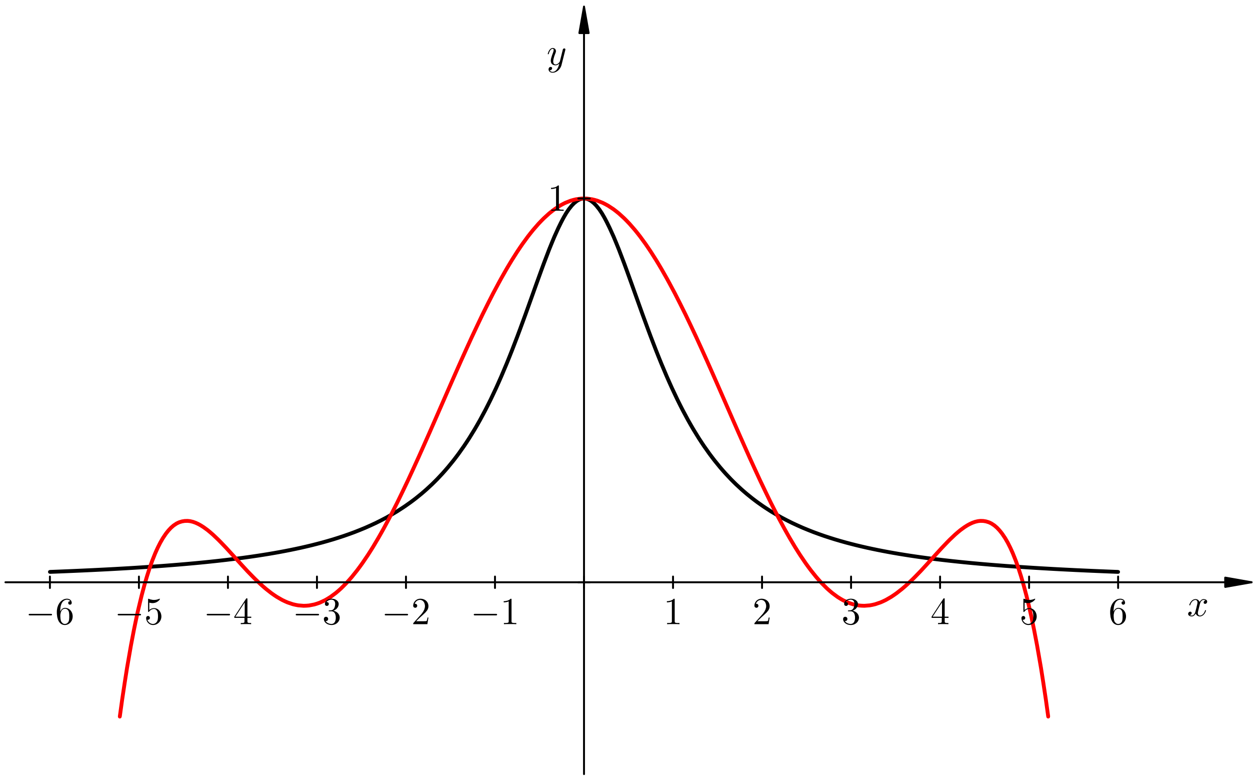
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



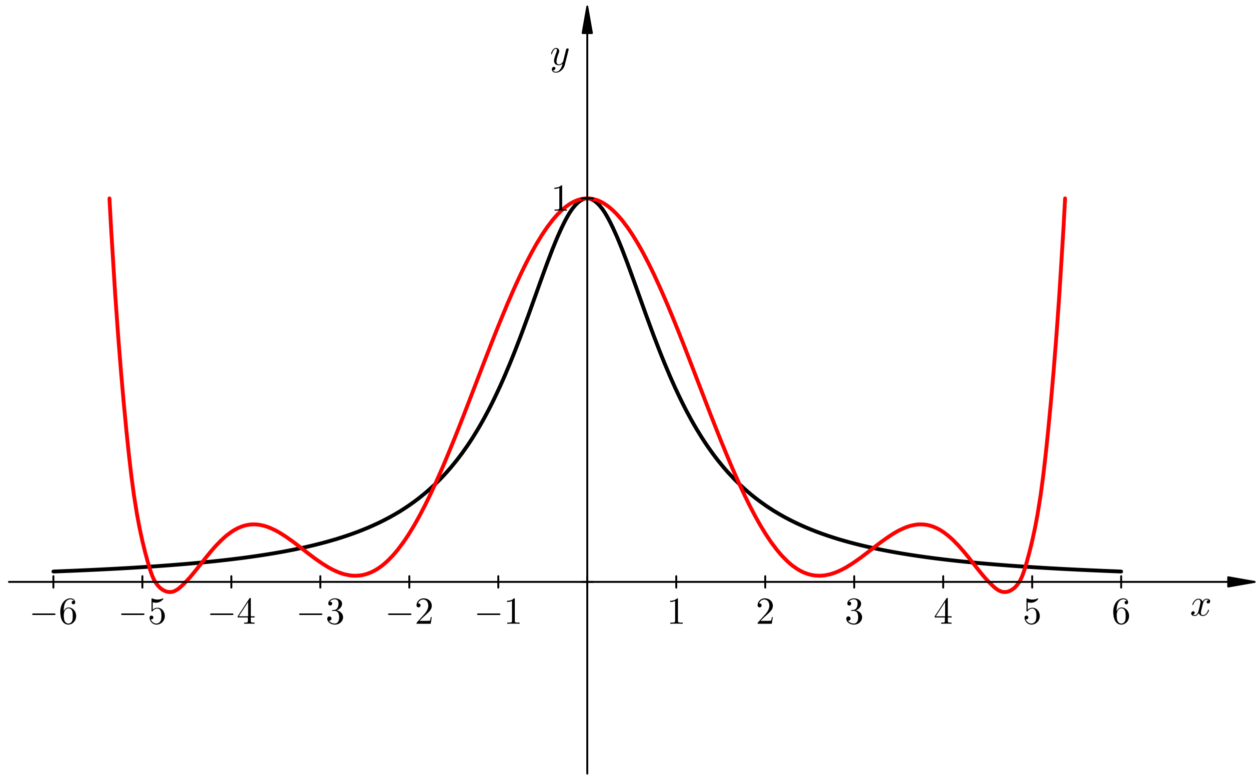
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



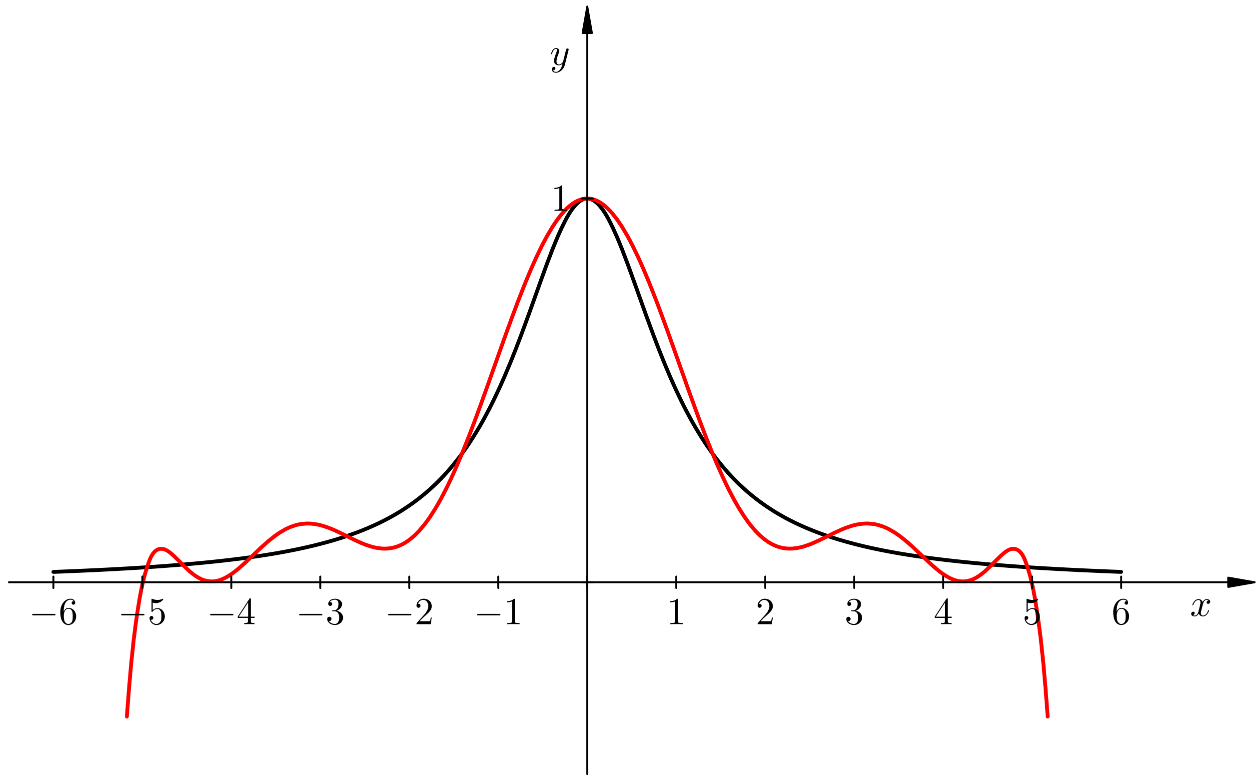
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



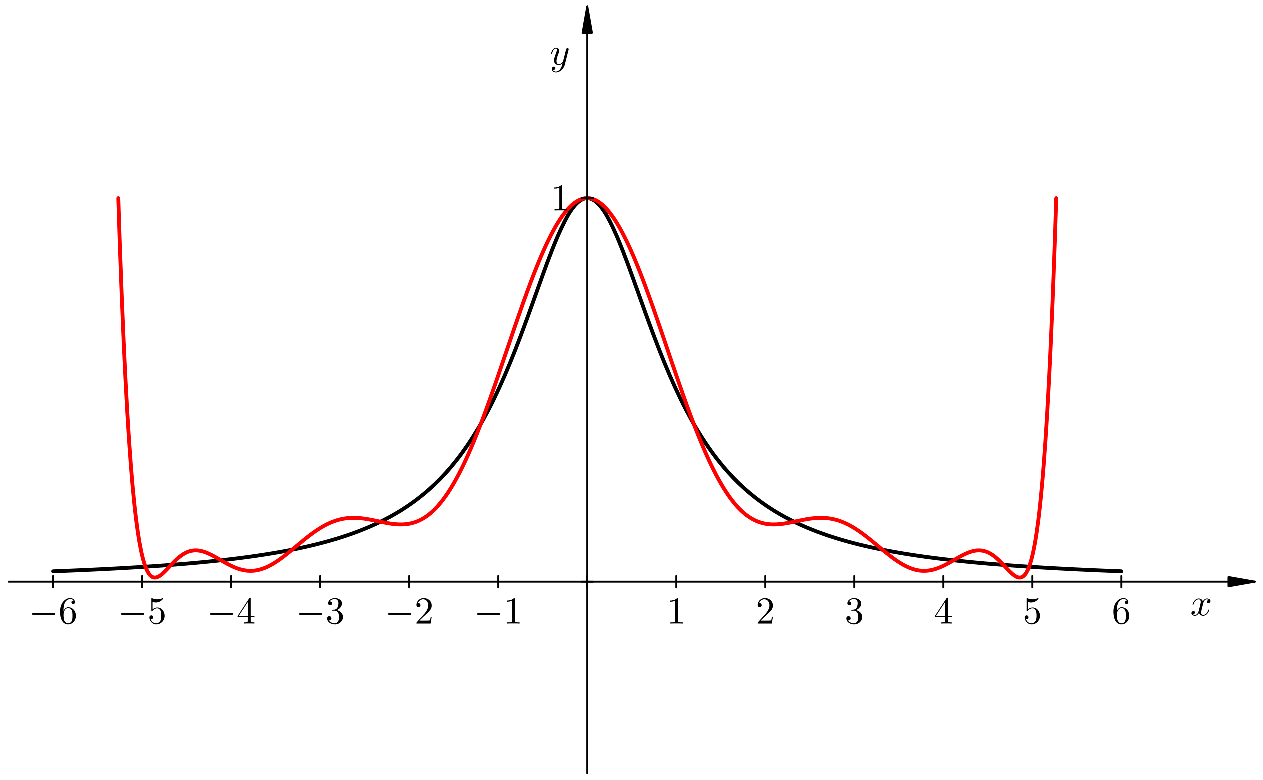
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



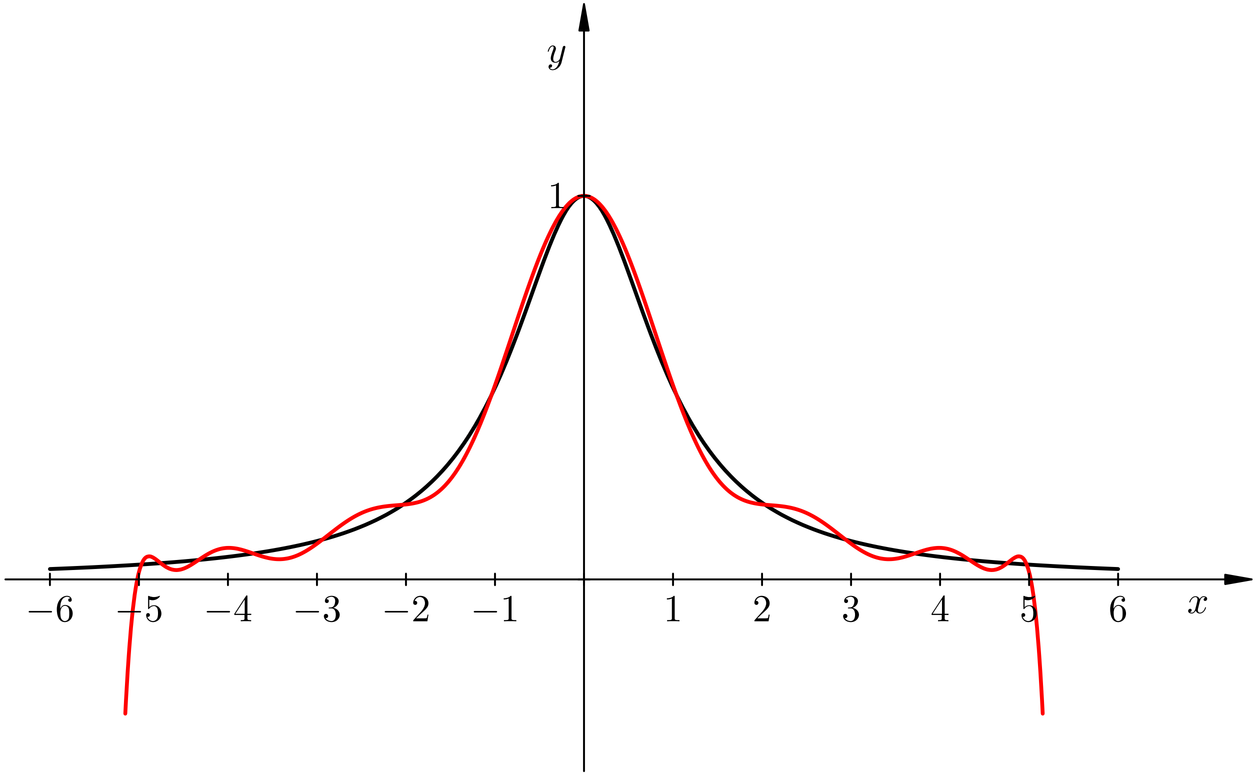
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



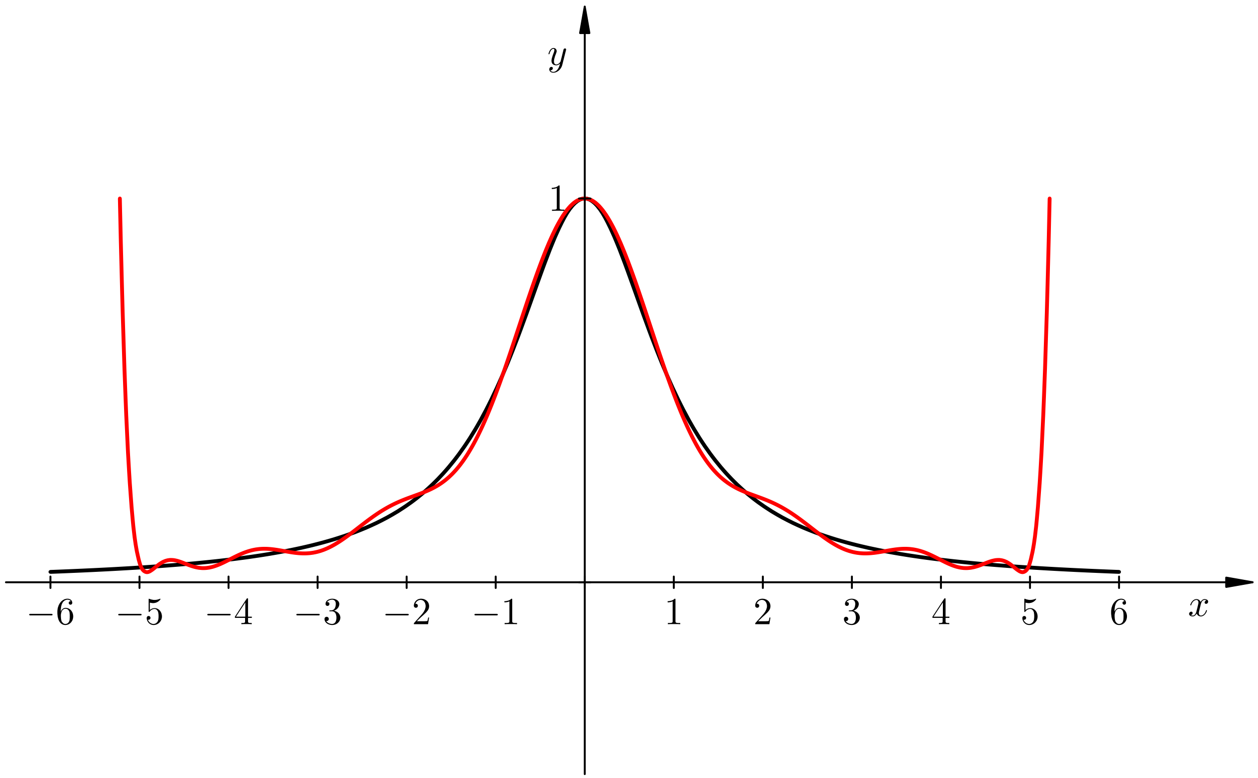
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



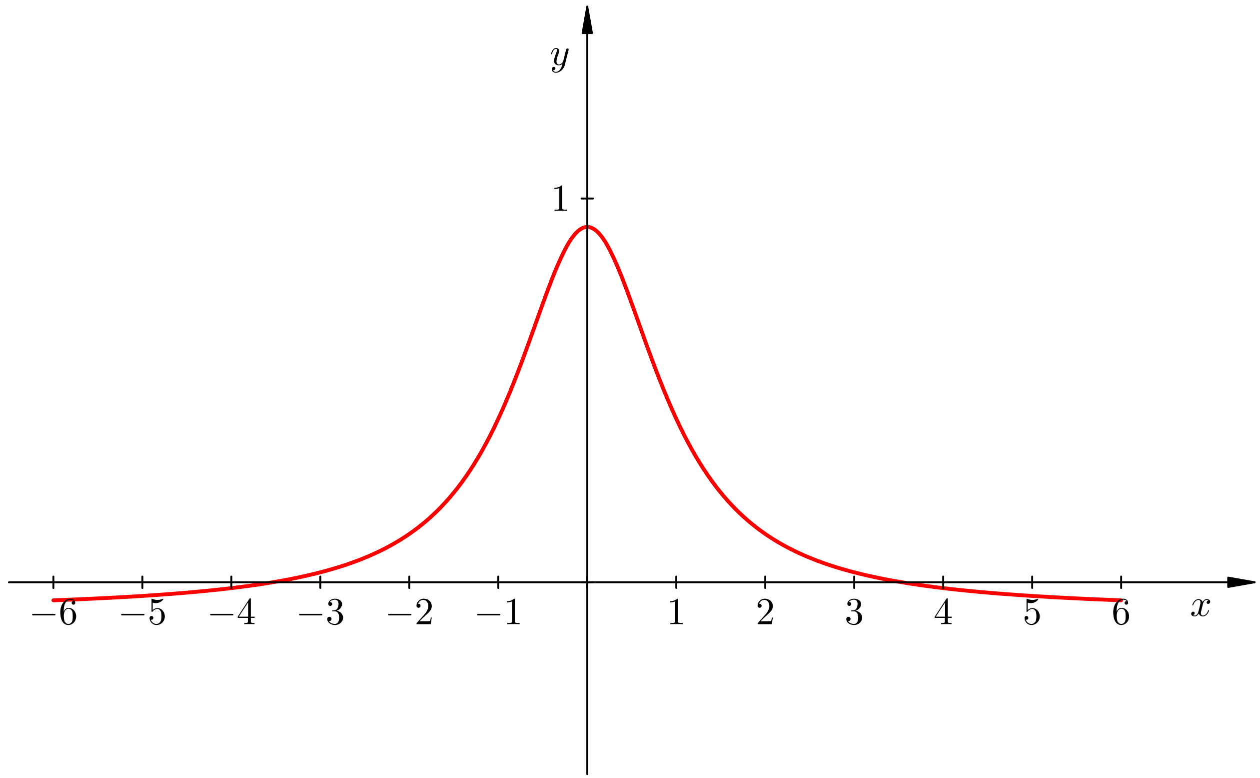
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



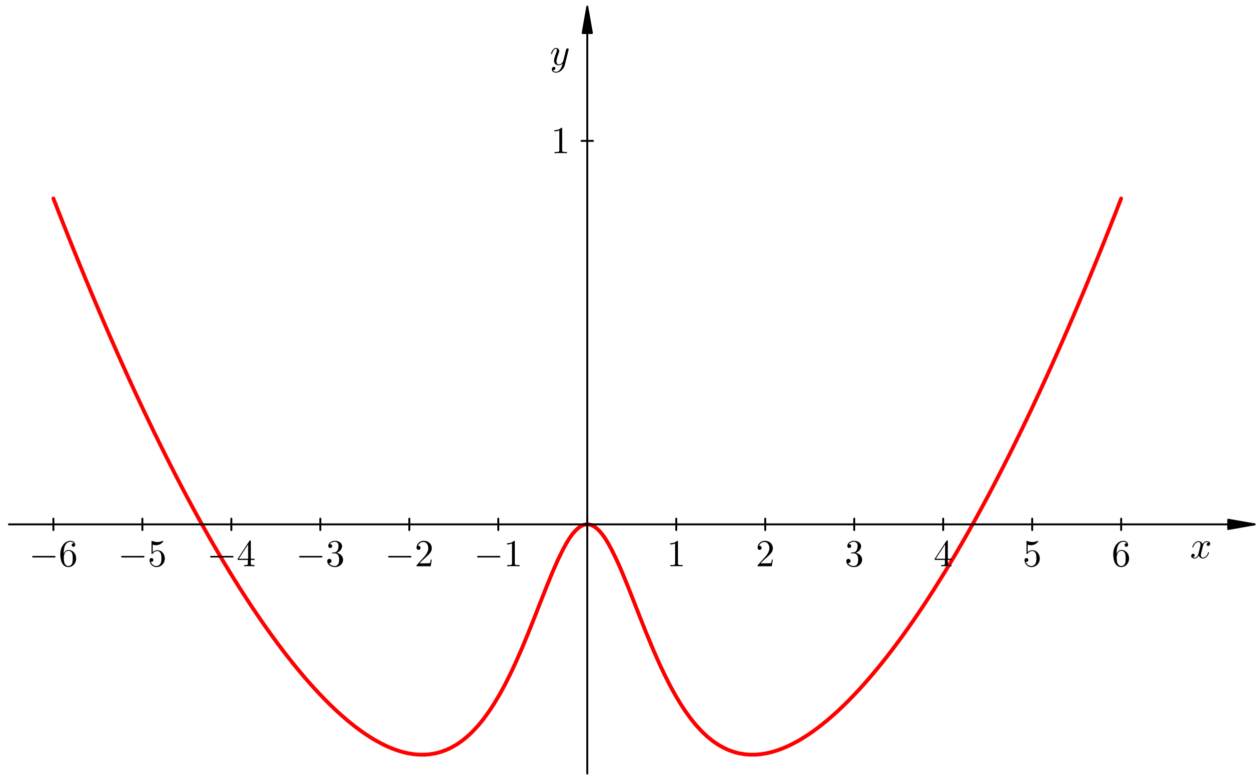
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



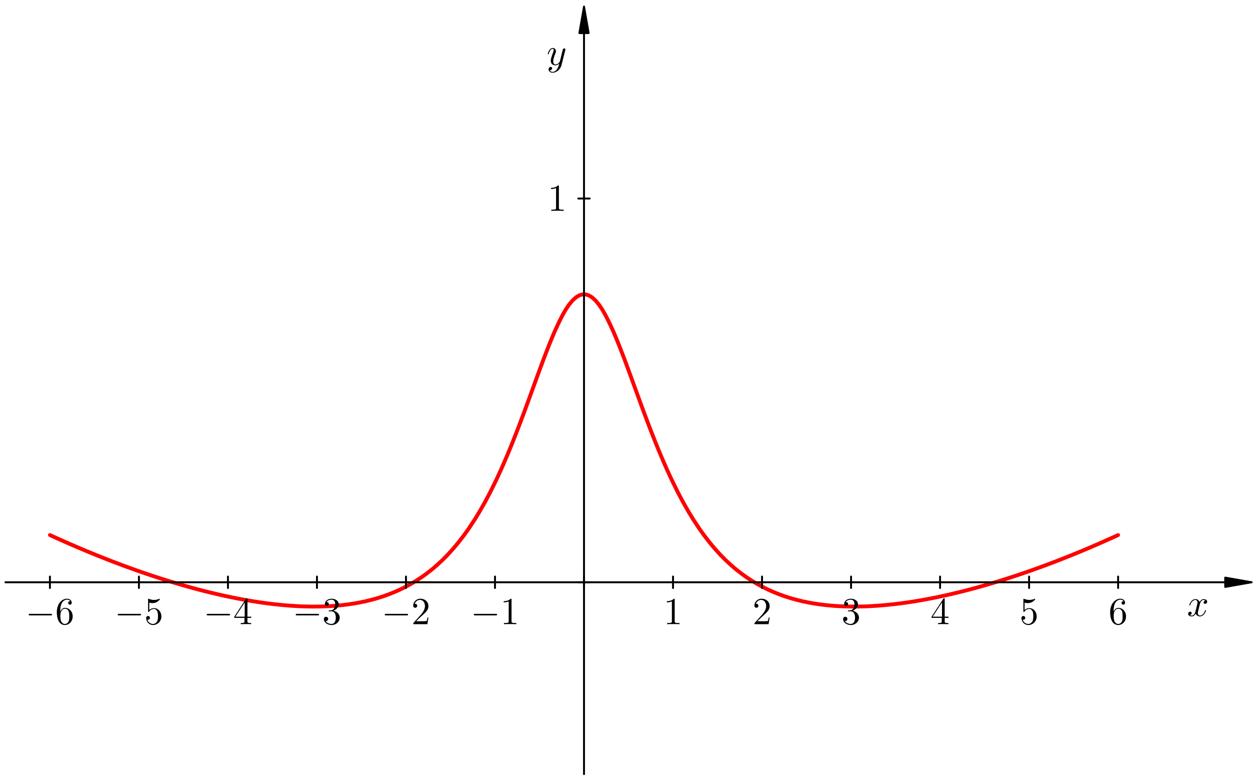
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



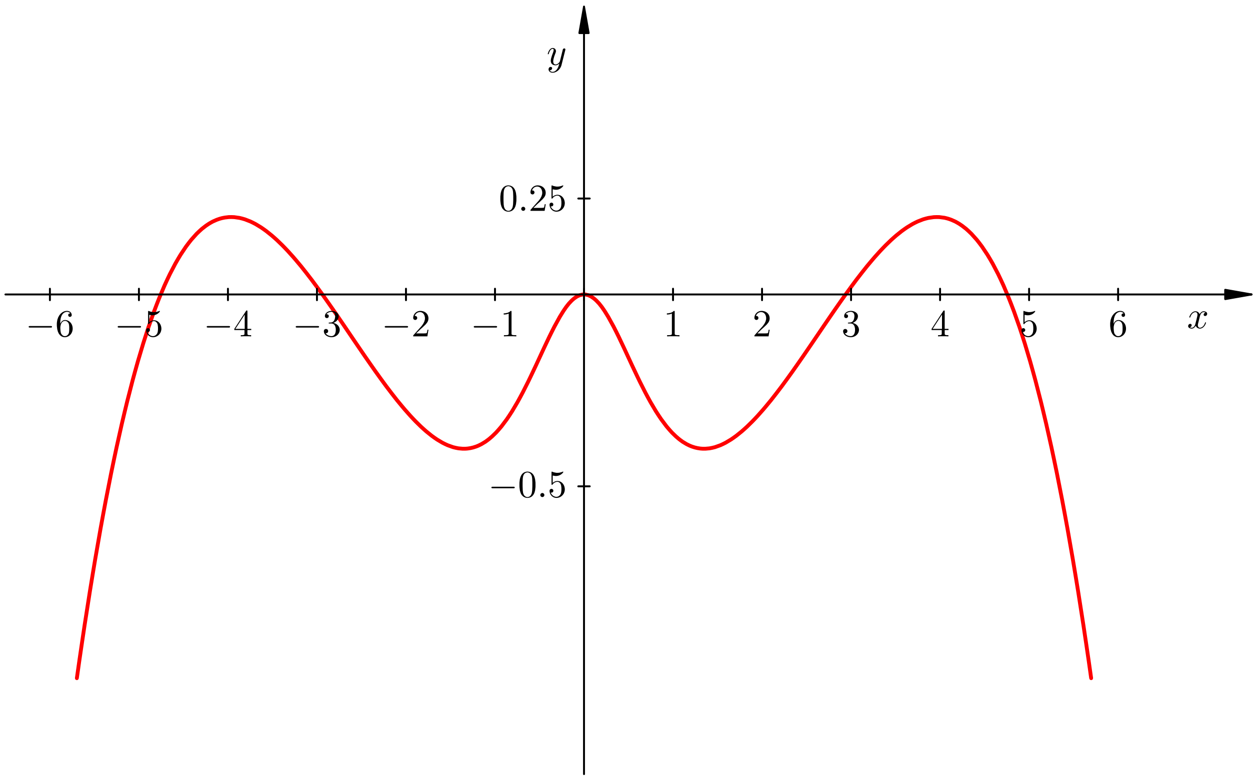
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



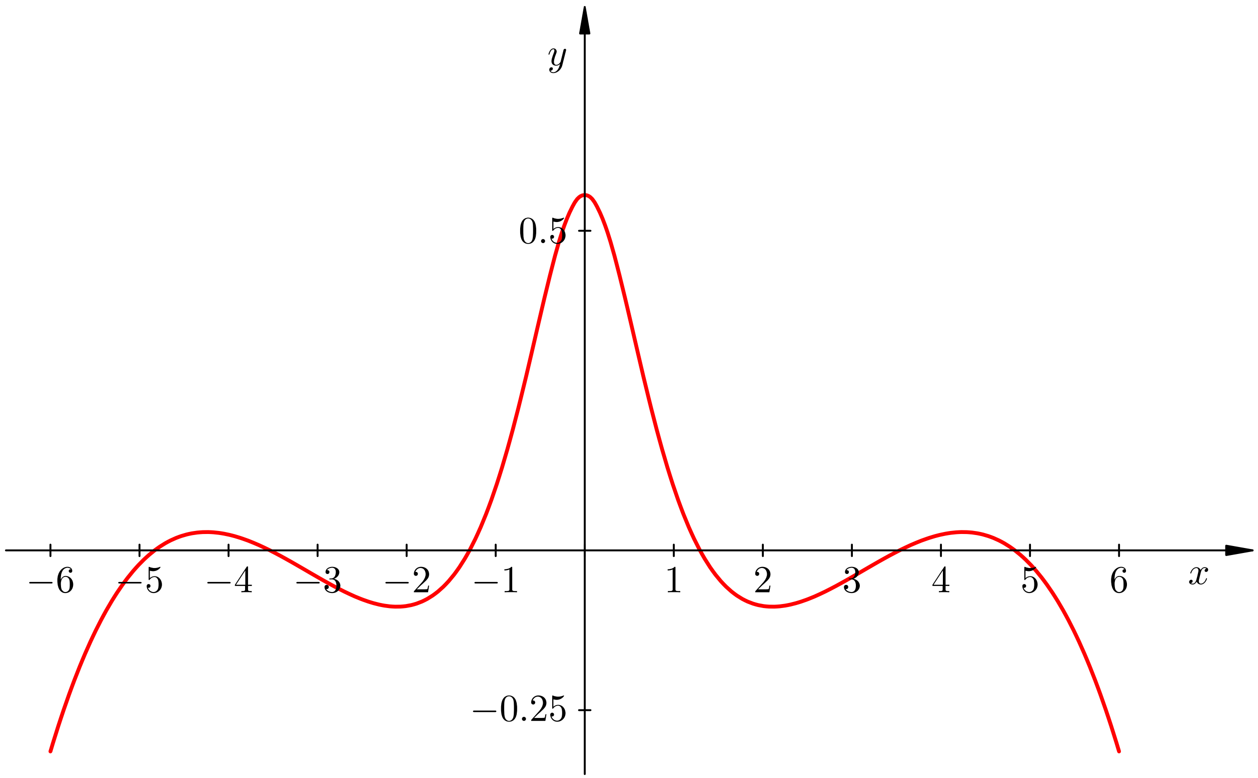
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



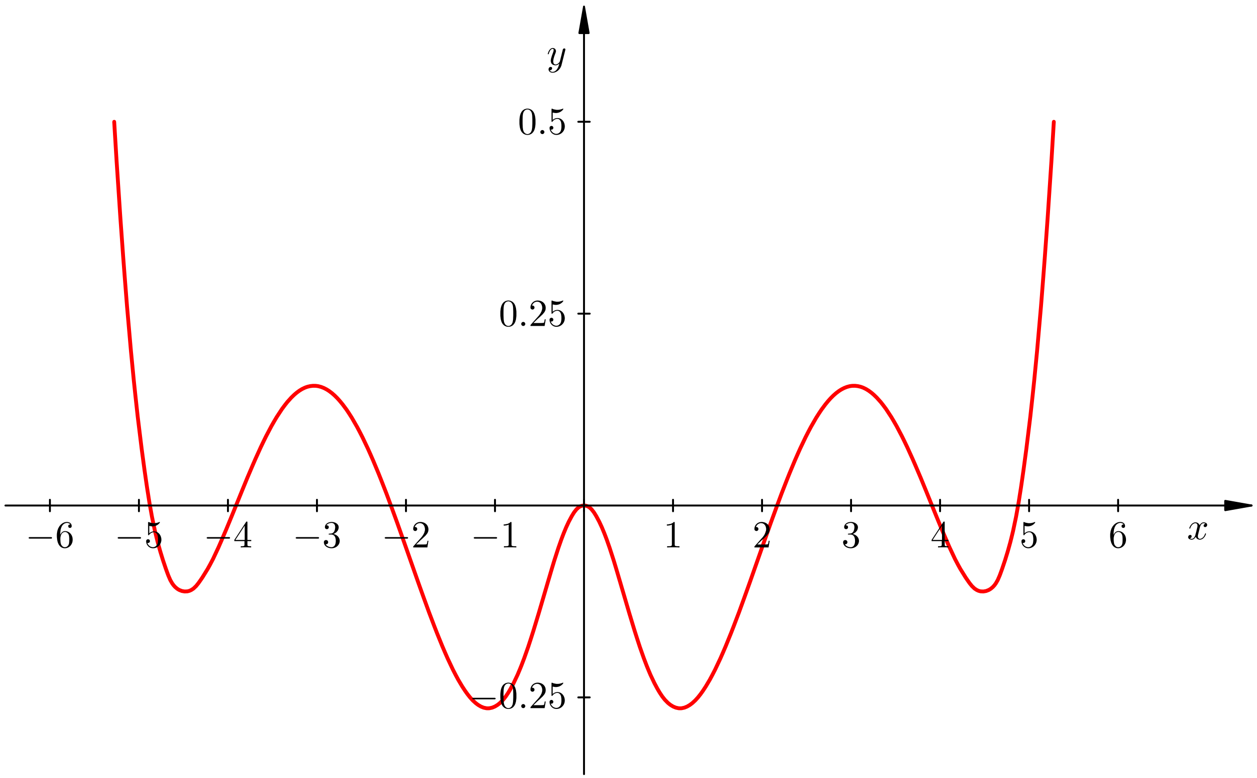
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



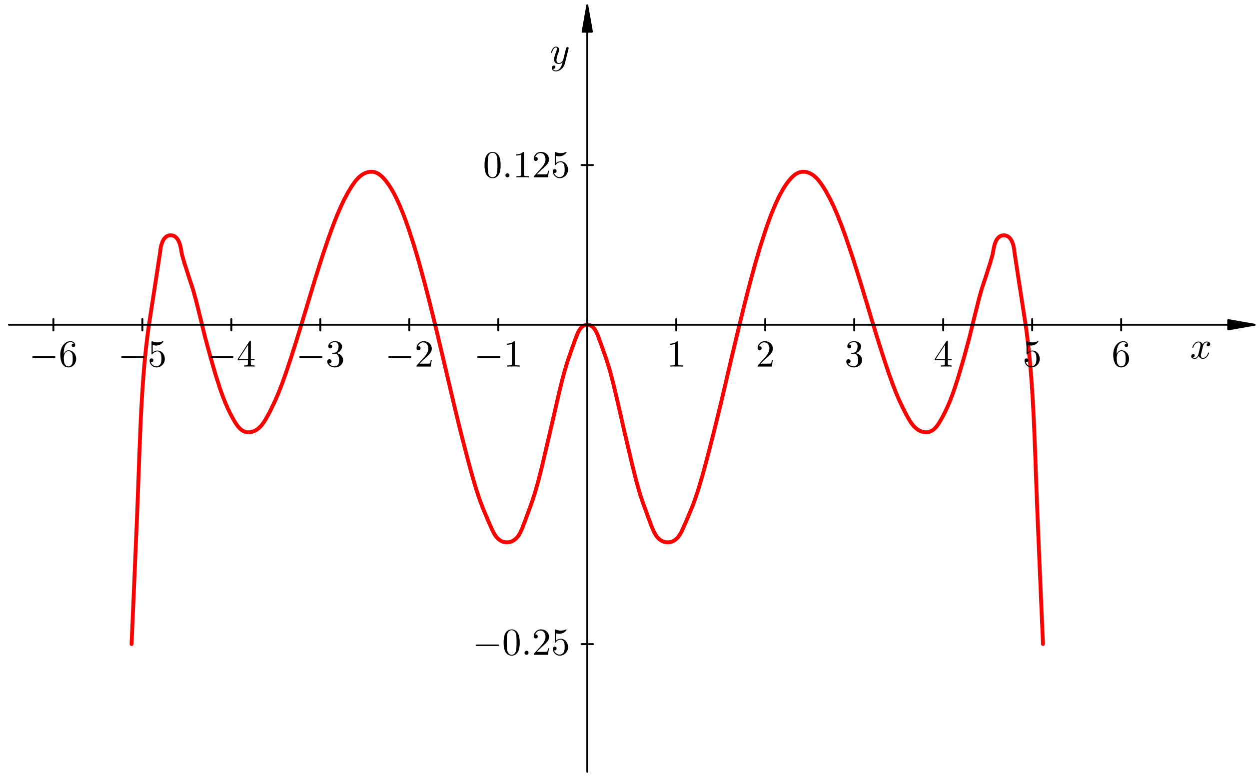
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



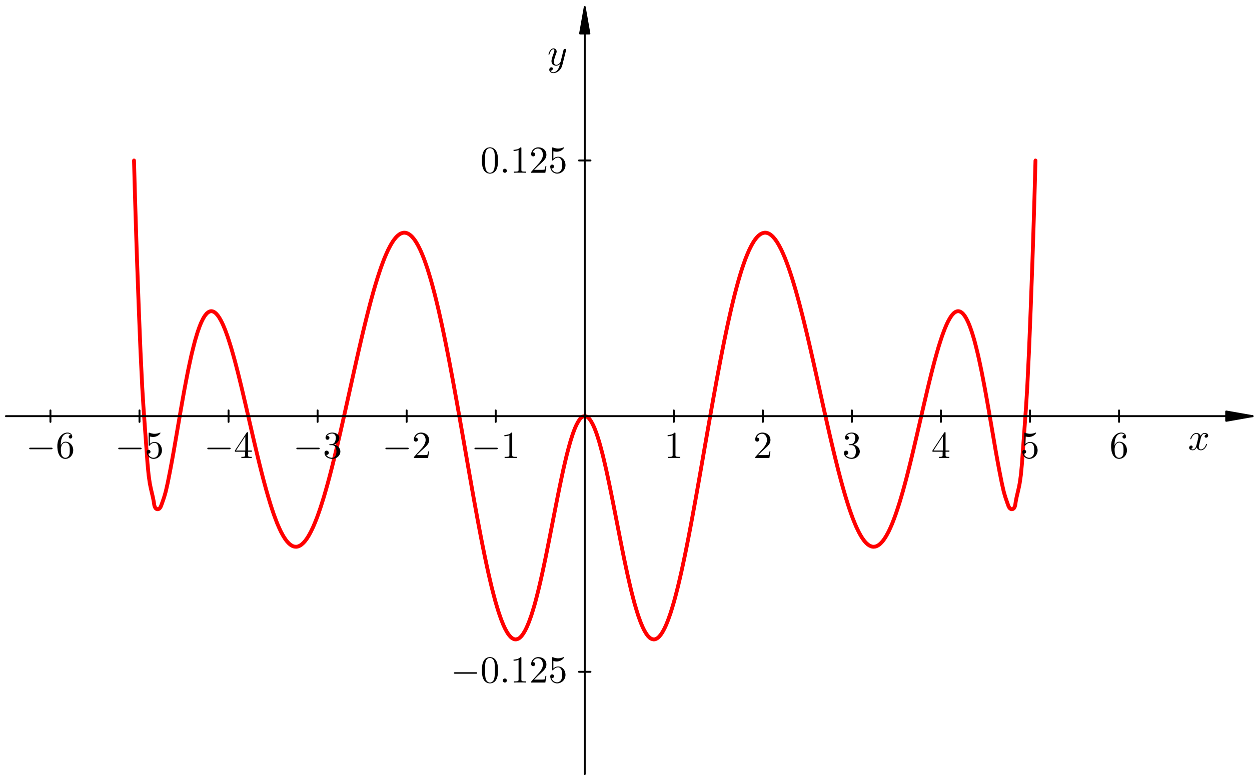
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



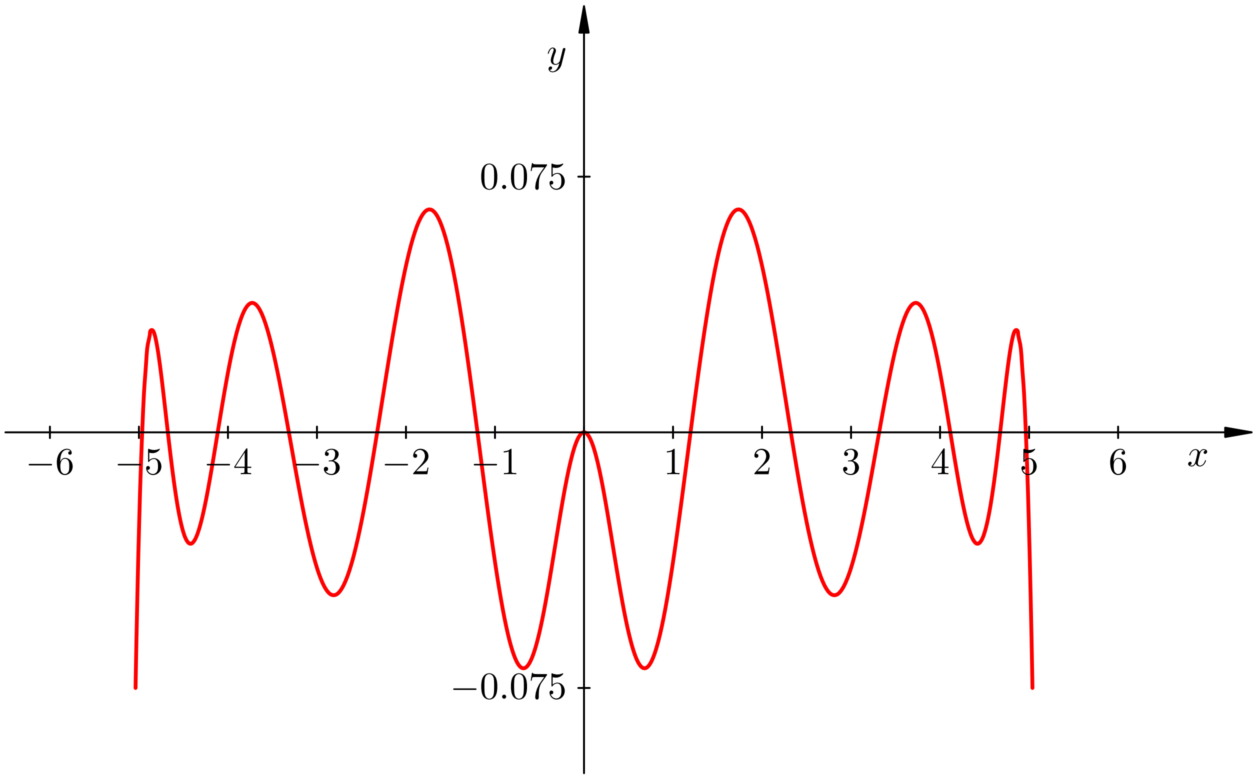
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



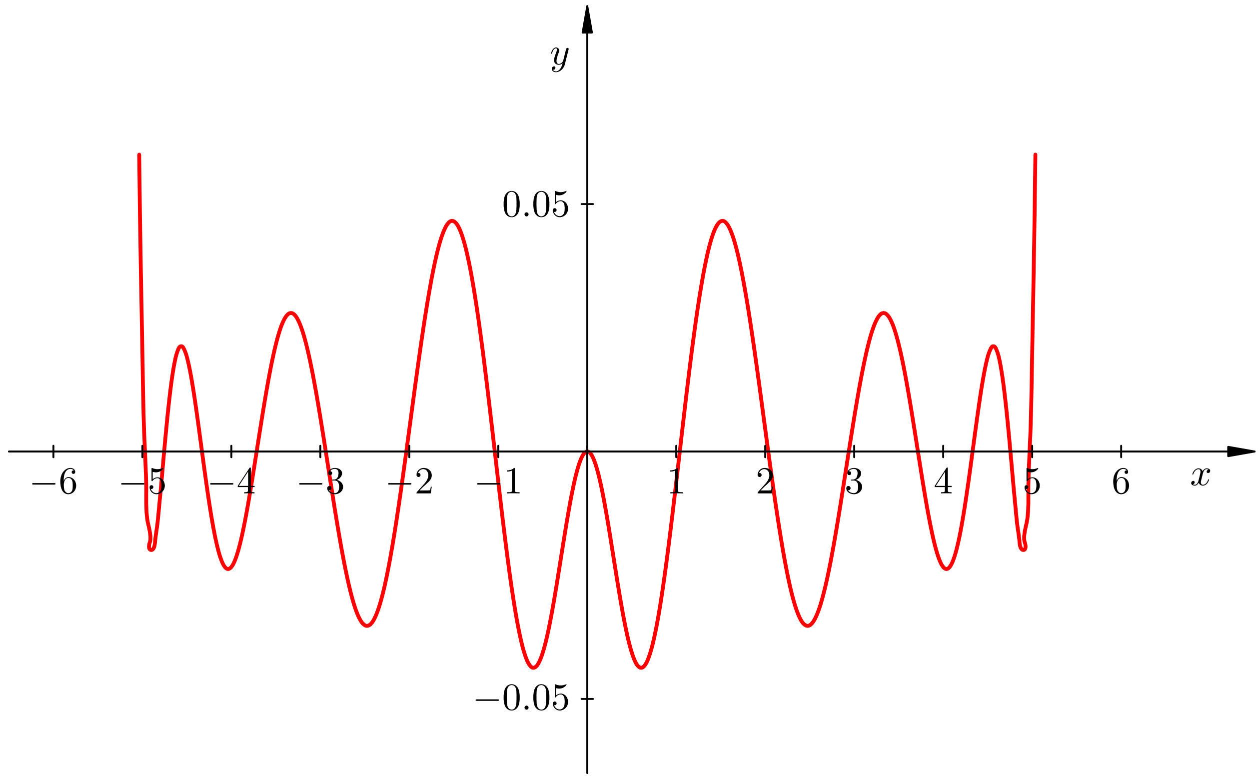
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



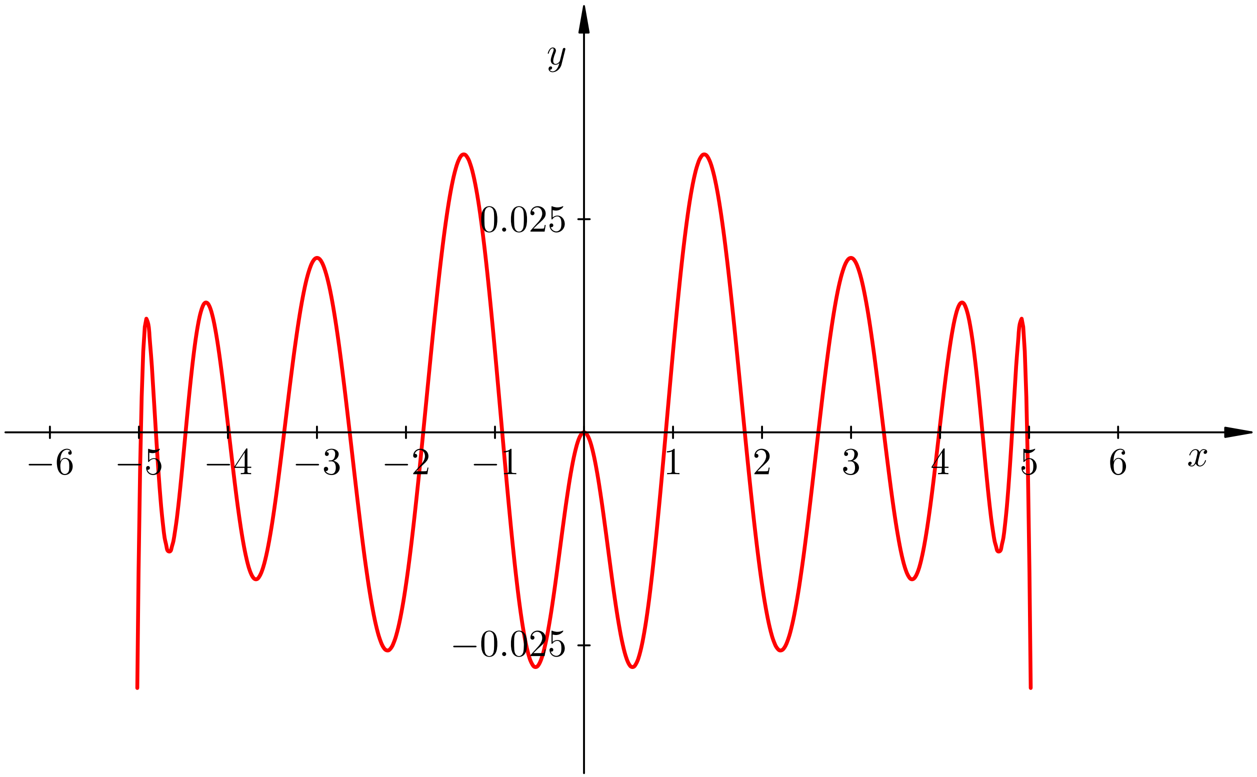
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- nemoguće naći takav izbor točaka interpolacije polinomima, koji bi bio dobar za svaku funkciju.

Teorem. (Faber, 1914.) Za svaki mogući izbor točaka interpolacije, tj. za svaki niz skupova čvorova

$$X^{(n)} = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma p_n, stupnja n, s čvorovima iz skupa $X^{(n)}$, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0. \qquad \blacksquare$$

Dakle, nema (uniformne) konvergencije, tj. “nema spasa”!

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo "kontrolirati".

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.