Numerička matematika
9. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Metoda najmanjih kvadrata:
  - Ortogonalne familije funkcija, ortogonalni polinomi.
  - Primjeri ortogonalnih familija funkcija.
  - Svojstva ortogonalnih polinoma.
    - Tročlana homogena rekurzija.
    - Nultočke ortogonalnih polinoma.
- Računanje vrijednosti funkcija:
  - Polinomi i Hornerova shema.
  - Ortogonalne funkcije i generalizirana Hornerova shema.
  - Primjeri.
    - Razvoj po T_n i skoro minimaks aproksimacije.

Informacije

Rezultati prvog kolokvija — komentar:

- Nisu tako “strašni”, ali moglo je i puno bolje.
- Oni koji imaju manje od 20 bodova su ozbiljno “ugroženi”.

Kolokviji ispituju gradivo cijelog kolegija, a ne samo vježbe!

Informacije — zadaće

"Oživile" su i domaće zadaće iz NM.

- Realizacija ide "automatski" — preko web aplikacije.

Pogledajte na službeni web kolegija, pod "zadaće".

- Tamo su početne upute.

Skraćeni link je

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

Direktni link na aplikaciju za zadaće je

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Tamo su kompletna predavanja od prošle dvije godine, a stizat će i nova (kako nastaju).

- Prva 2 su još nesređena — onako kako ste ih vidjeli!

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima čak 3 demonstratora:

- Ervin Duraković, Nika Kenda i Marin Mišur.

Za upute za dogovor i termine demonstratura

- pogledajte oglase na oglasnoj ploči i
- web stranicu kolegija — pod “nastava”.

Ortogonalne funkcije

Ortogonalne funkcije i najmanji kvadrati

Linearni sustav za neprekidni problem najmanjih kvadrata zapisali smo kao

$$\sum_{j=0}^{m} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle a_j = \langle \varphi_i, f \rangle, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Ako φ_i, $i = 0, \ldots, m$, tvore ortogonalni sustav funkcija, onda je

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{za } i \neq j, \quad \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = \|\varphi_j\|^2 > 0.$$

Uvrštavanjem u linearni sustav, dobivamo da je sustav dijagonalan, a njegovo rješenje je

$$a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Problemi

Oblikom koeficijenata a_j nismo izbjegli sve probleme.

- Tipično norme $\|\varphi_j\|_2^2$ padaju kad j raste, dok su brojnici reda veličine f.
- Za koeficijente a_j se očekuje da rapidno padaju.
- Zbog toga se očekuju greške nastale kraćenjem pri računanju skalarnog produkta u brojniku.

Alternativna forma za računanje a_j je

$$a_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|_2^2} \left\langle f - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Uočite da je skalarni produkt "sume" s φ_j jednak nuli zbog ortogonalnosti.

Algoritam računanja koeficijenata

Sljedeći algoritam računa ne samo a_j, nego i aproksimaciju

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x).$$

Računanje koeficijenata

$$
\begin{array}{l}
\texttt{s[-1] = 0;} \\
\texttt{za j = 0 do m radi \{} \\
\quad \texttt{a[j] = } \langle \texttt{f - s[j - 1], phi[j]} \rangle \texttt{ / } \|\texttt{phi[j]}\|_2^2\texttt{;} \\
\quad \texttt{s[j] = s[j - 1] + a[j] * phi[j];} \\
\texttt{\};}
\end{array}
$$

Vrijednost $\varphi^{(m)}(x)$ izračunata je u `s[m]`.

Projekcija je opet rješenje

Tvrdimo da je greška aproksimacije $f - \varphi^{(m)}$ okomita na sve linearne kombinacije funkcija φ_k, za $k = 0, \ldots, m$.
Dovoljno je pokazati da je greška okomita na svaki φ_k

$$
\begin{aligned}
\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = \langle f - a_k \varphi_k, \varphi_k \rangle \\
&= \langle f, \varphi_k \rangle - a_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \\
&= \langle f, \varphi_k \rangle - \frac{\langle \varphi_k, f \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Dobiveni rezultat ima jednostavno geometrijsko značenje — aproksimacija je ortogonalna projekcija na prostor Φ_m razapet funkcijama φ_k, za $k = 0, \ldots, m$.

Projekcija je opet rješenje

Iz ortogonalnosti

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \psi \rangle = 0,$$

gdje je $\psi \in \Phi_m$ bilo koja linearna kombinacija φ_k, zaključujemo da je i

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)} \rangle = 0.$$

Tada, zbog okomitosti, možemo pisati

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \|\varphi^{(m)}\|_2^2 = \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \left\| \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j \right\|_2^2 \\ &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2 \, \|\varphi_j\|_2^2. \end{aligned}$$

Greška rješenja

Iz prethodne relacije slijedi da se greška aproksimacije može zapisati kao

$$\|f - \varphi^{(m)}\|_2 = \left(\|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2 \, \|\varphi_j\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Ako je zadan niz prostora Φ_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, onda je iz prethodne relacije jasno da je

$$\|f - \varphi^{(0)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(1)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(2)}\|_2 \geq \cdots,$$

što jasno slijedi i iz činjenice da je

$$\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \cdots.$$

Greška rješenja

Ako je prostora Φ_k beskonačno mnogo, očito je da je norma greške aproksimacije

- monotono padajuća i
- odozdo ograničena s 0,

pa mora konvergirati.

Mora li norma greške konvergirati u 0?

Odgovor je ne! Naravno, nužni i dovoljni uvjet da bi greška konvergirala u nulu je

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \, \|\varphi_j\|_2^2,$$

što se odmah čita iz oblika greške.

Ortogonalizacija

Ako je zadan skup funkcija $\hat{\varphi}_j$ koje su linearno nezavisne, ali nisu ortogonalne na nekom intervalu,

- $\hat{\varphi}_j$ ortogonaliziramo korištenjem (modificiranog) Gram–Schmidtovog procesa ortogonalizacije.
- Funkcije φ_j koje razapinju isti prostor kao $\hat{\varphi}_j$ ne treba normirati.

Ortogonalizacija započinje s:

$$\varphi_0 := \hat{\varphi}_0.$$

Zatim, za $j = 1, 2, \ldots$ stavimo

$$\varphi_j := \hat{\varphi}_j - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \qquad a_k = \frac{\langle \hat{\varphi}_j, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|_2^2}.$$

Tada je φ_j ortogonalan na sve prethodne φ_k, $k = 0, \ldots, j-1$.

Primjer

Primjer. Nađite ortogonalnu bazu za prostor razapet funkcijama $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w = 1$.

Rješenje. Skalarni produkt funkcija u i v definiran je s

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} w(x)u(x)v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx.$$

Prva funkcija u ortogonalnoj bazi jednaka je prvoj zadanoj funkciji,

$$\varphi_0(x) = 1.$$

Primjer

Sada je

$$\langle x, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = x \Big|_{-1}^{1} = 2,$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{0}{2} = 0.$$

Odatle odmah dobivamo

$$\varphi_1(x) = x - a_0 \cdot 1 = x.$$

Primjer

Za ortogonalni polinom stupnja 2 treba izračunati a_0 i a_1

$$\langle x^2, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$\langle x^2, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x \, dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \frac{2}{3},$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \qquad a_1 = \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

Primjer

Odatle je

$$\varphi_2(x) = x^2 - a_1 \cdot x - a_0 \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Primjer. Korištenjem ortogonalnih polinoma izračunatih u prethodnom primjeru, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata nađite polinome stupnjeva 0 i 1 koji aproksimiraju funkciju

$$f(x) = e^x$$

na intervalu $[-1, 1]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.

Jednostavni primjer — ortogonalni polinomi

Rješenje problema najmanjih kvadrata je funkcija

$$\varphi^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j, \qquad a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, 1.$$

Za račun koeficijenata a_j moramo izračunati

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = 2, \qquad \langle \varphi_0, e^x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^x \, dx = e - e^{-1},$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}, \qquad \langle \varphi_1, e^x \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx = 2e^{-1}.$$

Jednostavni primjer — ortogonalni polinomi

Odatle odmah izlazi

$$a_0 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \mathrm{sh}(1), \quad a_1 = \frac{2e^{-1}}{\frac{2}{3}} = 3e^{-1}.$$

Aproksimacija konstantom je

$$\varphi^{(0)}(x) = \mathrm{sh}(1)\varphi_0(x) = \mathrm{sh}(1) \cdot 1,$$

a polinomom stupnja 1

$$\varphi^{(1)}(x) = \mathrm{sh}(1)\varphi_0(x) + 3e^{-1}\varphi_1(x) = \mathrm{sh}(1) \cdot 1 + 3e^{-1} \cdot x,$$

što se poklapa s već izračunatim rješenjem koje nije koristilo ortogonalne polinome.

Primjeri ortogonalnih familija funkcija

Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$$

čine ortogonalnu familiju funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.

Pokažimo da je to zaista istina. Neka su $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\cos(k+\ell)x - \cos(k-\ell)x \big) \, dx.$$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Ako je $k = \ell$, onda je prethodni integral jednak

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell} - x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi.$$

Ako je $k \neq \ell$, onda je jednak

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell} - \frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell, \end{cases} \qquad k, \ell = 1, 2, \ldots\,,$$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Na sličan način, pretvaranjem produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj, možemo pokazati da je

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ 2\pi, & k = \ell = 0, \\ \pi, & k = \ell > 0, \end{cases} \qquad k, \ell = 0, 1, \ldots\,,$$

te, također, da je

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos \ell x \, dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots\,, \qquad \ell = 0, 1, \ldots\,,$$

Fourierov red

Ako periodičku funkciju f osnovnog perioda duljine 2π aproksimiramo redom oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

onda, množenjem odgovarajućim trigonometrijskim funkcijama i integriranjem, dobivamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \sin kx \, dx.$$

Prethodni red poznat je pod imenom Fourierov red, a koeficijenti kao Fourierovi koeficijenti.

Fourierov red i najmanji kvadrati

Ako Fourierov red odsiječemo za $k = m$ dobijemo tzv. trigonometrijski polinom.

- Taj polinom je najbolja aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata za f u klasi trigonometrijskih polinoma stupnja manjeg ili jednakog m.

Uz ortogonalnost trigonometrijskih funkcija (obzirom na integral kao skalarni produkt), postoji diskretna ortogonalnost (integral se zamijeni sumom).

Klasični ortogonalni polinomi

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

U praksi najčešće susrećemo pet tipova klasičnih ortogonalnih polinoma.

Prisjetimo se, za polinome

$$\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\},$$

(indeks polinoma označava stupanj), kažemo da su ortogonalni obzirom na težinsku funkciju w, na $[a, b]$, ako vrijedi

$$\int_a^b w(x)\, p_m(x)\, p_n(x)\, dx = 0, \quad \text{za } m \neq n.$$

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

Težinska funkcija

- određuje sistem polinoma do na konstantni faktor u svakom od polinoma.
- Izbor takvog faktora zove se još i standardizacija ili normalizacija.

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma:

- Ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

s tim da su poznate "početne" funkcije p_0 i p_1, i sve funkcije α_n, β_n, za $n \in \mathbb{N}$.

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma (nastavak):

- Oprez. Prethodnu rekurziju zadovoljavaju i mnoge specijalne funkcije koje nisu ortogonalne!
- Nultočke ortogonalnih polinoma uvijek se nalaze unutar intervala $[a, b]$ na kojem su polinomi ortogonalni.

Dokaze za tročlanu rekurziju i nultočke možete naći u skripti. Napravit ćemo ih malo kasnije.

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste

- označavaju se s T_n,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

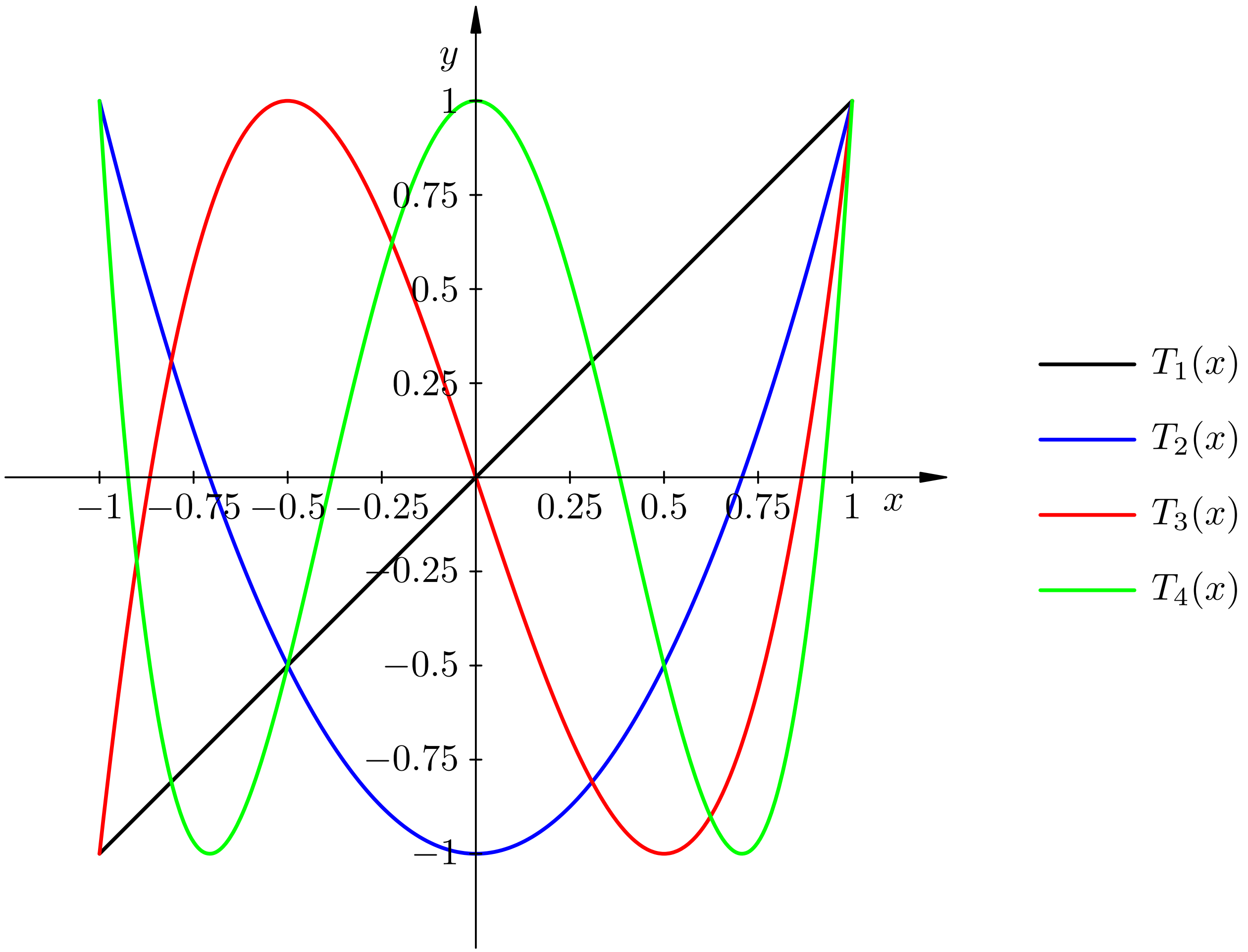
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Osim toga, n-ti Čebiševljev polinom prve vrste T_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0,1]$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinomi prve vrste

- transformirani na interval $[0,1]$,
- u oznaci T_n^*.

Dobivaju se korištenjem linearne (preciznije, afine) transformacije

$$[0,1] \ni x \mapsto \xi := 2x - 1 \in [-1,1].$$

Relacija ortogonalnosti postaje

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x)\, T_n^*(x)}{\sqrt{x - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0, \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

a rekurzivna relacija

$$T_{n+1}^*(x) - 2(2x - 1)T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x) = 0,$$

uz start

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinomi druge vrste

- označavaju se s U_n,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, U_m(x)\, U_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi/2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Zadovoljavaju istu rekurziju kao i polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz malo drugačiji start

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

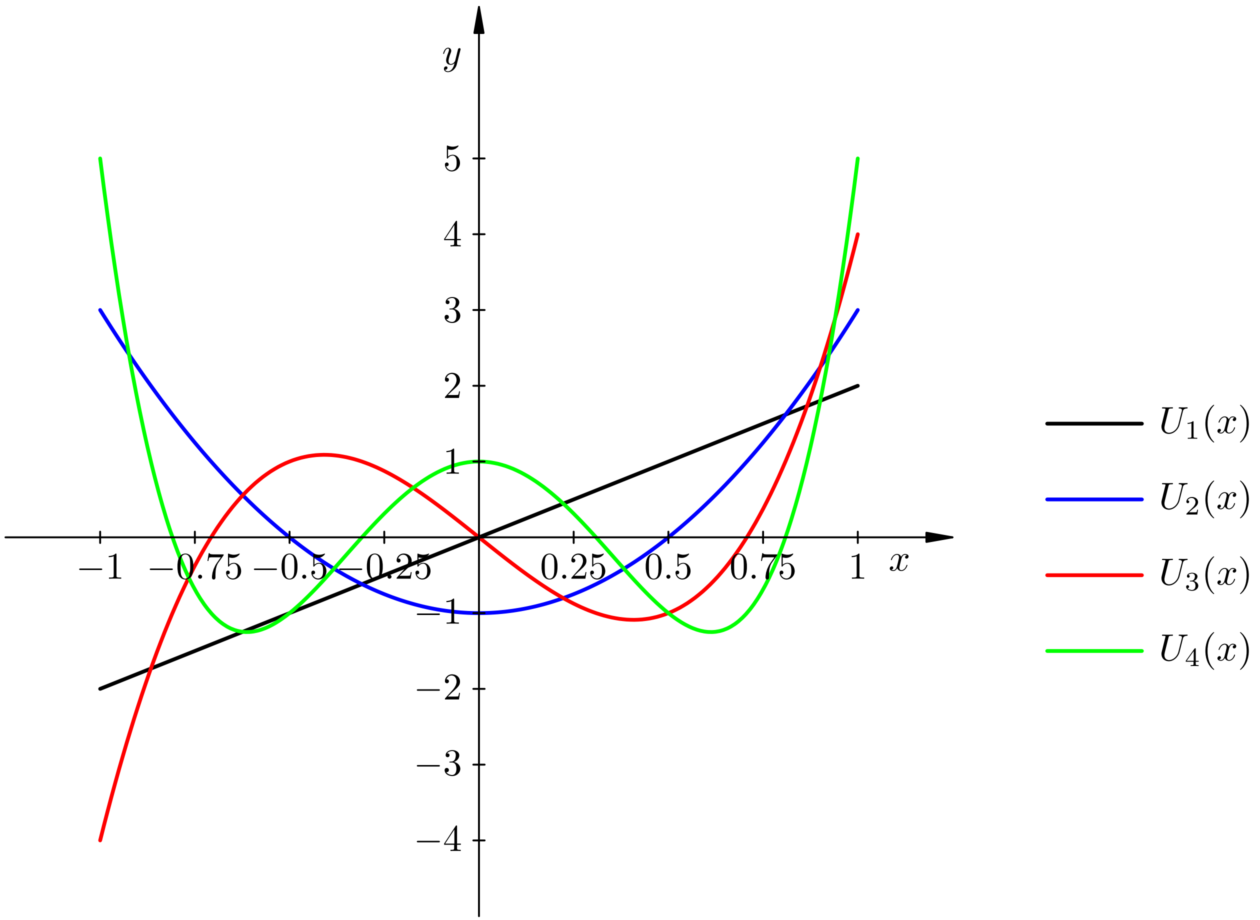
$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

n-ti Čebiševljev polinom druge vrste U_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi

- označavaju se s P_n,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = 1.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2/(2n+1), & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Legendreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

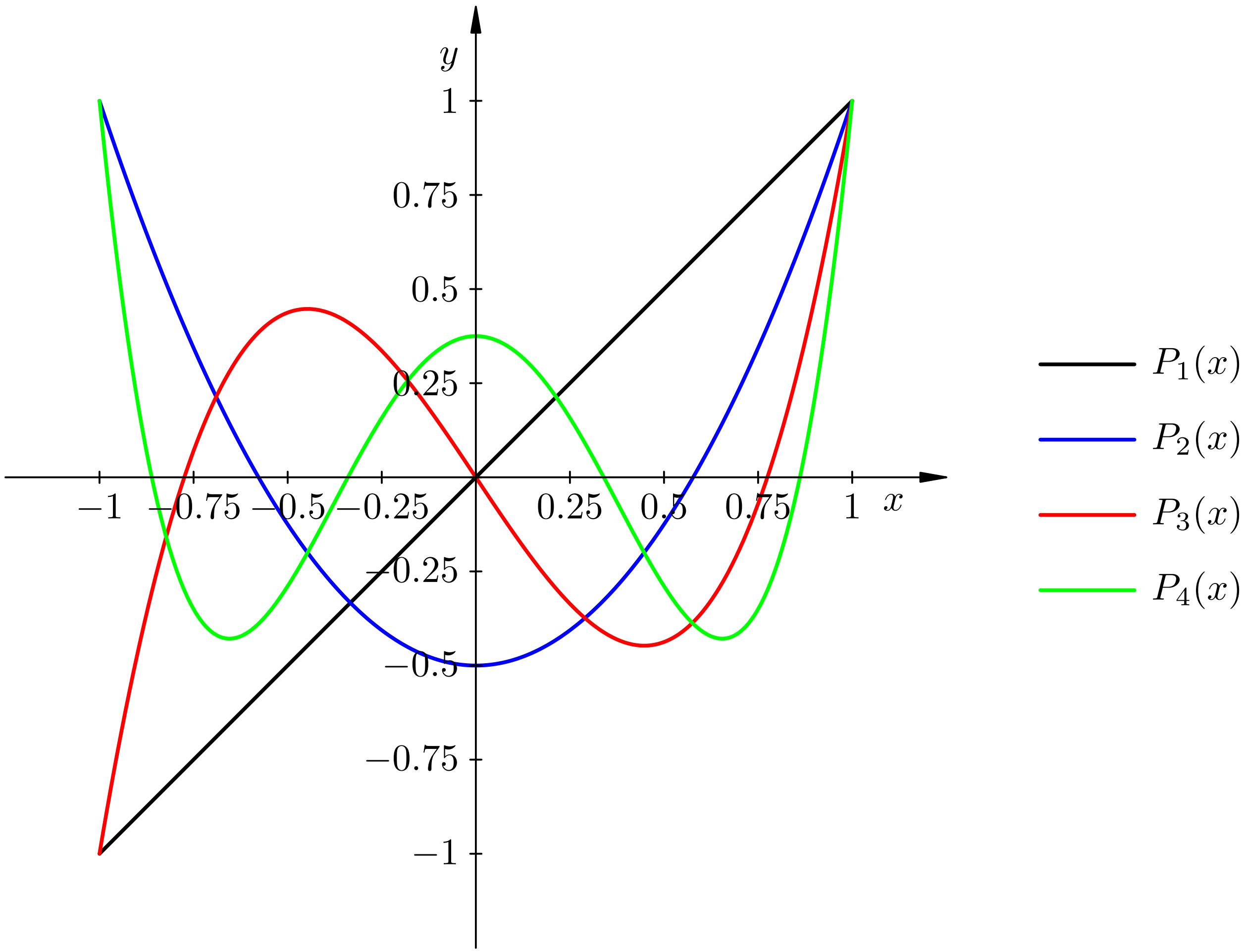
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Osim toga, n-ti Legendreov polinom P_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Legendreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Laguerreovi polinomi

Laguerreovi polinomi

- označavaju se s L_n,
- ortogonalni su na intervalu $[0, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_0^\infty e^{-x} \, L_m(x) \, L_n(x) \, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 1, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Laguerreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

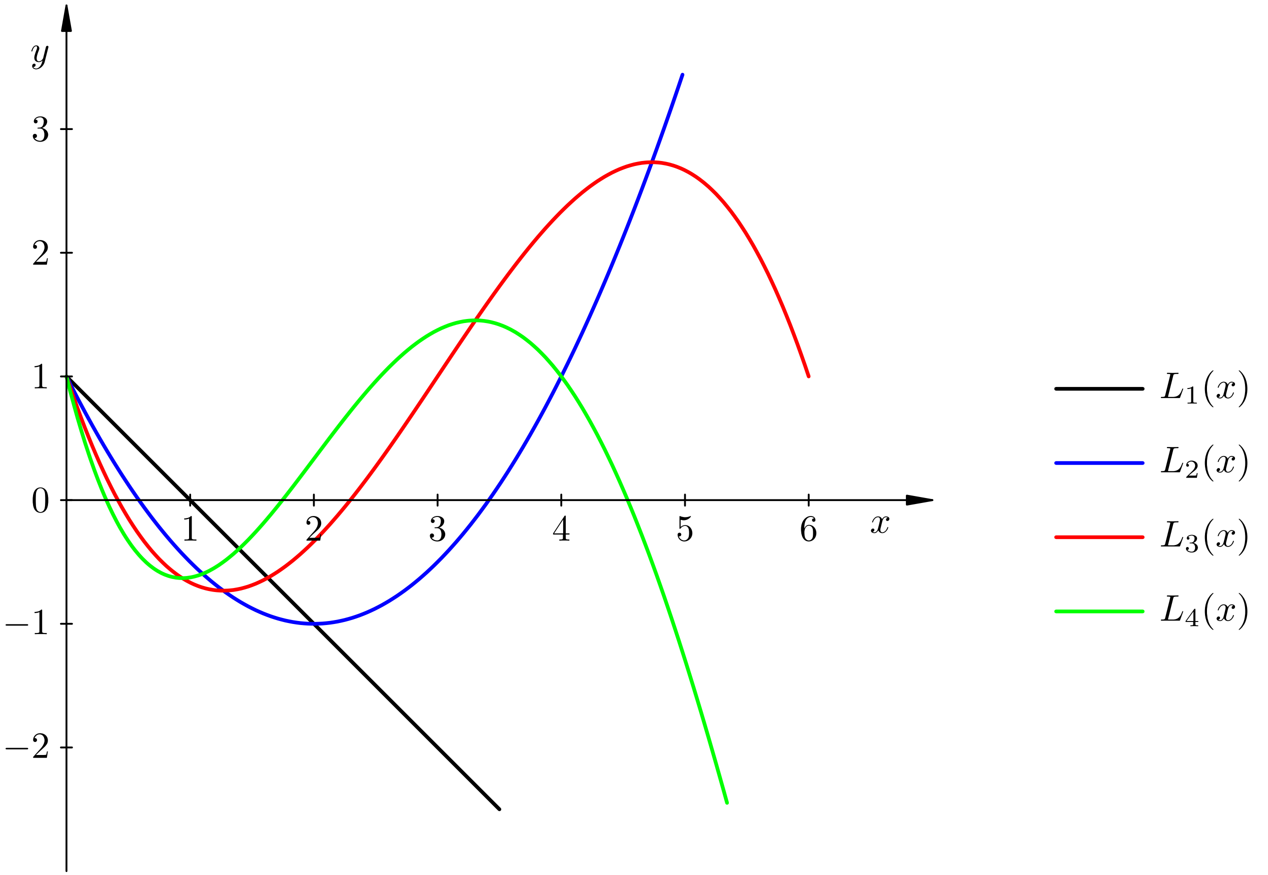
$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Osim toga, n-ti Laguerreov polinom L_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

Laguerreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Laguerreovi polinomi

Često nailazi na još jednu rekurziju za Laguerreove polinome

$$\widetilde{L}_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)\widetilde{L}_n(x) + n^2\widetilde{L}_{n-1}(x) = 0,$$

uz jednaki start

$$\widetilde{L}_0(x) = 1, \quad \widetilde{L}_1(x) = 1 - x.$$

Uspoređivanjem ove i prethodne rekurzije dobivamo da je

$$\widetilde{L}_n(x) = n!\, L_n(x),$$

tj. radi se samo o drugačijoj normalizaciji

$$\int_0^\infty e^{-x}\, \widetilde{L}_m(x)\, \widetilde{L}_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ (n!)^2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi

- označavaju se s H_n,
- ortogonalni su na intervalu $(-\infty, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, H_m(x)\, H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2^n\, n! \sqrt{\pi}, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Hermiteovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

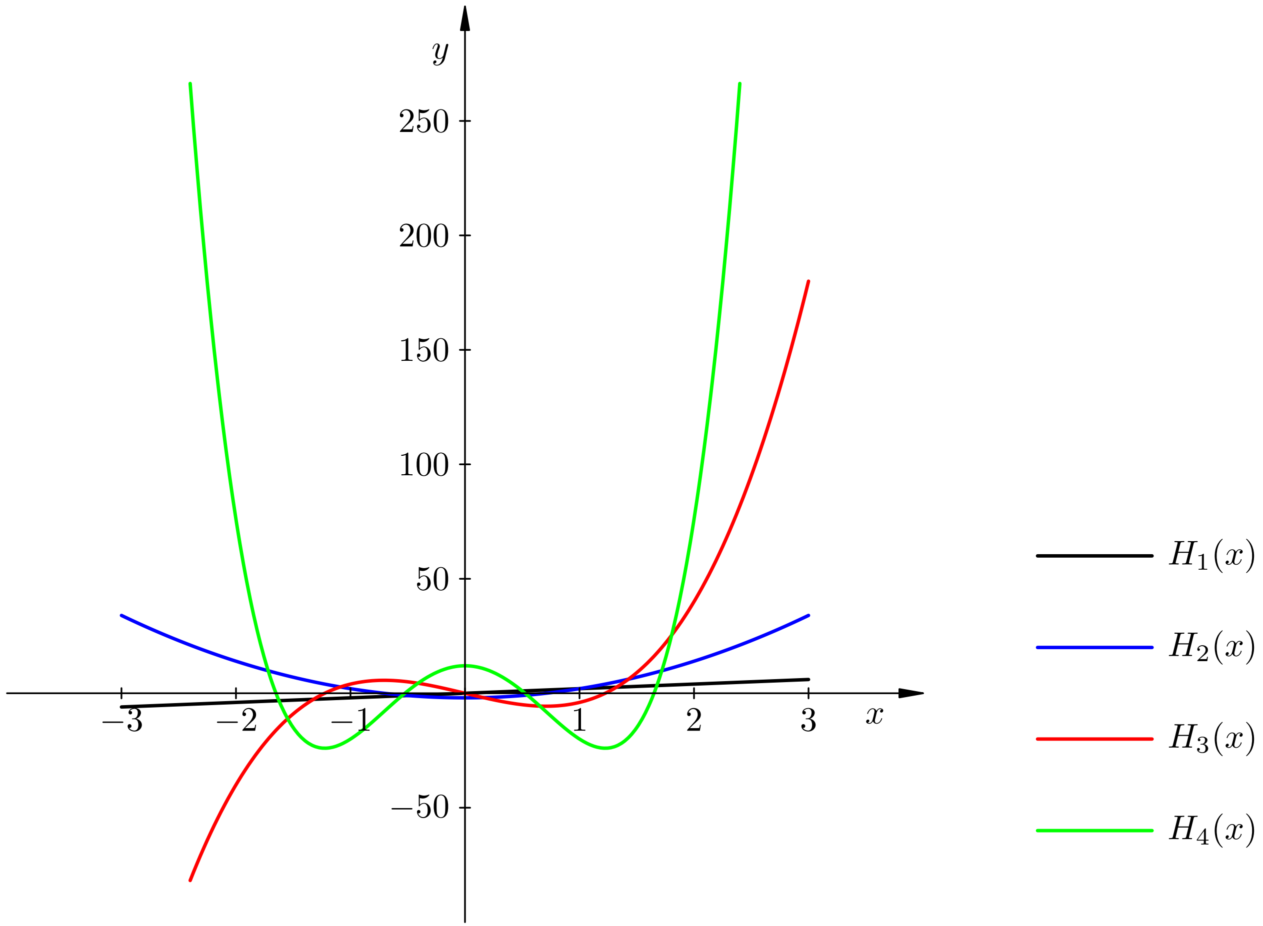
$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Osim toga, n-ti Hermiteov polinom H_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Hermiteovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Ortogonalni polinomi i tročlane rekurzije

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokažimo neka svojstva ortogonalnih polinoma koja smo već spomenuli.

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Pretpostavljamo da je p_n polinom stupnja n, za svaki $n \geq 0$.

Ako je f polinom stupnja m, tada vrijedi

$$f = \sum_{n=0}^{m} \frac{\langle f, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} \, p_n.$$

Dokaz. Provodi se Gram–Schmidtovim procesom ortogonalizacije na sustavu potencija $\{1, x, x^2, \ldots\}$, pa se iskoristi da je f linearna kombinacija baze $\{1, x, \ldots, x^m\}$. ■

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokaz može i preko linearne nezavisnosti ortogonalnih funkcija (v. prošli puta), pa to vrijedi i za familiju $\{p_n \mid n \geq 0\}$.

Početni komad te familije — skup $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ je

- linearno nezavisan skup od $m + 1$ funkcija,
- i svi elementi su polinomi stupnja manjeg ili jednakog m,

pa je $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$ (dimenzija je $m + 1$).

Zbog $f \in \mathcal{P}_m$, slijedi da je f neka linearna kombinacija funkcija $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$.

Formula za koeficijente u toj kombinaciji (prikaz) slijedi iz ortogonalnosti polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$. ■

Ortogonalnost na polinome nižeg stupnja

Jednostavna posljedica prethodne tvrdnje je sljedeći rezultat, kojeg ćemo koristiti u nastavku.

Korolar. Neka je p_n ortogonalni polinom stupnja n, za $n \geq 0$, i neka je f bilo koji polinom stupnja strogo manjeg od n, tj. $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Onda je

$$\langle p_n, f \rangle = 0.$$

Drugim riječima,

- p_n je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja od n.

Dokaz. Stavimo $m = n - 1$, pa tvrdnja ide direktno iz prikaza u prošlom teoremu i ortogonalnosti. ■

Nultočke ortogonalnih polinoma

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Tada svaki polinom p_n ima točno n različitih (jednostrukih) realnih nultočaka na otvorenom intervalu (a, b).

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve međusobno različite nultočke polinoma p_n za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u x_i.

Budući da je p_n stupnja n,

- po osnovnom teoremu algebre, p_n ima točno n nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima manje ili jednako n, tj. znamo da je $m \leq n$.

Nultočke ortogonalnih polinoma

Polinom p_n onda možemo prikazati u obliku produkta

$$p_n(x) = h(x)\,(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi r_i moraju biti neparni, a
- polinom $h(x)$ ne smije promijeniti predznak na (a, b).

Pretpostavimo da nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva ima striktno manje od n, tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Nultočke ortogonalnih polinoma

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x)\,(x - x_1)\cdots(x - x_m) \\ &= h(x)\,(x - x_1)^{r_1+1}\cdots(x - x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka $x_1, \ldots, x_m$, ovaj polinom ne mijenja znak prolaskom kroz točke $x_1, \ldots, x_m$ (eksponenti $r_i + 1$ su parni).

Osim toga, $h(x)$ ne mijenja znak na (a, b), tj.

- čitav polinom $p_n(x)B(x)$ ne mijenja znak na (a, b).

Zato vrijedi

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x)\,dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije fiksnog predznaka (plus ili minus).

Nultočke ortogonalnih polinoma

S druge strane, prethodni integral je skalarni produkt polinoma B (stupnja $m < n$) i polinoma p_n (stupnja n).

- Svaki ortogonalni polinom p_n je okomit na sve polinome nižeg stupnja (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x)\,dx = \langle B, p_n \rangle = 0,$$

što je kontradikcija.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma B je bila pogrešna, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, p_n ima točno n nultočaka $x_1, \ldots, x_n$ u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti jednostruke, jer je $p_n'(x_i) \neq 0$. ■

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zadana je familija ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ i neka su A_n i B_n vodeća dva koeficijenta polinoma p_n, tj.

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots,$$

s tim da je $A_n \neq 0$. Tada p_n možemo napisati kao

$$p_n(x) = A_n (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Definiramo još i

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \qquad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Uočite: a_n je omjer vodećih koeficijenata susjednih polinoma.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za svaki $n \geq 1$ vrijedi tročlana homogena rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) p_n(x) - c_n p_{n-1}(x),$$

pri čemu su koeficijenti u rekurziji dani formulama

$$b_n = a_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right) = -\frac{a_n}{\gamma_n} \langle x p_n, p_n \rangle,$$

$$c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}.$$

Za polinome p_n s vodećim koeficijentom $A_n = 1$, ove formule su još jednostavnije, jer je $a_n = 1$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Dokaz. Definiramo polinom G na sljedeći način — tako da poništimo vodeći koeficijent u p_{n+1}, tj. dobijemo $\deg G \leq n$.

$$\begin{aligned} G(x) &= p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x) \\ &= (A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^n + \cdots) \\ &\qquad - \frac{A_{n+1}}{A_n}\, x(A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots) \\ &= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1}B_n}{A_n}\right) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Dakle, G je zaista stupnja manjeg ili jednakog n.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Polinom G onda možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, tj.

$$G(x) = d_n p_n(x) + \cdots + d_0 p_0(x).$$

Računanjem koeficijenata d_i (v. prvi teorem o prikazu) izlazi

$$d_i = \frac{\langle G, p_i\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} = \frac{1}{\gamma_i}\Big(\langle p_{n+1}, p_i\rangle - a_n\langle x p_n, p_i\rangle\Big), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Treba još izračunati oba skalarna produkta na desnoj strani.

Za prvi produkt, iz ortogonalnosti odmah dobivamo

$$\langle p_{n+1}, p_i\rangle = 0, \quad i \le n,$$

tj. tog člana nema u relaciji za koeficijente d_i, $i = 0, \ldots, n$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Za drugi produkt $\langle xp_n, p_i \rangle$ dobivamo

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \int\limits_a^b w(x) p_n(x) x p_i(x)\, dx = \langle p_n, xp_i \rangle.$$

Polinom $xp_i(x)$ je stupnja $i + 1$. Nadalje, polinom p_n je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja.

Dakle, za sve $i \leq n - 2$, stupanj polinoma $xp_i(x)$ je manji ili jednak $n - 1$, pa je

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \langle p_n, xp_i \rangle = 0, \quad i \leq n - 2.$$

Kombiniranjem ta dva rezultata, dobivamo

$$d_i = 0, \quad \text{za} \quad 0 \leq i \leq n - 2.$$

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zbog toga je

$$G(x) = d_n p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Kad uvrstimo $G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x)$ i sredimo, izlazi

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + d_n) p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Dakle, vrijedi tročlana rekurzija, s $b_n = d_n$ i $c_n = -d_{n-1}$.

Iz prve relacije, uspoređivanjem vodećih koeficijenata funkcije G i funkcije s desne strane, slijedi prva formula za $b_n = d_n$.

Iz opće relacije za d_i, za koeficijente d_{n-1} i d_n dobivamo

$$d_i = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle x p_n, p_i \rangle = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle p_n, x p_i \rangle, \quad i = n-1, n.$$

Odavde izlaze i preostale dvije formule. ■

Christoffel–Darbouxov identitet

Mnoge korisne relacije za ortogonalne polinome izvode se korištenjem sljedećeg teorema.

Teorem. (Christoffel–Darbouxov identitet.) Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za njih vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x) p_k(y)}{\gamma_k} = \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{a_n \gamma_n (x - y)}.$$

Dokaz. Manipulacijom tročlane rekurzije. ∎

Ako su x i y dvije različite nultočke polinoma p_{n+1}, desna strana je nula. Iz lijeve strane dobivamo tzv.

- diskretnu ortogonalnost ortogonalnih polinoma!

Hornerova shema

Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Već ste upoznali Hornerovu shemu za izvrednjavanje polinoma.

- Postoji vrlo slična shema za izvrednjavanje ortogonalnih polinoma.
- Ponovimo svojstva Hornerove sheme za polinome.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom p_n stupnja n

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0,$$

kojemu treba izračunati vrijednost u zadanoj točki x_0. To se može napraviti na više načina.

- Prvo, napravimo to direktno po zapisu, potencirajući.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se rekurzivno

$$x^i = x \cdot x^{i-1}.$$

Imamo li zapamćen x^{i-1}, lako je izračunati x^i — korištenjem samo jednog množenja.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Vrijednost polinoma s pamćenjem potencija

```
sum = a[0];
pot = 1;
za i = 1 do n radi {
  pot = pot * x_0;
  sum = sum + a[i] * pot;
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

U unutarnjoj petlji javljaju se 2 množenja i 1 zbrajanje.
Petlja se izvršava n puta, pa ukupno imamo

$$2n \text{ množenja } + \ n \text{ zbrajanja.}$$

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvrednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s manje množenja — ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvrednjava polinom zove se Hornerova shema.

Hornerova shema

```
sum = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * x_0 + a[i];
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Odmah je očito da smo korištenjem ovog algoritma broj množenja prepolovili, tj. da je njegova složenost

$$n \text{ množenja } + n \text{ zbrajanja.}$$

Hornerova shema je optimalan algoritam za izvrednjavanje zadanog polinoma u zadanoj točki.

- Ulaz algoritma su: polinom i točka!

Napomena: za izvrednjavanje fiksnog polinoma u puno točaka

- postoje i brži algoritmi — tzv. prethodna obrada koeficijenata, FFT.

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Za opći polinom (ulaz u Horner) automatski pretpostavljamo da je većina koeficijenata različita od nule.

Ako imamo fiksni polinom s malo koeficijenata različtih od nule — postoje i bolji algoritmi! Na primjer, polinom

$$p_{100}(x) = x^{100} + 1$$

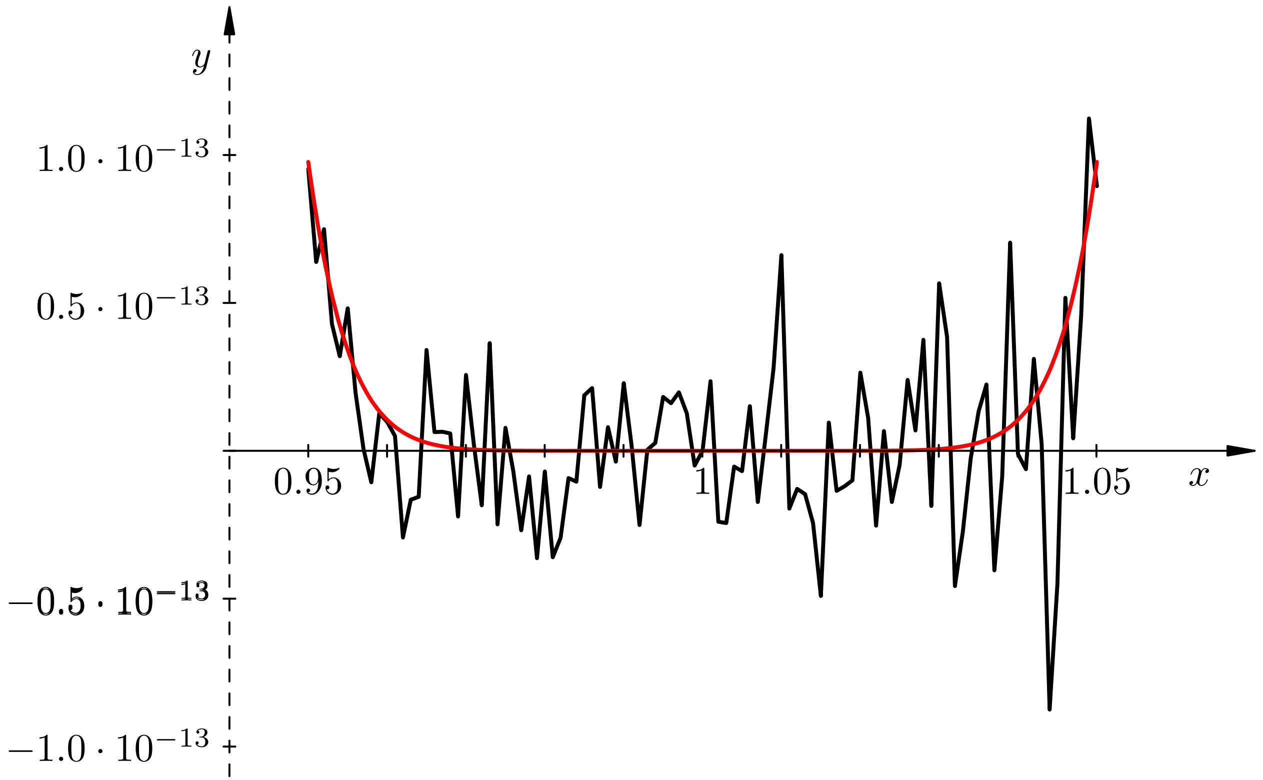
besmisleno je izvrednjavati Hornerovom shemom, jer bi to predugo trajalo (binarno potenciranje je brže). Sastavite odgovarajući algoritam.

Dodatna prednost Hornerove sheme:

- Hornerova shema može biti stabilnija nego direktno potenciranje, zbog redova veličine članova u sumi.

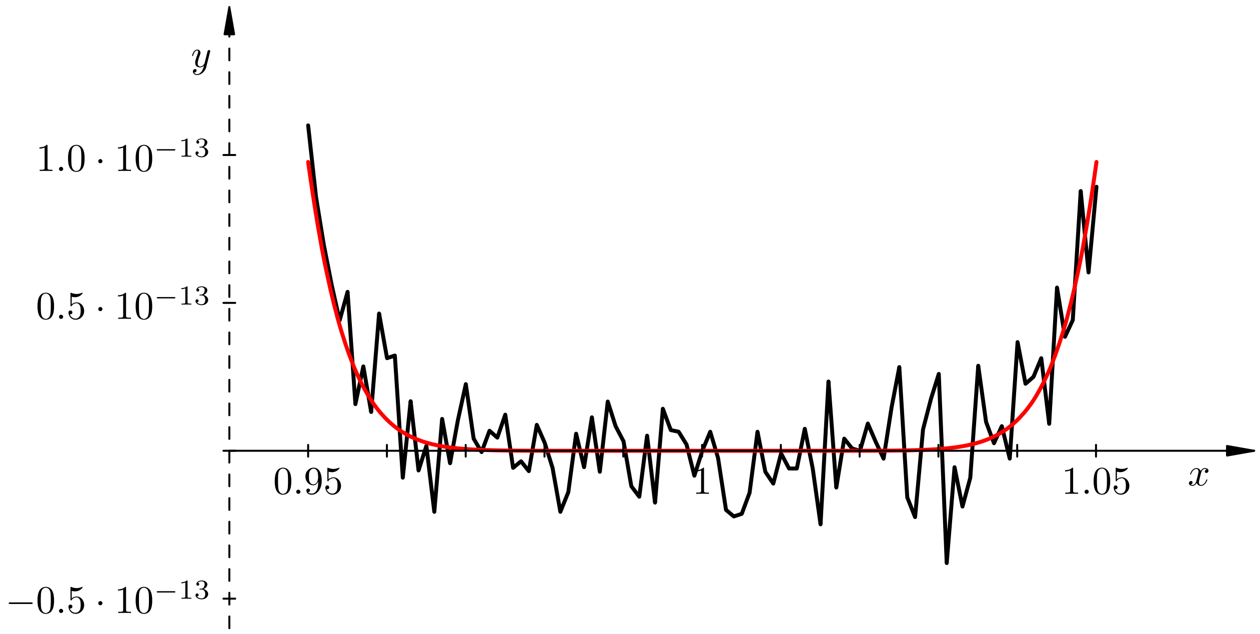
Ilustracija je na sljedeće dvije stranice.

Stabilnost direktnog potenciranja



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x:
direktnim potenciranjem (dvostruka točnost).

Stabilnost Hornerove sheme



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x: Hornerovom shemom (dvostruka točnost).

Hornerova shema “na ruke”

Hornerova shema “na ruke” radi se tako da se napravi tablica kojoj se

- u gornjem redu se popišu redom svi koeficijenti polinoma p_n — od a_n do a_0;
- donji red se izračunava korištenjem gornjeg reda i točke x_0.

Elemente donjeg reda, slijeva nadesno, označimo s $x_0,\ c_{n-1},\ c_{n-2}, \dots ,\ c_0,\ r_0$, tako da se c_{n-1} nalazi ispod a_n:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
x_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 & r_0
\end{array}.
$$

Hornerova shema “na ruke”

Elementi donjeg reda računaju se ovako:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &:= a_n, \\ c_{i-1} &:= c_i * x_0 + a_i, \qquad i = n-1, \ldots, 1, \\ r_0 &:= c_0 * x_0 + a_0. \end{aligned}$$

Dakle,

- vodeći koeficijent a_n se prepiše,
- svi ostali se računaju tako da se posljednji izračunati c_i pomnoži s x_0, a zatim mu se doda a_i.

Na kraju je $p_n(x_0) = r_0$.

Hornerova shema "na ruke"

Primjer. Izračunajmo vrijednost polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki $x_0 = -1$.

Formirajmo tablicu:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Dakle, $p_5(-1) = 4$. ■

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Pogledajmo značenje koeficijenata c_i koji se javljaju u donjem redu tablice.

Promatrajmo polinom koji dobijemo dijeljenjem polinoma p_n s polinomom stupnja 1 oblika $x - x_0$.

- Kvocijent ta dva polinoma nazovimo q_{n-1} — to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$,
- a ostatak je broj (mora biti stupnja manjeg od polinoma kojim dijelimo), koji označimo s b_0.

Tada vrijedi

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je

$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Označimo koeficijente polinoma q_{n-1} s b_i, za $1 \leq i \leq n$,

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i.$$

Uvrstimo li to u relaciju za dijeljenje, sređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije, dobivamo

$$p_n(x) = b_n x^n + (b_{n-1} - x_0\, b_n) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0\, b_2) x \\ + b_0 - x_0\, b_1.$$

Za vodeći koeficijent b_n, odmah zaključujemo $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \qquad i = n-1, \ldots, 0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Dakle, b_i možemo izračunati iz b_{i+1} rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija istog oblika kao za dobivanje c_i, samo s pomaknutim indeksima. Kako je na startu $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti kvocijenta i ostatka pri dijeljenju polinoma p_n linearnim faktorom $x - x_0$.

Primjer

Primjer. Podijelimo

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

linearnim polinomom $x + 1$.

Primijetite da je to ista tablica kao u prošlom primjeru, pa imamo

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Odatle lako čitamo

$$2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1 = (x + 1)\left(2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 3\right) + 4.$$

Algoritam za dijeljenje polinoma

Dijeljenje polinoma s $(x - x_0)$

```
b[n] = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  b[i] = b[i + 1] * x_0 + a[i];
};
/* Polinom-kvocijent:  */
/* q_{n-1} = b[n] · x^{n-1} + ··· + b[2] · x + b[1].   */
```

Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta?

Vrijedi

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - x_0) q_{n-1}(x) + r_0 \\ &= (x - x_0) \big[(x - x_0) q_{n-2}(x) + r_1 \big] + r_0 \\ &= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1 (x - x_0) + r_0 \\ &= \cdots \\ &= r_n (x - x_0)^n + \cdots + r_1 (x - x_0) + r_0. \end{aligned}$$

Dakle, polinom p_n razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.

Koja su značenja koeficijenata r_i?

Potpuna Hornerova shema

Usporedimo dobiveni oblik s Taylorovim polinomom oko x_0

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} \left(x - x_0\right)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Dakle, potpuna Hornerova shema računa

- sve Taylorove koeficijente polinoma u zadanoj točki,

tj. sve derivacije polinoma u zadanoj točki x_0, podijeljene pripadnim faktorijelima.

Primjer

Primjer. Nađimo sve derivacije polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki -1.

Formirajmo potpunu Hornerovu tablicu.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\
\hline
-1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\
-1 & 2 & -4 & 5 & -2 & -1 & \\
-1 & 2 & -6 & 11 & -13 & & \\
-1 & 2 & -8 & 19 & & & \\
-1 & 2 & -10 & & & & \\
-1 & 2 & & & & &
\end{array}$$

Primjer

Odatle lako čitamo

$$p_5(-1) = 4, \qquad p_5^{(1)}(-1) = -1 \cdot 1! = -1,$$

$$p_5^{(2)}(-1) = -13 \cdot 2! = -26, \qquad p_5^{(3)}(-1) = 19 \cdot 3! = 114,$$

$$p_5^{(4)}(-1) = -10 \cdot 4! = -240, \qquad p_5^{(5)}(-1) = 2 \cdot 5! = 240.$$

Algoritam za Taylorov razvoj polinoma

Taylorov razvoj polinoma oko x_0

Algoritam nalazi koeficijente r_i, (koeficijente Taylorovog razvoja) zadanog polinoma oko točke x_0, korištenjem jednodimenzionalnog polja.

```
za i = 0 do n radi {
  r[i] = a[i];
};
za i = 1 do n radi {
  za j = n - 1 do i - 1 radi {
    r[j] = r[j] + x_0 * r[j + 1];
  };
};
```

Generalizirana Hornerova shema

Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki ortogonalni sustav funkcija na domeni aproksimacije.

- Razvoj funkcije f u red po ortogonalnim polinomima je očita generalizacija reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za aproksimaciju funkcije f, ako znamo da red konvergira prema f na nekoj domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

"Rezanjem" reda dobivamo aproksimaciju funkcije f

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima prve vrste

- za aproksimaciju elementarnih i "manje elementarnih" specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni — tzv. "skoro minimaks aproksimacije".

Primjer ide malo kasnije!

Razvoji po ortogonalnim polinomima

Da bismo izračunali $f_N(x)$ moramo znati sve koeficijente a_n i sve funkcije p_n.

- Najčešće nemamo formulu za p_n, nego znamo da funkcije p_n zadovoljavaju jednostavnu tročlanu rekurziju po n.

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije:

- Ako unaprijed ne znamo N, onda se sumacija vrši unaprijed, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.
- Iz teorije aproksimacija, često je moguće unaprijed naći koliko članova N treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost. Tada se koristi generalizacija Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje f_N.

Izvrednjavanje tročlanih rekurzija

Prisjetimo se, ortogonalni polinomi, ali i mnoge druge specijalne funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

s tim da su poznate "početne" funkcije p_0 i p_1, i sve funkcije α_n, β_n, za $n \in \mathbb{N}$.

Definiramo rekurziju za koeficijente

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Generalizirana Hornerova shema

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \big(B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}\big)\, p_n(x) \\ &= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\ &= (\text{rastavimo indekse na } 1 \text{ do } N-1 \text{ i ostale}) = \cdots \end{aligned}$$

Generalizirana Hornerova shema

$$\cdots = \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1}\big(p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)\big)$$

$$+ B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \alpha_0(x)B_1p_0(x)$$

$$= \text{(iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena)}$$

$$= B_0p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).$$

U algoritmu je uobičajeno napraviti jedan korak rekurzije za koeficijente B_n “na ruke”, tako da

- algoritam počinje indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

Algoritam za generaliziranu Hornerovu shemu

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ (silazni algoritam)

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_k+1(x) * B_2;
};
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Ovaj algoritam se još zove i Clenshaw-ov algoritam.

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f_N'(x)$, do pripadnog algoritma dolazimo deriviranjem rekurzije za B_n.

- Koeficijente B_n shvatimo kao funkcije od x.
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}$, s tim da B_n' označava derivaciju B_n po x, u točki x.

"Formalnim" deriviranjem dobivamo rekurziju za B_n'

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_{N+2}' = B_{N+1}' = 0,$$

$$\begin{aligned} B_n &= a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \\ B_n' &= -\alpha_n'(x) B_{n+1} - \alpha_n(x) B_{n+1}' \\ &\qquad - \beta_{n+1}'(x) B_{n+2} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}', \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odavde je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x) B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0,$$

je $b_N = 0$, pa rekurziju za B'_n pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x) B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B'_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0,$$

što ima skoro isti oblik kao i rekurzija za B_n, osim zamjene a_n s b_n.

Vrijednost $f'_N(x)$ dobivamo deriviranjem $f_N(x)$,

$$f_N(x) = B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big).$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odmah slijedi

$$\begin{aligned} f_N'(x) = B_0 p_0'(x) + B_0' p_0(x) \\ &+ B_1 \big(p_1'(x) + \alpha_0'(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p_0'(x)\big), \\ &+ B_1' \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big). \end{aligned}$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f_N'(x)$, dovoljno je znati samo derivacije "početnih" funkcija p_0' i p_1', kao i α_n' i β_n'.

- Za računanje $f_N'(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično zajedno računaju.
- Rekurzije za B_n i B_n' provodimo u istoj petlji.

Algoritam za funkciju i derivaciju

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ i $f'_N(x)$

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
B'_1 = 0;
B'_0 = 0;
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_k+1(x) * B_2;
  B'_2 = B'_1;
  B'_1 = B'_0;
  b = - alpha'_k(x) * B_1 - beta'_k+1(x) * B_2;
  B'_0 = b - alpha_k(x) * B'_1 - beta_k+1(x) * B'_2;
};
```

Algoritam za funkciju i derivaciju

```
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
f'_N(x) = B_0 * p'_0(x) + B'_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p'_1(x) + alpha'_0(x) * p_0(x)
                    + alpha_0(x) * p'_0(x))
            + B'_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Na isti način možemo izvesti i rekurzije za računanje viših derivacija $f_N^{(k)}(x)$, za $k \geq 2$.

- U praksi to gotovo nikada nije potrebno.
- Sve "korisne" familije funkcija p_n, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe drugog reda, s parametrom n.

Primjer: klasični ortogonalni polinomi!

Generalizirana Hornerova shema — primjeri

Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su neparne, a parni su parne funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za nulti i prvi polinom, tvrdnja očito vrijedi, jer je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja n), parne, a svi neparni, neparne funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ suprotne parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je iste parnosti kao T_{n-1},
- pa je T_{n+1} iste parnosti kao T_{n-1}. ■

Rekurzija za parne/neparne Čebiševljeve pol.

Isti dokaz kao za parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se parne funkcije razvijaju po parnim, a neparne po neparnim Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su parne/neparne funkcije, korisno je imati rekurziju samo za parne/neparne polinome.

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = 0$$

$$T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) = 0,$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove. Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x\big(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)\big) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su prva dva parna polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za neparne polinome, rekurzija se dobiva na sličan način. Pokažite da je rekurzija za neparne Čebiševljeve polinome istog oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za parne/neparne polinome izvodi se na isti način.

Napomena. Rekurziju za parne/neparne Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti, korištenjem

- adicijske formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po parnim normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{2x}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.47200121576823476745	6	0.00000000021934576590
1	-0.49940325827040708740	7	-0.00000000000074816487
2	0.02799207961754761751	8	0.00000000000000193230
3	-0.00059669519654884650	9	-0.00000000000000000391
4	0.00000670439486991684	10	0.00000000000000000001
5	-0.00000004653229589732		

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

Kosinus je parna funkcija, pa je treba aproksimirati parnim funkcijama.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije kosinus na intervalu $[-1, 1]$ po parnim Čebiševljevim polinomima.

U algoritmu za generaliziranu Hornerovu shemu treba uvrstiti da je za parne Čebiševljeve polinome

$$\alpha(x) = 2(1 - 2x^2), \qquad \beta(x) = 1,$$

$$p_0(x) = T_0(x), \qquad p_1(x) = T_2(x).$$

Koeficijenti a_k u razvoju brzo padaju, pa su greške u aproksimaciji vrlo male i približno jednake prvom odbačenom članu.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Konačno, treba reći kako se dobivaju koeficijenti a_k u ovakvom razvoju.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da radimo na standardnom intervalu $[-1, 1]$.

Relacija ortogonalnosti za Čebiševljeve polinome prve vrste ima oblik

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq \ell, \\ \pi, & \text{za } k = \ell = 0, \\ \pi/2, & \text{za } k = \ell \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da je $\|T_0\|^2 = 2\, \|T_k\|^2$, za bilo koji $k \geq 1$.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Zato se razvoj zadane funkcije f po T_k obično piše u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

Pripadne formule za koeficijente u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati analitički

- tek za poneke funkcije f.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Aproksimacija f_n funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata je

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(x).$$

Za numeričko računanje koeficijenata a_k, za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss-Čebiševljeva integracija reda većeg od n,
- diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u nultočkama ili ektremima Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, za $N \geq n$.

Za razvoje po T_k, ova dva pristupa su ekvivalentna.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi T_k zapravo kosinusi, za njih vrijede

- vrlo slične relacije diskretne ortogonalnosti kao kod trigonometrijskih funkcija (v. malo kasnije).

Neka su x_j sve različite nultočke Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za Čebiševljeve polinome na skupu nultočaka $\{x_0, \ldots, x_N\}$ vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} T_k(x_j)\, T_\ell(x_j) &= \sum_{j=0}^{N} \cos(k\vartheta_j) \cos(\ell\vartheta_j) \\
&= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Skica dokaza: Produkt kosinusa pretvorimo u zbroj kosinusa.

- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume ($N + 1$-i korijeni iz jedinice).

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Dakle, $\{T_0, T_1, \ldots, T_N\}$ je ortogonalna baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_N$ obzirom na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija ne možemo dodati sljedeći Čebiševljev polinom T_{N+1}, jer je

- njegov vektor vrijednosti u zadanim točkama nul-vektor.

Napomena: Unitarni prostor "događaja" je $\mathbb{R}^{N+1}$, s tim da

- svakoj funkciji f pridružujemo
- vektor njezinih vrijednosti u točkama $x_0, \ldots, x_N$.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Neka je f_n aproksimacija za f po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \|T_k\|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Napomena: koeficijenti d_k ovise o N, samo to nije posebno označeno!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za zadane f i N, ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N,$$

se jednostavno računaju!

Ako koeficijenti a_k relativno brzo padaju, onda za relativno male vrijednosti N (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se a_k i d_k podudaraju na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije diskretne ortogonalnosti vrijede i u ekstremima polinoma T_{N+1}.

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1+x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0,1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0,1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x-1)$.

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.376452812919543163	13	0.000000000001717587317
1	0.343145750507619804 79	14	−0.000000000000273642009
2	−0.029437251522859414 38	15	0.000000000000043819577
3	0.003367089255564389 25	16	−0.000000000000007048360
4	−0.000433275888610044 46	17	0.000000000000001138172
5	0.000059470711989579 83	18	−0.000000000000000184431
6	−0.000008502967541202 86	19	0.000000000000000029978
7	0.000001250467362200 57	20	−0.000000000000000004886
8	−0.000000187727995650 82	21	0.000000000000000000798
9	0.000000028630250648 40	22	−0.000000000000000000131
10	−0.000000004420956980 68	23	0.000000000000000000021
11	0.000000000689560273 23	24	−0.000000000000000000004
12	−0.000000000108450685 51	25	0.000000000000000000001

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

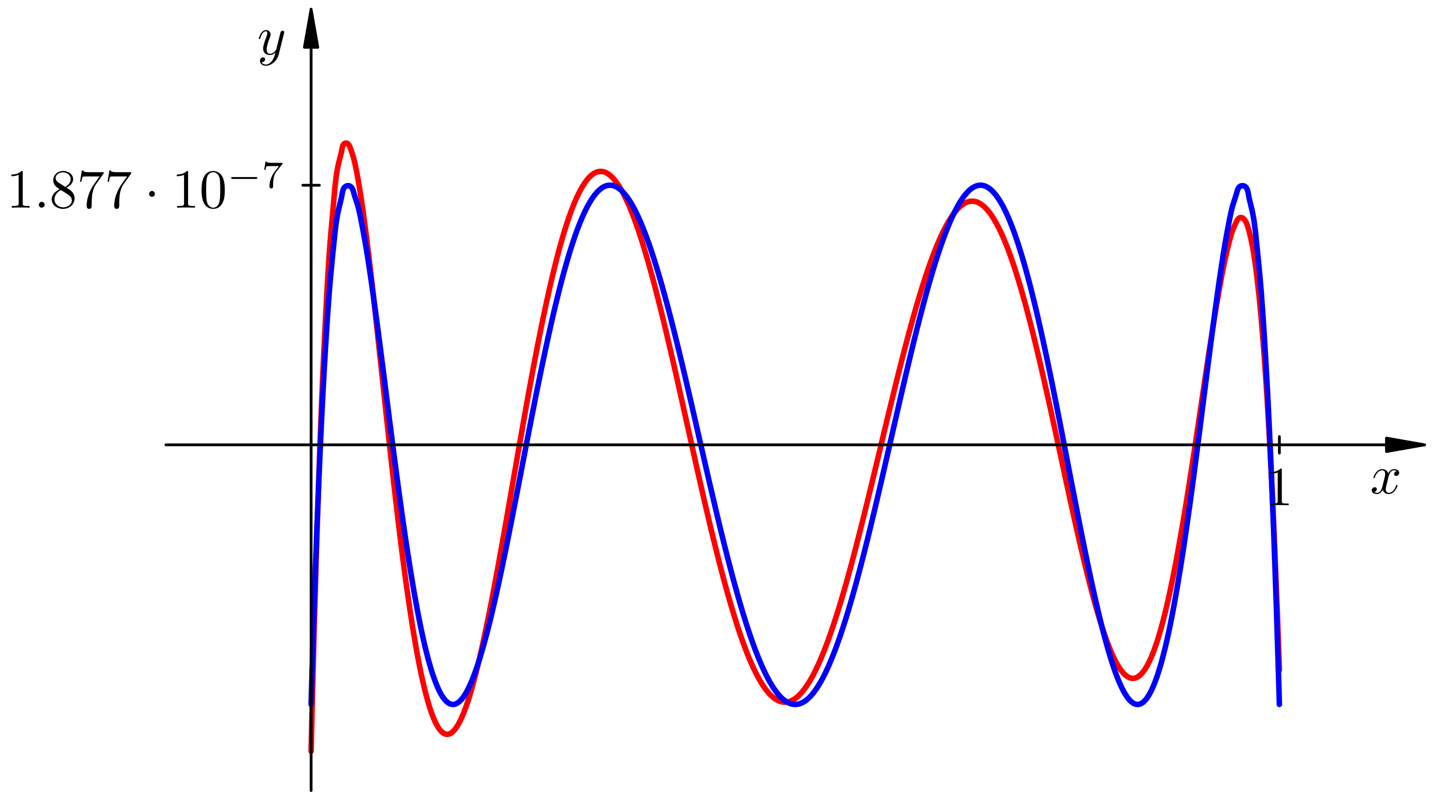
U prethodnom razvoju za $\ln(x+1)$ uzmemo samo članove do indeksa 7, tj. neka je prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$.

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k T_k^*(x), \quad e_7(x) = a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).$$

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$ plavom bojom.



Računanje koeficijenata iz diskretne ortog.

Ilustracija brzine konvergencije koeficijenata $d_k^{(N+1)}$ prema pravim koeficijentima a_k, u ovisnosti o broju točaka $N+1$:

- `09_PROGS\TN_COEF\tn_28.out` za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$,
- `09_PROGS\TN_COEF\tn_04.out` za $\ln(1+x)$ na $[0, 1]$.

Spomeni dva algoritma za računanje.

Literatura

- Luke Y. L., "Mathematical functions and their approximations", Academic Press, 1975.