Numerička matematika
10. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Računanje vrijednosti funkcija:
  - Primjeri.
    - Fourierov red.
- Numerička integracija:
  - Općenito o integracijskim formulama.
  - Newton–Cotesove formule.
    - Trapezna formula.
    - Simpsonova formula.
    - Formula srednje točke.
  - Teorija integracijskih formula.
  - Težinske Newton–Cotesove formule.
  - Produljene Newton–Cotesove formule.

Informacije — zadaće

"Oživile" su i domaće zadaće iz NM.

- Realizacija ide "automatski" — preko web aplikacije.

Pogledajte na službeni web kolegija, pod "zadaće".

- Tamo su početne upute.

Skraćeni link je

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

Direktni link na aplikaciju za zadaće je

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja od prošle dvije godine, a stizat će i nova (kako nastaju).

- Prva 2 su još nesređena — onako kako ste ih vidjeli!

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima čak 3 demonstratora:

- Ervin Duraković, Nika Kenda i Marin Mišur.

Za upute za dogovor i termine demonstratura

- pogledajte oglase na oglasnoj ploči i
- web stranicu kolegija — pod “nastava”.

Trigonometrijski polinomi — primjeri

Razvoj periodičkih funkcija

Za aproksimaciju periodičkih funkcija standardno koristimo Fourierove redove.

- Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je f periodička funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$.

Fourierov red za funkciju f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdje su

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Napomena. Granice integracije mogu (zbog periodičnosti) biti bilo koji c, $c + 2\pi$!

Konvergencija Fourierovog reda

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

Teorem. (Dirichlet) Pretpostavimo da je

(a) f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u tim točkama može imati i više vrijednosti),

(b) f je periodična s periodom 2π,

(c) f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Tada red Fourierov red konvergira prema

(1) $f(x)$, ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,

(2) $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ako u točki x funkcija ima prekid.

Razvoj periodičkih funkcija

Pretpostavimo da su koeficijenti a_n i b_n poznati i da želimo izračunati aproksimaciju trigonometrijskim polinomom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx),$$

gdje je N unaprijed zadan (zanemarimo poseban “status” a_0).

Trigonometrijski polinom sastoji se iz dva dijela: kosinusnog i sinusnog (to ćemo iskoristiti u algoritmu).

Nadalje, Fourierov red

- parne funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo kosinusni dio, a
- neparne funkcije $f(x) = -f(-x)$ samo sinusni dio razvoja.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f parna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

- U direktnoj sumaciji trebamo N računanja funkcije $\cos$, za $\cos(nx)$, uz $n \geq 1$.
- Možemo koristiti i generaliziranu Hornerovu shemu, samo treba naći tročlanu homogenu rekurziju za

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu kosinusa pretvara u produkt

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Ako stavimo $a = (n+1)x$ i $b = (n-1)x$, dobivamo

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u općoj tročlanoj rekurziji treba uzeti

$$\alpha_n(x) = -2\cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 1 + B_1 \big(\cos x - 2\cos x \cdot 1\big) \\ &= B_0 - B_1 \cos x. \end{aligned}$$

Sad imamo sve elemente za generaliziranu Hornerovu shemu.

Trigonometrijski polinom za parne funkcije

Fourierov “red” parne funkcije

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
alpha = 2 * cos(x);
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] + alpha * B_1 - B_2;
};
f_N(x) = B_0 - 0.5 * alpha * B_1;
```

Algoritam funkciju cos računa samo jednom.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f neparna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zbog sume koja ide od 1 treba biti oprezan. Zgodniji zapis je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

Sad očito treba definirati

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu sinusa pretvara u produkt

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

Ako stavimo $a = (n+2)x$ i $b = nx$, dobivamo

$$\sin((n+2)x) + \sin(nx) = 2\sin((n+1)x)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je potpuno isti oblik kao i za parne funkcije, odnosno za $p_n(x) = \cos(nx)$.

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Rekurzija za B_n ima isti oblik kao prije, samo starta od $N-1$

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_{n+1} + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N-1, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i
$p_1(x) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot \sin x + B_1\big(2\sin x \cos x - 2\cos x \cdot \sin x\big) \\ &= B_0 \sin x. \end{aligned}$$

Algoritam napišite sami.

Razvoj periodičkih funkcija

Za opći Fourierov red koji ima i parni i neparni dio, treba spojiti prethodne algoritme.

Problem. Neparni je za 1 kraći, jer starta s $N-1$.

Rješenje. Umjetno definiramo $b_0 = 0$ i pišemo

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zatim uzmemo

$$p_n(x) = \sin(nx).$$

Razvoj periodičkih funkcija

Rekurzija za p_n je ista, a za B_n vrijedi "produljena" rekurzija

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 0 + B_1 \big(\sin x - 2\cos x \cdot 0\big) \\ &= B_1 \sin x. \end{aligned}$$

To pokazuje da B_0 uopće ne treba računati, ali baš to i očekujemo, kad smo rekurziju pomakli za jedan indeks naviše!

Fourierov red za $x + |x|$

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x + |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

može se razviti u Fourierov red

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu svih članova do uključivo $\cos(nx)$, odnosno, $\sin(nx)$.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$ i pogrešku $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ za razne n.

Fourierov red za $x + |x|$

Napomena. Fourierov red konvergira prema prekidnoj funkciji

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ 2x, & x \in (0, \pi), \\ \pi, & x = \pi. \end{cases}$$

Ova funkcija je "periodičko" proširenje od f, s tim da ima korektnu vrijednost u točki prekida.

Koeficijente u Fourierovom razvoju možemo računati direktno

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} 2x \cos(kx)\, dx.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Sad razlikujemo dva slučaja $k = 0$ i $k \neq 0$. Za $k = 0$ imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \, dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^\pi = \pi.$$

Za $k \neq 0$ imamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \, \cos(kx) \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 \, dx \\ dv = \cos(kx) \, dx & v = \sin(kx)/k \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{k} \sin(kx) \Big|_0^\pi - \frac{2}{k} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx \right) = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2\pi} \big((-1)^k - 1\big).$$

Fourierov red za $x + |x|$

Odatle odmah slijedi da je

$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, \qquad a_{2k} = 0.$$

Za b_k, budući da je $k \neq 0$ imamo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi 2x \,\sin(kx)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \sin(kx)\,dx & v = -\cos(kx)/k \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x}{k}\cos(kx)\,\Big|_0^\pi + \frac{2}{k}\int\limits_0^\pi \cos(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{2}{k^2}\sin(kx)\,\Big|_0^\pi\right) = -\frac{2}{k}(-1)^k.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Posljednji rezultat možemo zapisati i kao

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

Koeficijente u Fourierovom redu mogli smo računati zbrajanjem Fourierovih razvoja funkcija

- x na $[-\pi, \pi]$, (neparna funkcija), pa razvoj ima samo b_n,
- $|x|$ na $[-\pi, \pi]$, (parna funkcija), pa razvoj ima samo a_n.

Fourierov red za $x + |x|$

Za vježbu pokažite da je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$x = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

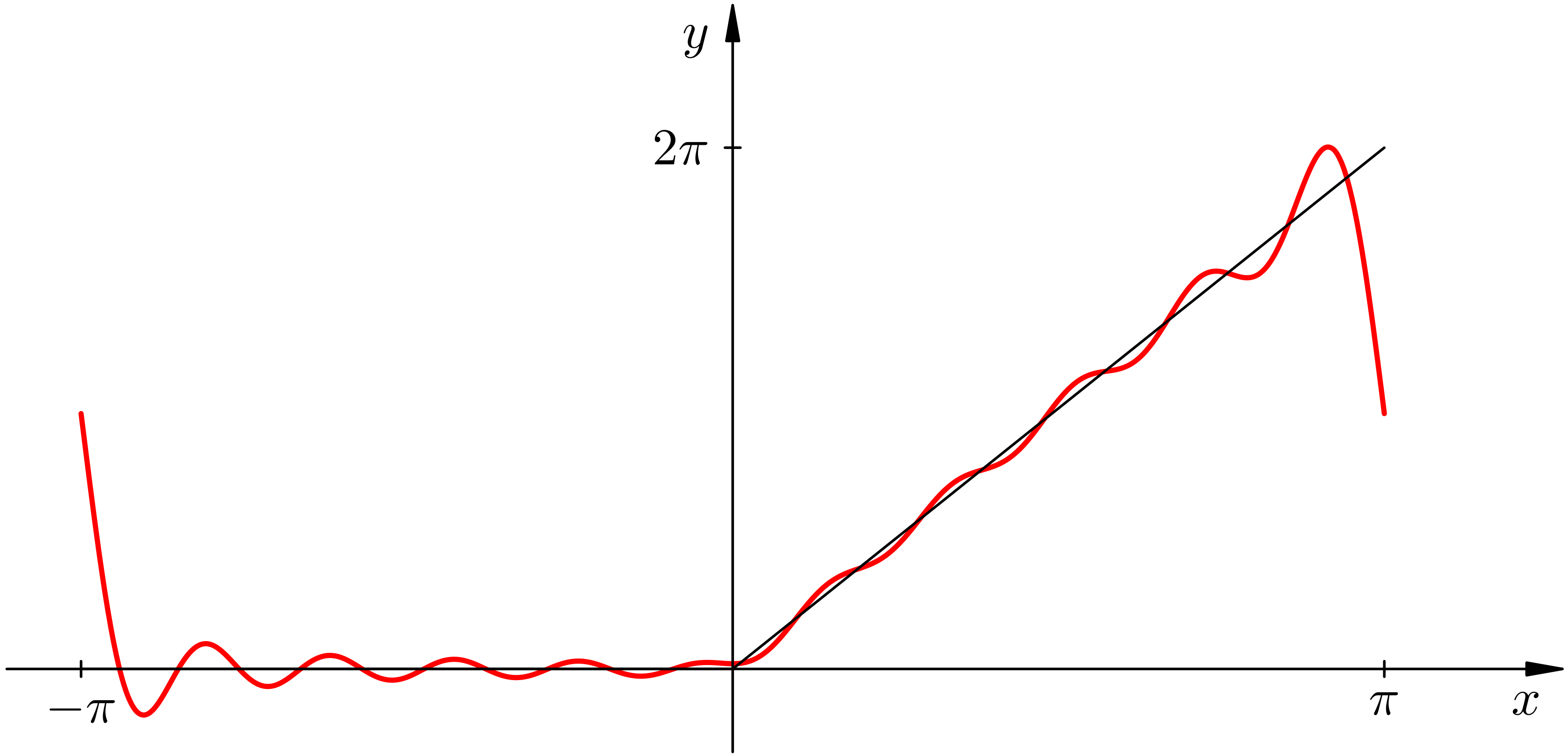
Zbog neprekidnosti periodičkog proširenja za $|x|$,

- koeficijenti a_k u razvoju trnu kao k^{-2}.

Periodičko proširenje za x ima prekid, pa

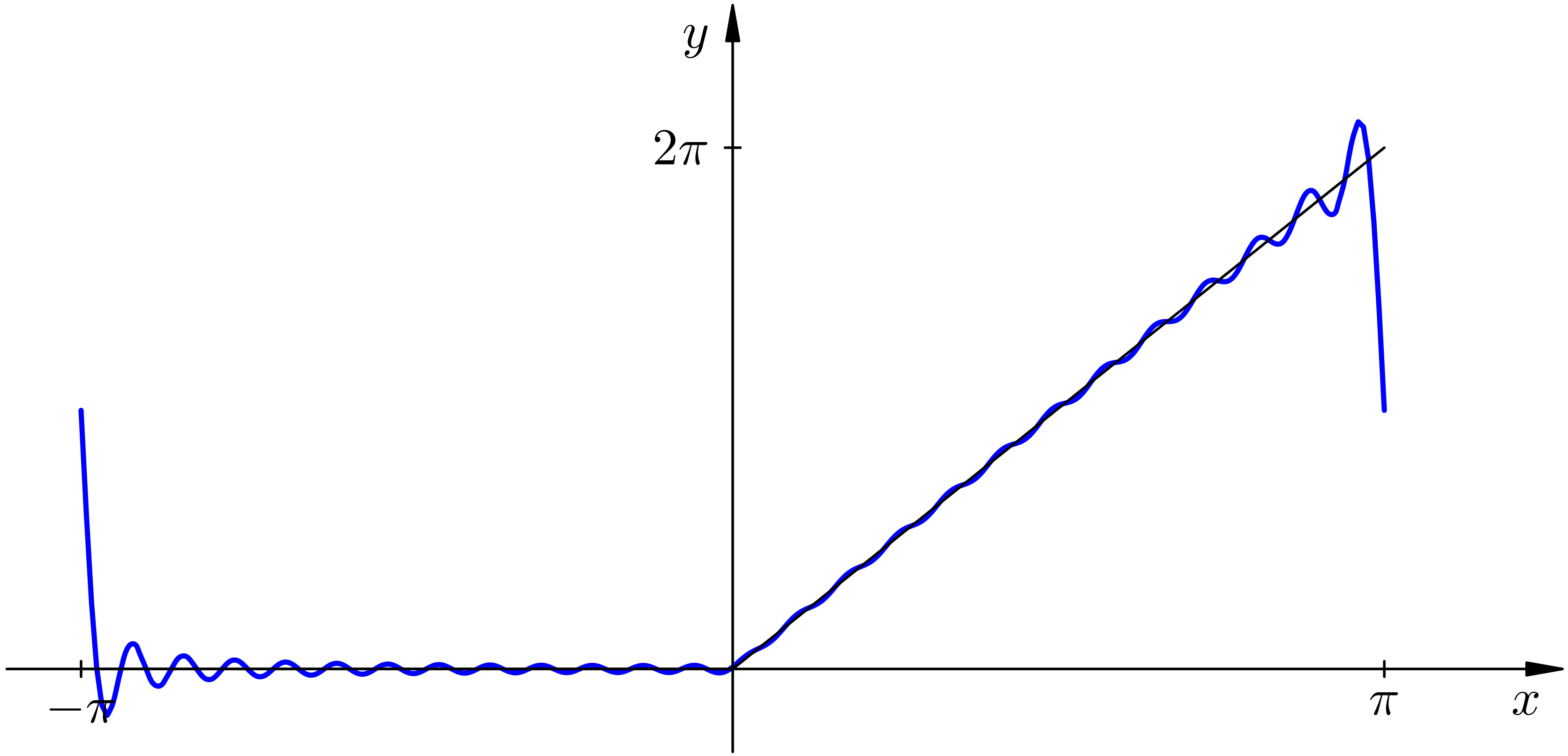
- koeficijenti b_k u razvoju trnu kao k^{-1}.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

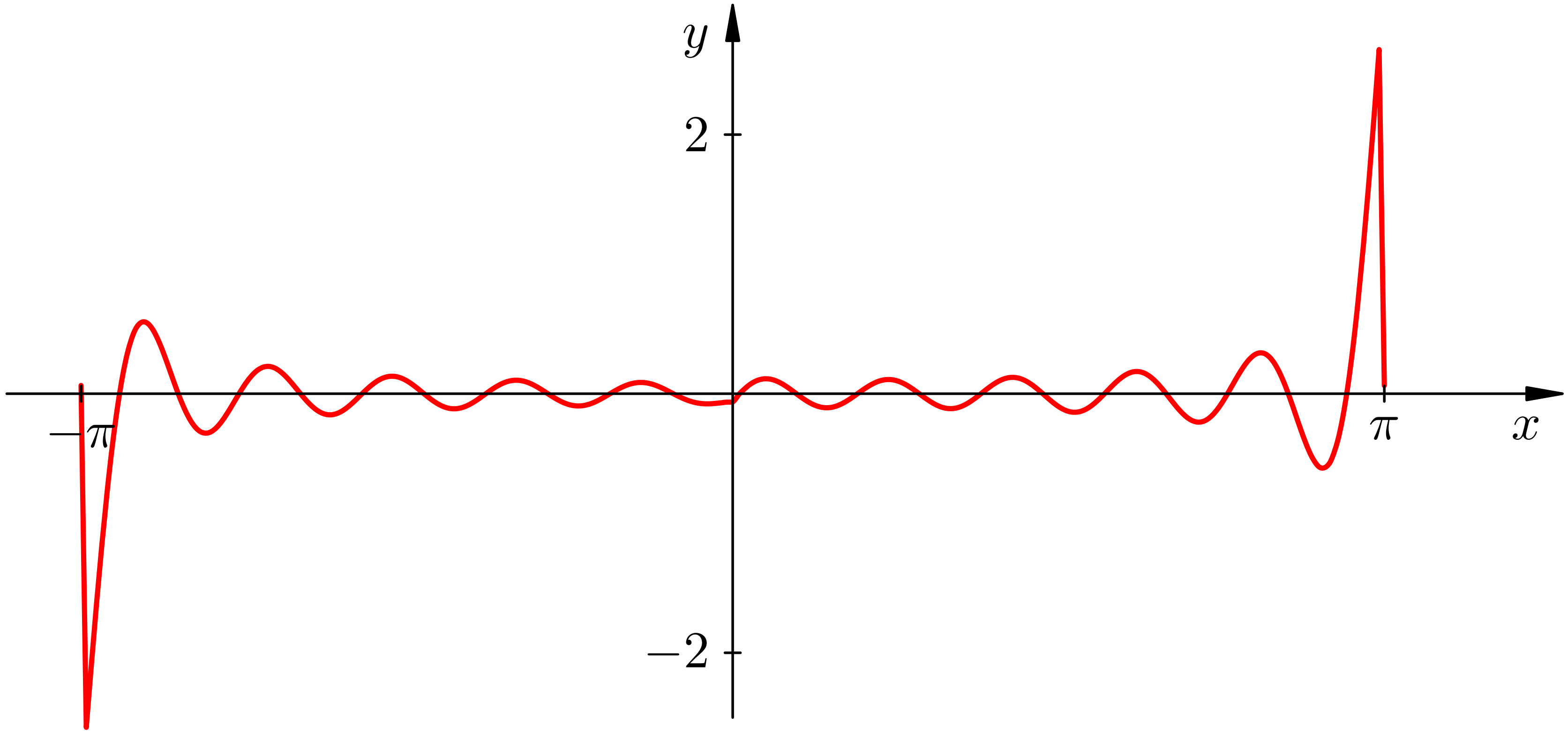
Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Trigonometrijski polinom za $x + |x|$

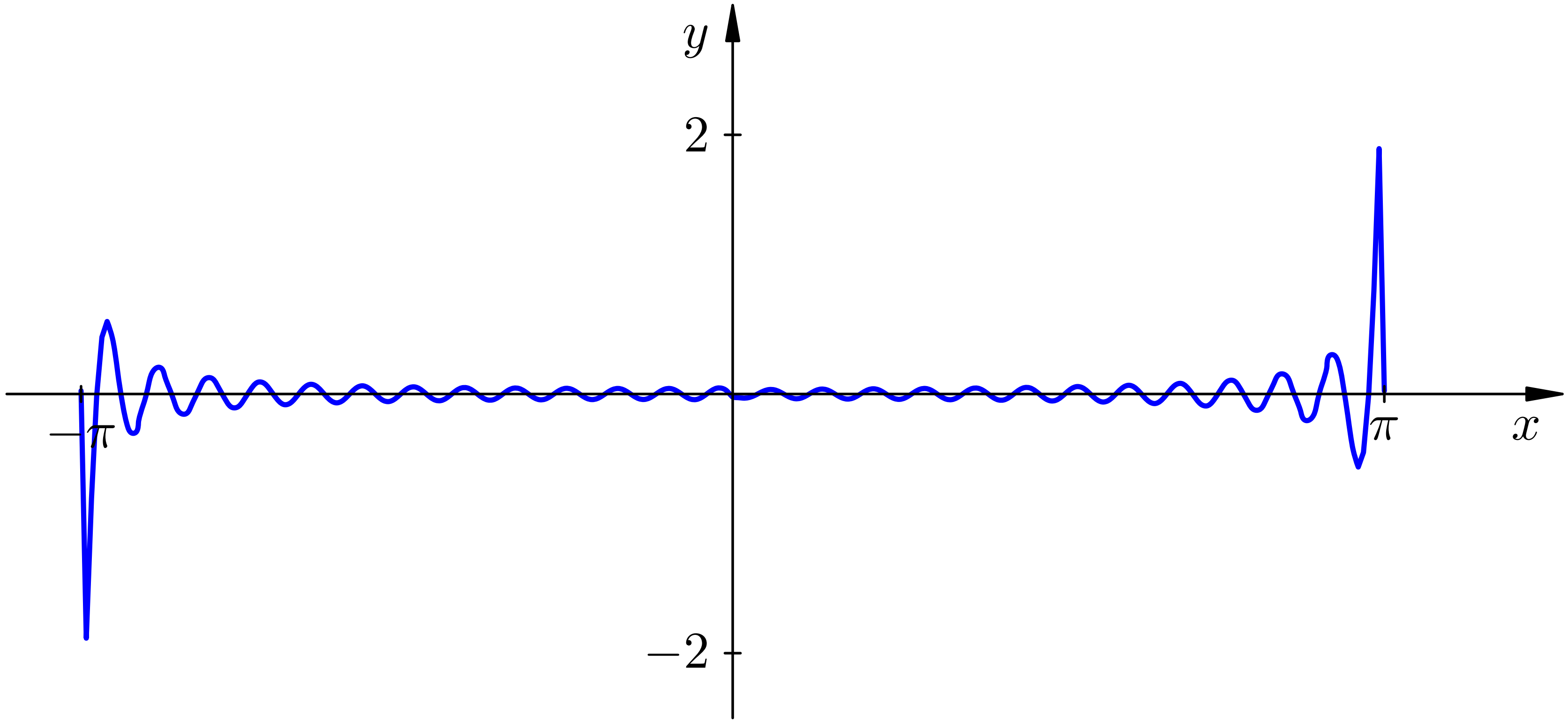
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za trigonometrijske funkcije, također, vrijede relacije diskretne ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome T_n.

Na mreži od $N+1$ točaka $0, 1, \ldots, N$, uz oznake $x_j = j$ i

$$x_{k,j} = \frac{2\pi}{N+1} k x_j, \quad x_{\ell,j} = \frac{2\pi}{N+1} \ell x_j, \quad j = 0, \ldots, N,$$

vrijede sljedeće relacije diskretne ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\sum_{j=0}^{N} \sin x_{k,j} \sin x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \text{ i } k = \ell = 0, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \sin x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = 0,$$

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

$$\sum_{j=0}^{N} \cos x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \\ N+1, & k = \ell = 0, \end{cases}$$

uz uvjet da je $k + \ell \leq N$.

Dokaz ovih relacija ide još malo jednostavnije nego za Čebiševljeve polinome.

- Produkt trigonometrijskih funkcija treba pretvoriti u zbroj ili razliku.
- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume.

Stabilnost rekurzija — primjeri

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Za rekurzije oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1,$$

možemo zaključiti da opasnost od kraćenja, pa onda i gubitak točnosti nastupa kad niz vrijednosti

$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_N(x)$$

naglo pada po apsolutnoj vrijednosti.

Dva su pitanja na koja bi bilo zgodno odgovoriti.

- Kako se tada ponaša silazni algoritam za računanje f_N?
- Može li se nekim trikom, poput okretanja rekurzije, popraviti stabilnost?

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Umjesto općeg odgovora, koji bi koji zahtijevao dublju analizu, ilustrirajmo situaciju na jednom klasičnom primjeru.

Primjer. Neka je $p_n(x) = e^{nx}$. Ove funkcije generiraju tzv. "eksponencijalne polinome" (umjesto x^n, imamo eksponencijalne funkcije e^{nx})

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{nx}.$$

Za takve p_n možemo sastaviti razne rekurzije.

Dvočlana ima oblik

$$p_{n+1}(x) - e^x p_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stabilnost eksponencijalnih polinoma

Tročlana homogena rekurzija je slična onima za trigonometrijske funkcije,

$$p_{n+1}(x) - 2\,\mathrm{ch}\,x\,p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $\mathrm{ch}\,x = (e^x + e^{-x})/2$ kosinus hiperbolni od x. Očito je da $p_n(x)$

- monotono raste za $x > 0$
- monotono pada za $x < 0$.

Testirajmo stabilnost ove rekurzije i pripadne generalizirane Hornerove sheme za računanje $p_n(x) = e^{nx}$ u točkama $x = 1$ i $x = -1$.

- `10_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_p.out` za $x = 1$,
- `10_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_n.out` za $x = -1$.

Općenito o numeričkim integracijskim formulama

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval (može biti i beskonačan). Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- takav se integral može egzaktno izračunati,
- pa jedino preostaje približno, numeričko računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je približno računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- vrijednosti funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom konačnom skupu točaka ($\approx$ Darboux).

Općenito o integracijskim formulama

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m + 1$ = broj korištenih točaka (čvorova integracije),
- $I_m(f)$ = pripadna aproksimacija integrala,
- $E_m(f)$ = pritom napravljena greška.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

pri čemu je m neki unaprijed zadani broj, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Općenito o integracijskim formulama

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se čvorovi integracije, a brojevi $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti, ili samo težine.

U općem slučaju, za fiksni m, moramo odrediti $2m+2$ nepoznatih koeficijenata.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja.

Zbog linearnosti integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx,$$

dovoljno je gledati egzaktnost tih formula na nekoj bazi vektorskog prostora — recimo, na $\{1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su čvorovi fiksirani, recimo ekvidistantni, onda dobivano Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$, baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednadžbi koji je regularan.
- Pokazat će da se te formule mogu dobiti i kao integrali interpolacijskih polinoma stupnja m za funkciju f na zadanoj (ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule — zbroj "po komadima" domene.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Možemo i fiksirati samo neke čvorove, ili dozvoliti da su svi čvorovi “slobodni”.

Ako su svi čvorovi slobodni, integracijske formule se zovu formule Gaussovog tipa.

Kod Gaussovih, ali i težinskih Newton–Cotesovih formula, integracijska formula se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. težinska funkcija. Ideja je “razdvojiti” podintegralnu funkciju na dva dijela, tako da eventualni singulariteti budu uključeni u w.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Gaussove integracijske formule su egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_{2m+1}$, tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor dvostruko veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove se formule nikad ne računaju "direktno" iz uvjeta egzaktnosti, jer to vodi na nelinearni sustav jednadžbi.
- Pokazat ćemo vezu Gaussovih formula, funkcije w i ortogonalnih polinoma obzirom na w na intervalu $[a, b]$.
  - To omogućava efikasno računanje svih parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule nema puno smisla tražiti produljene formule.

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste dva tipa Newton–Cotesovih formula:

- zatvorene formule — rubovi intervala a i b su čvorovi,
- otvorene formule — rubovi intervala a i b nisu čvorovi.

Katkad se koriste i

- poluotvorene formule — jedan od rubova, a ili b, je čvor, a drugi nije.

Primjena je u integraciji diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom.

Zatvorene Newton–Cotesove formule

Za zatvorenu (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m+1$ točaka, $[a,b]$ podijelimo na m podintervala. Čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + kh_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m},$$

pa je osnovni oblik zatvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + kh_m).$$

Ova suma ide po svim točkama, uključivo i rubove intervala.

Otvorene Newton–Cotesove formule

Da bismo dobili otvorene Newton–Cotesove formule s $m+1$ točaka, definiramo

$$x_{-1}^{(m)} := a, \quad x_{m+1}^{(m)} := b.$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na $m+2$ podintervala, a čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + (k+1)h_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m+2},$$

pa je osnovni oblik otvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + (k+1)h_m).$$

Ova suma ide samo po "unutarnjim" točkama.

Osnovna trapezna formula

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$, zove se trapezna formula. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b-a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m, promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,

- tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za točno određenu formulu (fiksni m).
- Dogovor: ako znamo za koji red formule m računamo, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula

Dakle, osnovna trapezna formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći težinske koeficijente w_0 i w_1, tako da

- integracijska formula egzaktno integrira bazu $\{1, x, \ldots\}$ vektorskog prostora polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja.

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k\,dx, \quad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \ldots$.

Osnovna trapezna formula

Vrijedi

$$\int_a^b x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

- Za $k = 0$, tj. za $f(x) = 1 = x^0$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednadžba nije dovoljna za određivanje dva nepoznata parametra, pa zahtijevamo egzaktnost i na polinomima stupnja 1.

Osnovna trapezna formula

- Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x\,dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= b - a \\ a w_0 + b w_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $-a$ i dodavanjem drugoj, izlazi

$$(b-a)w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b-a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula

Budući da je $a \neq b$, dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2}\,(b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednadžbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2}\,(b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,\big(f(a) + f(b)\big).$$

Zadatak. Ponovite izvod na “simetričnoj” bazi $1, x - (a+b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime trapeznoj formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a),$$

vidimo da je

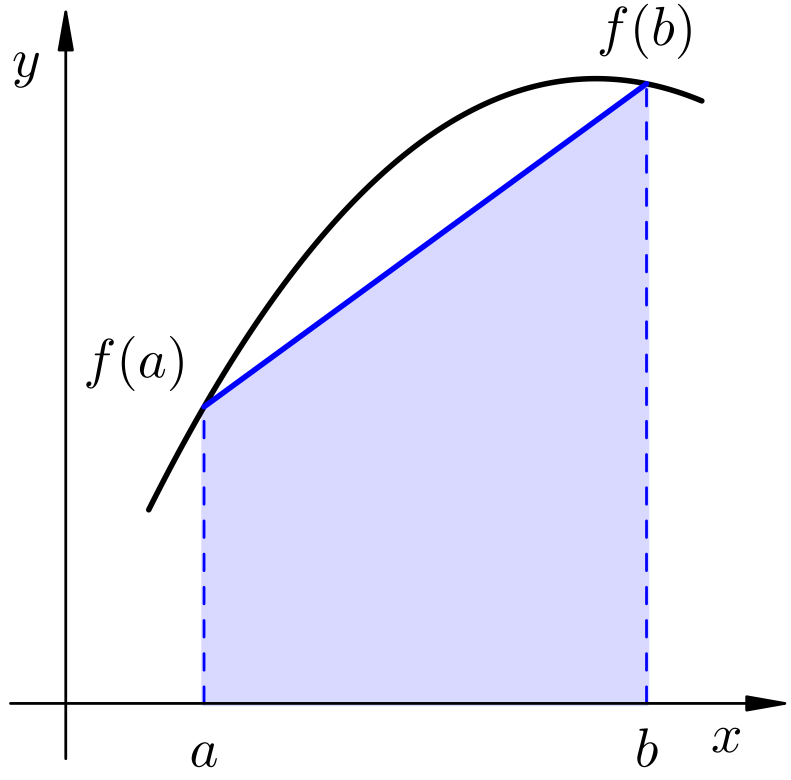
- $(f(a)+f(b))/2 =$ srednjica trapeza (stoji okomito), a
- $b-a =$ visina trapeza (leži vodoravno, kao "širina"),

za trapez na slici — sljedeća folija.

Drugim riječima, površinu ispod krivulje zamijenili smo (tj. aproksimirali) površinom trapeza.

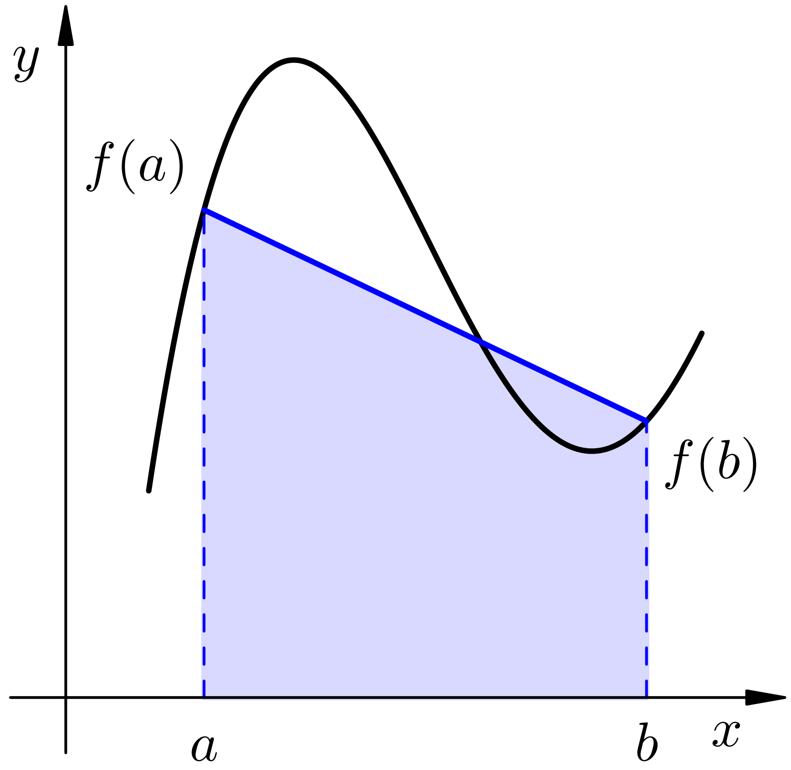
Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije integrala funkcije f površinom trapeza.



Zašto baš trapezna formula?

Ovisno o "obliku" funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo izveli iz uvjeta egzaktnosti prostoru polinoma $\mathcal{P}_1$ stupnja 1.

- Zato formula egzaktno integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona neće egzaktno integrirati sve polinome stupnja 2, jer ne integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 \, dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2} \, (b - a).$$

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Povučemo li kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f,
- a zatim ga egzaktno integriramo,

dobivamo opet trapeznu formulu (dokaz je na sljedećoj foliji).

Dakle, vidimo da vrijedi

aproksimacija integrala = integral aproksimacije (interpolacije).

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule! Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski pravac za funkciju f koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ je

$$p_1(x) = f(a) + f[a,b]\,(x-a).$$

Njegov integral na $[a,b]$ je

$$\begin{aligned}
\int_a^b p_1(x)\,dx &= \left(f(a)x - a\,f[a,b]x + f[a,b]\,\frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b \\
&= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f[a,b] \\
&= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao integral greške interpolacijskog polinoma.

Neka je funkcija $f \in C^2[a,b]$.

- Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1 koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ na intervalu $[a,b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}.$$

- Greška trapezne formule je

$$E_1(f) = \int\limits_a^b e_1(x)\,dx = \int\limits_a^b (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem. (Teorem srednje vrijednosti za integrale) Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a,b]$ i neka je

$$m = \inf_{x\in[a,b]} g(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a,b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b w(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b w(x)\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x),$$

pa integriranjem izlazi traženo (monotonost integrala). ■

Teorem. (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama) Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ, takav da je $m \leq \mu \leq M$ i vrijedi

$$\int_a^b w(x) g(x)\, dx = \mu \int_a^b w(x)\, dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a, b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a, b]$ takav da je

$$\int_a^b w(x) g(x)\, dx = g(\zeta) \int_a^b w(x)\, dx.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x)\,dx = 0,$$

onda je, po teoremu srednje vrijednosti za integrale, i

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj

$$\int_a^b w(x)\,dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema srednje vrijednosti za integrale, dijeljenjem dobivamo

$$m \leq \mu \leq M, \quad \text{za} \quad \mu := \frac{\int\limits_a^b w(x) g(x)\, dx}{\int\limits_a^b w(x)\, dx}.$$

Zaključak o neprekidnom g slijedi iz

- činjenice da neprekidna funkcija na segmentu postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma, pa mora postići i μ (neprekidna slika segmenta je segment).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a, b]$ takav da je $\mu = g(\zeta)$. ■

Greška trapezne formule

Iskoristimo teoreme srednje vrijednosti za računanje greške trapezne formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,dx.$$

Pritom je

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{2} \leq 0 \quad \text{na} \quad [a,b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}, \qquad g(x) = -f''(\xi).$$

Greška trapezne formule

Ako je $f \in C^2[a,b]$, onda da je $f'' \in C[a,b]$. Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, vrijedi da je

$$E_1(f) = -f''(\zeta) \int_a^b -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\,dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\int_a^b -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\,dx = \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{h^3}{12},$$

pa postoji $\zeta \in [a,b]$ za koji je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$

Osnovna Simpsonova formula

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo sljedeću (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$, poznatu pod imenom Simpsonova formula. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b-a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula

Imamo tri nepoznata parametra, pa moramo postaviti najmanje tri uvjeta za egzaktnost formule na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

- Za $f(x) = 1$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$

- Za $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \, \frac{a+b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula

- Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\,dx = w_0 \cdot a^2 + w_1\,\frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice

$$w_0 + w_1 + w_2 = b - a$$

$$a w_0 + \frac{a+b}{2}\,w_1 + b w_2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$a^2 w_0 + \frac{(a+b)^2}{4}\,w_1 + b^2 w_2 = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Osnovna Simpsonova formula

Rješavanjem ovog sustava, dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz egzaktnosti na svim polinomima stupnja manjeg ili jednakog 2, i glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2,

- egzaktno integrira i sve polinome stupnja 3. Dovoljno je pokazati da egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int\limits_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

$$I_2(x^3) = \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula interpolacijska.

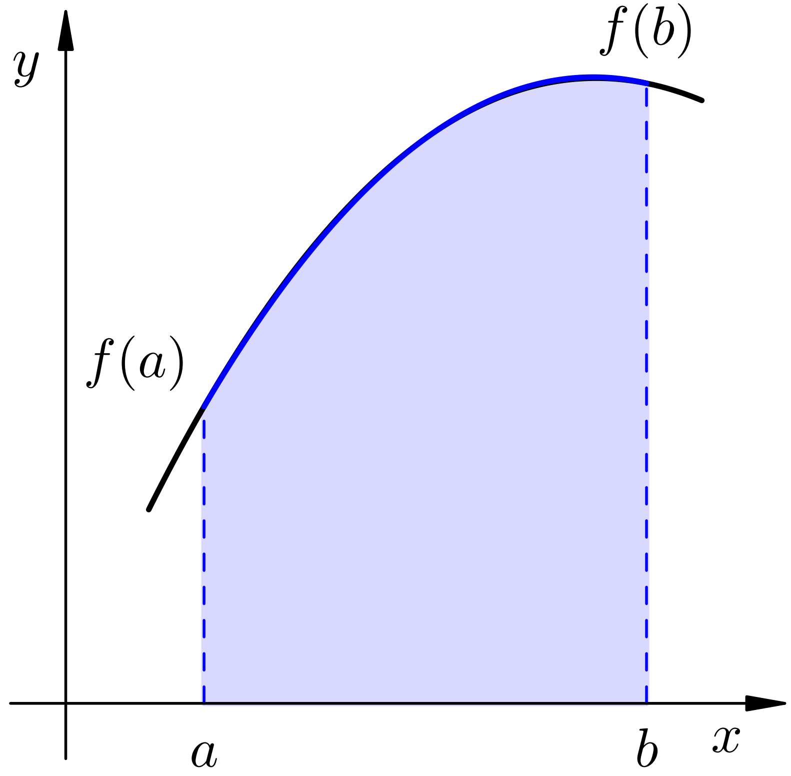
Ako povučemo kvadratni interpolacijski polinom kroz 3 točke

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \quad (b, f(b)),$$

a zatim ga egzaktno integriramo od a do b, dobivamo upravo Simpsonovu formulu.

Točnost Simpsonove formule

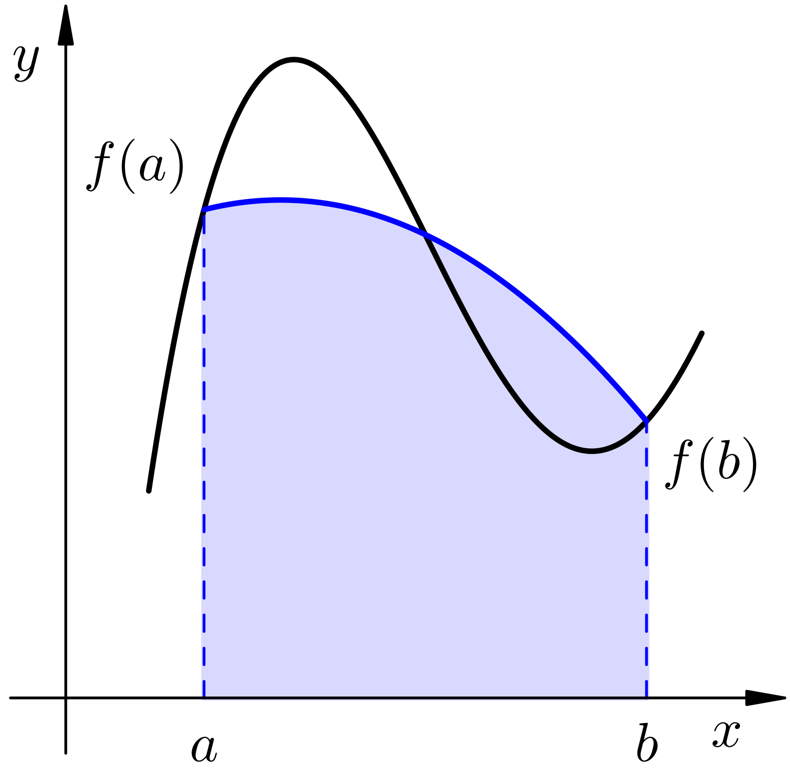
Ilustrirajmo kako Simpsonova formula funkcionira na integralu kojeg smo aproksimirali trapeznom formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala vrlo dobra.

Točnost Simpsonove formule

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija ne mora biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, integracijom greške kvadratnog interpolacijskog polinoma

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Za grešku Simpsonove formule vrijedi

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x)\,dx.$$

Nažalost, funkcija

$$(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

nije fiksnog znaka na $[a,b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti.

Greška Simpsonove formule

Pretpostavimo da je $f \in C^4[a,b]$. Označimo

$$c := \frac{a+b}{2}$$

i definiramo

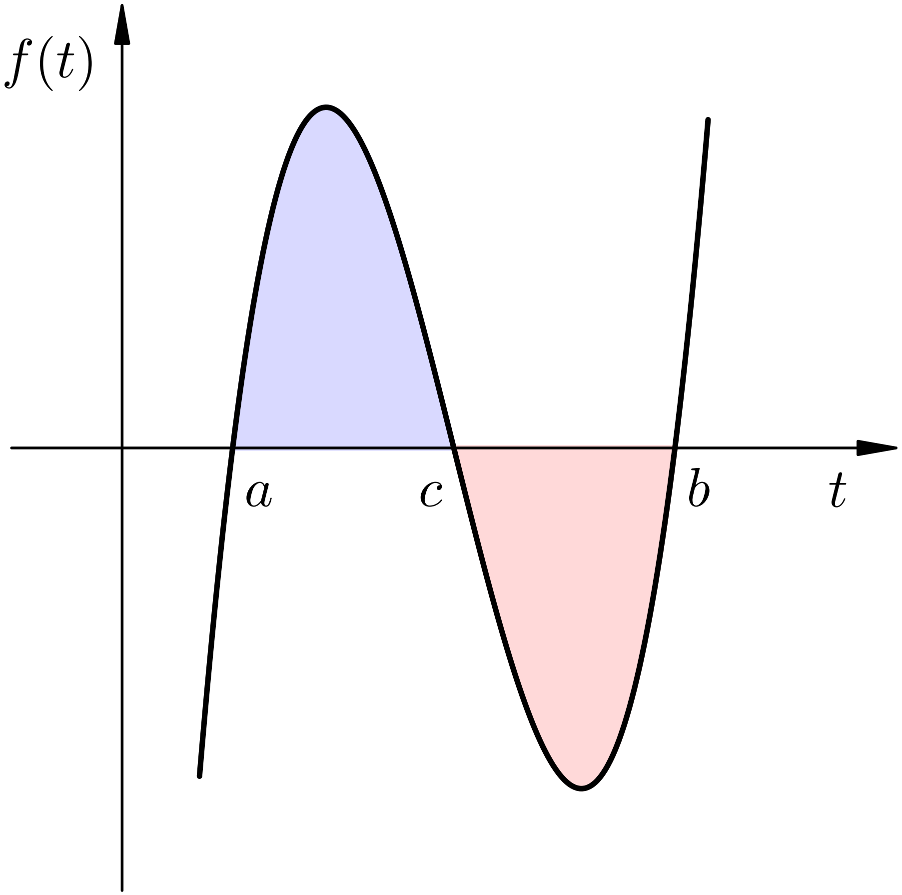
$$w(x) = \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a,b).$$

Skiciramo li funkciju $f(t) = (t-a)(t-c)(t-b)$ odmah vidimo da je ona centralno simetrična oko srednje točke ...

Greška Simpsonove formule



pa će integral rasti od 0 do svog maksimuma (plava površina), a zatim padati (kad dođe u crveno područje) do 0.

Greška Simpsonove formule

Ostaje samo još napisati grešku interpolacijskog polinoma kao podijeljenu razliku. Za $n = 3$ vrijedi

$$f[a, b, c, x] = \frac{f'''(\xi)}{6},$$

pa grešku Simpsonove formule možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b w'(x) f[a, b, c, x] \, dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x) f[a, b, c, x] \Big|_a^b - \int_a^b w(x) \frac{d}{dx} f[a, b, c, x] \, dx.$$

Greška Simpsonove formule

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Ostaje još "srediti" drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s dvostrukim čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Na sličan je način derivacija treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x,
- četvrta podijeljena razlika s dvostrukim čvorom x.

Prema tome, dobivamo formulu za grešku u obliku

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x) f[a, b, c, x, x]\, dx.$$

Greška Simpsonove formule

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a, b, c, \eta, \eta] \int_a^b w(x)\, dx,$$

gdje je $a \leq \eta \leq b$. Napišemo $f[a, b, c, \eta, \eta]$ kao derivaciju, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int_a^b w(x)\, dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w.

Greška Simpsonove formule

Za funkciju w vrijedi

$$
\begin{aligned}
w(x) &= \int\limits_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt \\
&= (\text{zamjena varijable } y = t-c) \\
&= \int\limits_{-h}^{x-c} (y-h)y(y+h)\,dy = \int\limits_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2 y)\,dy \\
&= \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-h}^{x-c} = \frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Greška Simpsonove formule

Za integral funkcije w onda dobivamo

$$\int_a^b w(x)\,dx = \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2 \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dx$$

$$= (\text{zamjena varijable } y = x - c)$$

$$= \int_{-h}^{h} \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^5}{20} - h^2 \frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4} \right) \Big|_{-h}^{h} = 2 \left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4} \right)$$

$$= \frac{4}{15}\, h^5.$$

Greška Simpsonove formule

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15}\,h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja no što bi po upotrijebljenom interpolacijskom polinomu trebala biti.

Osnovna formula srednje točke

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo otvorenu Newton–Cotesovu formulu za $m = 0$, poznatu pod imenom formula srednje točke ili pod engleskim nazivom midpoint formula.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$ takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke

- Za $f(x) = 1$, imamo

$$b - a = \int_a^b 1\,dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

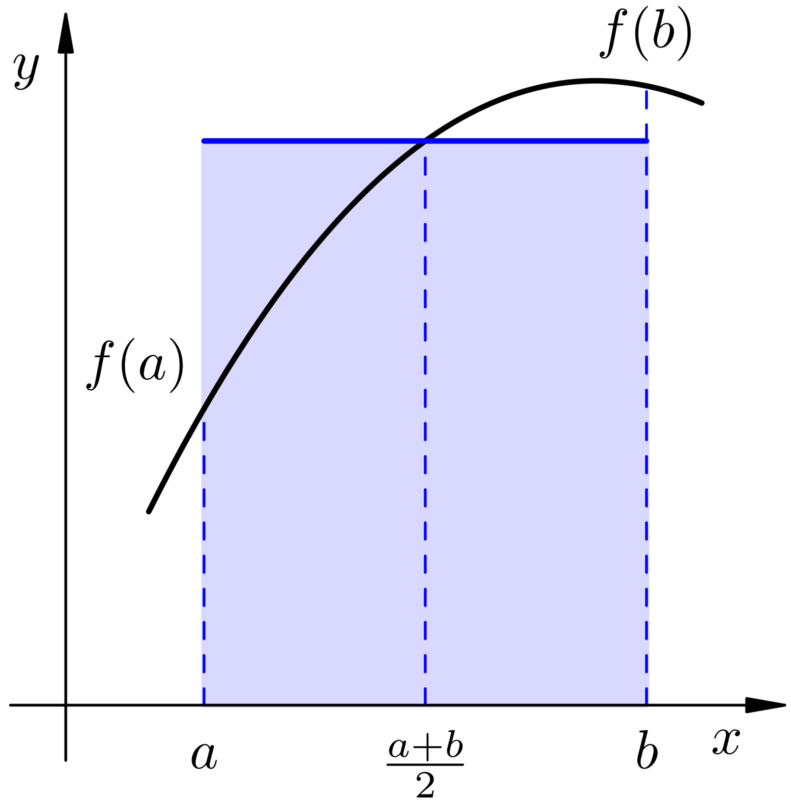
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I ova formula je interpolacijska, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f interpoliramo polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u srednjoj točki $(a+b)/2$,
- a onda egzaktno integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

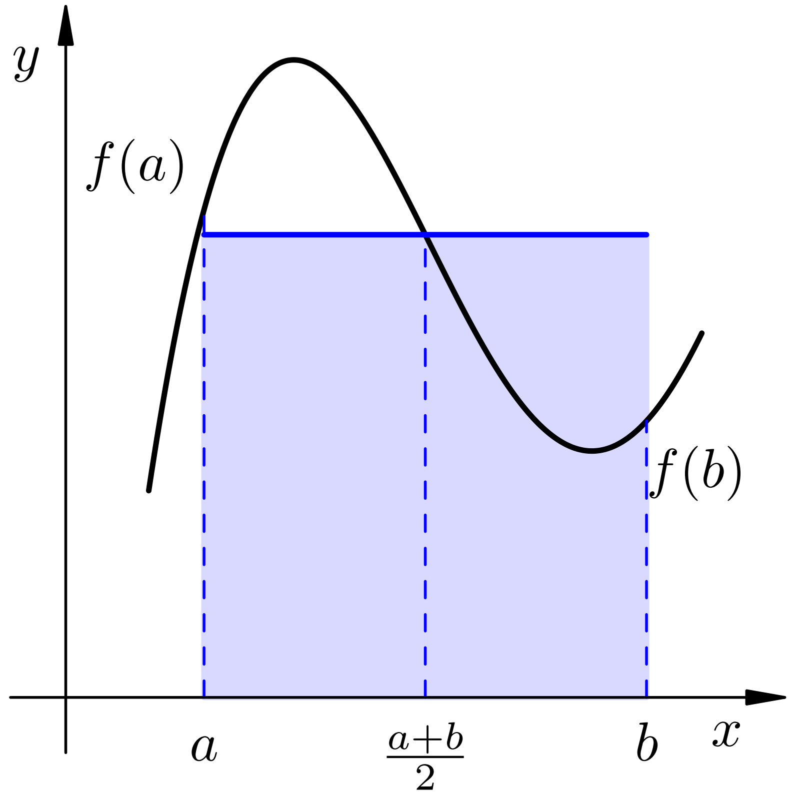
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija integrala funkcije f površinom pravokutnika.



Pravokutna formula u srednjoj točki

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke egzaktno integrira i polinome stupnja za jedan većeg — sljedećeg neparnog stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke egzaktno integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,\frac{a+b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška te integracijske formule je integral greške interpolacijskog polinoma stupnja 0 (konstante), koji f interpolira u srednjoj točki.

Ako definiramo

$$w(x) = \int_a^x (t - c)\, dt, \qquad c := \frac{a+b}{2},$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je greška formule srednje točke

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x)\, dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta).$$

Teorija integracijskih formula

Interpolacijske formule

Nije teško pokazati da su sve Newton–Cotesove formule integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Ovaj rezultat vrijedi i općenitije — za bilo kakvu težinsku integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

na bilo kojoj mreži čvorova.

Napomena. Zbog jednostavnosti pisanja, ponovno ispustimo gornje indekse m.

Interpolacijske formule

Definicija. Za integracijsku formulu reći ćemo da ima polinomni stupanj egzaktnosti d ako je

$$E_m(f) = 0 \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je $\mathcal{P}_d$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d.

Za formulu ćemo reći da je interpolacijska ako je $d = m$. ■

Interpolacijske formule

Teorem. Integracijska formula

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

ima stupanj egzaktnosti m, ako i samo ako je to

- integral interpolacijskog polinoma za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$,

odnosno, ako i samo ako za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx, \quad k = 0, \ldots, m,$$

gdje je ℓ_k k-ti polinom Lagrangeove baze, za $k = 0, \ldots, m$.

Interpolacijske formule

Dokaz.

1. smjer — pretpostavimo da vrijedi formula za w_k.

Formula za koeficijente w_k integrira egzaktno sve polinome stupnja manjeg ili jednakog m, jer egzaktno integrira bazu ℓ_k tog vektorskog prostora polinoma. Odalte slijedi:

$$\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \int_a^b w(x) \ell_k(x)\, dx$$

$$= \int_a^b w(x) \left(\sum_{k=0}^{m} f(x_k) \ell_k(x) \right) dx = \int_a^b w(x) p_m(x)\, dx,$$

pa je integracijska formula integral interpolacijskog polinoma.

Interpolacijske formule

2. smjer

Ako je integracijska formula ima red m, onda za funkciju f možemo staviti polinome Lagrangeove baze ℓ_r, $r = 0, \dots, m$, pa mora vrijediti

$$\int_a^b w(x)\ell_r(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k \ell_r(x_k) = w_r, \qquad r = 0, \dots, m.$$

■

Korolar. Newton–Cotesove formule su integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Prethodni korolar kaže još i ovo: ako interpolacijski polinomi loše aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule neće biti ništa bolje!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Primjer. Pokažimo na primjeru Runge kako se ponašaju aproksimacije integrala $I_m(f)$ ako dižemo red formule m. Prava vrijednost integrala je

$$\int_{-5}^{5} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 5 \approx 2.7468015338900317 2.$$

Tablice na sljedećim stranicama su aproksimacije integrala izračunate Newton–Cotesovim formulama raznih redova i pripadne greške.

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.38461538461538462	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	−4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	−1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	−0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	−1.92649902176346704

Zelene znamenke u aproksimaciji su točne, ostale nisu!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.2447729402785852	-0.4979714063885535
12	-0.3129365157534388	3.0597380496434706
13	1.9197972168323889	0.8270043170576428
14	7.8995446408519308	-5.1527431069618990
15	4.1555589927065571	-1.4087574588165254
16	-6.2414373147730832	8.9882388486631150
17	0.2605094414376037	2.4862920924524280
18	18.8766212901092067	-16.1298197562191749
19	7.2460260858819693	-4.4992245519919376
20	-26.8495520888244796	29.5963536227145114

Očito je da aproksimacije ne konvergiraju prema pravoj vrijednosti integrala.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red zatvorene Newton–Cotesove formule.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k:

- dovoljno je napisati samo w_k, za $0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil$,
- a za $\lceil m/2 \rceil < k \leq m$ vrijedi $w_k = w_{m-k}$.

Radi preglednosti tablice, koeficijenti w_k zapisani su kao zajednički faktor A pomnožen s W_k, tj.

$$w_k = A\,W_k\,h, \quad h = (b-a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k\,h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m+1, & \text{za } m \text{ neparan}, \\ k = m+2, & \text{za } m \text{ paran}. \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_k
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red otvorene Newton–Cotesove formule.

Slično kao kod zatvorenih formula, u tablici je naveden samo dio w_k.

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k\, h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m+2, & \text{za } m \text{ paran}, \\ k = m+1, & \text{za } m \text{ neparan}. \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	C_k
0	2	1			$\frac{1}{3}$
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama za veće m

- poprimaju i pozitivne i negativne znakove,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog kraćenja može doći do velike greške u rezultatu.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Zadatak. Pokažite da težinski koeficijenti Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m, onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \le k \le \lceil m/2 \rceil \quad (\text{može i do } m).$$

Uputa. Uzeti "simetričnu" (par–nepar) bazu potencija oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k, \quad k = 0, \ldots, m,$$

i napisati jednadžbe egzaktne integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Alternativa: Zbog ekvidistantnosti i simetrije čvorova, Lagrangeova baza ℓ_k, $k = 0, \ldots, m$, mora biti "simetrična" oko polovišta intervala, pa zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x)\, dx, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Isti zaključak vrijedi i za težinske Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

uz pretpostavku da je težinska funkcija w parna oko polovišta intervala.

Produljene Newton–Cotesove formule

Produljene formule

Umjesto dizanja reda m formule, bolje je

- interval $[a, b]$ podijeliti na n podintervala,
- na svakom podintervalu primijeniti osnovnu formulu,
- a rezultate zbrojiti.

Tako dobivene formule zovemo produljene formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se osnovna formula izvodi za odgovarajući broj podintervala.

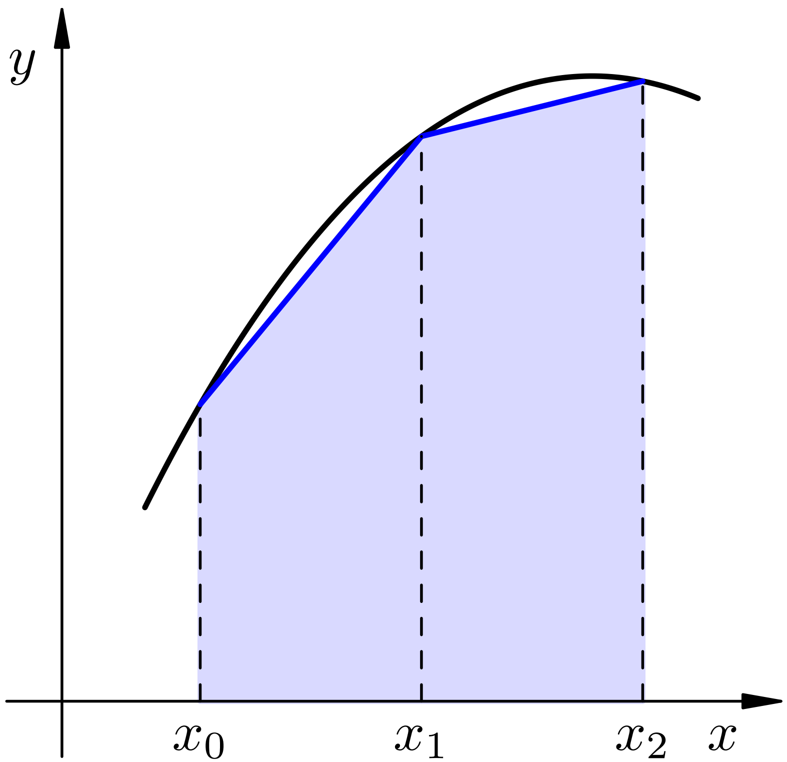
- Na primjer, osnovna Simpsonova formula zahtijeva 2 podintervala, pa n mora biti paran.

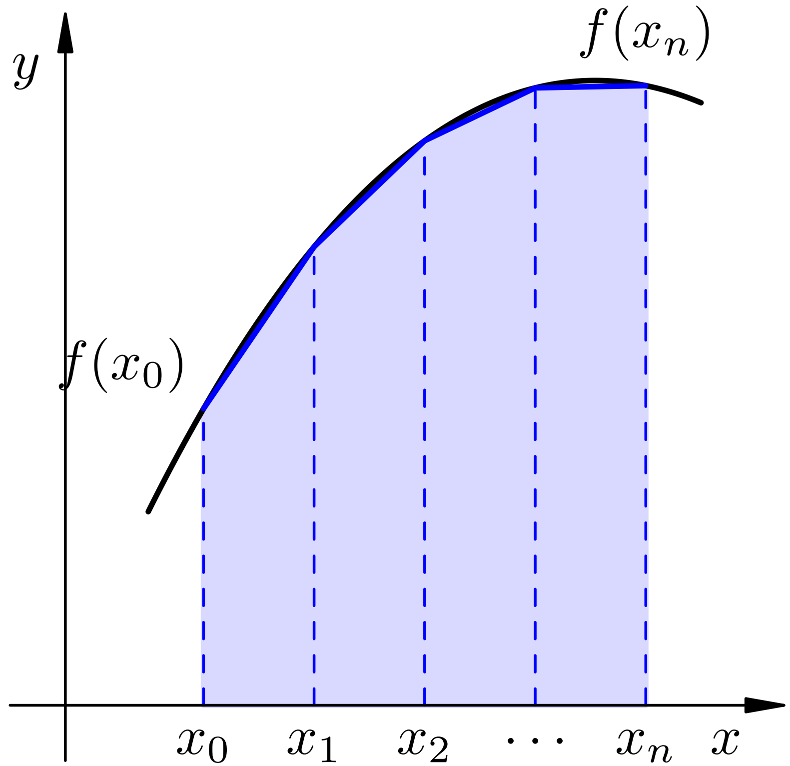
Produljenu formulu možemo interpretirati i kao integral

- odgovarajućeg interpolacijskog splajna za funkciju f.

Produljene formule

Na primjer, produljene trapezne formule s 2 i $n = 4$ podintervala izgledaju ovako.





Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx.$$

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,

- iskoristimo "običnu" trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije zbrojimo u produljenu trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h. To znači da je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = \frac{h}{2} \big(f_{k-1} + f_k \big) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula

Znamo da za greške vrijedi

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{2} \big(f_{k-1} + f_k \big) + E_{1,k}(f) \right)$$

$$= \frac{h}{2} \big((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n) \big)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f).$$

Produljena trapezna formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\big) + E_n^T(f),$$

U ovoj formuli

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapeznih formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška ovako napisana nije naročito korisna, pa je treba napisati u drugačijem obliku

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k.
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Budući da je f'' neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule

Dakle, postoji točka $\xi \in [a,b]$ takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k).$$

Stoga formulu za grešku možemo pisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n potreban da se postigne neka zadana točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

odnosno,

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula, koja mora imati paran broj podintervala. Ograničimo se samo na ekvidistantni slučaj. Imamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula

Obična Simpsonova formula na svakom pojedinom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Produljena Simpsonova formula

Zbrajanjem dobivamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3} \big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f) \right)$$

$$= \frac{h}{3} \big((f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots$$

$$+ (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \big)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).$$

Produljena Simpsonova formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots \\ + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Ponovno, grešku je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Sličnim zaključivanjem kao kod trapezne formule, izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \qquad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

odnosno, da je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli produljenu formulu srednje točke, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n paran broj.

U ekvidistantnom slučaju

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n,$$

aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo “običnu” formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = 2h\,f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$I_n(f) = 2h\big(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}\big) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right)$$

$$= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a, b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti paran.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se produljena formula srednje točke piše s "polovičnim" indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom obične formule srednje točke

- na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,
- s tim da n više ne mora biti paran,

tj., isto kao kod produljene trapezne formule.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovaj h odgovara ranijem $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \ldots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = hf_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h\big(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}\big) + E_n^M(f),$$

a greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right)$$

$$= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a, b]$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako.