Numerička matematika
6. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Interpolacija polinomima (nastavak):
  - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
  - Hermiteova interpolacija i ocjena greške.
  - Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma.
- Interpolacija splajnovima:
  - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
  - Linearni spline i ocjena greške.
  - Po dijelovima kubična interpolacija — uvod.
  - Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.
  - Ocjene pogreške za kubičnu Hermiteovu interpolaciju.
  - Aproksimacije derivacija i numeričko deriviranje.

Informacije

Konzultacije (službeno):

- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Službeni termin prvog kolokvija je:

- ponedjeljak, 4. 4., u 12 sati.

Ne zaboravite, "žive" su i domaće zadaće na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

ili, izravno

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Dodatni bodovi "čekaju na vas".

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Tamo su kompletna predavanja od prošle tri godine, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Informacije — demonstratori

Kolegij "Numerička matematika" ima čak tri demonstratora:

- Anastasia Kruchinina — termin: srijeda, 18–20.
- Ines Marušić — termin: srijeda, 14–16, uz prethodnu najavu mailom,
- Melkior Ornik — termin: četvrtak, 10–12.

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom koji dan ranije!

- Njihove mail adrese nađete na oglasnoj ploči,
- ili se javite meni.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a,b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a,b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} \, f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a,b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo “kontrolirati”.

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f na $[a, b]$, zadovoljimo se “skromnijim” ciljem:

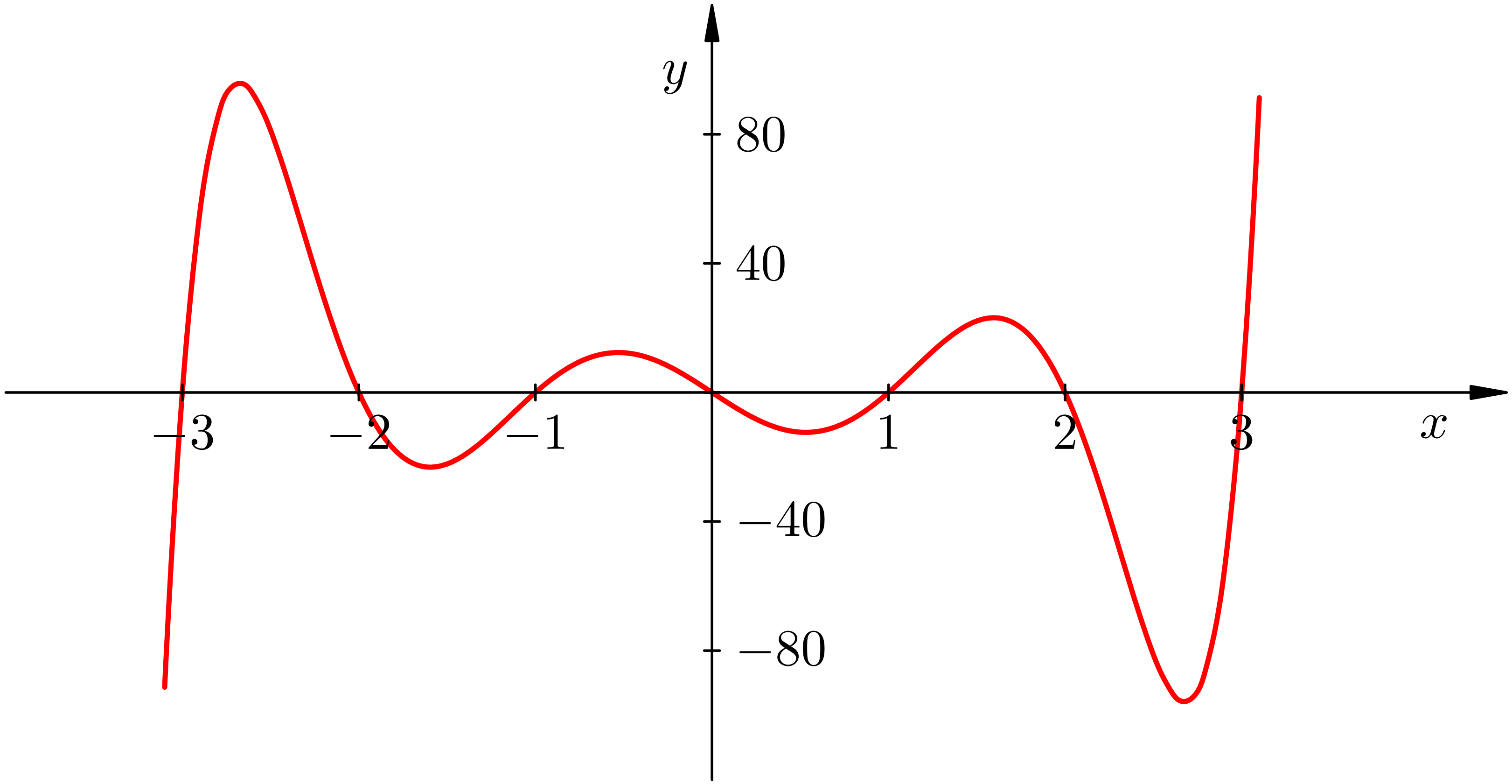
- ako možemo birati čvorove interpolacije $x_0, \ldots, x_n$,
- minimizirajmo maksimalnu pogrešku polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

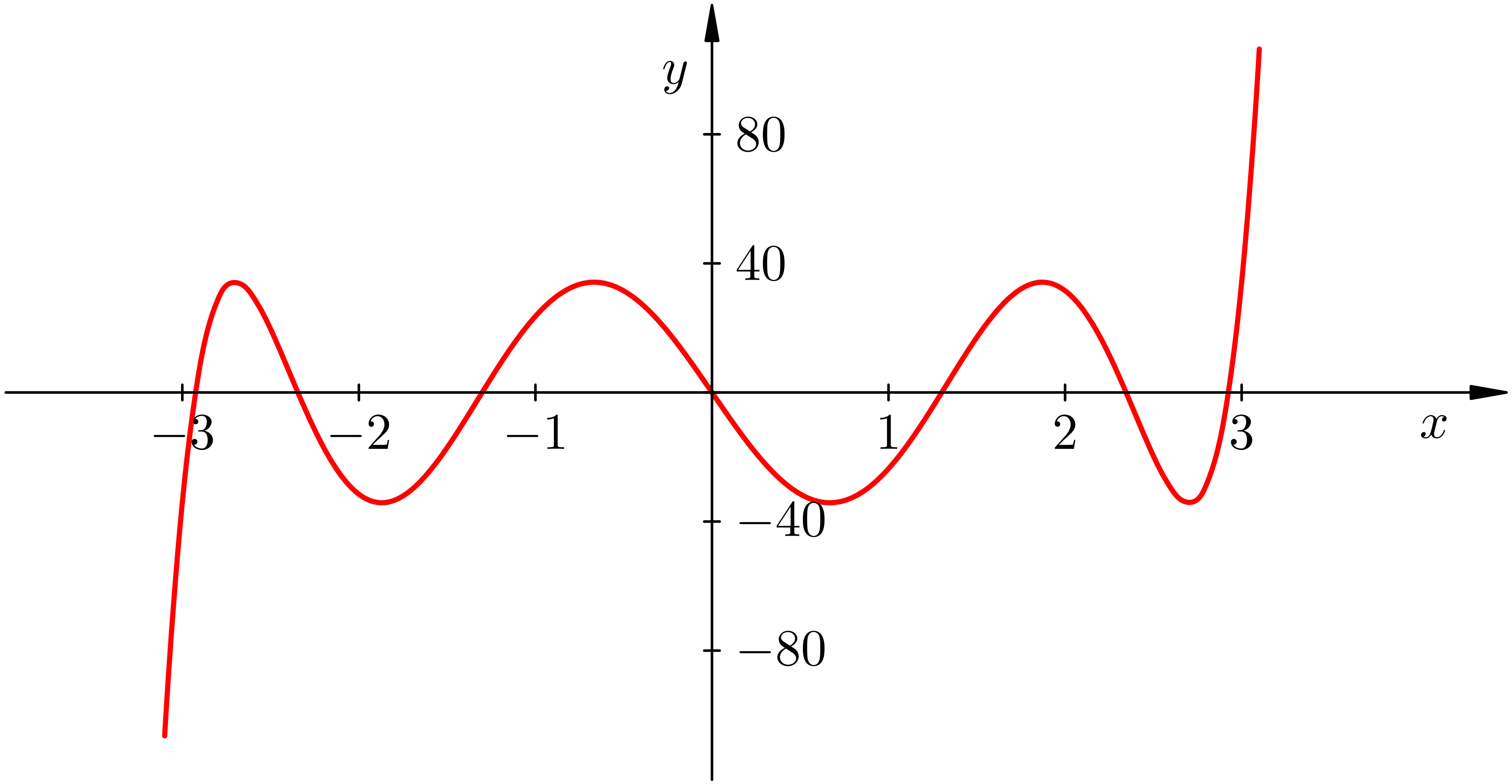
- ekvidistantni — najmanja greška je pri sredini intervala, a raste prema rubu,
- Čebiševljevi — greška je približno jednaka na svakom podintervalu između čvorova.

Polinom čvorova za $n = 7$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 7$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 7$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 7$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da,

- kad se uzmu Čebeševljevi čvorovi,
- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki.

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na "standardnom" intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda je linearnom (afinom) transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n - k) + 1)\pi}{2n + 2}, \qquad k = 0, \ldots , n.$$

Ako je $a = -1$, $b = 1$, onda su Čebiševljeve točke x_k, za $k = 0, \ldots , n$,

- sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1}.

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi prve vrste, oznaka je T_n, za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj cosinusa preko produkta), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n. Usput, za $|x| \geq 1$ vrijedi $T_n(x) = \mathrm{ch}(n \,\mathrm{Arch}\, x)$.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

dok su ekstremi na segmentu $[-1, 1]$ (opet, silazno indeksirani)

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 0, \ldots, n+1.$$

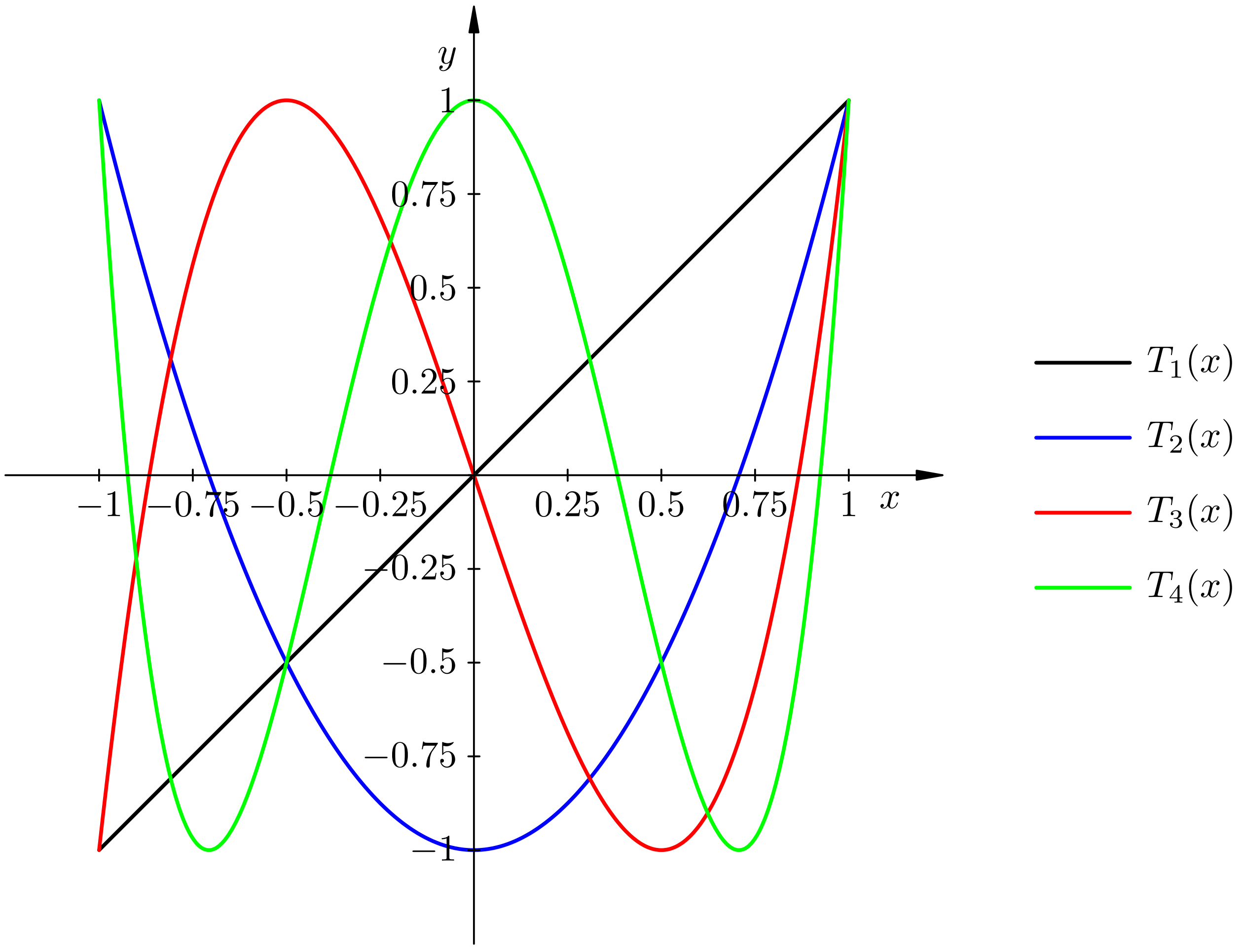
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x'_k) = (-1)^k, \qquad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule" na segmentu $[-1, 1]$.

Teorem. Za zadani prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \right\},$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n se dostiže samo za polinom

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška ili "otklon od nule" je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1}, tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n na $[-1, 1]$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Očito je

$$-1 = x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1 < x'_0 = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x'_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Polinom $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju.

Iz definicije τ_n preko infimuma i prethodne pretpostavke, zaključujemo da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \leq n - 1,$$

za kojeg vrijedi

$$\tau_n \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \le n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima polinoma T_n. Iz gornje ograde za τ_n, redom, izlazi

$$R(x_0') = R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0,$$

$$R(x_1') = -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x_1) < 0, \quad \ldots$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x'_k)) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

No, onda je $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| = 1/2^{n-1}$, što je kontradikcija s $<$.

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. Istim argumentom izlazi opet $M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$. ■

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati točke interpolacije $x_j \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1. Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}. U silaznom poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo zamijenom indeksa $k \mapsto n - k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za Čebiševljeve točke (uzlazno) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k,

- možemo tražiti da interpolacijski polinom h interpolira i derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Ipak, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji je li jedinstven;
- ako postoji, kojeg je stupnja.

Hermiteova polinomna interpolacija

Problem egzistencije i jedinstvenosti konstruktivno rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n+1}(x_k) = f'_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_k međusobno različite točke i f_k, f'_k zadani realni brojevi.

Dokaz.

Ideja: konstrukcija baze nalik na Lagrangeovu.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tražimo "bazične polinome" $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ za koje vrijedi

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x)\big).$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x)\big),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i)\big) = f_k,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i)\big) = f'_k.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu definirati kao

$$\begin{aligned} h_{k,0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\, \ell_k^2(x) \\ h_{k,1}(x) &= (x - x_k)\, \ell_k^2(x), \end{aligned}$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h_{k,0}'(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h_{k,1}'(x_i)$ zadovoljavaju traženo vrši se direktno, uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n, onda

- su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Primijetite da funkcija pogreške polinoma h

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, jer i funkcija e_h, i njezina derivacija e_h' imaju nultočke u x_i, tj.

$$e_h(x_i) = 0, \quad e_h'(x_i) = 0.$$

Ostaje još pokazati jedinstvenost.

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji ispunjava uvjete teorema. Za razliku p tih polinoma onda vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (f(x) - q_{2n+1}(x)) - (f(x) - h_{2n+1}(x)) \\ &= e_q(x) - e_h(x). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Polinom p

- je stupnja ne većeg od $2n + 1$,
- i p ima dvostruke nultočke u x_i, za $i = 0, \ldots, n$, odnosno, ukupno ima barem $2n + 2$ nultočaka.

Zaključak. Polinom stupnja najviše $2n + 1$ koji ima barem $2n + 2$ nultočke je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven. ■

Zbog toga što Hermiteov interpolacijski polinom ima dvostruke nultočke u $x_0, \ldots x_n$, polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Pogreška Hermiteove interpolacije

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije, samo moramo iskoristiti

- h_{2n+1} je stupnja $2n+1$,
- oblik polinoma čvorova $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom h_{2n+1} funkcije $f \in C^{2n+2}[x_{\min}, x_{\max}]$ u $n+1$ međusobno različitih čvorova $x_0, \ldots, x_n$ ima oblik

$$e(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, \omega^2(x),$$

gdje su ξ i ω kao u teoremu o pogrešci Lagrangeove interpolacije.

Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka je dvostruki čvor.
- Pitanje: što je podijeljena razlika u dvostrukom čvoru?

Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo da $h \to 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f[x_0, x_0] &= \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike računaju se na uobičajeni način.

Podijeljene razlike

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0, x_0, x_1] & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \ddots & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_1] & & \\
 & & f'(x_1) & & & \cdots \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
x_n & f[x_n] & & f[x_{n-1}, x_n, x_n] & & \\
 & & f'(x_n) & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi

$$
\begin{aligned}
h_{2n+1}(x) = f[x_0] + f'(x_0)\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1]\,(x - x_0)^2 \\
+ f[x_0, x_0, x_1, x_1]\,(x - x_0)^2\,(x - x_1) + \cdots \\
+ f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n]\,(x - x_0)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n).
\end{aligned}
$$

Naziv "Hermiteova interpolacija" koristi i za općenitiji slučaj tzv. proširene Hermiteove interpolacije

- interpoliraju se i više derivacije od prvih;
- bitno je samo da se u svakom čvoru x_i redom interpoliraju funkcijska vrijednost i prvih nekoliko (uzastopnih) derivacija.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom.

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom $f, f', \ldots, f^{(n)}$ u x_0.

U ovom primjeru, x_0 je $(n+1)$-struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(k+1)\ \text{puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n oko točke x_0.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo “preskakanje” nekih derivacija u nekim točkama,

- problem interpolacije ne mora uvijek imati rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2$.

Interpolacija splajnovima

Interpolacija polinomima — zaključci

Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva,
- u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.

Pretpostavka: čvorovi interpolacije (rubovi podintervala) interpolacije su uzlazno numerirani,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo polinom fiksnog stupnja m, tj. tražimo da je

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_m$.

Svaki polinom p_k (stupnja m)

- određen je s $m + 1$ koeficijenata, i
- moramo odrediti koeficijente n polinoma (na svakom intervalu po jedan).

Ukupan broj koeficijenata koje treba odrediti je

$$(m + 1) \cdot n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Interpolacijski uvjeti su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

što za svaki polinom daje po 2 uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n,$$

odnosno, ukupno imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Digresija. Uvjetima interpolacije osigurali smo neprekidnost funkcije φ, jer je

$$p_{k-1}(x_{k-1}) = p_k(x_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Zaključak.

- Uvjeta interpolacije je $2n$, a
- treba naći $(m + 1) \cdot n$ koeficijenata.

Bez dodatnih uvjeta to je moguće napraviti

- samo za $m = 1$,
- tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

Za $m > 1$

- dodaju se uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije φ u (unutarnjim) čvorovima interpolacije.

Po dijelovima linearna interpolacija

Osnovna ideja po dijelovima linearne interpolacije je:

- umjesto jednog polinoma visokog stupnja,
- koristi se više polinoma, ali stupnja 1.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k je stupnja 1

- i jedinstveno je određen iz uvjeta interpolacije.

Zapisujemo ga relativno obzirom na početnu točku intervala (stabilnost) u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}),$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Po dijelovima linearna interpolacija

Interpolacijski polinom zapisujemo u Newtonovoj formi

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}),$$

pa je očito

$$\left.\begin{aligned} c_{0,k} &= f[x_{k-1}] = f_{k-1}, \\ c_{1,k} &= f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \end{aligned}\right. \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Za aproksimaciju vrijednosti funkcije f u jednoj točki $x \in [a, b]$, treba

- prvo pronaći indeks k takav da vrijedi $x_{k-1} \leq x \leq x_k$,
- a onda izračunati koeficijente pripadnog linearnog polinoma.

Po dijelovima linearna interpolacija

Za traženje tog intervala koristimo binarno pretraživanje.

Binarno pretraživanje

```
low = 0;
high = n;
dok je (high - low) > 1 radi {
  /* U sljedećoj liniji cjelobrojno dijeljenje */
  mid = (low + high) / 2;
  ako je x < x[mid] onda
    high = mid;
  inače
    low = mid;
};
```

Trajanje ovog algoritma je proporcionalno s $\log_2(n)$.

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ako je funkcija f klase $C^2[a,b]$, onda je pogreška takve interpolacije zapravo

- maksimalna pogreška od n linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ pogreška je

- greška linearne interpolacije

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2!}\,|\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \qquad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ocijenimo $\omega(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$, tj. nađimo njezin maksimum po apsolutnoj vrijednosti.

Funkcija ω može imati maksimum samo na otvorenom intervalu (x_{k-1}, x_k) — u rubovima je greška 0.

Deriviranjem dobivamo da je lokalni ekstrem funkcije

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k),$$

točka $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ (parabola!).

Vrijednost funkcije ω u lokalnom ekstremu je

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})(x_e - x_k) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Za bilo koji $x \in (x_{k-1}, x_k)$ je $\omega(x) < 0$, pa je x_e

- točka lokalnog minimuma za ω, odnosno,
- točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$,

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Neka je h maksimalni razmak čvorova po svim podintervalima

$$h := \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je M_2 maksimum apsolutne vrijednosti f'' na cijelom intervalu $[a, b]$

$$M_2 := \max_{1 \leq k \leq n} M_2^k = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Na cijelom intervalu $[a, b]$, onda možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da maksimalni razmak čvorova $h \to 0$,

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

pogreška je reda veličine h^2, odnosno n^{-2}.

Komentar na po dijelovima linearnu interpolaciju

Mane po dijelovima linearne interpolacije.

- Potrebno je dosta podintervala da se dobije umjerena točnost aproksimacije.
- Na primjer, za $h = 0.01$, tj. za $n = 100$, greška aproksimacije je reda veličine 10^{-4}.
- Funkcija φ nije dovoljno glatka — samo je neprekidna.

Po dijelovima parabolička interpolacija

Ako stavimo $m = 2$, tj. na svakom podintervalu postavimo kvadratni polinom,

- moramo naći $3n$ koeficijenata,
- a imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Zahtijevamo da aproksimacijska funkcija φ u unutarnjim čvorovima interpolacije $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ima

- neprekidnu prvu derivaciju, pa smo dodali još $n - 1$ uvjet.
- dakle, treba nam još jedan uvjet!

Taj uvjet ne može se postaviti simetrično, ali se aproksimacija može naći.

Ona se uobičajeno ne koristi, jer kontrolu derivacije možemo napraviti samo na jednom rubu.

Primjer za linearnu splajn interpolaciju

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Primjer. Funkciju

$$f(x) = \ln x$$

na intervalu $[1, 100]$ aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom, s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, koju tražimo na cijelom intervalu.

Nađite broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne ta točnost ε, uz

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu,

(b) interval $[1, 100]$ podijelimo na tri podintervala $[1, 2]$, $[2, 7]$, $[7, 100]$ i na svakom od njih koristimo posebnu ekvidistantnu mrežu.

Po obje metode nađite aproksimaciju za $\ln 2$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje. Za po dijelovima linearnu interpolaciju φ vrijedi sljedeća ocjena pogreške

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \cdot M_2.$$

Ako je mreža ekvidistantna na $[a, b]$, onda je

$$h = \frac{b-a}{n},$$

pri čemu je n broj podintervala interpolacije.

Tražimo li točnost ε, onda mora biti

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Da bi se to postiglo, dovoljno je zatražiti da je

$$\frac{1}{8}\,h^2 \cdot M_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M_2 \leq \varepsilon.$$

Odatle odmah slijedi da mora biti

$$n \geq (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{8\varepsilon}}.$$

Sada još samo treba izračunati M_2. Deriviranjem dobivamo

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Budući da je f'' negativna, strogo rastuća funkcija, onda je maksimum njezine apsolutne vrijednosti na lijevom rubu, tj.

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{a^2}.$$

Rješenje za (a). Na intervalu $[1, 100]$ je $M_2 = 1$. Dobivamo

$$n \geq (100 - 1)\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9900}{\sqrt{8}} \approx 3500.1785667,$$

pa je $n = 3501$, dok je broj čvorova $n + 1 = 3502$.

Da bismo odredili aproksimaciju za $\ln 2$, moramo naći u kojem podintervalu se 2 nalazi.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Ako je $\hat{x}$ u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, mora biti

$$a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \leq \hat{x} \leq a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

U našem slučaju je $\hat{x} = 2$. Onda dobivamo

$$1 + (k-1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 2 \leq 1 + k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k-1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 1 \leq k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k-1) \leq \frac{3501}{99} \leq k$$

$$(k-1) \leq 35.\dot{3}\dot{6} \leq k.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Prema tome, $k = 36$, $x_{35} \approx 1.9897172240$, $x_{36} \approx 2.0179948590$, pa imamo tablicu podijeljenih razlika

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
1.9897172240	0.6879925301	
		0.4990461264
2.0179948590	0.7021043744	

Interpolacijski polinom na tom podintervalu onda glasi:

$$p_1(x) = 0.6879925301 + 0.4990461264(x - 1.9897172240),$$

pa je

$$p_1(2) = 0.6931241097, \quad |\ln(2) - p_1(2)| = 0.0000230709.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje za (b). Na intervalu $[1, 2]$ je $M_2 = 1$, pa je

$$n_1 \geq (2-1)\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{100}{\sqrt{8}} \approx 35.3535,$$

pa je $n_1 = 36$.

Na intervalu $[2, 7]$ je $M_2 = \frac{1}{4}$, pa je

$$n_2 \geq (7-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{500}{2\sqrt{8}} \approx 88.388834765,$$

pa je $n_2 = 89$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Na intervalu $[7, 100]$ je $M_2 = \dfrac{1}{49}$, pa je

$$n_3 \geq (100-7)\sqrt{\frac{\frac{1}{49}}{8\cdot 10^{-4}}} = \frac{9300}{7\sqrt{8}} \approx 469.7209334,$$

pa je $n_3 = 470$.

Ukupan broj podintervala je $n = n_1 + n_2 + n_3 = 595$, što je skoro 6 puta manje nego u (a). Broj čvorova je 596.

Budući da je 2 čvor interpolacije, onda nemamo što računati, i vrijednost u čvoru je upravo $\ln 2 \approx 0.693147181$.

Po dijelovima kubična interpolacija

Po dijelovima kubična interpolacija

Kod po dijelovima kubične interpolacije, restrikcija aproksimacijske funkcije φ na svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ je kubični polinom

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_3$.

Ove polinome p_k obično zapisujemo relativno obzirom na početnu točku intervala x_{k-1}, u obliku

$$\begin{aligned} p_k(x) = c_{0,k} &+ c_{1,k}(x - x_{k-1}) \\ &+ c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \end{aligned}$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, i za $k = 1, \ldots, n$.

Broj nepoznatih parametara i broj uvjeta

Ukupno imamo n kubičnih polinoma,

- od kojih svakome treba odrediti 4 koeficijenta,
- dakle, ukupno moramo odrediti $4n$ koeficijenata.

Uvjeta interpolacije je $2n$, jer svaki kubični polinom p_k

- mora interpolirati funkciju f u rubovima svog podintervala $[x_{k-1}, x_k]$,

tj. mora vrijediti

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ovi uvjeti automatski osiguravaju neprekidnost funkcije φ.

Dodatni uvjeti interpolacije na derivaciju

Obično želimo da interpolacijska funkcija φ bude glađa:

- barem klase $C^1[a, b]$, tj.
- da je i derivacija funkcije φ neprekidna i u čvorovima.

Dodavanjem tih uvjeta za svaki kubični polinom p_k, dobivamo točno još $2n$ uvjeta "interpolacije"

$$\begin{aligned} p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ p_k'(x_k) &= s_k, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n,$$

pri čemu su s_k neki brojevi.

Njihova uloga može biti višeznačna, pa ćemo je detaljno opisati kasnije.

- Ideja — brojeve s_k možemo birati/zadati na razne načine.

Neprekidnost derivacije interpolacijske funkcije

Zasad, možemo zamišljati da su brojevi s_k

- neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima.

Oznaka s_k dolazi od engleske riječi "slope" = nagib.

Primijetite da je takvim izborom dodatnih uvjeta

- osigurana neprekidnost prve derivacije funkcije φ u svim unutrašnjim čvorovima,

jer je

$$p'_{k-1}(x_{k-1}) = p'_k(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Ako pretpostavimo da su s_k nekako zadani brojevi, dobivamo problem Hermiteove interpolacije za svaki polinom p_k.

Nađimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_k.

Zapis po dijelovima kubične interpolacije

Za ovaj problem Hermiteove interpolacije

- najzgodnije je koristiti Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_k,
- s tzv. dvostrukim čvorovima x_{k-1} i x_k.

Razlog. U oba čvora x_{k-1} i x_k zadajemo po dva podatka:

- vrijednost funkcije i derivacije.

Razmak susjednih različitih čvorova označavamo ovako:

$$h_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ponovimo što, zapravo, znači da je x_k dvostruki čvor.

Dvostruki čvorovi u podijeljenim razlikama

Ako se u podijeljenoj razlici $f[x_k, x_k + h]$ ova dva čvora približavaju jedan drugom, onda na limesu kad $h \to 0$ dobivamo

$$\lim_{h\to 0} f[x_k, x_k + h] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = f'(x_k),$$

naravno, pod uvjetom da f ima derivaciju u točki x_k. Drugim riječima, vrijedi

$$f[x_k, x_k] = f'(x_k).$$

U našem slučaju, ako u točki x_k

- derivaciju $f'(x_k)$ zadajemo ili aproksimiramo sa s_k,

onda je

$$f[x_k, x_k] = s_k.$$

Tablica podijeljenih razlika za polinom p_k

Tablica podijeljenih razlika za Hermiteov interpolacijski polinom p_k koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k je

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}]$
x_{k-1}	f_{k-1}			
		s_{k-1}		
x_{k-1}	f_{k-1}		$\dfrac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}$	
		$f[x_{k-1}, x_k]$		$\dfrac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}$
x_k	f_k		$\dfrac{s_k - f[x_{k-1}, x_k]}{h_k}$	
		s_k		
x_k	f_k			

Newtonov oblik polinoma p_k

Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma p_k koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k je

$$\begin{aligned} p_k(x) = f[x_{k-1}] &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 (x - x_k), \end{aligned}$$

uz uvažavanje da je

$$\begin{aligned} f[x_{k-1}, x_{k-1}] &= s_{k-1}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}. \end{aligned}$$

Newtonov oblik polinoma p_k

Uvrštavanjem čvorova x_{k-1} i x_k u prethodnu formulu za p_k, odmah možemo provjeriti da je

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \qquad & p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \qquad & p_k'(x_k) &= s_k. \end{aligned}$$

Drugim riječima, našli smo traženi polinom p_k na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$.

Za nalaženje koeficijenata $c_{i,k}$ u standardnom zapisu, treba još

- Newtonov oblik polinoma p_k "preurediti" tako da bude napisan po potencijama od $(x - x_{k-1})$.

Standardni oblik polinoma p_k

Posljednji član Newtonovog oblika polinoma p_k možemo napisati kao

$$\begin{aligned}(x - x_{k-1})^2 (x - x_k) &= (x - x_{k-1})^2 (x - x_{k-1} + x_{k-1} - x_k) \\ &= (x - x_{k-1})^2 (x - x_{k-1} - h_k) \\ &= (x - x_{k-1})^3 - h_k (x - x_{k-1})^2.\end{aligned}$$

Zapis polinoma p_k sada glasi

$$\begin{aligned}p_k(x) = f[x_{k-1}] &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &+ \big(f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k\, f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]\big) \\ &\qquad \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^3.\end{aligned}$$

Standardni oblik polinoma p_k

Uspoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od $(x - x_{k-1})$, dobivamo

$$c_{0,k} = p_k(x_{k-1}) = f_{k-1},$$

$$c_{1,k} = p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1},$$

$$c_{2,k} = \frac{p_k''(x_{k-1})}{2} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k\, f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k],$$

$$c_{3,k} = \frac{p_k'''(x_{k-1})}{6} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k].$$

Promotrimo li posljednje dvije relacije, otkrivamo da se isplati

- prvo izračunati koeficijent $c_{3,k}$,
- a zatim ga upotrijebiti za računanje $c_{2,k}$.

Standardni oblik polinoma p_k

Na kraju, dobivamo sljedeće relacije

- za koeficijente $c_{i,k}$ u standardnom zapisu polinoma p_k,

napisane redom kako se računaju:

$$
\begin{aligned}
c_{0,k} &= f_{k-1}, \\
c_{1,k} &= s_{k-1}, \\
c_{3,k} &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}, \\
c_{2,k} &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k},
\end{aligned}
$$

za $k = 1, \ldots, n$.

Po dijelovima kubična interpolacija — komentar

Drugim riječima, ako znamo s_k, onda

- nije problem naći koeficijente po dijelovima kubične interpolacije.

Ostaje nam samo pokazati kako bismo mogli birati brojeve s_k.

Tu postoje dva bitno različita načina.

- s_k su "prave" vrijednosti derivacije funkcije f u čvorovima, tj. $s_k = f'(x_k)$.
- s_k su neke aproksimacije za $f'(x_k)$. Takve aproksimacije možemo naći numeričkim deriviranjem.

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Vrijednosti s_k možemo izabrati tako da su one baš jednake derivaciji zadane funkcije u odgovarajućoj točki, tj. da vrijedi

$$s_k = f'(x_k).$$

U tom slučaju je kubični polinom

- određen lokalno, tj. ne ovisi o drugim kubičnim polinomima,
- razlog — na rubovima zadane 2 funkcijske vrijednosti i 2 vrijednosti derivacija.

Takva se interpolacija zove po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je funkcija $f \in C^4[a, b]$. Za svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ vrijedi ocjena greške za Hermiteovu kubičnu interpolaciju

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_4^k}{4!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})^2 (x - x_k)^2, \qquad M_4^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

Ostaje samo još pronaći u kojoj je točki intervala $[x_{k-1}, x_k]$ maksimum funkcije $|\omega|$.

Dovoljno je naći sve lokalne ekstreme funkcije ω, jer je na rubovima greška 0.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Deriviranjem izlazi da se ekstrem (i to lokalni maksimum) dostiže u $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$.

Vrijednost u x_e je kvadrat vrijednosti greške za po dijelovima linearnu interpolaciju na istoj mreži čvorova

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2 (x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}.$$

Prijelazom na apsolutnu vrijednost, slijedi da je x_e točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$ i

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Definiramo li, ponovno, maksimalni razmak čvorova

$$h = \max_{1 \le k \le n} \{h_k = x_k - x_{k-1}\},$$

onda, na čitavom $[a, b]$, možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \le \frac{M_4}{4!} \, \frac{h^4}{16} = \frac{1}{384} \, h^4 \cdot M_4,$$

pri čemu je

$$M_4 = \max_{k=1,\dots,n} \{M_4^k\} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Drugim riječima, ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je $f \in C^1[a,b]$ i pretpostavimo da

- f ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Tada je

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_\infty \le \frac{1}{384}\, h^4\, \|f^{(4)}\|_\infty,$$

$$\|f'(x) - \varphi'(x)\|_\infty \le \frac{\sqrt{3}}{216}\, h^3\, \|f^{(4)}\|_\infty,$$

$$\|f''(x) - \varphi''(x)\|_\infty \le \frac{1}{12}\, h^2\, \|f^{(4)}\|_\infty,$$

$$\|f^{(3)}(x) - \varphi^{(3)}(x)\|_\infty \le \frac{1}{2}\, h\, \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Primjer — po dijelovima Hermiteova interp.

Primjer. Nađite po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju za podatke

x_k	0	1	2
f_k	1	2	0
f_k'	0	1	1

.

Očito, treba povući dva kubična polinoma

- p_1 na intervalu $[0, 1]$,
- p_2 na intervalu $[1, 2]$.

Primjer — po dijelovima Hermiteova interp.

Za polinom p_1 imamo sljedeću tablicu podijeljenih razlika

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, \ldots, t_{k+3}]$
0	1			
		0		
0	1		1	
		1		-1
1	2		0	
		1		
1	2			

Iz nje dobivamo

$$p_1(x) = 1 + (1+1)(x-0)^2 - 1(x-0)^3 = 1 + 2x^2 - x^3.$$

Primjer — po dijelovima Hermiteova interp.

Na sličan način, za p_2 dobivamo tablicu podijeljenih razlika

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, \ldots, t_{k+3}]$
1	2			
		1		
1	2		-3	
		-2		6
2	0		3	
		1		
2	0			

pa je

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 2 + (x-1) + (-3-6)(x-1)^2 + 6(x-1)^3 \\ &= 2 + (x-1) - 9(x-1)^2 + 6(x-1)^3. \end{aligned}$$

Demo — po dijelovima kub. Hermiteova interp.

Pokazati kako izgleda po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija na primjeru funkcije Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [-5, 5],$$

na ekvidistantnim mrežama s parnim brojem podintervala.

- `Num_Pas\Interp\Comp_Her\GnuPlot\HerRung.plt`

Numeričko deriviranje

Numeričko deriviranje

U praksi, često derivacije funkcije nisu dostupne, već

- treba aproksimirati derivaciju diferencijabilne funkcije f na nekom skupu točaka, korištenjem samo vrijednosti funkcije f u zadanim točkama.

Ideja. Aproksimacija derivacije = derivacija aproksimacije.

Koristimo interpolacijski polinom. Uz pretpostavku da je f klase $C^{n+1}[a, b]$, funkciju f možemo napisati

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x),$$

gdje je $p_n(x)$ interpolacijski polinom

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

Derivacija funkcije = derivacija interp. polinoma

a $e_n(x)$ greška interpolacijskog polinoma

$$e_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Deriviranjem p_n, a zatim uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo aproksimaciju za $f'(x_0)$

$$\begin{aligned} p_n'(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_0 - x_1) \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_{n-1}), \end{aligned}$$

Ako f ima još jednu neprekidnu derivaciju, tj. ako je f klase $C^{n+2}[a, b]$, onda je pogreška aproksimacije

$$e_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n).$$

Greška = derivacija greške interp. polinoma

Dakle, $p_n'(x_0)$ je aproksimacija derivacije funkcije f u točki x_0 i vrijedi

$$f'(x_0) = p_n'(x_0) + e_n'(x_0).$$

Ako označimo s

$$H = \max_k |x_0 - x_k|,$$

onda je, za $H \to 0$, greška $e_n'(x_0)$ reda veličine

$$e_n'(x_0) = O(H^n).$$

To nam pokazuje da aproksimacijska formula za derivaciju može biti proizvoljno visokog reda n, ali takve formule s velikim n imaju ograničenu praktičnu vrijednost.

Numeričko deriviranje — linearni polinom

Pokažimo kako se ta formula ponaša za niske n.

$n = 1.$

Aproksimacija derivacije je

$$p_1'(x_0) = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h},$$

pri čemu smo napravili grešku

$$e_1'(x_0) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\,(x_0 - x_1) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\,h,$$

uz pretpostavku da je $f \in C^3[x_0, x_1]$. Greška je reda veličine $O(h)$ za $h \to 0$.

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

$n = 2.$

Za $n = 2$, točke x_1, x_2 možemo uzeti na više raznih načina.

1. Simetričan izbor točaka

Izaberemo x_1 i x_2 simetrično oko x_0

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 - h.$$

Sugestivnija oznaka je

$$x_{-1} := x_2,$$

jer se točke pišu u prirodnom redosljedu: x_{-1}, x_0, x_1. U tom slučaju je

$$p_2'(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_{-1}]\,(x_0 - x_1).$$

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

Izračunajmo potrebne podijeljene razlike.

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$
x_{-1}	f_{-1}		
		$\dfrac{f_0 - f_{-1}}{h}$	
x_0	f_0		$\dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}$
		$\dfrac{f_1 - f_0}{h}$	
x_1	f_1		

Uvrštavanjem dobivamo

$$p_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

Prethodnu formulu zovemo simetrična (centralna) razlika, jer su točke x_1 i x_{-1} simetrične obzirom na x_0.

Takva aproksimacija derivacije ima bolju ocjenu greške nego obične podijeljene razlike, tj. vrijedi

$$e_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_{-1}) = -h^2\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

2. Slučaj x_1 i x_2 s iste strane x_0

Rasporedimo, na primjer, x_1 i x_2 desno od x_0,

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h.$$

Numeričko deriviranje — drugi izbor točaka

Iako su i u ovom slučaju točke ekvidistantne, deriviramo u najljevijoj, a ne u srednjoj točki.

Pripadna tablica podijeljenih razlika je

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$
x_0	f_0		
		$\dfrac{f_1 - f_0}{h}$	
			$\dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$
x_1	f_1		
		$\dfrac{f_2 - f_1}{h}$	
x_2	f_2		

Numeričko deriviranje — drugi izbor točaka

Konačno, aproksimacija derivacije u x_0 je

$$\begin{aligned} p_2'(x_0) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_0 - x_1) \\ &= \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \\ &= \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}, \end{aligned}$$

dok je greška jednaka

$$e_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2) = h^2\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{3},$$

tj. greška je istog reda veličine $O(h^2)$, međutim konstanta je dvostruko veća nego u prethodnom (simetričnom) slučaju.

Numeričko deriviranje — zaključci

Formula za derivaciju

- postaje sve točnija što su bliže točke iz kojih se derivacija aproksimira, tj. što je h manji.

To vrijedi samo teoretski.

U praksi, mnogi podaci su mjereni, pa nose neku pogrešku, u najmanju ruku zbog grešaka zaokruživanja.

Osnovu numeričkog deriviranja čine podijeljene razlike,

- ako su točke bliske, dolazi do kraćenja. Do kraćenja mora doći, zbog neprekidnosti funkcije f.

Problem je to izrazitiji, što su točke bliže, tj. što je h manji.

Dakle, imamo dva oprečna zahtjeva na veličinu h. Manji h daje bolju ocjenu greške, ali veću grešku zaokruživanja.

Numeričko deriviranje — ilustracija problema

Ilustrirajmo to analizom simetrične razlike,

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + e_2'(x_0), \qquad e_2'(x_0) = -h^2 \, \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

Pretpostavimo da smo, umjesto vrijednosti f_{-1} i f_1, uzeli malo perturbirane vrijednosti

$$\widehat{f}_1 = f_1 + \varepsilon_1, \qquad \widehat{f}_{-1} = f_{-1} + \varepsilon_{-1}, \qquad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_{-1}| \leq \varepsilon.$$

Ako odatle izrazimo f_1 i f_{-1} i uvrstimo ih u formulu za derivaciju, dobivamo

$$f'(x_0) = \frac{\widehat{f}_1 - \widehat{f}_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e_2'(x_0).$$

Koliko malen smije biti h?

Prvi član s desne strane je ono što smo mi zaista izračunali kao aproksimaciju derivacije, a ostalo je greška.

Zbog jednostavnosti analize pretpostavimo da je

- h prikaziv u računalu,
- greška pri računanju kvocijenta u podijeljenoj razlici zanemariva.

U tom je slučaju napravljena ukupna greška

$$err_2 = f'(x_0) - \frac{\widehat{f}_1 - \widehat{f}_{-1}}{2h} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e_2'(x_0).$$

Ogradimo err_2 po apsolutnoj vrijednosti. Greška u prvom članu je najveća ako su ε_1 i ε_{-1} suprotnih predznaka, maksimalne apsolutne vrijednosti ε.

Koliko malen smije biti h?

Za drugi član koristimo ocjenu za $e_2'(x_0)$, pa zajedno dobivamo

$$|err_2| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6}h^2, \qquad M_3 = \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} |f^{(3)}(x)|.$$

Lako se vidi da je ocjena na desnoj strani najbolja moguća, tj. da se može dostići. Označimo tu ocjenu s $e(h)$

$$e(h) := \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6}h^2.$$

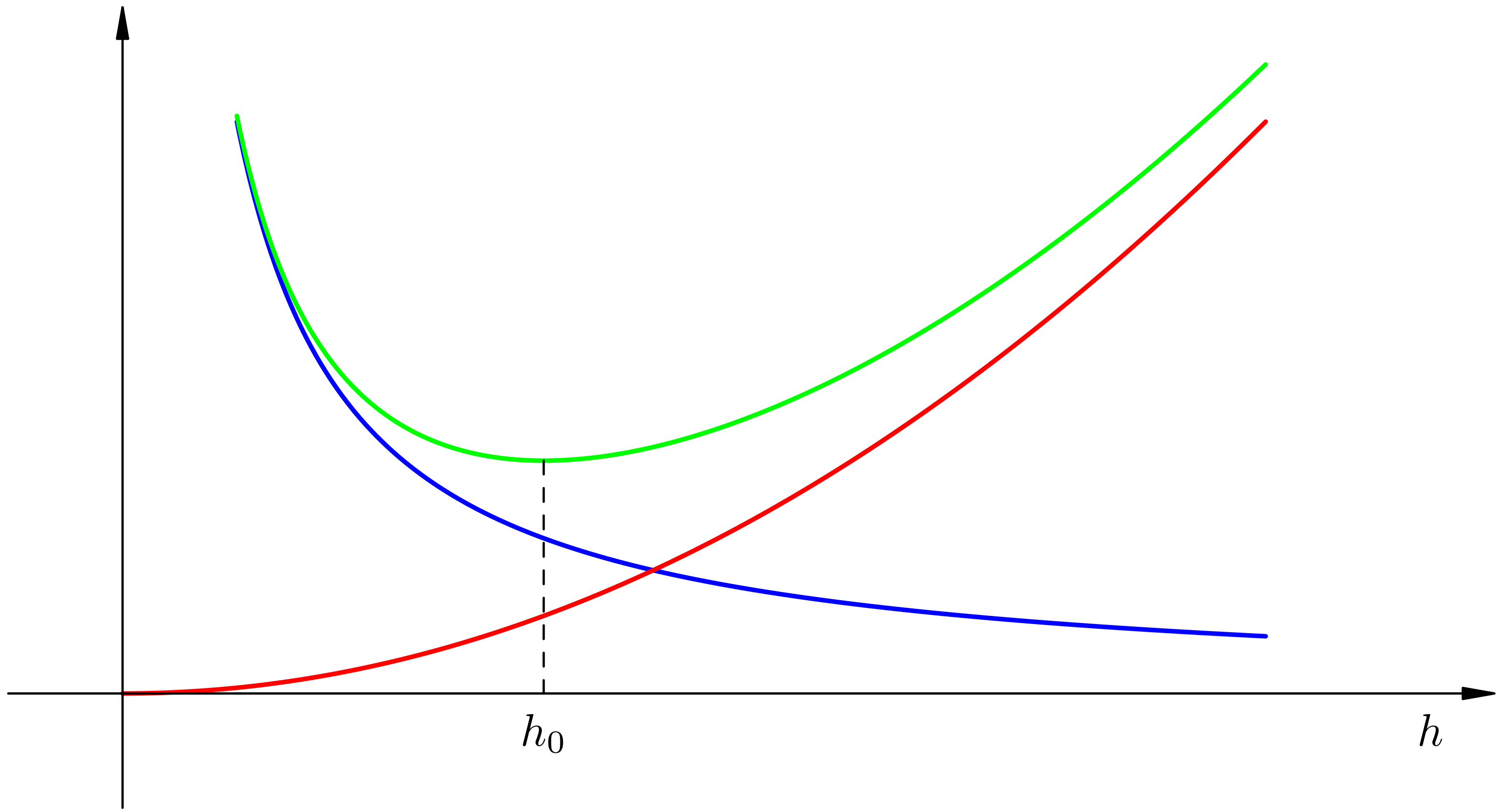
Ponašanje ove ocjene i njezina dva člana u ovisnosti od h možemo prikazati sljedećim grafom.

Koliko malen smije biti h?

Legenda:

- plava boja — prvi član ε/h oblika hiperbole, koji dolazi od greške u podacima,
- crvena boja — drugi član oblika parabole, koji predstavlja maksimalnu grešku odbacivanja kod aproksimacije derivacije podijeljenom razlikom,
- zelena boja — označava zbroj grešaka $e(h)$.

Optimalni h_0



Optimalni h_0

Odmah vidimo da $e(h)$ ima minimum po h. Taj minimum se lako računa, jer iz

$$e'(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{M_3}{3} h = 0$$

izlazi da se lokalni, a onda (zbog $e''(h) > 0$ za $h > 0$) i globalni minimum postiže za

$$h_0 = \left(\frac{3\varepsilon}{M_3} \right)^{1/3}.$$

Najmanja vrijednost funkcije je

$$e(h_0) = \frac{3}{2} \left(\frac{M_3}{3} \right)^{1/3} \varepsilon^{2/3}.$$

Ukupna greška koju ne očekujemo

To pokazuje da je čak i u najboljem slučaju,

- kad je ukupna greška najmanja, ona je reda veličine $O(\varepsilon^{2/3})$, a ne $O(\varepsilon)$, kao što bismo željeli.

To predstavlja značajni gubitak točnosti.

Posebno, daljnje smanjivanje koraka h samo povećava grešku!

Isti problem se javlja, i to u još ozbiljnijem obliku, u formulama višeg reda za aproksimaciju derivacija.