Numerička matematika
1. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Dobar dan, dobro došli

Sadržaj predavanja (početak)

- Uvod u kolegij:
  - Tko sam, što sam i kako do mene.
  - Pravila lijepog ponašanja.
  - Cilj kolegija "Numerička matematika".
  - Pregled sadržaja kolegija.
  - Kolegiji prethodnici — Ponovite!
  - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
    - "Pravila igre" ili način polaganja ispita.
    - Literatura.
    - Moja web–stranica.
    - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.
    - Demonstratori.
  - Malo prodike, s najboljim namjerama :-).

Sadržaj predavanja (nastavak)

- Uvodna priča o greškama:
  - Problemi numeričke matematike (zašto ona postoji).
  - Pojam greške, apsolutna i relativna greška.
  - Izvori grešaka — model, ulazni podaci (mjerenje), metoda, zaokruživanje.
    - Ilustracija grešaka na modelnim primjerima.
  - Prikaz brojeva u računalu i greške zaokruživanja (ponavljanje).
  - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
    - Opasno ili "katastrofalno" kraćenje.
  - "Širenje" grešaka zaokruživanja, stabilni i nestabilni algoritmi.
  - Primjeri iz prakse — posljedice grešaka.

Informacije

Trenutno,

- nema posebnih informacija.

Zapravo, ima jedna — bitna razlika od prošle godine:

- do 1. kolokvija imamo punih 8 tjedana nastave,
- a ne samo 6, kao prošle godine,
- ili “standardnih” 7, kao ranijih godina.

Planiramo “normalnu” raspodjelu materijala po kolokvijima,

- tako da 1. kolokvij pokriva prvih 7 tjedana nastave,
- inače bi 2. kolokvij bio “premali”.

Predavanja idu istim “ritmom” kao ranijih godina.

Uvod u kolegij

Sadržaj

- Uvod u kolegij:
  - Tko sam, što sam i kako do mene.
  - Pravila lijepog ponašanja.
  - Cilj kolegija "Numerička matematika".
  - Pregled sadržaja kolegija.
  - Kolegiji prethodnici — Ponovite!
  - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
    - "Pravila igre" ili način polaganja ispita.
    - Literatura.
    - Moja web–stranica.
    - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.
    - Demonstratori.
  - Malo prodike, s najboljim namjerama :-).

Na samom početku

- Moja malenkost (u punom “sjaju”):

  prof. dr. sc. Saša Singer

- Službeni osobni podaci:
  - ured (soba, kabinet): 227, drugi kat,
  - e–mail: singer@math.hr
    (Molim plain text poruke.)
  - web stranica: `http://web.math.hr/~singer/`

    odn. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/`
- Konzultacije (službeno):
  - samo za NM: ponedjeljak u 13 sati (iza predavanja),
  - petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Osnovna pravila “lijepog” ponašanja

Imam nekoliko lijepih zamolbi u rubrici “kultura”.

- Prva i osnovna je

  razumna tišina,

  tj. da pričanjem ne ometate izvođenje nastave.
- Zatim, ne kasnite na predavanje.
- Održavajte razuman red u predavaonici.
- Mobilne telefone, molim, utišajte.

Cilj kolegija Numerička matematika

Većina ostalih kolegija na studiju (do sada) bavi se

- tzv. “egzaktnom” ili “pravom” matematikom,

koja izgleda, otprilike, ovako:

- definicija, teorem, dokaz,

uz tek pokoji primjer.

Numerička matematika se ponešto razlikuje od toga:

- orijentirana je prema rješavanju konkretnih praktičnih problema,
- bazirana je na pojmu greške, odnosno, aproksimacije, tj. nije baš “egzaktna”.

Cilj kolegija Numerička matematika (nastavak)

Zato kolegij ima nekoliko dosta različitih osnovnih ciljeva:

- spoznavanje neminovnosti pojave grešaka u praktičnom svijetu (izvori i vrste grešaka, važnost ocjene pogreške),
- pregled osnovnih numeričkih metoda za rješavanje nekih "standardnih" problema,
- samostalna primjena tih metoda,
- razvijanje kritičnosti u interpretaciji dobivenih rezultata ("brojevi imaju jedinice").

Ovo zadnje je najvažnije — "da ne bi bilo … " (primjeri dolaze na kraju).

Izvedba: više primjera, a manje dokaza!

Pregled sadržaja kolegija

Cijeli kolegij ima 7 “većih” cjelina (poglavlja):

- Uvod u kolegij — greške, uvjetovanost problema, stabilnost algoritama.
- Rješavanje linearnih sustava — tzv. direktne metode (Gaussove eliminacije, LR faktorizacija, faktorizacija Choleskog).
- Aproksimacija i interpolacija — općenito o problemu aproksimacije funkcija, interpolacija polinomom i splineom (splajnom).
- Metoda najmanjih kvadrata — opći diskretni problem, linearizacija, matrična formulacija, QR faktorizacija. Neprekidni problem i ortogonalni polinomi.

Pregled sadržaja kolegija (nastavak)

- Ortogonalni polinomi i generalizirana Hornerova shema.
- Numeričko integriranje — Newton–Cotesove i Gaussove formule.
- Rješavanje nelinearnih jednadžbi — bisekcija, Newton, sekanta, jednostavna iteracija, konstrukcija metoda višeg reda konvergencije.

U nastavnom planu piše još i osma cjelina:

- Uvod u optimizaciju bez ograničenja (1 tjedan).

Međutim, to sigurno nećemo stići — imamo samo 13 tjedana nastave, umjesto ranijih 14, ili čak 15.

Kolegiji prethodnici — Ponovite!

Numerička matematika ima prethodnike — to su:

- LA1 = Linearna algebra 1,
- MA2 = Matematička analiza 2.

Stvarno — matematički, trebamo i više od toga:

- LA2 = Linearna algebra 2,
- DRFVV = Diferencijalni račun funkcija više varijabli (parcijalne derivacije, ekstremi).

Dodatno — računarski, trebamo još i Programiranje 1, za:

- prikaz brojeva u računalu, aritmetika računala, greške zaokruživanja,
- pisanje i testiranje osnovnih algoritama.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (1)

Elementi ocjenjivanja su:

- domaće zadaće — 10%,
- 1. kolokvij — 40%,
- 2. kolokvij — 50%,
- eventualna završna provjera znanja (ispit) — 25%.

Zbroj je 125% — nije greška, v. objašnjenje malo niže.

Idemo redom …

Pravila polaganja i ocjenjivanja (2)

Domaće zadaće iz NM:

- Realizacija ide "automatski" — preko web aplikacije, slično/isto kao na Prog1 (nužna prijava za početak).

Pogledajte — već su "žive", na adresi

http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php

Trenutno ima 7 zadataka iz raznih područja. Bodovi idu prema broju točno riješenih zadataka,

- uzlaznim redom: 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10.

Rok za predaju zadaća je

- dan drugog kolokvija, do početka kolokvija.

Aplikacija se tada "zatvara za javnost" — bodovi su konačni.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (3)

Kolokviji. Tijekom semestra pišu se dva kolokvija:

- 1. kolokvij — ima (najmanje) 40 bodova,
- 2. kolokvij — ima (najmanje) 50 bodova,

tj. oba kolokvija mogu imati “bonus” bodove.

- Na kolokvijima se postavljaju i teorijska pitanja.

Studenti koji ne pristupe nekom od kolokvija tijekom semestra, a svoj nedolazak

- pravovremeno opravdaju na odgovarajući način
  - na pr. medicinskom dokumentacijom,
- kolokvij će polagati u dogovoru s nastavnicima.

Realizacija: Predati molbu s dokumentacijom u referadu.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (4)

Za prolaznu ocjenu potrebno je:

- skupiti najmanje 45 bodova (iz kolokvija i zadaća),
- od čega barem 40 bodova mora biti na kolokvijima.

“Prva” ocjena se formira na temelju

- zbroja bodova iz kolokvija i zadaća.

Zato prva 3 elementa ocjenjivanja zbrojeno daju 100%. No,

- možete zaraditi i više od 100 bodova.

Ako ste zadovoljni ocjenom, to je (uglavnom) to!

Pravila polaganja i ocjenjivanja (5)

Završni ispit (tzv. "završna provjera znanja"):

- U načelu — završnog usmenog ispita NEMA.

Mogući izuzeci su:

- po želji — ako niste zadovoljni "prvom" ocjenom,
- po kazni — nastavnik IMA PRAVO pozvati studenta na usmeni ispit (na pr. zbog prepisivanja na kolokviju).

Na završnom ispitu moguće je ostvariti najviše još 25 bodova (v. skalu za ocjene).

Oprez:

- Student može svojim neznanjem na završnoj provjeri znanja dobiti i negativnu ocjenu — tj. pasti.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (6)

Popravni ispit.

- Studenti koji su tijekom semestra na kolokvijima skupili barem 10 bodova,
- a nisu položili kolegij,

mogu pristupiti popravnom kolokviju.

Popravni kolokvij obuhvaća gradivo cijelog kolegija.

- Na njemu je moguće ostvariti (barem) 100 bodova, tj., opet može biti "bonus" bodova.
- Bodovi iz zadaća se zbrajaju u ocjenu.

Na popravni kolokvij primjenjuje se isto pravilo o završnoj provjeri znanja kao i za redovite kolokvije.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (7)

Tablica ocjenjivanja:

Bodovi	Ocjena
0 – 44	1
45 – 59	2
60 – 74	3
75 – 89	4
90 i više	5

Onih ≤ 25 bodova na završnom usmenom ispitu znači da

- jako dobrim znanjem možete zaraditi i dvije ocjene više!

Literatura (1)

Osnovna literatura su, naravno,

- predavanja i vježbe,

s popratnim materijalima (predavanja su dostupna na webu).

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Tamo su kompletna predavanja od prošle četiri godine, a stizat će i nova (kako nastaju).

Materijale za predavanja doc. Grubišića možete naći na

`http://web.math.hr/~luka/Nastava/`

Napomena: to nije zamjena za "živu" nastavu (v. kasnije)!

Literatura (2)

Postoji i "stvarna" literatura — u "pisanom" obliku:

- tzv. "skripta" iz Numeričke matematike (ili analize).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Da se ne uplašite veličine: i tu ima "previše" materijala. Jednom će se (možda) dovesti u red.

Literatura (3)

Ako nekog zanima, originalna “velika” skripta je:

- Z. Drmač i ostali,
  Numerička analiza (skripta),
  PMF–MO, 2003.

Izravni “link” na “veliku” skriptu je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf

Za totalno zbunjivanje, postoji i tzv. “srednja” skripta

http://web.math.hr/~singer/num_anal/num_alg.pdf

Zbunjivanje se riješava usporedbom sadržaja (ima dosta presjeka, ali i značajne simetrične razlike).

Literatura (4)

Dodatna literatura (piše u "službenom" popisu):

- K. E. Atkinson,
  An Introduction to Numerical Analysis (second edition),
  John Wiley and Sons, 1989.

Pošteno, "nisam sretan" s njom — ima dosta grešaka.

Ako već treba neka preporuka, onda ovo:

- W. Cheney, D. Kincaid,
  Numerical Mathematics and Computing (4. edition),
  Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Groove, 1999.

Ja imam 4. izdanje (možda ima i novije).

Knjiga je matematički vrlo korektna, ima algoritme i hrpu zadataka. Fali mali dio numeričke linearne algebre.

Literatura (5)

Sljedeće preporuke, posebno za numeričku linearnu algebru:

- G. W. Stewart,
  - Afternotes on Numerical Analysis,
    SIAM, Philadelphia, 1996.
  - Afternotes goes to Graduate School — Lectures on Advanced Numerical Analysis,
    SIAM, Philadelphia, 1996.

Fale zadaci i dio dokaza, ali je prezentacija vrlo dobra.

- I. C. F. Ipsen,
  Numerical Matrix Analysis — Linear Systems and Least Squares Problems,
  SIAM, Philadelphia, 2009.

Kratka i vrlo pregledna knjiga, ima sve osnovne dokaze.

Literatura (6)

Za "čitače" njemačkog, možete potražiti i knjigu:

- Wolfgang Dahmen i ostali,
  Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,

Pripadni nastavni materijali su na stranici

`http://www.igpm.rwth-aachen.de/node/161/`

(koristite Firefox!)

Može i hrpa

- malo starijih knjiga iz numeričke analize (matematike).

Samo da naglasak nije na nekom programskom jeziku ili alatu!

Korisni linkovi

Službena web stranica kolegija je:

`http://web.math.hr/nastava/unm/`

"User's guide for everything" — Wikipedia:

`http://en.wikipedia.org/`

Korisni linkovi — nastavak

Na molbu Sanje Singer i Vedrana Novakovića, za goste je otvorena i web stranica kolegija Matematika 3 i 4 na FSB-u.

Tamo možete naći dodatne materijale za neke dijelove NM,

- posebno — vježbe i riješene zadatke.

Predavanja su "malo nježnija" od naših. Početna stranica je

`http://e-ucenje.fsb.hr/`

Zatim potražite "Katedra za matematiku" i onda:

- odete (kliknete) na kolegije Matematika 3 i 4,
- kliknete na gumb "Prijava kao gost",
- na stranici potražite blok 3 "Numerička matematika".

Iskoristite! Naravno, smijete pogledati i ostalo!

Demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima čak tri demonstratora:

- Mario Berljafa
- Anastasia Kruchinina
- Melkior Ornik

Kroz neko vrijeme, kad se raspored ustabili,

- za upute za dogovor i termine,
- pogledajte oglase na oglasnoj ploči ili na webu kolegija.

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom koji dan ranije!

Napomena uz kolokvije

Kolokviji iz prošlih godina "vise" na webu kolegija, na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/kolokviji.php`

Pogledajte ih unaprijed, isplati se!

Napomena: Očekujte da će

- "teorija" nositi još više bodova.

Nekoliko dobrih razloga za to:

- Relativno efikasna zamjena za obavezni "usmeni" ispit (zamislite da ga ima …).
- Smanjuje se negativni efekt "glupih" grešaka u računanju (kuckanje po kalkusu),
- a stimulira razumijevanje teorije s predavanja.

Napomena uz vježbe i predavanja

Na kraju, zaboravite na “famu” da se

- NM polaže isključivo vježbama,
- pa na predavanja ne treba ni dolaziti.

Da bi to “prošlo”, na kolokvijima morate

- izračunati sve što treba — i to bez grešaka.

Možda je lakše znati ponešto “teorije”.

Usput, predavanja sadrže i hrpu riješenih zadataka.
Hm, ... znam što sad slijedi:

- predavanja su na webu — to je dodatni razlog da na njih ne treba dolaziti!

Kako hoćete ... neću popisivati “za bodove”!

Materijali na webu i “živa” nastava

Međutim, najkorisnija stvar na predavanjima je

- ono što onako “usput” ispričam,
- a ne piše na folijama (slajdovima).

Naravno, i to da me se može prekinuti i ponešto pitati!

Materijali na webu imaju sasvim drugu svrhu.

- Ne trebate bjesomučno pisati sve što kažem,
- najveći dio već piše!

Savjet = “uputstvo za uporabu” tih materijala:

- prije predavanja, pogledajte i isprintajte ih — zgodno je 4 ili 6 slajdova po stranici, kako vam paše,
- a dodatne bilješke pišite na tim papirima.

Programski paketi, biblioteke i sl.

A programska podrška? Ima svega:

- Mathematica, Matlab, BLAS, LAPACK, ...

Moderni software "zna" svašta

- računanje — numeričko i simboličko, vizualizacija, itd.

Međutim, to namjerno nisam spominjao! Da se razumijemo,

- dozvoljeno je koristiti, ako znate, ali ...

Numerička matematika nije mjesto za "kurs" iz korištenja raznih programskih paketa, biblioteka i sl.

- Prvo treba naučiti matematiku
- i vidjeti ponešto primjera (nije bitno kako su nastali).

Onda ste "zreli" za dalje.

Programski paketi, biblioteke i sl. — nastavak

Ako vam numerika ikad zatreba u životu,

- na vama će biti odgovornost za primjenu stvari.

Morate prvo znati

- što radite, i što se može dogoditi s rezultatima,

pa tek onda kako to realizirati

- koji paket/biblioteku koristiti, koju metodu/rutinu koristiti (obično ih je nekoliko, za istu ili sličnu stvar), itd.

Čuvajte se "crnih kutija" koje "znaju sve".

- Nekritička primjena bilo čega — i može biti BUUUUM!

Rijetko ćete baš pisati neki numerički kôd. Ali, da znate,

- to je posao za dobro školovane matematičare!

Ima li pitanja?

Slušam . . .

Numerička matematika

Problemi numeričke matematike

U matematici postoji niz problema koje

- ne znamo ili ne možemo egzaktno riješiti,

tj. prisiljeni smo tražiti približno rješenje.

Neki klasični "zadaci" u numeričkom računanju su:

- rješavanje sustava linearnih i nelinearnih jednadžbi,
- računanje integrala,
- računanje aproksimacije neke zadane funkcije (zamjena podataka nekom funkcijom),
- minimizacija (maksimizacija) zadane funkcije, uz eventualna ograničenja (obično, u domeni),
- rješavanje diferencijalnih i integralnih jednadžbi ...

Problemi numeričke matematike (nastavak)

Neke probleme čak znamo egzaktno riješiti (bar u principu),

- poput sustava linearnih jednadžbi (ponoviti LA1),

no to predugo traje, pa koristimo računala.

Međutim, tada imamo dodatni problem, jer

- računala ne računaju egzaktno, već približno!

Oprez, tada ni osnovne aritmetičke operacije nisu egzaktne.

Dakle, ključni pojam u numerici je

- približna vrijednost, odnosno, greška.

Ciljevi numeričke matematike

U skladu s tim, osnovni zadatak numeričke matematike je naći (dati) odgovore na sljedeća pitanja:

- kako riješiti neki problem — metoda,
- koliko je "dobro" izračunato rješenje — točnost, ocjena greške.

Malo preciznije, za svaku od navedenih klasa problema, treba proučiti sljedeće "teme" — potprobleme:

1. Uvjetovanost problema — osjetljivost problema na greške, prvenstveno u početnim podacima (tzv. teorija pertubacije ili smetnje — vezana uz sam problem).
2. Konstrukcija standardnih numeričkih metoda za rješavanje danog problema.

Ciljevi numeričke matematike (nastavak)

Kad jednom "stignemo" do numeričkih metoda, treba još proučiti sljedeće "teme" — potprobleme:

3. Stabilnost numeričkih metoda — njihova osjetljivost na "smetnje" problema.
4. Efikasnost pojedine numeričke metode — orijentirano prema implementaciji na računalu:
   - broj računskih operacija i potreban memorijski prostor za rješavanje problema (= Složenost).
5. Točnost numeričkih metoda, u smislu neke "garancije" točnosti izračunatog rješenja.

Ilustracija ovih "potproblema" na primjerima — malo kasnije.

Greške

Greške

Pri numeričkom rješavanju nekog problema javljaju se različiti tipovi grešaka:

- greške modela — svođenje realnog problema na neki "matematički" problem,
- greške u ulaznim podacima (mjerenja i sl.),
- greške numeričkih metoda za rješavanje "matematičkog" problema,
- greške "približnog" računanja — obično su to
  - greške zaokruživanja u aritmetici računala.

Greške modela su "izvan" dosega numeričke matematike.

- Spadaju u fiziku, kemiju, biologiju, tehniku, ekonomiju, ...

Mjere za grešku

Oznake:

- prava vrijednost — x,
- izračunata ili približna vrijednost — $\hat{x}$.

Standardni naziv: $\hat{x}$ je aproksimacija za x.

Trenutno, nije bitno odakle (iz kojeg skupa) su x i $\hat{x}$.

- Zamislite da su to "obični" realni brojevi — $x, \hat{x} \in \mathbb{R}$.

Mjere za grešku (nastavak)

Apsolutna greška:

- mjeri udaljenost izračunate vrijednosti $\hat{x}$ obzirom na pravu vrijednost x.

Ako imamo vektorski prostor i normu, onda je

- udaljenost = norma razlike.

Dakle, apsolutna greška je definirana ovako:

$$E_{\mathrm{abs}}(x, \hat{x}) := |\hat{x} - x|.$$

Često se koristi i oznaka $\Delta x = \hat{x} - x$ (na pr. u analizi), pa je $E_{\mathrm{abs}}(x, \hat{x}) = |\Delta x|$.

Katkad se $\Delta x = \hat{x} - x$ zove "prava" greška (predznak bitan).

Mjere za grešku (nastavak)

Primjer. Dojam o "veličini" greške:

- ako smo umjesto 1 izračunali 2, to nam se čini lošije nego
- ako smo umjesto 100 izračunali 101.

Relativna greška:

- mjeri relativnu točnost aproksimacije $\hat{x}$ obzirom na veličinu broja x,
- na pr. koliko se vodećih znamenki brojeva x i $\hat{x}$ podudara.

Relativna greška definirana je za $x \neq 0$,

$$E_{\mathrm{rel}}(x, \hat{x}) := \frac{|\hat{x} - x|}{|x|}.$$

Često se koristi i oznaka δ_x. Katkad se u nazivniku javlja $|\hat{x}|$.

Mjere za grešku (nastavak)

Ideja relativne greške: ako $\hat{x}$ napišemo kao $\hat{x} = x(1+\rho)$, onda je njegova relativna greška

$$E_{\mathrm{rel}}(x, \hat{x}) := |\rho|.$$

Dakle, relativna greška mjeri

- koliko se faktor $(1+\rho)$ apsolutno razlikuje od 1.

Sad možemo detaljnije opisati one četiri vrste grešaka:

- greške modela,
- greške u ulaznim podacima (mjerenjima),
- greške metoda za rješavanje modela,
- greške aritmetike računala.

Greške modela

Greške modela mogu nastati:

- zbog zanemarivanja utjecaja nekih sila,
  - na primjer, zanemarivanje utjecaja otpora zraka ili trenja (v. primjer),
- zbog zamjene kompliciranog modela jednostavnijim,
  - na primjer, sustavi nelinearnih običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se lineariziraju, da bi se dobilo barem približno rješenje,
- zbog upotrebe modela u graničnim slučajevima,
  - na primjer, kod matematičkog njihala se $\sin x$ aproksimira s x, što vrijedi samo za male kutove.

Modelni primjer — Problem gađanja

Primjer. Imamo top (ili haubicu) u nekoj točki — recimo, ishodištu.

- Treba pogoditi cilj koji se nalazi u nekoj drugoj točki.

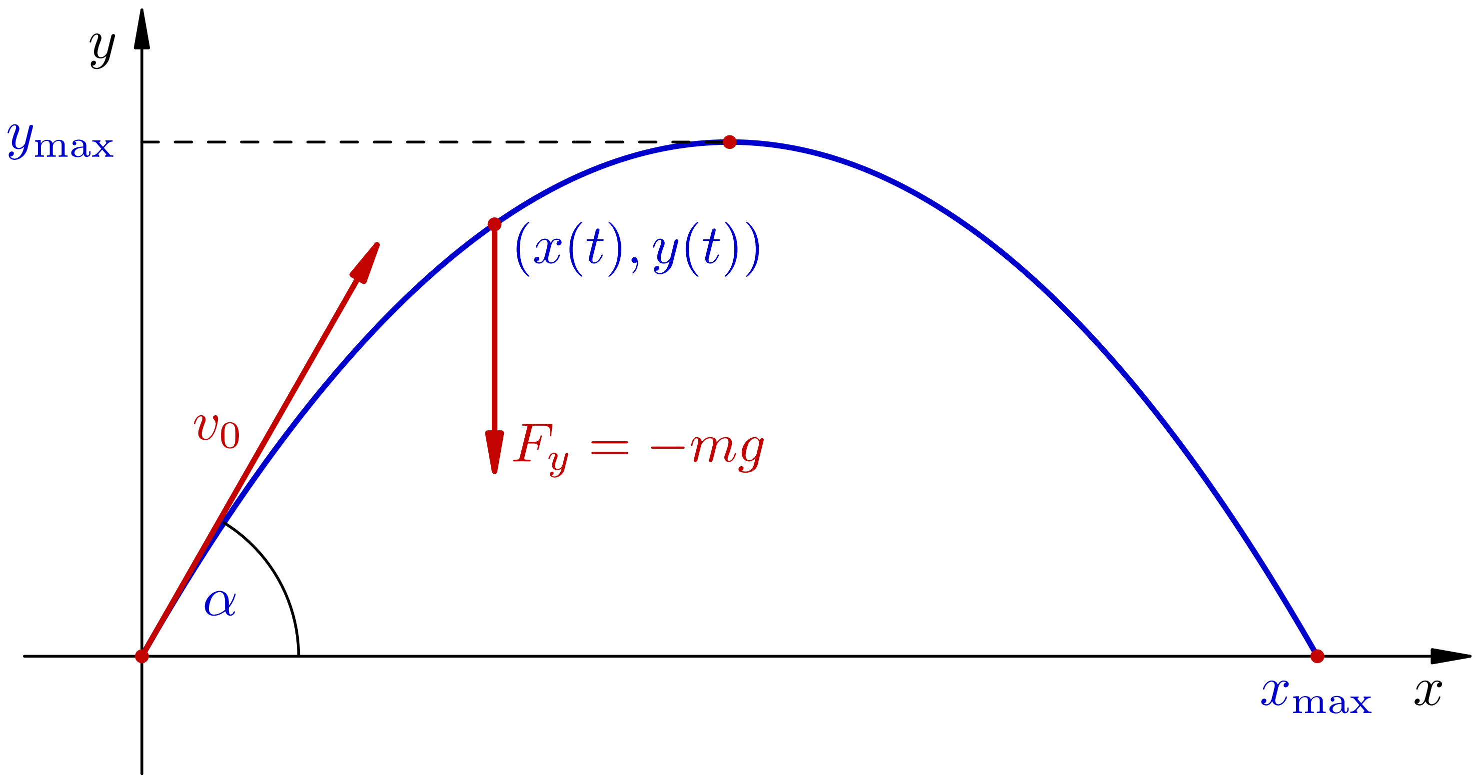
Najjednostavniji model za ovaj problem je poznati kosi hitac. Projektil ispaljujemo prema cilju,

- nekom početnom brzinom v_0 (vektor),
- pod nekim kutem α, obzirom na horizontalnu ravninu.

Slikica (v. sljedeću stranicu)!

Cijela stvar se odvija pod utjecajem gravitacije (prema dolje). Ako zanemarimo otpor zraka, dobijemo "obični" kosi hitac.

Modelni primjer — Slika za kosi hitac



Uzmimo da se cilj nalazi na "istoj visini" — u točki $(x_{\max}, 0)$.

- Udaljenost $x_{\max}$ znamo, a traži se početni kut α.

Modelni primjer — Jednadžba

Osnovna jednadžba je

$$F = ma,$$

gdje je m masa projektila (neće nam trebati na početku), a

- a je akceleracija — vektor u okomitoj (x, y)-ravnini,
- F je sila gravitacije, prema dolje, tj. $F_x = 0$ i $F_y = -mg$.

Gornja jednadžba je diferencijalna jednadžba drugog reda u vremenu. Ako je $(x(t), y(t))$ položaj projektila u danom trenutku, jednadžba ima oblik po komponentama:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = F_y.$$

Akceleracija je druga derivacija položaja.

Modelni primjer — Rješenje jednadžbe

Neka je projektil ispaljen u trenutku $t_0 = 0$.

Nakon integracije, za brzinu v = prva derivacija položaja, imamo jednadžbu

$$mv = F \cdot t + mv_0,$$

ili, po komponentama (masa se skrati)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Još jednom integriramo (početni položaj je $x_0 = 0$, $y_0 = 0$).
Za položaj projektila u trenutku t dobivamo:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \qquad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Reklo bi se — znamo sve!

Modelni primjer — Još neke relacije

Jednadžba "putanje" projektila u (x, y)-ravnini je

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \, x^2.$$

To je parabola, s otvorom nadolje, koja prolazi kroz ishodište.

Najveća visina projektila je

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g},$$

a maksimalni domet na horizontalnoj x-osi je

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Modelni primjer — Stvarnost

Nažalost, s ovim modelom nećemo ništa pogoditi.

- Fali otpor zraka, tlak pada s visinom, vjetrovi i sl.

Praksa:

- Koeficijent za otpor ovisi o obliku projektila — mjeri se.
- Izračunate tablice se eksperimentalno "upucavaju" i korigiraju.
- Primjena u praksi ide obratno — znam daljinu, tražim kut.

Na primjer, za obični kosi hitac, traženi kut je

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x_{\max}\, g}{v_0^2}.$$

Modelni primjer — Stvarni podaci

Primjer. Za ilustraciju, uzmimo podatke za pravu haubicu kalibra $155\,\mathrm{mm}$, model H155 M65, uz najjače 7. punjenje (maksimalna količina baruta u čahuri).

Početna brzina ispaljene granate je $v_0 = 564\,\mathrm{m/s}$.

Bez otpora zraka, maksimalni domet se postiže za kut $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ i iznosi

$$d_{\max} = \frac{564^2 \sin(\pi/2)}{9.81} \approx 32\,425.69\,\mathrm{m}.$$

Stvarni maksimalni domet postiže se za kut $\alpha = 45^\circ 10'$ i iznosi "samo"

$$d_{\max} = 14\,854\,\mathrm{m}.$$

Greške modela (nastavak)

Primjer. Među prvim primjenama jednog od prvih brzih paralelnih računala na svijetu (ASCI Blue Pacific) bilo je

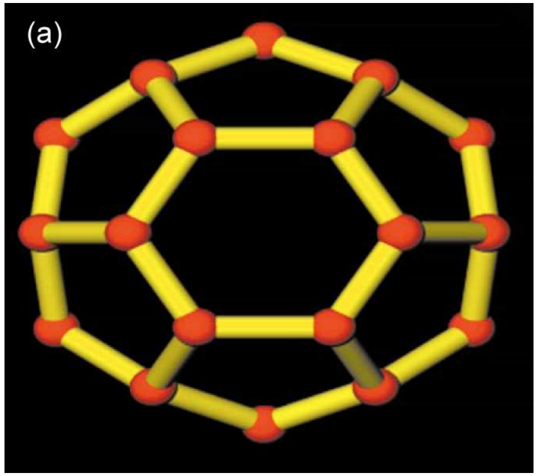
- određivanje trodimenzionalne strukture i elektronskog stanja ugljik-36 fulerena.

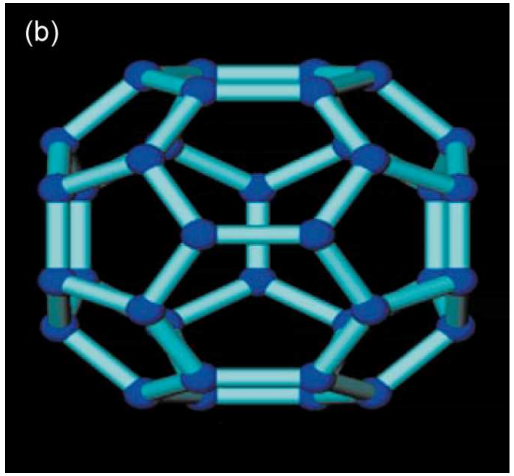
Primjena spoja je višestruka:

- supravodljivost na visokim temperaturama,
- precizno doziranje lijekova u stanice raka.

Greške modela (nastavak)

Prijašnja istraživanja kvantnih kemičara dala su dvije moguće strukture tog spoja.





Te dvije strukture imaju različita kemijska svojstva.

Greške modela (nastavak)

Stanje stvari:

- eksperimentalna mjerenja pokazivala su da je struktura (a) stabilnija,
- teoretičari su tvrdili da je stabilnija struktura (b).

Prijašnja računanja,

- zbog pojednostavljivanja i interpolacije,

kao odgovor davala su prednost "teoretskoj" strukturi.

Definitivan odgovor,

- proveden računanjem bez pojednostavljivanja,

pokazao je da je struktura (a) stabilnija.

Greške u ulaznim podacima

Greške u ulaznim podacima javljaju se zbog

- nemogućnosti ili besmislenosti točnog mjerenja (Heisenbergove relacije neodređenosti).
- Na primjer, tjelesna temperatura se obično mjeri na desetinku stupnja Celziusa točno. Pacijent je podjednako loše ako ima temperaturu 39.5° C ili 39.513462° C.

Bitno praktično pitanje:

- Mogu li male greške u ulaznim podacima bitno povećati grešku rezultata?

Nažalost MOGU!

- Takvi problemi zovu se loše uvjetovani problemi.

Greške u ulaznim podacima (nastavak)

Primjer. Zadana su dva sustava linearnih jednadžbi — recimo, umjesto ispravnih (prvih) koeficijanata, izmjerili smo druge:

$$\begin{aligned} 2x &+ 6y &= 8 \\ 2x &+ 6.0001y &= 8.0001, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 2x &+ 6y &= 8 \\ 2x &+ 5.99999y &= 8.00002. \end{aligned}$$

Samo druga jednadžba se “malo” promijenila.

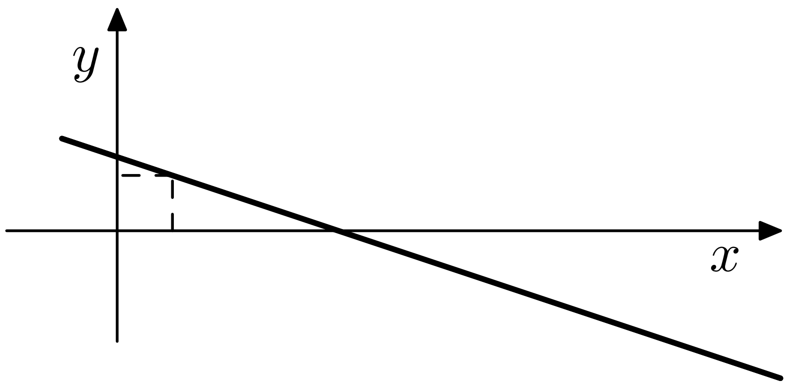
Perturbacije koeficijenata su reda veličine 10^{-4}.

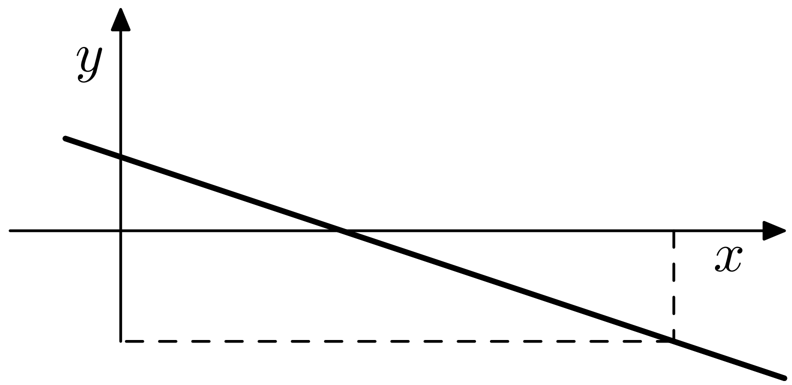
Je li se rezultat, također, promijenio za red veličine 10^{-4}?

Greške u ulaznim podacima (nastavak)

- Rješenje prvog problema: $x = 1$, $y = 1$.
- Rješenje drugog problema: $x = 10$, $y = -2$.

Grafovi presjecišta dva pravca za prvi i drugi sustav:





Koja dva pravca???

- U oba sustava, pravci su "skoro" paralelni, pa se njihovi grafovi ne razlikuju na slikama — i baš tu je problem!

Greške metoda za rješavanje problema

Najčešće nastaju kad se nešto beskonačno zamjenjuje nečim konačnim. Razlikujemo dvije kategorije:

- greške diskretizacije koje nastaju
  - zamjenom kontinuuma (neprebrojiv skup) konačnim diskretnim skupom točaka,
  - ili "beskonačno" malu veličinu h ili $\varepsilon \to 0$ zamijenjujemo nekim "konačno" malim brojem;
- greške odbacivanja koje nastaju
  - "rezanjem" beskonačnog niza ili reda na konačni niz ili sumu,

  tj. odbacujemo ostatak niza ili reda.

Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške diskretizacije:

- aproksimacija funkcije f na $[a, b]$, vrijednostima te funkcije na konačnom skupu točaka (tzv. mreži) $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$,
- aproksimacija derivacije funkcije f u nekoj točki x. Po definiciji je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

a za približnu vrijednost uzmemo dovoljno mali $h \neq 0$ i

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške odbacivanja:

- zaustavljanje iterativnih procesa nakon dovoljno velikog broja n iteracija (recimo, kod računanja nultočaka funkcije);
- zamjena beskonačne sume konačnom — kad greška postane dovoljno mala (recimo, kod sumiranja Taylorovih redova — v. sljedeći primjer).

Taylorov red, Taylorov polinom, ...

Za dovoljno glatku funkciju f, Taylorov red oko točke x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

možemo aproksimirati Taylorovim polinomom p

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

pri čemu je $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ greška odbacivanja, a ξ neki broj između x_0 i x. $R_{n+1}(x)$ obično ocjenjujemo po apsolutnoj vrijednosti.

Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Primjer.

- Funkcije e^x i $\sin x$ imaju Taylorove redove oko točke 0 koji konvergiraju za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$.
- Zbrajanjem dovoljno mnogo članova tih redova, možemo, barem u principu, dobro aproksimirati vrijednosti funkcija e^x i $\sin x$.
- Traženi Taylorovi polinomi s istim brojem članova (ali ne istog stupnja) su

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Taylorov red, Taylorov polinom, ... (nastavak)

Za grešku odbacivanja trebaju nam derivacije:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \qquad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

pa su pripadne greške odbacivanja

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad R_{2n+3}(x) = \frac{\sin(\xi + \frac{2n+3}{2}\,\pi)x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

Pretpostavimo sada da je $x > 0$. Iz $\xi \leq x$ dobivamo

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad |R_{2n+3}(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Taylorov red, Taylorov polinom, . . . (nastavak)

Zbrojimo li članove reda sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti $\varepsilon > 0$, napravili smo grešku odbacivanja manju ili jednaku

$$\begin{cases} e^x \varepsilon, & \text{za } e^x, \\ \varepsilon, & \text{za } \sin x. \end{cases}$$

U prvom slučaju očekujemo

- malu relativnu grešku,

a u drugom slučaju očekujemo

- malu apsolutnu grešku.

Provjerimo to eksperimentalno — u aritmetici računala!

Red za eksponencijalnu funkciju, $x = 12\pi$

Za $x = 12\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 132 člana reda ($n = 131$)

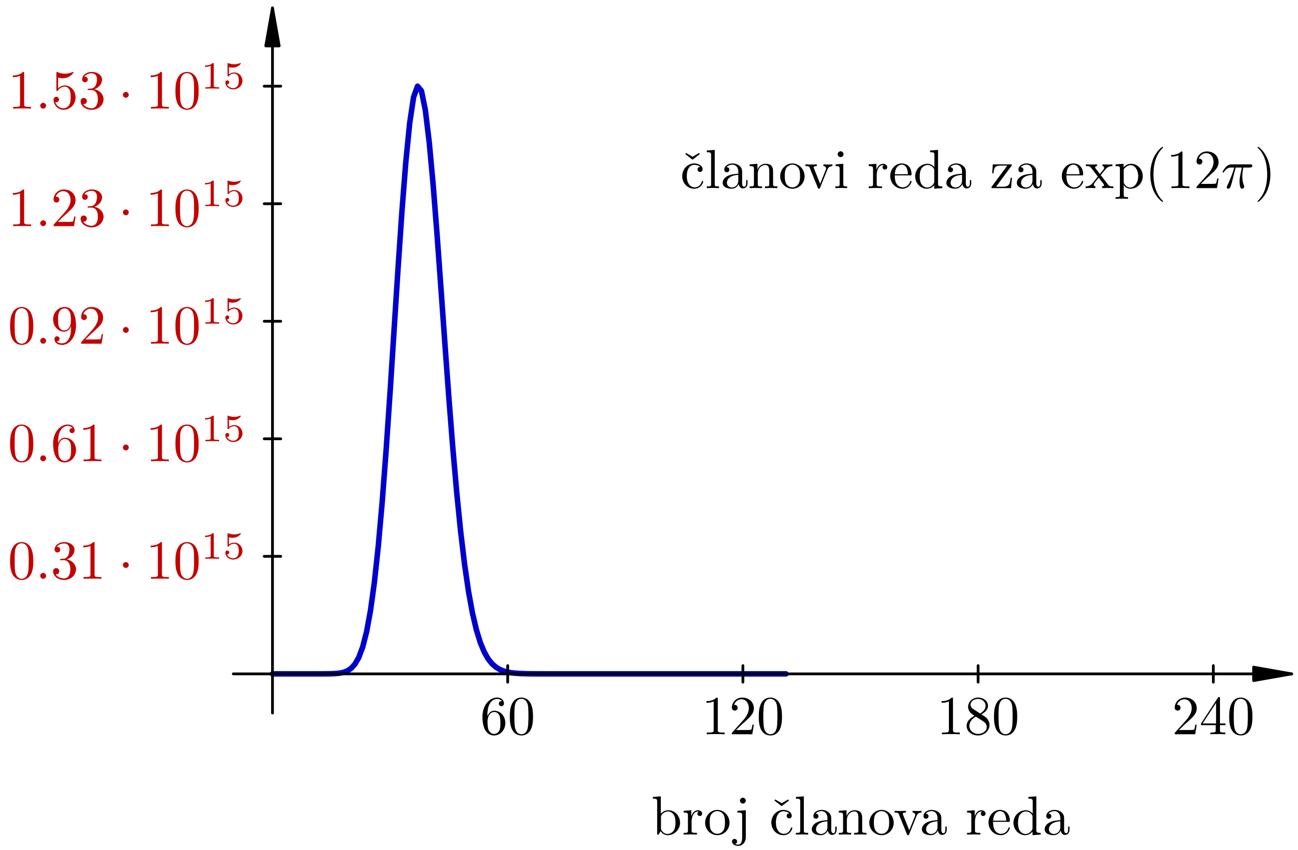
$$|\text{greška odbacivanja}| \le 2.5101 \cdot 10^{0}$$

$$|\text{maksimalni član}| = 1.5329 \cdot 10^{15} \quad (n = 37).$$

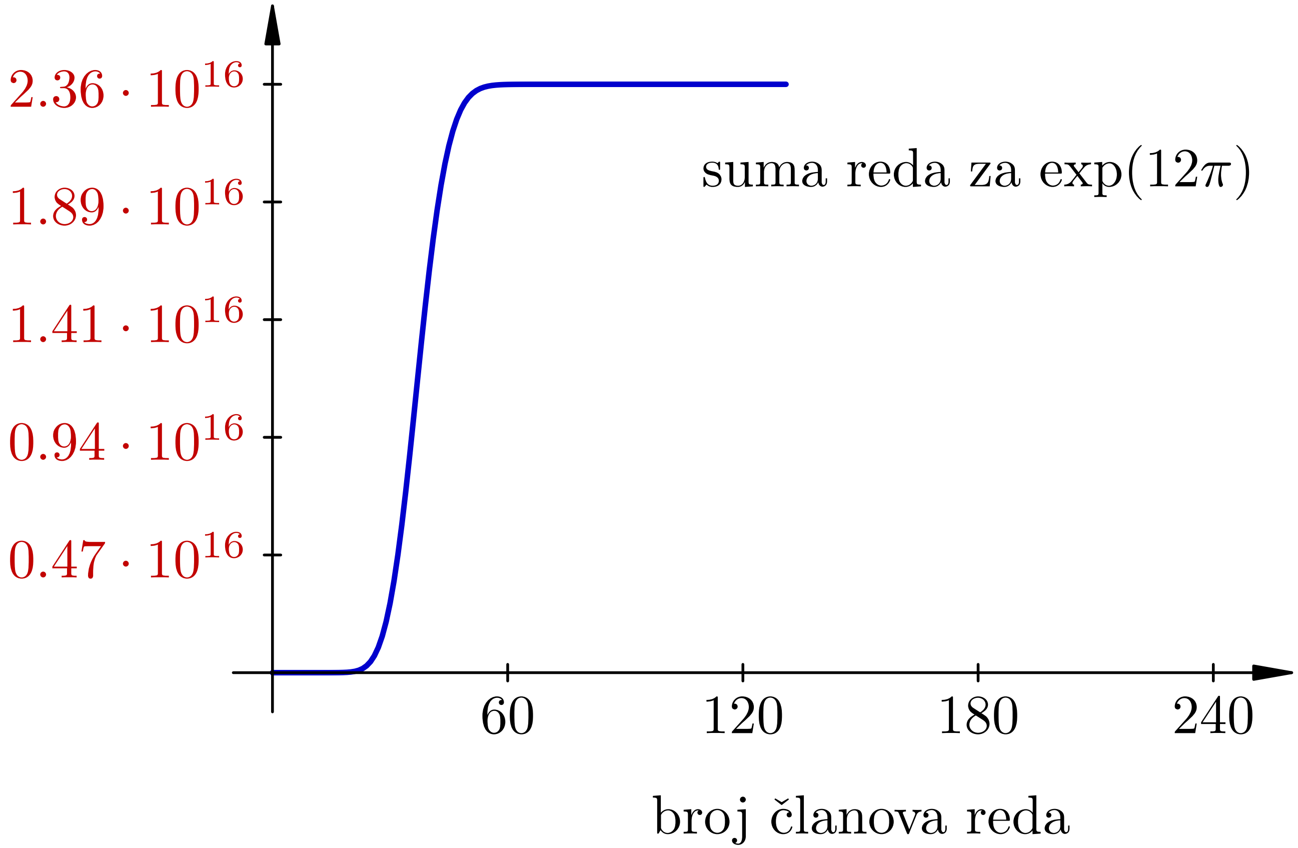
Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\exp(12\pi)_{\text{funkcija}} &= 2.357850396855819\mathbf{2} \cdot 10^{16} \\
\exp(12\pi)_{\text{Taylor}} &= 2.357850396855819\mathbf{6} \cdot 10^{16} \\
\text{prava greška} &= -4.000000000000000 \cdot 10^{0} \\
\text{relativna greška} &= 1.696460473206433\mathbf{5} \cdot 10^{-16}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\exp(12\pi)$



Suma reda za $\exp(12\pi)$



Red za eksponencijalnu funkciju, $x = 24\pi$

Za $x = 24\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 236 članova reda ($n = 235$)

$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 5.0445 \cdot 10^{16}$$

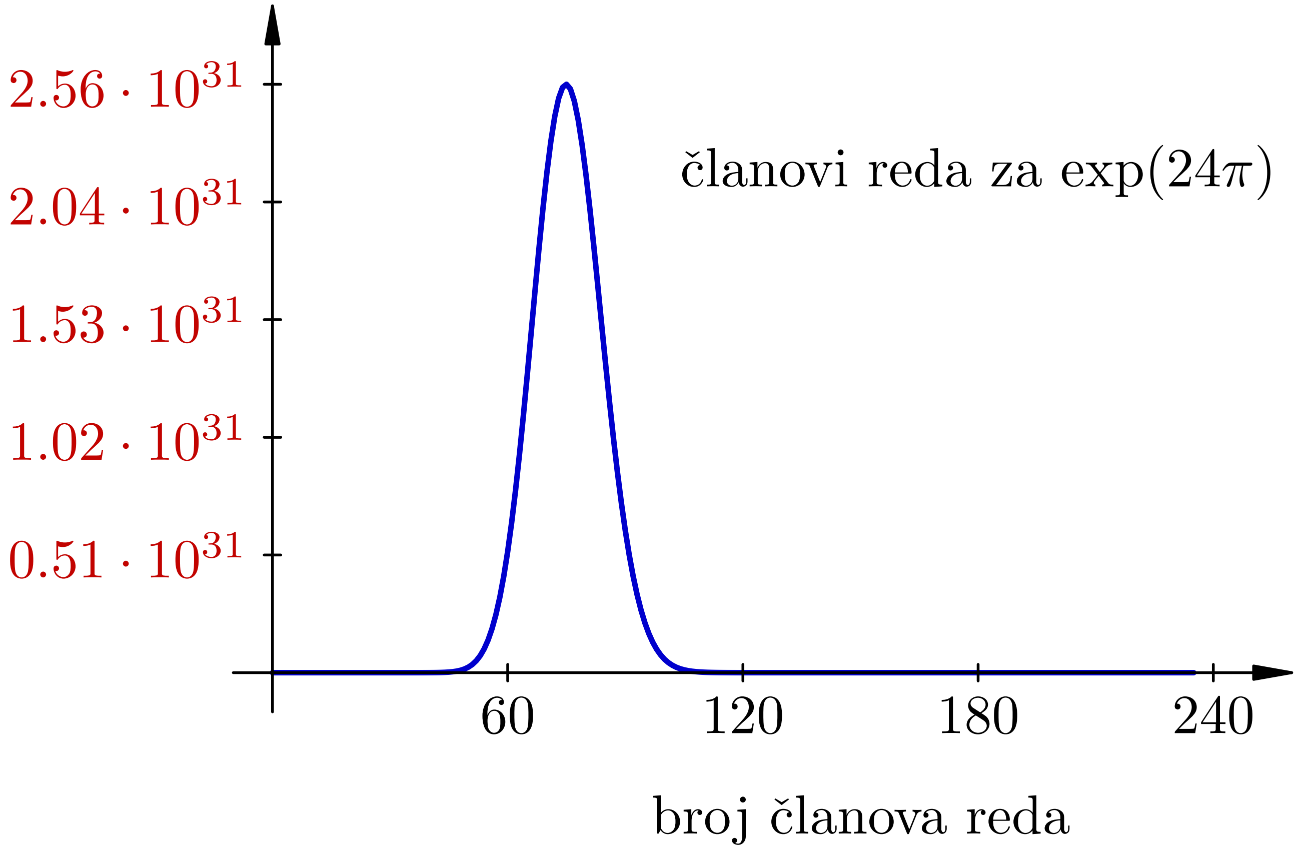
$$|\text{maksimalni član}| = 2.5555 \cdot 10^{31} \quad (n = 75).$$

Dobivamo:

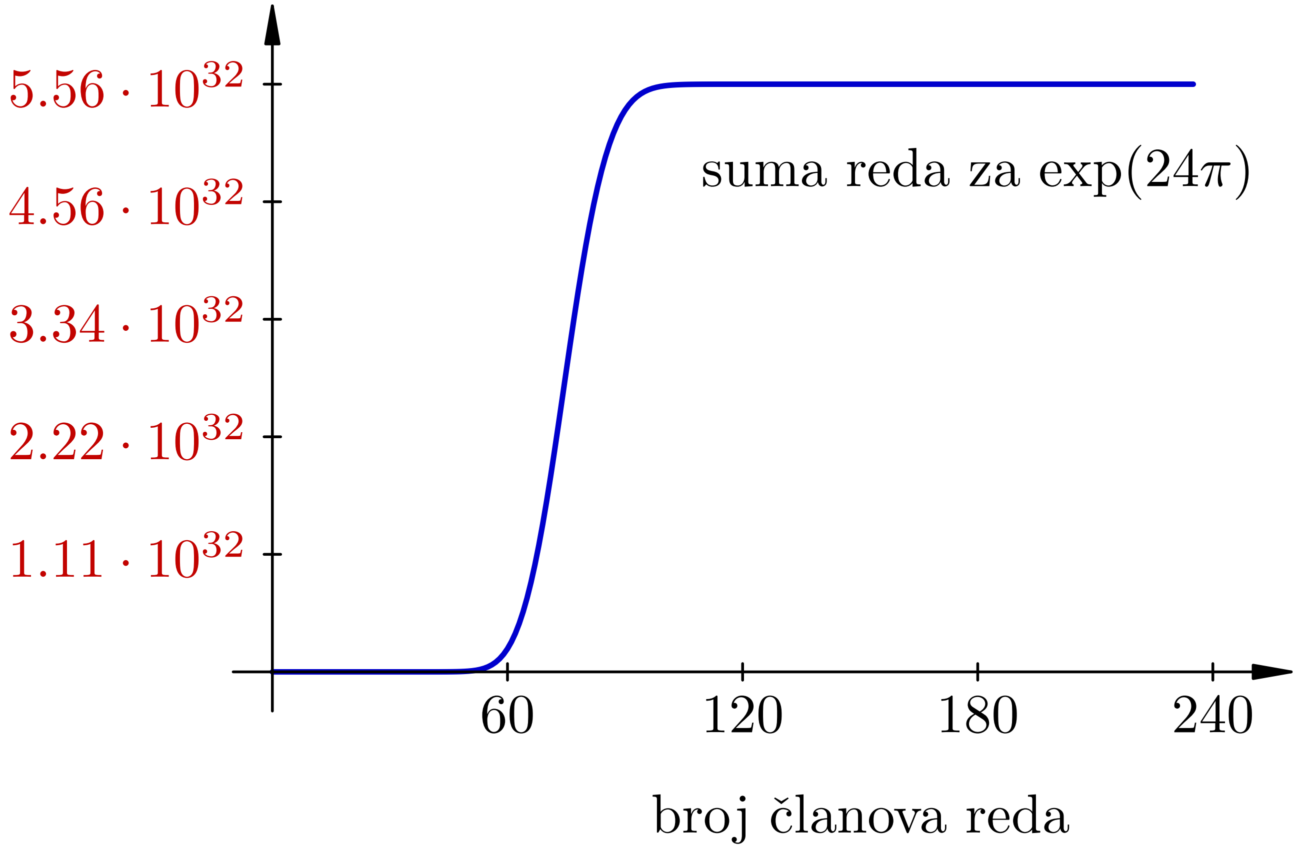
$$\begin{aligned}
\exp(24\pi)_{\text{funkcija}} &= 5.559458493953143\,7 \cdot 10^{32} \\
\exp(24\pi)_{\text{Taylor}} &= 5.559458493953144\,5 \cdot 10^{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{prava greška} &= -7.205759403792793\,6 \cdot 10^{16} \\
\text{relativna greška} &= 1.296126126605726\,4 \cdot 10^{-16}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\exp(24\pi)$



Suma reda za $\exp(24\pi)$



Red za funkciju sinus, $x = 12\pi$

Za $x = 12\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 66 članova reda ($n = 131$)

$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 3.0175 \cdot 10^{-17}$$

$$|\text{maksimalni član}| = 1.5329 \cdot 10^{15} \quad (n = 37).$$

Dobivamo:

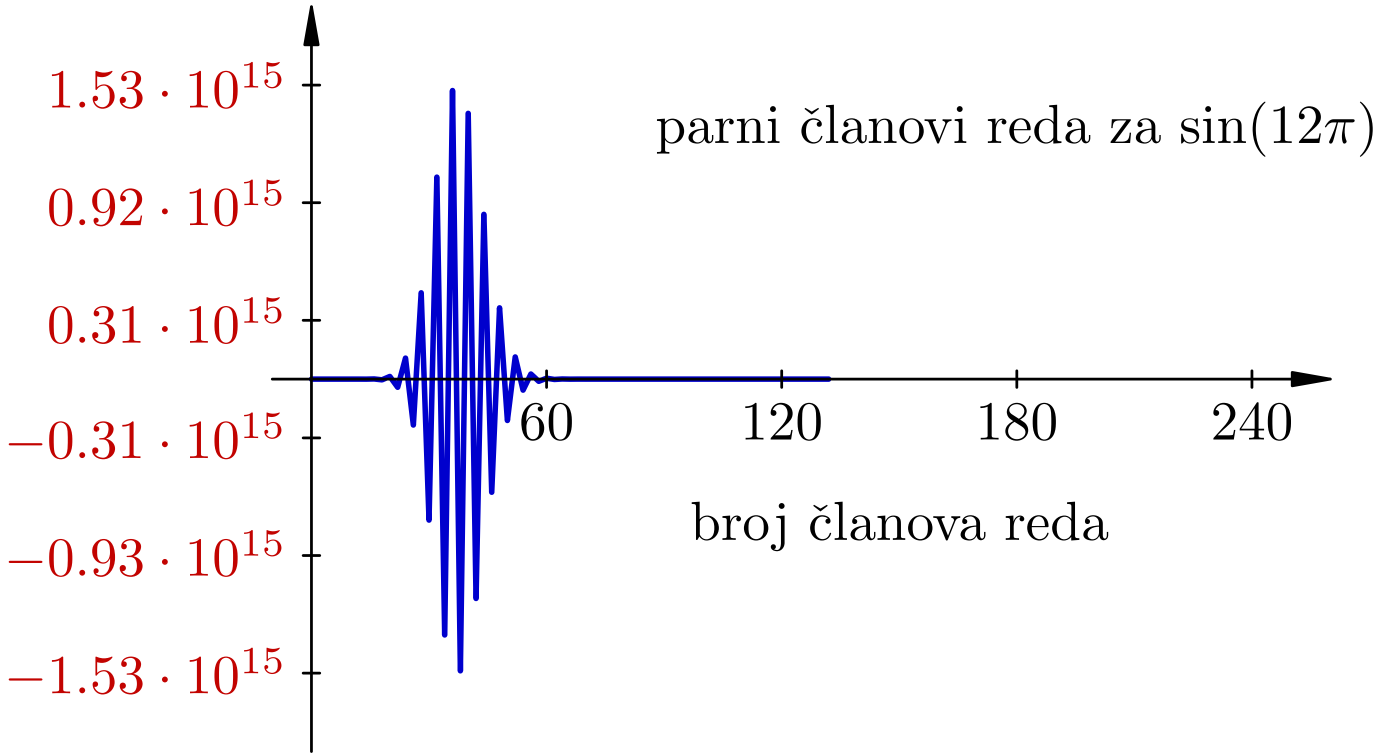
$$\sin(12\pi)_{\text{funkcija}} = -1.469527624586852 7\cdot 10^{-15}$$

$$\sin(12\pi)_{\text{Taylor}} = -4.138163210734445 4\cdot 10^{-2}$$

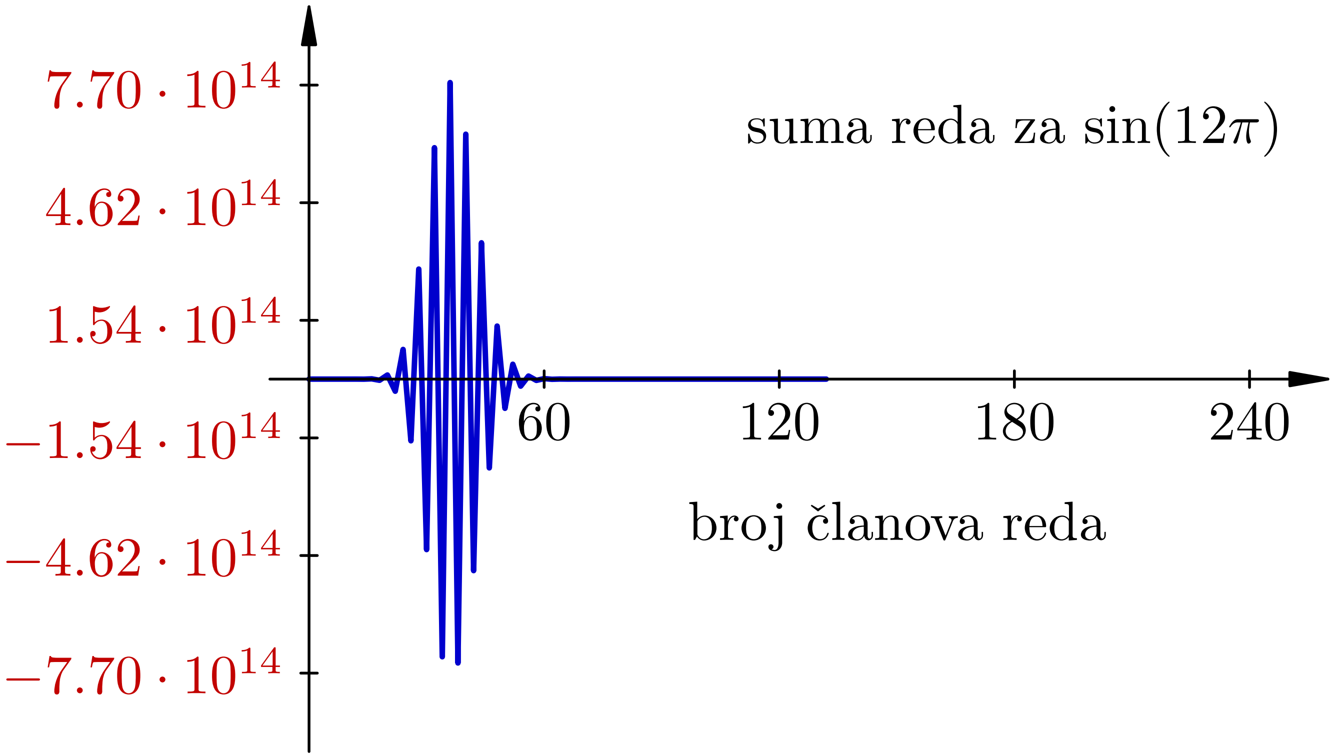
$$\text{prava greška} = \quad 4.138163210734298 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{relativna greška} = \quad 2.815981912485458 6 \cdot 10^{13}.$$

Članovi reda za $\sin(12\pi)$



Suma reda za $\sin(12\pi)$



Red za funkciju sinus, $x = 24\pi$

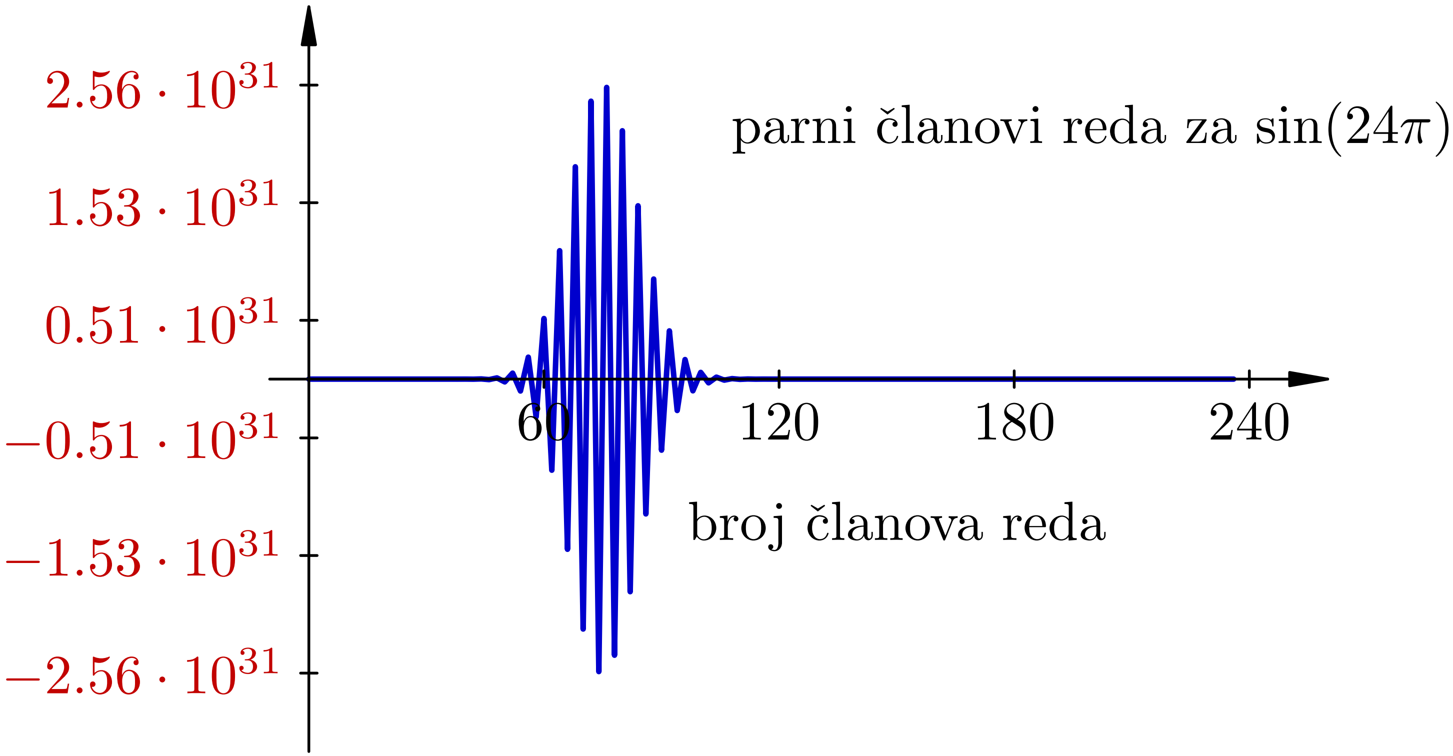
Za $x = 24\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 118 članova reda ($n = 235$)

$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 2.8867 \cdot 10^{-17}$$
$$|\text{maksimalni član}| = 2.5555 \cdot 10^{31} \quad (n = 75).$$

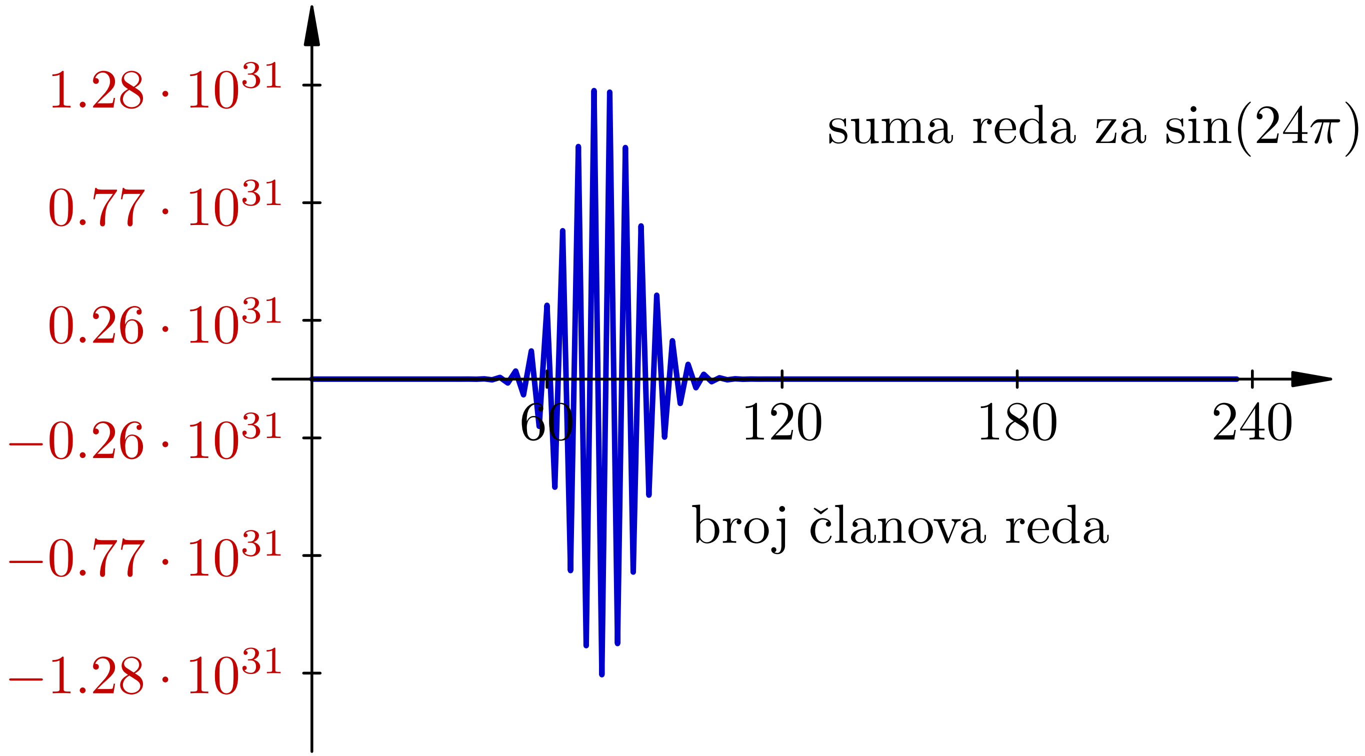
Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sin(24\pi)_{\text{funkcija}} &= -2.9390552491737054 \cdot 10^{-15} \\
\sin(24\pi)_{\text{Taylor}} &= 3.6199983145905898 \cdot 10^{13} \\
\text{prava greška} &= -3.6199983145905898 \cdot 10^{13} \\
\text{relativna greška} &= 1.2316877389794990 \cdot 10^{28}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\sin(24\pi)$



Suma reda za $\sin(24\pi)$



Prikaz brojeva u računalu i greške zaokruživanja

Tipovi brojeva u računalu

U računalu postoje dva bitno različita tipa brojeva:

- cijeli brojevi
- realni brojevi.

Oba skupa su konačni podskupovi odgovarajućih skupova $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$ u matematici.

Kao baza za prikaz oba tipa koristi se baza 2.

Cijeli brojevi u računalu

Cijeli brojevi bez predznaka — sažetak

Ako imamo n bitova za prikaz brojeva, onda je skup svih prikazivih cijelih brojeva bez predznaka jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 2^n - 2,\ 2^n - 1 \,\}.$$

Prikaz broja $B \in \mathbb{Z}_{2^n}$ dobiva se iz "proširenog" zapisa tog broja u bazi 2, s točno n binarnih znamenki.

Aritmetika cijelih brojeva bez predznaka je modularna aritmetika u prstenu $(\mathbb{Z}_{2^n}, \oplus_{2^n}, \odot_{2^n})$:

- operacije $+$, $-$ i $\cdot$ daju cjelobrojni rezultat modulo 2^n,
- operacije cjelobrojnog dijeljenja s ostatkom div i mod daju iste rezultate kao da dijelimo u $\mathbb{Z}$ (ili $\mathbb{N}_0$).

Cijeli brojevi s predznakom — sažetak

Ako imamo n bitova za prikaz brojeva, onda je skup svih prikazivih cijelih brojeva s predznakom jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n}^{-} = \{ -2^{n-1},\ -2^{n-1}+1,\ \ldots\ ,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 2^{n-1}-2,\ 2^{n-1}-1 \}.$$

Za prikaz broja $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^{-}$ vrijedi:

- nenegativni brojevi $B = 0, \ldots, 2^{n-1}-1$ imaju isti prikaz kao i bez predznaka,
- negativni brojevi $B = -1, \ldots, -2^{n-1}$ imaju isti prikaz kao i brojevi $2^n + B$ bez predznaka.

Cijeli brojevi s predznakom — sažetak

Osim toga, prikaz suprotnog broja $-B$ dobivamo tako da

- komplementiramo prikaz samog broja B i
- dodamo 1 modulo 2^n.

Aritmetika cijelih brojeva s predznakom je modularna aritmetika modulo 2^n na sustavu ostataka $\mathbb{Z}_{2^n}^-$.

- To vrijedi za operacije $+$, $-$ i $\cdot$.

Operacije cjelobrojnog dijeljenja s ostatkom div i mod daju iste rezultate kao da dijelimo u $\mathbb{Z}$,

- ali, za svaki slučaj, treba provjeriti kako se dobiva proširenje ovih operacija s $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$,
- tj. radi li compiler prema C99 standardu.

Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

Eksperiment:

- test–program `divmod.c` (pokaži!),
- Intel C++ compiler, `gcc` compiler (Code::Blocks).

Rezultati $q = a \text{ div } b$ i $r = a \bmod b$ za $a = \pm 5$, $b = \pm 3$:

a	b	q	r
5	3	1	2
-5	3	-1	-2
5	-3	-1	2
-5	-3	1	-2

Operacije div i mod interpretiramo na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Veza cjelobrojnog i običnog dijeljenja (standard)

Ključ za interpretaciju:

- kvocijent se uvijek “zaokružuje” prema nuli,

$$q = \operatorname{sign}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left\lfloor \left|\frac{a}{b}\right| \right\rfloor,$$

- ostatak ima isti predznak kao i a.

$$r = \operatorname{sign}(a) \cdot (|a| \bmod |b|).$$

Za ostatak r ovdje vrijedi:

- ako je $a \geq 0$, onda je $r \in \mathbb{Z}_b$, tj. $0 \leq r < |b|$,
- ako je $a < 0$, onda je $r \in -\mathbb{Z}_b$, tj. $-|b| < r \leq 0$.

Ovo je “Euklidov teorem” za cijele brojeve u C-u!

Dijeljenje cijelih brojeva (standard)

Novi C99 standard propisuje ovakav izbor ostataka, tj.

- ovakvo ponašanje cjelobrojnog dijeljenja za cijele brojeve s predznakom.

Zato zaboravite raniju definiciju, iako se "novi" mod ponaša drugačije nego u matematici.

Prednosti ovakve definicije operacija div i mod na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

- bez obzira na predznake od a i b, dobivamo
- iste apsolutne vrijednosti kvocijenta q i ostatka r,

tj. samo predznaci od q i r ovise o predznacima od a i b.

Ovo je i najčešća realizacija cjelobrojnog dijeljenja u praksi (misli se i na ostale programske jezike).

Cijeli brojevi u C-u — sažetak

U programskom jeziku C:

- cijelim brojevima bez predznaka odgovara tip koji se zove `unsigned int`, ili, skraćeno, `unsigned`,
- cijelim brojevima s predznakom odgovara tip koji se zove `int`.

Ovi tipovi postoje u nekoliko raznih veličina:

- standardna, `short`, `long`, a katkad i druge (`long long`).

Razlike su u broju bitova n predviđenih za prikaz.

- Zapis konstanti (vrijednost, navođenje tipa).
- Zapis operacija $+$, $-$ i $\cdot$ znakovima `+`, `-` i `*`.
- Zapis operacija div i mod znakovima `/` i `%`.

Cijeli brojevi u C-u — sažetak

U programskom jeziku C:

- cijelim brojevima s predznakom odgovara tip koji se zove `int`.

Ovaj tip postoje u nekoliko raznih veličina, a razlike su u broju bitova n predviđenih za prikaz.

Na 32-bitnim arhitekturama računala imamo sljedeće tipove:

- standardni `int` ($n = 32$),
- `short` ($n = 16$),
- `long` ($n = 32$), tj. isto kao standardni `int`,
- a katkad i druge, poput `long long` ($n = 64$).

Zapis konstanti (vrijednost, navođenje tipa) — sljedeći put.

Aritmetika cijelih brojeva: klasične greške

Cijeli brojevi — klasične greške

Primjer. Računanje $n!$ u cjelobrojnoj aritmetici.

Za prirodni broj $n \in \mathbb{N}$, funkciju faktorijela definiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ n! &= n \cdot (n-1)!, \quad \text{za} \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Napišimo C program koji računa broj $50!$ u cjelobrojnoj aritmetici (tip `int`).

Cijeli brojevi — klasične greške (nastavak)

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    int i, f50 = 1;  /* n = 32 za int */

    for (i = 2; i <= 50; ++i)
        f50 *= i;

    printf(" f50 = %d\n", f50);  /* f50 = 0 */

    return 0;
}
```

Izlaz programa je: `f50 = 0`. Zašto?

Prikaz realnih brojeva sažetak

Realni brojevi

Skup svih realnih brojeva prikazivih u računalu je omeđen, a parametriziramo ga duljinom mantise i eksponenta i označavamo s $\mathbb{R}(t, s)$.

mantisa (signifikand)				
$1.$	m_{-1}	m_{-2}	$\cdots$	m_{-t}

eksponent (karakteristika)				
e_{s-1}	e_{s-2}	$\cdots$	e_1	e_0

Ne može se svaki realni broj egzaktno spremiti u računalo.

Ako je broj $x \in \mathbb{R}$ unutar prikazivog raspona i

$$x = \pm\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} 2^{-k}\right) 2^e$$

i mantisa broja ima više od t znamenki, ...

Realni brojevi

... bit će spremljena aproksimacija tog broja $f\ell(x) \in \mathbb{R}(t, s)$ koja se može prikazati kao

$$f\ell(x) = \pm\left(1 + \sum_{k=1}^{t} b_{-k}^{*} 2^{-k}\right) 2^{e^*}.$$

Slično kao kod decimalne aritmetike

- ako je prva odbačena znamenka 1, broj zaokružujemo nagore,
- a ako je 0, nadolje.

Time smo napravili apsolutnu grešku manju ili jednaku od "pola zadnjeg prikazivog bita", tj. 2^{-t-1+e}.

Relativna greška zaokruživanja

Gledajući relativno, greška je manja ili jednaka

$$\left|\frac{x - f\ell(x)}{x}\right| \leq \frac{2^{-t-1+e}}{2^0 \cdot 2^e} = 2^{-t-1},$$

tj. imamo vrlo malu relativnu grešku.

Veličinu 2^{-t-1} zovemo jedinična greška zaokruživanja (engl. unit roundoff) i uobičajeno označavamo s u.

Za $x \in \mathbb{R}$ unutar prikazivog raspona, umjesto x sprema se zaokruženi broj $f\ell(x) \in \mathbb{R}(t, s)$ i vrijedi

$$f\ell(x) = (1 + \varepsilon)x, \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je ε relativna greška napravljena tim zaokruživanjem.

Prikaz “realnih” brojeva u računalu — IEEE standard

Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE–754

Stvarni prikaz realnih brojeva ima tri dijela i svaki od njih ima svoju duljinu — broj bitova predviđenih za prikaz tog dijela.

- predznak s — uvijek zauzima jedan bit, i to najviši;
- karakteristika k — zauzima sljedećih w bitova (w = engl. "width", širina pomaknutog eksponenta);
- signifikand m — zauzima sljedećih t bitova (t = engl. "trailing", završni ili razlomljeni dio od m).

Po starom standardu — ako se pamti vodeći (cjelobrojni) bit mantise, on je prvi (vodeći) u m, a duljina je $t + 1$.

Još se koristi i standardna oznaka

- preciznost $p := t + 1$ — to je ukupni broj vodećih značajnih bitova cijele mantise.

Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE–754

Karakteristika k se interpretira kao cijeli broj bez predznaka, tako da je $k \in \{0, \ldots, 2^w - 1\}$. “Rubne” vrijednosti za k označavaju tzv. posebna stanja:

- $k = 0$ — nula i denormalizirani brojevi,
- $k = 2^w - 1$ — beskonačno i nije broj.

Sve ostale vrijednosti $k \in \{1, \ldots, 2^w - 2\}$ koriste se za prikaz normaliziranih brojeva različitih od nule.

Veza između karakteristike k i stvarnog eksponenta e je:

$$k = e + bias, \qquad bias = 2^{w-1} - 1.$$

Dakle, dozvoljeni eksponenti e moraju biti između

$$e_{\min} = -(2^{w-1} - 2) \quad \text{i} \quad e_{\max} = 2^{w-1} - 1.$$

Standardni tipovi realnih brojeva — IEEE–754

Novi standard IEEE–754 standard ima sljedeće tipove za prikaz realnih brojeva:

`ime tipa`	`binary32`	`binary64`	`binary128`
duljina u bitovima	32	64	128
$t =$	23	52	112
$w =$	8	11	15
$u = 2^{-p}$	2^{-24}	2^{-53}	2^{-113}
$u \approx$	$5.96 \cdot 10^{-8}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$9.63 \cdot 10^{-35}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 38}$	$10^{\pm 308}$	$10^{\pm 4932}$

Broj u je tzv. jedinična greška zaokruživanja (v. malo kasnije).

Najveći tip `binary128` još uvijek ne postoji u većini procesora.

Standardni tipovi realnih brojeva — extended

Većina PC procesora još uvijek ima posebni dio — tzv. FPU (engl. Floating–Point Unit). On stvarno koristi

- tip `extended` iz starog IEEE standarda, koji odgovara tipu `extended binary64` u novom IEEE–754 standardu.

Dio primjera koje ćete vidjeti napravljen je baš u tom tipu!

`ime tipa`	`extended`
duljina u bitovima	80
$t + 1 =$	$63 + 1$
$w =$	15
$u = 2^{-p}$	2^{-64}
$u \approx$	$5.42 \cdot 10^{-20}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 4932}$

Oznake

Oznake:

- Crveno — duljina odgovarajućeg polja u bitovima, bitove brojimo od 0, zdesna nalijevo (kao i obično),
- s — predznak: 0 za pozitivan broj, 1 za negativan broj,
- k — karakteristika,
- m — mantisa (signifikand).

1	w	t
s	k	m

- Najznačajniji bit u odgovarajućem polju je najljeviji, a najmanje značajan bit je najdesniji.

Stvarni prikaz tipa single (binary32)

“Najkraći” realni tip je tzv. realni broj jednostruke točnosti. U C-u se taj tip zove `float`. Savjet: ne koristiti u praksi!

On ima sljedeća svojstva:

- duljina: 4 byte-a (32 bita), podijeljen u tri polja.

1	8	23
s	k	m

- u mantisi se ne pamti vodeća jedinica ako je broj normaliziran,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-126, \ldots, 127\}$,
- karakteristika $k = e + 127$, tako da je $k \in \{1, \ldots, 254\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 255$ koriste se za “posebna stanja”.

Prikaz brojeva jednostruke točnosti — sažetak

IEEE tip single = `float` u C-u:

1	8	23
s	k	m

Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-127)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 255, \\ (-1)^s * 2^{(-126)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \texttt{Inf} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m = 0, \\ \texttt{NaN} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Stvarni prikaz tipa double (binary64)

"Srednji" realni tip je tzv. realni broj dvostruke točnosti.
U C-u se taj tip zove `double`. Savjet: njega treba koristiti!

On ima sljedeća svojstva:

- Duljina: 8 byte-a (64 bita), podijeljen u tri polja.

1	11	52
s	k	m

- u mantisi se ne pamti vodeća jedinica ako je broj normaliziran,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-1022, \ldots, 1023\}$,
- karakteristika $k = e + 1023$, tako da je $k \in \{1, \ldots, 2046\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 2047$ — "posebna stanja".

Prikaz brojeva dvostruke točnosti — sažetak

IEEE tip double = `double` u C-u:

1	11	52
s	k	m

Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-1023)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 2047, \\ (-1)^s * 2^{(-1022)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \texttt{Inf} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m = 0, \\ \texttt{NaN} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Tip extended

Stvarno računanje (na IA–32) se obično radi u "proširenoj" točnosti. U C-u je taj tip možda dohvatljiv kao `long double`.

On ima sljedeća svojstva:

- Duljina: 10 byte-a (80 bita), podijeljen u četiri polja.

1	15	1	63
s	k	i	m

- u mantisi se pamti vodeći bit i mantise,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-16382, \ldots, 16383\}$,
- karakteristika $k = e + 16383$, tako da je $k \in \{1, \ldots, 32766\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 32767$ — "posebna stanja".

Prikaz brojeva proširene točnosti — sažetak

IEEE tip extended:

1	15	1	63
s	k	i	m

Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-16383)} * (i.m) & \text{ako je } 0 \leq k < 32767, \\ (-1)^s * \texttt{Inf} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m = 0, \\ \texttt{NaN} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Uočite da prva mogućnost uključuje:

- $+0$, -0 i denormalizirane brojeve (za $k = 0$),

jer se pamti vodeći “cjelobrojni” bit i mantise.

Realna aritmetika računala (IEEE standard)

Realna aritmetika računala — standard

Realna aritmetika računala nije egzaktna!

Razlog:

- Rezultat svake operacije mora biti prikaziv,
- pa dolazi do zaokruživanja.

Standard IEEE–754 za realnu artimetiku računala propisuje da za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi

- ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva,
- tj. da izračunati rezultat ima malu relativnu grešku.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput $\sqrt{}$, ali ne vrijedi za sve funkcije (na pr. za cos i sin u okolini nule).

Realna aritmetika računala — zaokruživanje

Neka je $\circ$ bilo koja od aritmetičkih operacija $+$, $-$, $*$, $/$, i neka su x i y prikazivi operandi (drugih, ionako, nema u računalu).

- Ako su x i y u dozvoljenom, tj. normaliziranom rasponu,
- i ako se egzaktni rezultat $x \circ y$, također, nalazi u normaliziranom rasponu (ne mora biti prikaziv),

za računalom izračunati (prikazivi) rezultat $f\ell(x \circ y)$ onda vrijedi

$$f\ell(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je u jedinična greška zaokruživanja za dani tip brojeva. Ova ocjena odgovara zaokruživanju egzaktnog rezultata!

Prava relativna greška ε ovisi o x, y, operaciji $\circ$, i stvarnoj realizaciji aritmetike računala.

Posljedice zaokruživanja u realnoj aritmetici

Napomena. Bez pretpostavki o normaliziranom rasponu, prethodni rezultat ne vrijedi — greška može biti puno veća!

Zbog zaokruživanja, u realnoj aritmetici računala, nažalost,

- ne vrijede uobičajeni zakoni za aritmetičke operacije na skupu $\mathbb{R}$.

Na primjer, za aritmetičke operacije u računalu

- nema asocijativnosti zbrajanja i množenja,
- nema distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Dakle, poredak izvršavanja operacija je bitan!

Zapravo, jedino standardno pravilo koje vrijedi je

- komutativnost za zbrajanje i za množenje.

Širenje grešaka zaokruživanja

Širenje grešaka zaokruživanja

Vidimo da gotovo svaki izračunati rezultat ima neku grešku. Osim toga,

- zaokruživanje se vrši nakon svake pojedine operacije.

Najlakše je stvar zamišljati kao da zaokruživanje ide "na kraju" operacije, iako je ono "dio operacije".

Kad imamo puno aritmetičkih operacija (inače nam računalo ne treba), dolazi do tzv.

- akumulacije ili širenja grešaka zaokruživanja.

Malo pogrešni rezultati (možda već od čitanja), ulaze u operacije, koje opet malo griješe, i tako redom ...

- greške se "šire" kroz sve što računamo!

Opasne i bezopasne operacije — sažetak

Jedina opasna operacija — kad rezultat može imati veliku relativnu grešku, je

- oduzimanje bliskih brojeva,
- i to samo kad polazni operandi već imaju neku grešku (samo oduzimanje je tada, najčešće, egzaktno).

Ovaj fenomen zove se opasno ili katastrofalno kraćenje.

Sve ostale operacije su bezopasne — relativna greška rezultata ne raste pretjerano. Posebno,

- dijeljenje malim brojem nije opasno,
- osim kad je mali broj nastao (ranijim) kraćenjem.

Nažalost, u nekim knjigama piše suprotno — i pogrešno.

Ponavljanje i dodatak

Pogledajte dodatak ovom predavanju. Sadrži

- ponavljanje gradiva iz Prog1 o prikazu brojeva u računalu i greškama zaokruživanja,
- još poneke stvari o širenju grešaka prilikom aritmetičkih operacija.

Primjeri “grešaka” iz prakse

Promašaj raketa Patriot

U prvom Zaljevskom ratu, 25. veljače 1991. godine, američke rakete Patriot nisu uspjele oboriti iračku Scud raketu iznad Dhahrana u Saudijskoj Arabiji.

- Scud raketa je pukim slučajem pala na američku vojnu bazu — usmrtivši 28 i ranivši stotinjak ljudi.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Istraga otkriva sljedeće:

- Računalo koje je upravljalo Patriot raketama, vrijeme je brojilo u desetinkama sekunde proteklim od trenutka paljenja (uključivanja) sustava.
- Desetinka sekunde binarno

$$0.1_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

- To računalo prikazivalo je realne brojeve korištenjem nenormalizirane mantise duljine 23 bita.
- Spremanjem broja 0.1 u registar takvog računala radi se (apsolutna) greška $\approx 9.5 \cdot 10^{-8}$ (sekundi).

Ne izgleda puno . . . , a kamo li opasno.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Detalji:

- Računalo je bilo u pogonu 100 sati, pa je ukupna greška zaokruživanja bila (stalno se zbraja, svakih 0.1 sekundi)

$$100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 9.5 \cdot 10^{-8} = 0.34\,\mathrm{s}.$$

- Scud raketa putuje brzinom $\approx 1.6\,\mathrm{km/s}$, pa je “tražena” više od pola kilometra daleko od stvarnog položaja.
- Greška je uočena dva tjedna ranije, nakon 8 sati rada jednog drugog sustava. Modifikacija programa stigla je dan nakon nesreće.
- Posade sustava mogle su i dva tjedna ranije dobiti uputu “isključi/uključi računalo” svakih nekoliko sati — ali je nisu dobile.

Samouništenje Ariane 5

Raketa Ariane 5 lansirana 4. lipnja 1995. godine iz Kouroua (Francuska Gvajana).

- Nosila je u putanju oko Zemlje komunikacijske satelite vrijedne 500 milijuna USD.
- 37 sekundi nakon lansiranja izvršila je samouništenje.

Samouništenje Ariane 5 (nastavak)

Objašnjenje:

- U programu za vođenje rakete postojala je varijabla koja je registrirala (pamtila) horizontalnu brzinu rakete (stvarno, nije koristila ničemu).
- Greška je nastupila kad je program pokušao pretvoriti
  - preveliki 64-bitni realni broj
  - u 16-bitni cijeli broj.
- Računalo je javilo grešku, što je izazvalo samouništenje.
- Isti program bio je korišten u prijašnjoj sporijoj verziji Ariane 4, pa do katastrofe nije došlo.

Potonuće naftne platforme

Naftna platforma Sleipner A potonula je prilikom prvog sidrenja, 23. kolovoza 1991. godine u blizini Stavangera.

- Baza platforme su 24 betonske ćelije, od kojih su 4 produljene u šuplje stupove na kojima leži paluba.

Potonuće naftne platforme (nastavak)

Razlozi nesreće:

- Prilikom uronjavanja baze došlo je do pucanja veza među ćelijama (v. desnu sliku).
- Rušenje na dno mora je izazvalo potres jačine 3.0 stupnja po Richterovoj ljestvici i štetu od 700 milijuna USD.
- Greška je nastala u projektiranju, primjenom standardnog paketa programa, kad je upotrijebljena metoda konačnih elemenata s nedovoljnom točnošću.
- Proračun je dao naprezanja 47% manja od stvarnih.
- Točnijim proračunom utvrđeno je da su ćelije morale popustiti na dubini od 62 metra, a popustile su na 65 metara!