

Numerička matematika

9. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Metoda najmanjih kvadrata:
 - Ortogonalne familije funkcija, ortogonalni polinomi.
 - Primjeri ortogonalnih familija funkcija.
 - Svojstva ortogonalnih polinoma.
 - Tročlana homogena rekurzija.
 - Nultočke ortogonalnih polinoma.
- Računanje vrijednosti funkcija:
 - Polinomi i Hornerova shema.
 - Ortogonalne funkcije i generalizirana Hornerova shema.
 - Primjeri.
 - Razvoj po T_n i skoro minimaks aproksimacije.

Informacije

Rezultati prvog kolokvija — komentar:

- Općenito gledajući, rezultati su **dobri** :-)
- **Pohvala** svima koji imaju ≥ 40 bodova — ima ih čak **15**.
- Medjutim, za **neke** — moglo je i puno **bolje**.
- **Oni** koji imaju ≤ 20 bodova ozbiljno su “**ugroženi**”.
- Takvih ima **36**, od **120** pridošlih.

Kolokviji ispituju gradivo **cijelog** kolegija, a ne samo **vježbe!**

Konzultacije (službeno):

- samo za **NM**: **ponedjeljak u 13 sati** (iza predavanja),
- **petak, 12–14 sati**, ili — po dogovoru.

Informacije

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu **A2**.

- **Drugi** kolokvij: **ponedjeljak**, **28. 5.**, u **12** sati,
- **Popravni** kolokvij: **ponedjeljak**, **11. 6.**, u **12** sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

Ne zaboravite, “**žive**” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna **predavanja** od prošle **četiri** godine, a stizat će i **nova** (kako nastaju).

Skraćena verzija **skripte** — **1. dio** (prvih **7** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija **skripte** — **2. dio** (drugih **6** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima čak tri demonstratora:

- Mario Berljafa — termin: petak, 10–12, u Pr3, poželjna najava mailom,
- Anastasia Kruchinina — termin: ponedjeljak, 17–19, poželjna najava mailom,
- Melkior Ornik — termin: utorak, 16–18, sastanak pred oglasnom pločom, nužna najava mailom.

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom koji dan ranije!

- Njihove mail adrese nađete na oglasnoj ploči,
- ili se javite meni.

Ortogonalne funkcije

Ortogonalne funkcije i najmanji kvadrati

Linearni sustav za neprekidni problem najmanjih kvadrata zapisali smo kao

$$\sum_{j=0}^m \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle a_j = \langle \varphi_i, f \rangle, \quad i = 0, \dots, m.$$

Ako φ_i , $i = 0, \dots, m$, tvore **ortogonalni sustav funkcija**, onda je

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{za } i \neq j, \quad \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = \|\varphi_j\|^2 > 0.$$

Uvrštavanjem u **linearni sustav**, dobivamo da je sustav **dijagonalan**, a njegovo rješenje je

$$a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, \dots, m.$$

Problemi

Oblikom koeficijenata a_j nismo izbjegli sve probleme.

- Tipično norme $\|\varphi_j\|_2^2$ padaju kad j raste, dok su brojnici reda veličine f .
- Za koeficijente a_j se očekuje da rapidno padaju.
- Zbog toga se očekuju greške nastale kraćenjem pri računanju skalarnog produkta u brojniku.

Alternativna forma za računanje a_j je

$$a_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|_2^2} \left\langle f - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle, \quad j = 0, \dots, m.$$

Uočite da je skalarni produkt “sume” s φ_j jednak nuli zbog ortogonalnosti.

Algoritam računanja koeficijenata

Sljedeći algoritam računa ne samo a_j , nego i aproksimaciju

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x).$$

Računanje koeficijenata

```
s[-1] = 0;  
za j = 0 do m radi {  
    a[j] = ⟨f - s[j - 1], phi[j]⟩ / ||phi[j]||22;  
    s[j] = s[j - 1] + a[j] * phi[j];  
};
```

Vrijednost $\varphi^{(m)}(x)$ izračunata je u $s[m]$.

Projekcija je opet rješenje

Tvrdimo da je greška aproksimacije $f - \varphi^{(m)}$ okomita na sve linearne kombinacije funkcija φ_k , za $k = 0, \dots, m$.

Dovoljno je pokazati da je greška okomita na svaki φ_k

$$\begin{aligned}\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = \langle f - a_k \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle - a_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle - \frac{\langle \varphi_k, f \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0.\end{aligned}$$

Dobiveni rezultat ima jednostavno geometrijsko značenje — aproksimacija je **ortogonalna projekcija** na prostor Φ_m razapet funkcijama φ_k , za $k = 0, \dots, m$.

Projekcija je opet rješenje

Iz ortogonalnosti

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \psi \rangle = 0,$$

gdje je $\psi \in \Phi_m$ bilo koja linearna kombinacija φ_k ,
zaključujemo da je i

$$\langle f - \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)} \rangle = 0.$$

Tada, zbog okomitosti, možemo pisati

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \|\varphi^{(m)}\|_2^2 = \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \left\| \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j \right\|_2^2 \\ &= \|f - \varphi^{(m)}\|_2^2 + \sum_{j=0}^m |a_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2. \end{aligned}$$

Greška rješenja

Iz prethodne relacije slijedi da se **greška aproksimacije** može zapisati kao

$$\|f - \varphi^{(m)}\|_2 = \left(\|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^m |a_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Ako je zadan **niz** prostora Φ_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, onda je iz prethodne relacije jasno da je

$$\|f - \varphi^{(0)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(1)}\|_2 \geq \|f - \varphi^{(2)}\|_2 \geq \dots,$$

što jasno slijedi i iz činjenice da je

$$\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots.$$

Greška rješenja

Ako je prostora Φ_k **beskonačno mnogo**, očito je da je norma greške aproksimacije

- **monotono padajuća** i
- **odozdo ograničena** s 0 ,

pa mora **konvergirati**.

Mora li norma greške **konvergirati** u 0 ?

Odgovor je **ne!** Naravno, **nužni** i **dovoljni** uvjet da bi greška **konvergirala** u **nulu** je

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2,$$

što se odmah čita iz oblika greške.

Ortogonalizacija

Ako je zadan skup funkcija $\hat{\varphi}_j$ koje su **linearno nezavisne**, ali **nisu ortogonalne** na nekom intervalu,

- $\hat{\varphi}_j$ ortogonaliziramo korištenjem (modificiranog) Gram–Schmidtovog procesa ortogonalizacije.
- Funkcije φ_j koje razapinju isti prostor kao $\hat{\varphi}_j$ ne treba **normirati**.

Ortogonalizacija započinje s:

$$\varphi_0 := \hat{\varphi}_0.$$

Zatim, za $j = 1, 2, \dots$ stavimo

$$\varphi_j := \hat{\varphi}_j - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \quad a_k = \frac{\langle \hat{\varphi}_j, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|_2^2}.$$

Tada je φ_j ortogonalan na sve prethodne φ_k , $k = 0, \dots, j - 1$.

Primjer

Primjer. Nađite **ortogonalnu** bazu za prostor razapet funkcijama $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ s **težinskom funkcijom** $w = 1$.

Rješenje. **Skalarni produkt** funkcija u i v definiran je s

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 w(x)u(x)v(x) dx = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx.$$

Prva funkcija u ortogonalnoj bazi jednaka je **prvoj** zadanoj funkciji,

$$\varphi_0(x) = 1.$$

Primjer

Sada je

$$\langle x, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot 1 dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2,$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{0}{2} = 0.$$

Odatle odmah dobivamo

$$\varphi_1(x) = x - a_0 \cdot 1 = x.$$

Primjer

Za ortogonalni polinom stupnja 2 treba izračunati a_0 i a_1

$$\langle x^2, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

$$\langle x^2, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x dx = \frac{2}{3},$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

Primjer

Odatle je

$$\varphi_2(x) = x^2 - a_1 \cdot x - a_0 \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Primjer. Korištenjem **ortogonalnih** polinoma izračunatih u prethodnom primjeru, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata nađite **polinome** stupnjeva 0 i 1 koji aproksimiraju funkciju

$$f(x) = e^x$$

na intervalu $[-1, 1]$ uz **težinsku funkciju** $w(x) = 1$.

Jednostavni primjer — ortogonalni polinomi

Rješenje problema najmanjih kvadrata je funkcija

$$\varphi^{(m)} = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j, \quad a_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}, \quad j = 0, 1.$$

Za račun koeficijenata a_j moramo izračunati

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx = 2, \quad \langle \varphi_0, e^x \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot e^x \, dx = e - e^{-1},$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}, \quad \langle \varphi_1, e^x \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot e^x \, dx = 2e^{-1}.$$

Jednostavni primjer — ortogonalni polinomi

Odatle odmah izlazi

$$a_0 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \operatorname{sh}(1), \quad a_1 = \frac{2e^{-1}}{\frac{2}{3}} = 3e^{-1}.$$

Aproksimacija **konstantom** je

$$\varphi^{(0)}(x) = \operatorname{sh}(1)\varphi_0(x) = \operatorname{sh}(1) \cdot 1,$$

a **polinomom stupnja 1**

$$\varphi^{(1)}(x) = \operatorname{sh}(1)\varphi_0(x) + 3e^{-1}\varphi_1(x) = \operatorname{sh}(1) \cdot 1 + 3e^{-1} \cdot x,$$

što se poklapa s već izračunatim rješenjem koje nije koristilo ortogonalne polinome.

Primjeri ortogonalnih familija funkcija

Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$$

čine **ortogonalnu familiju** funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$ uz **težinsku funkciju** $w(x) = 1$.

Pokažimo da je to zaista istina. Neka su $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(k + \ell)x - \cos(k - \ell)x) \, dx.$$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Ako je $k = \ell$, onda je prethodni integral jednak

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k + \ell)x}{k + \ell} - x \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Ako je $k \neq \ell$, onda je jednak

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k + \ell)x}{k + \ell} - \frac{\sin(k - \ell)x}{k - \ell} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell, \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, \dots,$$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Na sličan način, pretvaranjem **produkta** trigonometrijskih funkcija u zbroj, možemo pokazati da je

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos lx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 2\pi, & k = l = 0, \\ \pi, & k = l > 0, \end{cases} \quad k, l = 0, 1, \dots,$$

te, također, da je

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin lx \, dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots,$$

Fourierov red

Ako **periodičku** funkciju f osnovnog perioda duljine 2π aproksimiramo redom oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

onda, množenjem odgovarajućim trigonometrijskim funkcijama i integriranjem, dobivamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Prethodni red poznat je pod imenom **Fourierov red**, a koeficijenti kao **Fourierovi koeficijenti**.

Fourierov red i najmanji kvadrati

Ako **Fourierov red** odsiječemo za $k = m$ dobijemo tzv. **trigonometrijski polinom**.

- Taj polinom je **najbolja** aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata za f u klasi trigonometrijskih polinoma stupnja **manjeg ili jednakog m** .

Uz ortogonalnost trigonometrijskih funkcija (obzirom na integral kao skalarni produkt), postoji **diskretna ortogonalnost** (integral se zamijeni sumom).

Klasični ortogonalni polinomi

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

U praksi najčešće susrećemo **pet tipova** klasičnih **ortogonalnih polinoma**.

Prisjetimo se, za polinome

$$\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\},$$

(indeks polinoma označava stupanj), kažemo da su **ortogonalni** obzirom na težinsku funkciju w , na $[a, b]$, ako vrijedi

$$\int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = 0, \quad \text{za } m \neq n.$$

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

Težinska funkcija

- određuje sistem polinoma do na konstantni faktor u svakom od polinoma.
- Izbor takvog faktora zove se još i standardizacija ili normalizacija.

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma:

- Ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

s tim da su poznate “početne” funkcije p_0 i p_1 , i sve funkcije α_n , β_n , za $n \in \mathbb{N}$.

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma (nastavak):

- **Oprez.** Prethodnu rekurziju zadovoljavaju i mnoge specijalne funkcije koje **nisu** ortogonalne!
- **Nultočke** ortogonalnih polinoma uvijek se nalaze **unutar** intervala $[a, b]$ na kojem su polinomi **ortogonalni**.

Dokaze za **tročlanu** rekurziju i **nultočke** možete naći u skripti. Napraviti ćemo ih malo kasnije.

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste

- označavaju se s T_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za njih postoji i **eksplicitna** formula

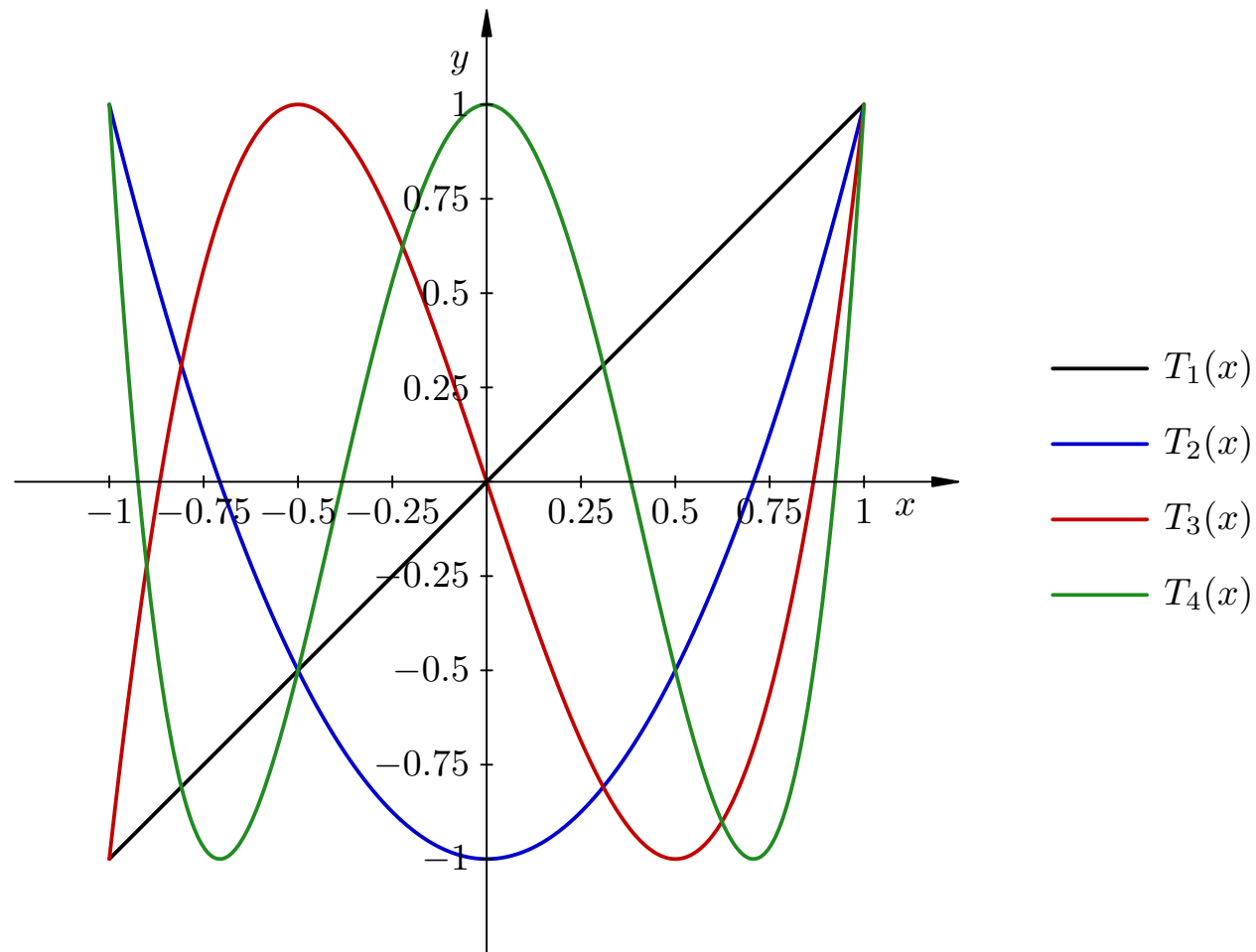
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Osim toga, n -ti Čebiševljev polinom prve vrste T_n zadovoljava diferencijalnu jednažbu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinomi prve vrste

- transformirani na interval $[0, 1]$,

- u oznaci T_n^* .

Dobivaju se korištenjem linearne (preciznije, afine) transformacije

$$[0, 1] \ni x \mapsto \xi := 2x - 1 \in [-1, 1].$$

Relacija ortogonalnosti postaje

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x) T_n^*(x)}{\sqrt{x - x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0, \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

a rekurzivna relacija

$$T_{n+1}^*(x) - 2(2x - 1)T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x) = 0,$$

uz start

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinomi druge vrste

- označavaju se s U_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} U_m(x) U_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi/2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Zadovoljavaju **istu** rekurziju kao i polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz malo drugačiji start

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Za njih postoji i **eksplicitna** formula

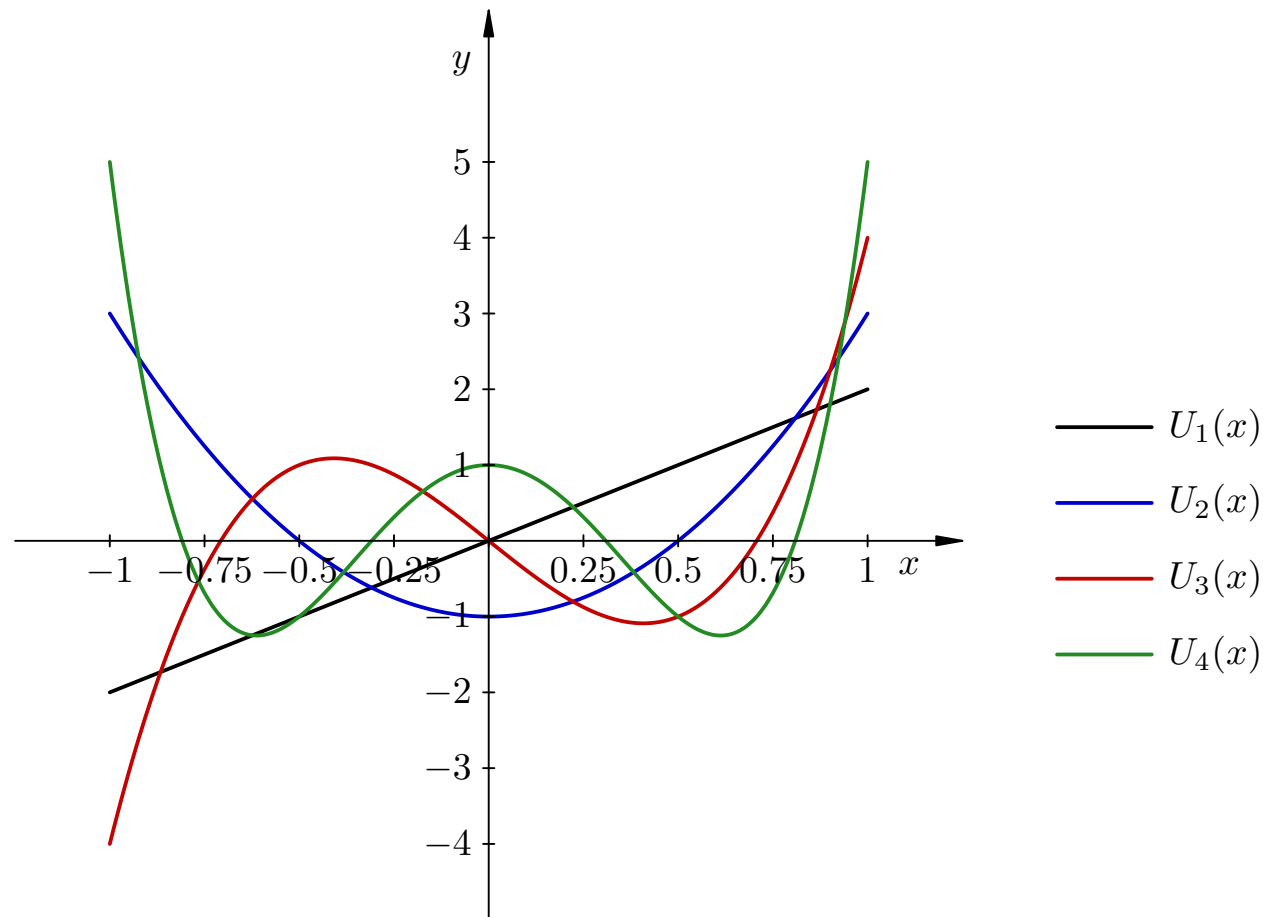
$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

n -ti Čebiševljev polinom druge vrste U_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi

- označavaju se s P_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = 1.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2/(2n + 1), & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Legendreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

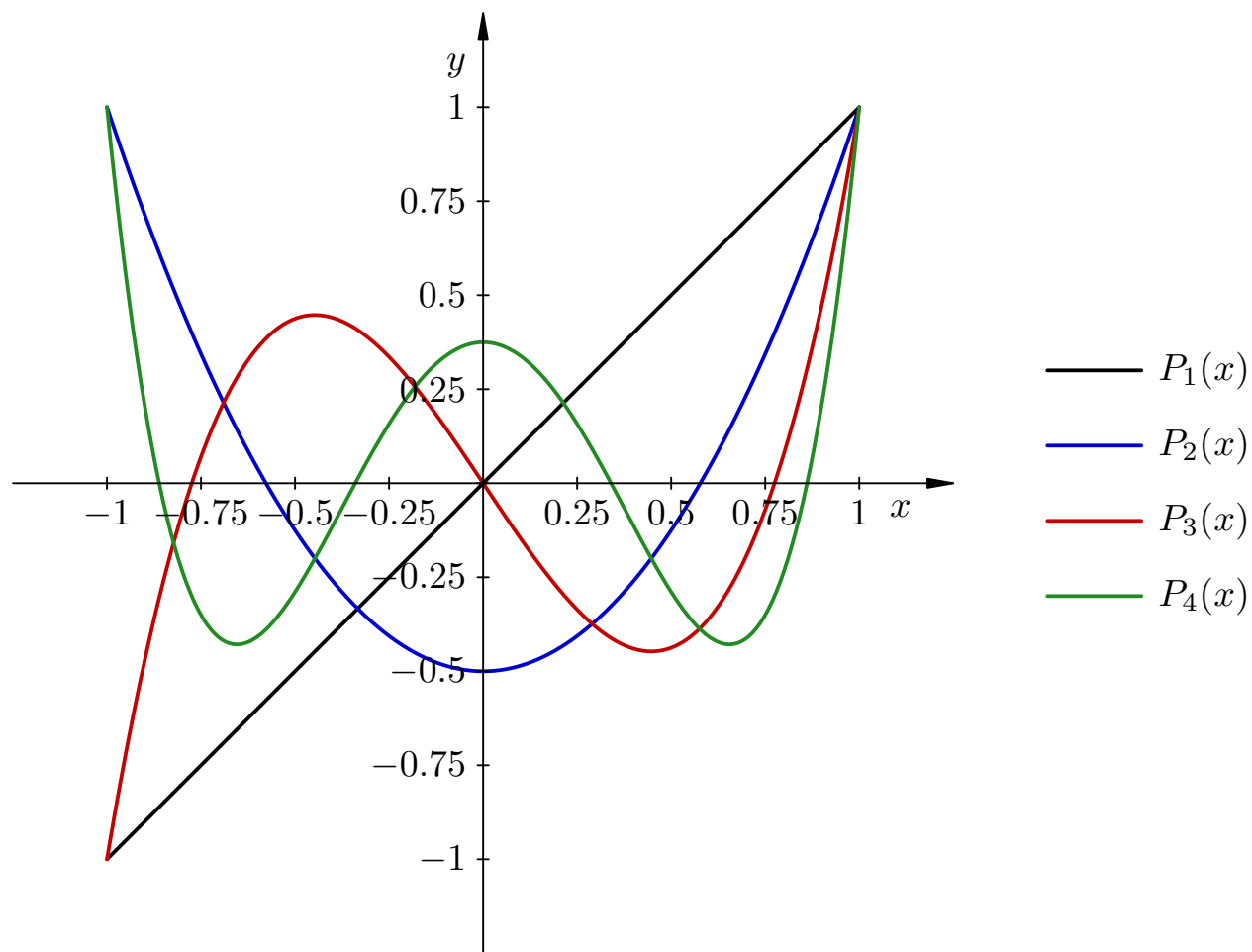
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Osim toga, n -ti Legendreov polinom P_n zadovoljava diferencijalnu jednačbu

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

Legendreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Laguerreovi polinomi

Laguerreovi polinomi

- označavaju se s L_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[0, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 1, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Laguerreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n + 1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

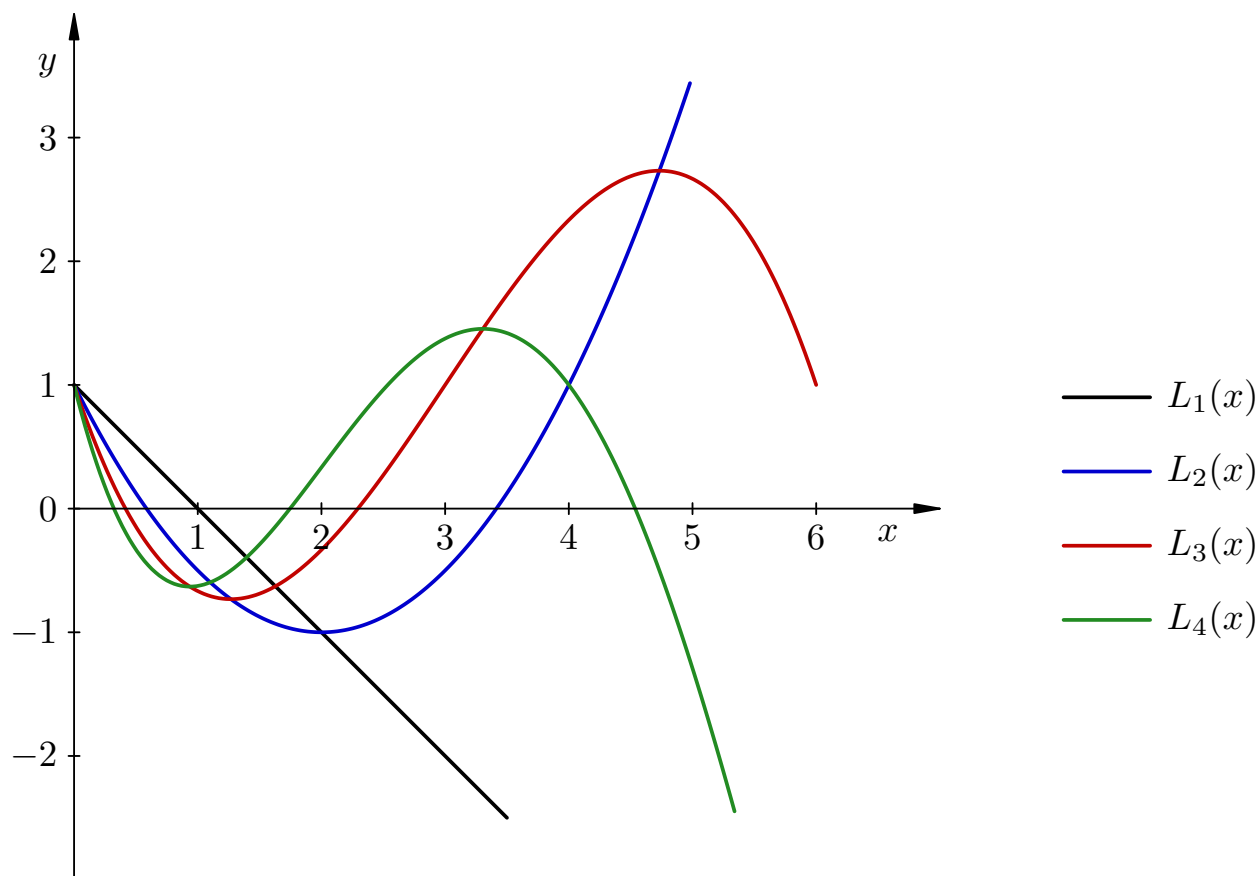
$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Osim toga, n -ti Laguerreov polinom L_n zadovoljava diferencijalnu jednačbu

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

Laguerreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Laguerreovi polinomi

Često nailazi na još jednu rekurziju za Laguerreove polinome

$$\tilde{L}_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)\tilde{L}_n(x) + n^2\tilde{L}_{n-1}(x) = 0,$$

uz jednaki start

$$\tilde{L}_0(x) = 1, \quad \tilde{L}_1(x) = 1 - x.$$

Uspoređivanjem ove i prethodne rekurzije dobivamo da je

$$\tilde{L}_n(x) = n! L_n(x),$$

tj. radi se samo o drugačijoj **normalizaciji**

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \tilde{L}_m(x) \tilde{L}_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ (n!)^2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi

- označavaju se s H_n ,
- ortogonalni su na intervalu $(-\infty, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Hermiteovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

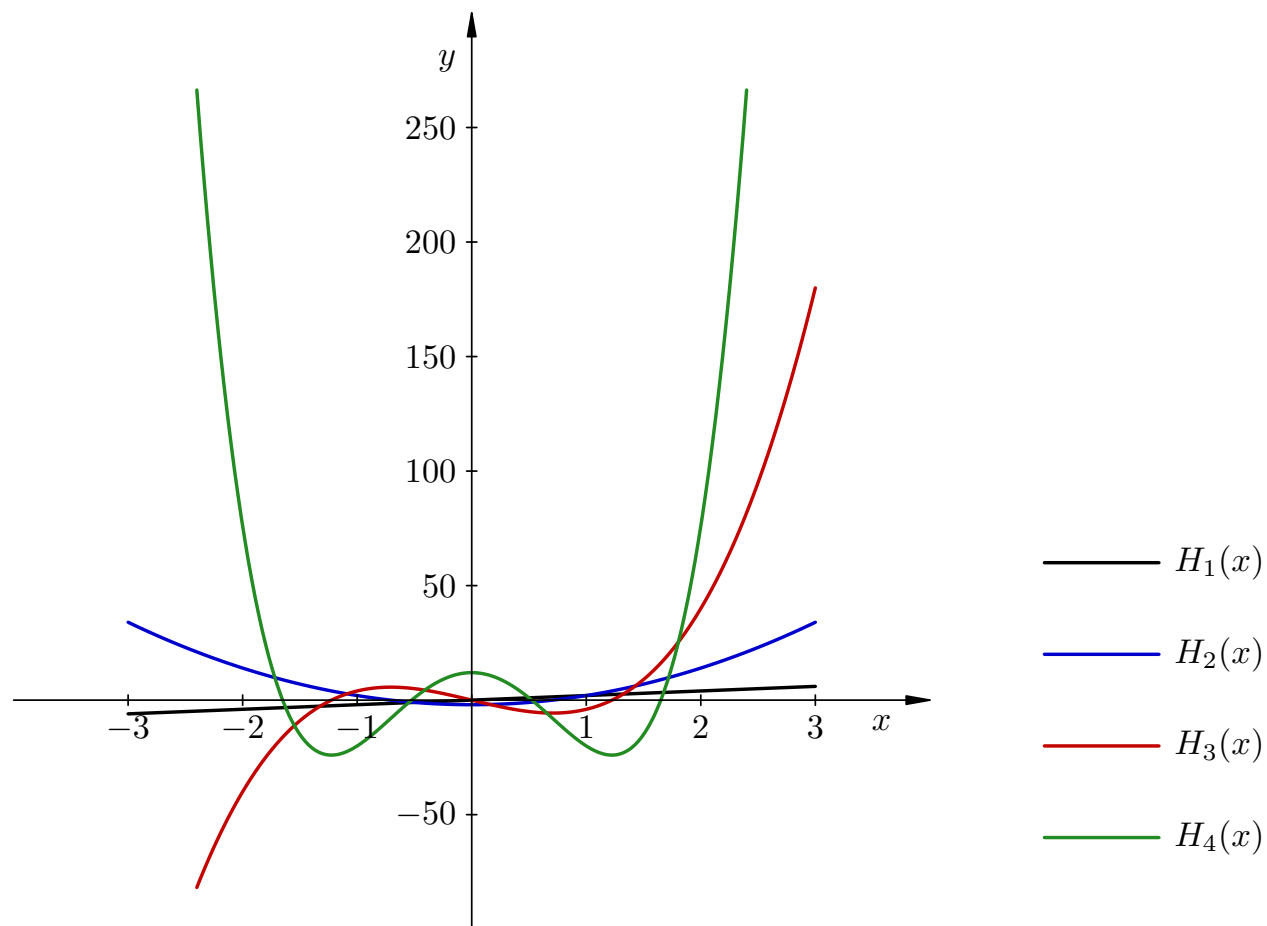
$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Osim toga, n -ti Hermiteov polinom H_n zadovoljava diferencijalnu jednačbu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Hermiteovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako.



Ortogonalni polinomi i tročlane rekurzije

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokažimo neka svojstva ortogonalnih polinoma koja smo već spomenuli.

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Pretpostavljamo da je p_n polinom stupnja n , za svaki $n \geq 0$.

Ako je f polinom stupnja m , tada vrijedi

$$f = \sum_{n=0}^m \frac{\langle f, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} p_n.$$

Dokaz. Provodi se Gram–Schmidtovim procesom ortogonalizacije na sustavu potencija $\{1, x, x^2, \dots\}$, pa se iskoristi da je f linearna kombinacija baze $\{1, x, \dots, x^m\}$. ■

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokaz može i preko linearne nezavisnosti ortogonalnih funkcija (v. prošli puta), pa to vrijedi i za familiju $\{p_n \mid n \geq 0\}$.

Početni komad te familije — skup $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ je

- linearno nezavisan skup od $m + 1$ funkcija,

- i svi elementi su polinomi stupnja manjeg ili jednakog m ,

pa je $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ baza u prostoru polinoma \mathcal{P}_m (dimenzija je $m + 1$).

Zbog $f \in \mathcal{P}_m$, slijedi da je f neka linearna kombinacija funkcija $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$.

Formula za koeficijente u toj kombinaciji (prikaz) slijedi iz ortogonalnosti polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$. ■

Ortogonalnost na polinome nižeg stupnja

Jednostavna **posljedica** prethodne tvrdnje je sljedeći rezultat, kojeg ćemo koristiti u nastavku.

Korolar. Neka je p_n **ortogonalni** polinom stupnja n , za $n \geq 0$, i neka je f bilo koji polinom stupnja **strogo manjeg** od n , tj. $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Onda je

$$\langle p_n, f \rangle = 0.$$

Drugim riječima,

• p_n je **ortogonalan** na **sve** polinome **nižeg** stupnja od n .

Dokaz. Stavimo $m = n - 1$, pa tvrdnja ide direktno iz **prikaza** u prošlom teoremu i **ortogonalnosti**. ■

Nultočke ortogonalnih polinoma

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Tada svaki polinom p_n ima **točno n različitih** (jednostrukih) realnih **nultočaka** na otvorenom intervalu (a, b) .

Dokaz. Neka su x_1, x_2, \dots, x_m sve međusobno različite **nultočke** polinoma p_n za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u x_i .

Budući da je p_n stupnja n ,

- po **osnovnom teoremu algebre**, p_n ima **točno n** nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima **manje ili jednako n** , tj. znamo da je $m \leq n$.

Nultočke ortogonalnih polinoma

Polinom p_n onda možemo prikazati u obliku **produkta**

$$p_n(x) = h(x) (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi r_i moraju biti **neparni**, a
- polinom $h(x)$ **ne smije** promijeniti predznak na (a, b) .

Pretpostavimo da nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva ima **striktno manje** od n , tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Nultočke ortogonalnih polinoma

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x) (x - x_1) \cdots (x - x_m) \\ &= h(x) (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka x_1, \dots, x_m , ovaj polinom **ne mijenja** znak prolaskom kroz točke x_1, \dots, x_m (eksponenti $r_i + 1$ su **parni**).

Osim toga, $h(x)$ **ne mijenja** znak na (a, b) , tj.

● čitav polinom $p_n(x)B(x)$ **ne mijenja** znak na (a, b) .

Zato vrijedi

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x) dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije **fiksnog predznaka** (plus ili minus).

Nultočke ortogonalnih polinoma

S druge strane, prethodni integral je **skalarni produkt** polinoma B (stupnja $m < n$) i polinoma p_n (stupnja n).

- Svaki ortogonalni polinom p_n je **okomit** na sve polinome **nižeg stupnja** (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x) dx = \langle B, p_n \rangle = 0,$$

što je **kontradikcija**.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma B je bila **pogrešna**, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, p_n ima **točno** n nultočaka x_1, \dots, x_n u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti **jednostruke**, jer je $p'_n(x_i) \neq 0$. ■

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zadana je familija **ortogonalnih** polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ i neka su A_n i B_n **vodeća dva** koeficijenta polinoma p_n , tj.

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \dots,$$

s tim da je $A_n \neq 0$. Tada p_n možemo napisati kao

$$p_n(x) = A_n (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Definiramo još i

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \quad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Uočite: a_n je **omjer** vodećih koeficijenata susjednih polinoma.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija **ortogonalnih** polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za svaki $n \geq 1$ vrijedi **tročlana homogena** rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x),$$

pri čemu su **koeficijenti** u rekurziji dani formulama

$$b_n = a_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right) = -\frac{a_n}{\gamma_n} \langle x p_n, p_n \rangle,$$

$$c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}.$$

Za polinome p_n s **vodećim** koeficijentom $A_n = 1$, ove formule su još **jednostavnije**, jer je $a_n = 1$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Dokaz. Definiramo polinom G na sljedeći način — tako da **poništimo** vodeći koeficijent u p_{n+1} , tj. dobijemo $\deg G \leq n$.

$$\begin{aligned} G(x) &= p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x) \\ &= (A_{n+1} x^{n+1} + B_{n+1} x^n + \dots) \\ &\quad - \frac{A_{n+1}}{A_n} x (A_n x^n + B_n x^{n-1} + \dots) \\ &= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1} B_n}{A_n} \right) x^n + \dots \end{aligned}$$

Dakle, G je zaista stupnja **manjeg ili jednakog** n .

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Polinom G onda možemo napisati kao **linearnu kombinaciju** ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n , tj.

$$G(x) = d_n p_n(x) + \cdots + d_0 p_0(x).$$

Računanjem koeficijenata d_i (v. prvi teorem o prikazu) izlazi

$$d_i = \frac{\langle G, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{1}{\gamma_i} (\langle p_{n+1}, p_i \rangle - a_n \langle x p_n, p_i \rangle), \quad i = 0, \dots, n.$$

Treba još izračunati oba **skalarna produkta** na **desnoj** strani.

Za **prvi** produkt, iz **ortogonalnosti** odmah dobivamo

$$\langle p_{n+1}, p_i \rangle = 0, \quad i \leq n,$$

tj. tog člana **nema** u relaciji za koeficijente d_i , $i = 0, \dots, n$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Za drugi produkt $\langle xp_n, p_i \rangle$ dobivamo

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \int_a^b w(x) p_n(x) x p_i(x) dx = \langle p_n, xp_i \rangle.$$

Polinom $xp_i(x)$ je stupnja $i + 1$. Nadalje, polinom p_n je **ortogonalan** na sve polinome nižeg stupnja.

Dakle, za sve $i \leq n - 2$, stupanj polinoma $xp_i(x)$ je **manji ili jednak** $n - 1$, pa je

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \langle p_n, xp_i \rangle = 0, \quad i \leq n - 2.$$

Kombiniranjem ta dva rezultata, dobivamo

$$d_i = 0, \quad \text{za } 0 \leq i \leq n - 2.$$

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zbog toga je

$$G(x) = d_n p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Kad uvrstimo $G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x)$ i sredimo, izlazi

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + d_n) p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Dakle, vrijedi **tročlana rekurzija**, s $b_n = d_n$ i $c_n = -d_{n-1}$.

Iz **prve** relacije, uspoređivanjem **vodećih** koeficijenata funkcije G i funkcije s **desne** strane, slijedi prva formula za $b_n = d_n$.

Iz opće relacije za d_i , za koeficijente d_{n-1} i d_n dobivamo

$$d_i = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle x p_n, p_i \rangle = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle p_n, x p_i \rangle, \quad i = n-1, n.$$

Oдавде izlaze i preostale dvije formule. ■

Christoffel–Darbouxov identitet

Mnoge korisne relacije za ortogonalne polinome izvode se korištenjem sljedećeg teorema.

Teorem. (Christoffel–Darbouxov identitet.) Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija **ortogonalnih** polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za njih vrijedi

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{\gamma_k} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{a_n \gamma_n (x - y)}.$$

Dokaz. Manipulacijom tročlane rekurzije. ■

Ako su x i y dvije **različite nultočke** polinoma p_{n+1} , desna strana je **nula**. Iz lijeve strane dobivamo tzv.

● **diskretnu** ortogonalnost ortogonalnih polinoma!

Hornerova shema

Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Već ste upoznali **Hornerovu shemu** za izvrednjavanje **polinoma**.

- Postoji **vrlo slična** shema za izvrednjavanje **ortogonalnih polinoma**.
- Ponovimo svojstva **Hornerove** sheme za **polinome**.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom p_n stupnja n

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_n \neq 0,$$

kojemu treba izračunati **vrijednost** u zadanoj točki x_0 . To se može napraviti na više načina.

● Prvo, napravimo to **direktno** po zapisu, **potencirajući**.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se **rekurzivno**

$$x^i = x \cdot x^{i-1}.$$

Imamo li zapamćen x^{i-1} , lako je izračunati x^i — korištenjem samo **jednog** množenja.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Vrijednost polinoma s pamćenjem potencija

```
sum = a[0];  
pot = 1;  
za i = 1 do n radi {  
    pot = pot * x_0;  
    sum = sum + a[i] * pot;  
};  
/* Na kraju je  $p_n(x_0) = \text{sum}$ . */
```

U unutarnjoj petlji javljaju se 2 množenja i 1 zbrajanje.
Petlja se izvršava n puta, pa ukupno imamo

$2n$ množenja + n zbrajanja.

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s **manje** množenja — ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots ((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvednjava polinom zove se **Hornerova shema**.

Hornerova shema

```
sum = a[n];  
za i = n - 1 do 0 radi {  
    sum = sum * x_0 + a[i];  
};  
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Odmah je očito da smo korištenjem ovog algoritma broj množenja **prepolovili**, tj. da je njegova složenost

$$n \text{ množenja} + n \text{ zbrajanja.}$$

Hornerova shema je **optimalan** algoritam za izvrednjavanje zadanog **polinoma** u zadanoj **točki**.

📍 **Ulaz** algoritma su: **polinom** i **točka!**

Napomena: za izvrednjavanje **fiksnog** polinoma u **puno** točaka

📍 postoje i **brži** algoritmi — tzv. prethodna obrada koeficijenata, FFT.

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Za **opći** polinom (ulaz u Horner) automatski pretpostavljamo da je **većina** koeficijenata **različita** od **nule**.

Ako imamo **fiksni** polinom s **malo** koeficijenata različitih od **nule** — postoje i bolji algoritmi! Na primjer, polinom

$$p_{100}(x) = x^{100} + 1$$

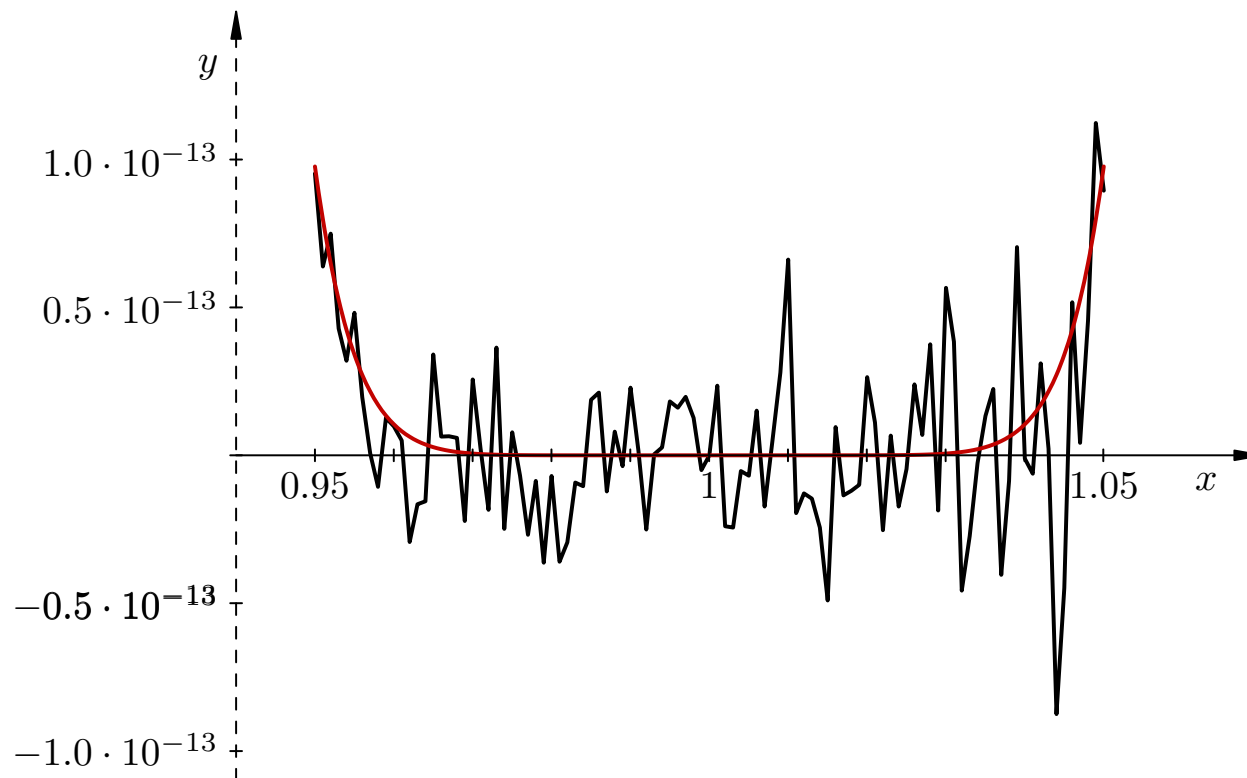
besmisleno je izvodnjavati Hornerovom shemom, jer bi to predugo trajalo (**binarno potenciranje** je brže). Sastavite odgovarajući algoritam.

Dodatna prednost **Hornerove** sheme:

- **Hornerova** shema može biti **stabilnija** nego direktno **potenciranje**, zbog redova veličine članova u sumi.

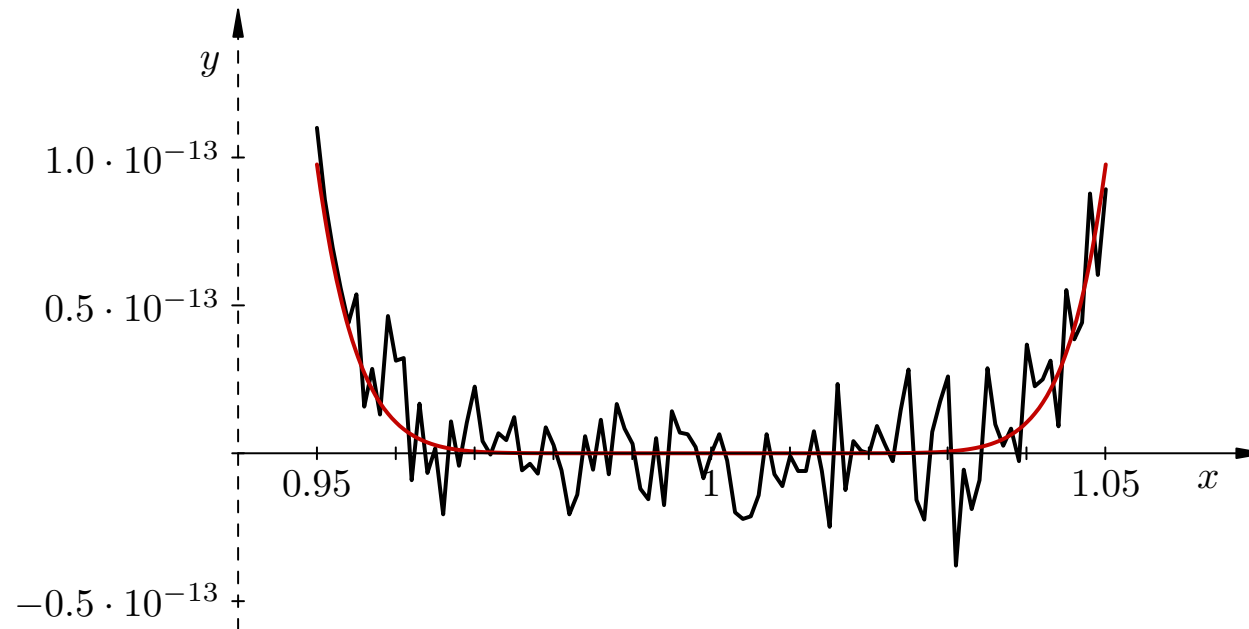
Ilustracija je na sljedeće **dvije** stranice.

Stabilnost direktnog potenciranja



Izvrednjavanje $(x - 1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x :
direktnim potenciranjem (dvostruka točnost).

Stabilnost Hornerove sheme



Izvednjavanje $(x - 1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x :
Hornerovom shemom (dvostruka točnost).

Hornerova shema “na ruke”

Hornerova shema “na ruke” radi se tako da se napravi tablica kojoj se

- u **gornjem** redu se popišu redom **svi** koeficijenti polinoma p_n — od a_n do a_0 ;
- donji** red se izračunava korištenjem gornjeg reda i točke x_0 .

Elemente **donjeg** reda, slijeva nadesno, označimo s $x_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0, r_0$, tako da se c_{n-1} nalazi **ispod** a_n :

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
x_0	c_{n-1}	c_{n-2}	\dots	c_0	r_0

Hornerova shema “na ruke”

Elementi donjeg reda računaju se ovako:

$$c_{n-1} := a_n,$$

$$c_{i-1} := c_i * x_0 + a_i, \quad i = n - 1, \dots, 1,$$

$$r_0 := c_0 * x_0 + a_0.$$

Dakle,

- vodeći koeficijent a_n se prepíše,
- svi ostali se računaju tako da se posljednji izračunati c_i pomnoži s x_0 , a zatim mu se doda a_i .

Na kraju je $p_n(x_0) = r_0$.

Hornerova shema “na ruke”

Primjer. Izračunajmo vrijednost polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki $x_0 = -1$.

Formirajmo tablicu:

	2	0	-1	4	0	1
-1	2	-2	1	3	-3	4

Dakle, $p_5(-1) = 4$.



Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Pogledajmo **značenje** koeficijenata c_i koji se javljaju u donjem redu tablice.

Promatrajmo polinom koji dobijemo **dijeljenjem** polinoma p_n s polinomom stupnja 1 oblika $x - x_0$.

- **Kvocijent** ta dva polinoma nazovimo q_{n-1} — to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$,
- a **ostatak** je broj (mora biti stupnja manjeg od polinoma kojim dijelimo), koji označimo s b_0 .

Tada vrijedi

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je

$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Označimo koeficijente polinoma q_{n-1} s b_i , za $1 \leq i \leq n$,

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i.$$

Uvrstimo li to u relaciju za dijeljenje, **sređivanjem** koeficijenata uz odgovarajuće potencije, dobivamo

$$p_n(x) = b_n x^n + (b_{n-1} - x_0 b_n) x^{n-1} + \dots + (b_1 - x_0 b_2) x + b_0 - x_0 b_1.$$

Za vodeći koeficijent b_n , odmah zaključujemo $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \quad i = n - 1, \dots, 0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Dakle, b_i možemo izračunati iz b_{i+1} rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija **istog oblika** kao za dobivanje c_i , samo s **pomaknutim indeksima**. Kako je na startu $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti **kvocijenta** i **ostatka** pri dijeljenju polinoma p_n linearnim faktorom $x - x_0$.

Primjer

Primjer. Podijelimo

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

linearnim polinomom $x + 1$.

Primijetite da je to ista tablica kao u prošlom primjeru, pa imamo

	2	0	-1	4	0	1
-1	2	-2	1	3	-3	4

Odatle lako čitamo

$$2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1 = (x + 1)(2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 3) + 4.$$



Algoritam za dijeljenje polinoma

Dijeljenje polinoma s $(x - x_0)$

```
b[n] = a[n];
```

```
za i = n - 1 do 0 radi {
```

```
    b[i] = b[i + 1] * x_0 + a[i];
```

```
};
```

```
/* Polinom-kvocijent: */
```

```
/*  $q_{n-1} = b[n] \cdot x^{n-1} + \dots + b[2] \cdot x + b[1]$ . */
```

Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta?

Vrijedi

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - x_0)q_{n-1}(x) + r_0 \\ &= (x - x_0)[(x - x_0)q_{n-2}(x) + r_1] + r_0 \\ &= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1(x - x_0) + r_0 \\ &= \dots \\ &= r_n(x - x_0)^n + \dots + r_1(x - x_0) + r_0. \end{aligned}$$

Dakle, polinom p_n razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.

Koja su značenja koeficijenata r_i ?

Potpuna Hornerova shema

Usporedimo dobiveni oblik s **Taylorovim polinomom** oko x_0

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Dakle, **potpuna Hornerova shema** računa

• sve **Taylorove** koeficijente polinoma u zadanoj točki, tj. sve **derivacije** polinoma u zadanoj točki x_0 , **podijeljene** pripadnim **faktorijelima**.

Primjer

Primjer. Nađimo sve derivacije polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki -1 .

Formirajmo potpunu Hornerovu tablicu.

	2	0	-1	4	0	1
-1	2	-2	1	3	-3	4
-1	2	-4	5	-2	-1	
-1	2	-6	11	-13		
-1	2	-8	19			
-1	2	-10				
-1	2					

Primjer

Odatle lako čitamo

$$p_5(-1) = 4,$$

$$p_5^{(2)}(-1) = -13 \cdot 2! = -26,$$

$$p_5^{(4)}(-1) = -10 \cdot 4! = -240,$$

$$p_5^{(1)}(-1) = -1 \cdot 1! = -1,$$

$$p_5^{(3)}(-1) = 19 \cdot 3! = 114,$$

$$p_5^{(5)}(-1) = 2 \cdot 5! = 240.$$



Algoritam za Taylorov razvoj polinoma

Taylorov razvoj polinoma oko x_0

Algoritam nalazi koeficijente r_i , (koeficijente Taylorovog razvoja) zadanog polinoma oko točke x_0 , korištenjem **jednodimenzionalnog** polja.

```
za i = 0 do n radi {
    r[i] = a[i];
};
za i = 1 do n radi {
    za j = n - 1 do i - 1 radi {
        r[j] = r[j] + x_0 * r[j + 1];
    };
};
```

Generalizirana Hornerova shema

Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki **ortogonalni** sustav funkcija na domeni aproksimacije.

- Razvoj funkcije f u red po ortogonalnim polinomima je očita **generalizacija** reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za **aproksimaciju** funkcije f , ako znamo da red **konvergira** prema f na nekoj domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

“Rezanjem” reda dobivamo aproksimaciju funkcije f

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima prve vrste

- za aproksimaciju elementarnih i “manje elementarnih” specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni — tzv. “skoro minimaks aproksimacije”.

Primjer ide malo kasnije!

Razvoji po ortogonalnim polinomima

Da bismo izračunali $f_N(x)$ moramo znati sve **koeficijente** a_n i sve **funkcije** p_n .

- 🔴 Najčešće **nemamo formulu** za p_n , nego znamo da funkcije p_n zadovoljavaju jednostavnu **tročlanu rekurziju** po n .

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije:

- 🔴 Ako unaprijed **ne znamo** N , onda se sumacija vrši **unaprijed**, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.
- 🔴 Iz teorije aproksimacija, često je moguće **unaprijed** naći koliko članova N treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost. Tada se koristi **generalizacija** Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje f_N .

Izvodnjavanje tročlanih rekurzija

Prisjetimo se, **ortogonalni** polinomi, ali i mnoge druge **specijalne** funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

s tim da su **poznate** “početne” funkcije p_0 i p_1 , i sve funkcije α_n, β_n , za $n \in \mathbb{N}$.

Definiramo **rekurziju** za koeficijente

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Generalizirana Hornerova shema

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{n=0}^N a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\ &= \sum_{n=0}^N (B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}) p_n(x) \\ &= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^N \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\ &= (\text{rastavimo indekse na } 1 \text{ do } N - 1 \text{ i ostale}) = \dots \end{aligned}$$

Generalizirana Hornerova shema

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1} (p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)) \\ &\quad + B_0 p_0(x) + B_1 p_1(x) + \alpha_0(x) B_1 p_0(x) \\ &= (\text{iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena}) \\ &= B_0 p_0(x) + B_1 (p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)). \end{aligned}$$

U algoritmu je uobičajeno napraviti **jedan** korak rekurzije za koeficijente B_n “na ruke”, tako da

🔴 algoritam počinje indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

Algoritam za generaliziranu Hornerovu shemu

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ (silazni algoritam)

```
B_1 = 0;
```

```
B_0 = a[N];
```

```
za k = N - 1 do 0 radi {
```

```
    B_2 = B_1;
```

```
    B_1 = B_0;
```

```
    B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_{k+1}(x) * B_2;
```

```
};
```

```
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
```

```
        + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Ovaj algoritam se još zove i **Clenshaw**-ov algoritam.

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f'_N(x)$, do pripadnog algoritma dolazimo **deriviranjem** rekurzije za B_n .

- Koeficijente B_n shvatimo kao funkcije od x .
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}$, s tim da B'_n označava **derivaciju** B_n po x , u točki x .

“Formalnim” **deriviranjem** dobivamo **rekurziju** za B'_n

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B'_{N+2} = B'_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

$$B'_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \alpha_n(x)B'_{n+1} \\ - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Oдавде je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0,$$

je $b_N = 0$, pa rekurziju za B'_n pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x)B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0,$$

što ima skoro isti oblik kao i rekurzija za B_n , osim zamjene a_n s b_n .

Vrijednost $f'_N(x)$ dobivamo deriviranjem $f_N(x)$,

$$f_N(x) = B_0p_0(x) + B_1(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)).$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odmah slijedi

$$\begin{aligned} f'_N(x) = & B_0 p'_0(x) + B'_0 p_0(x) \\ & + B_1 (p'_1(x) + \alpha'_0(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p'_0(x)), \\ & + B'_1 (p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)). \end{aligned}$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f'_N(x)$, dovoljno je znati samo **derivacije** “početnih” funkcija p'_0 i p'_1 , kao i α'_n i β'_n .

- Za računanje $f'_N(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično **zajedno** računaju.
- Rekurzije za B_n i B'_n provodimo u **istoj** petlji.

Algoritam za funkciju i derivaciju

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ i $f'_N(x)$

$$B_{-1} = 0;$$

$$B_{-0} = a[N];$$

$$B'_{-1} = 0;$$

$$B'_{-0} = 0;$$

za $k = N - 1$ do 0 radi {

$$B_{-2} = B_{-1};$$

$$B_{-1} = B_{-0};$$

$$B_{-0} = a[k] - \alpha_k(x) * B_{-1} - \beta_{k+1}(x) * B_{-2};$$

$$B'_{-2} = B'_{-1};$$

$$B'_{-1} = B'_{-0};$$

$$b = -\alpha'_k(x) * B_{-1} - \beta'_{k+1}(x) * B_{-2};$$

$$B'_{-0} = b - \alpha_k(x) * B'_{-1} - \beta_{k+1}(x) * B'_{-2};$$

};

Algoritam za funkciju i derivaciju

$$\begin{aligned}f_N(x) &= B_0 * p_0(x) \\ &\quad + B_1 * (p_1(x) + \alpha_0(x) * p_0(x)); \\ f'_N(x) &= B_0 * p'_0(x) + B'_0 * p_0(x) \\ &\quad + B_1 * (p'_1(x) + \alpha'_0(x) * p_0(x) \\ &\quad\quad + \alpha_0(x) * p'_0(x)) \\ &\quad + B'_1 * (p_1(x) + \alpha_0(x) * p_0(x));\end{aligned}$$

Na isti način možemo izvesti i rekurzije za računanje **viših derivacija** $f_N^{(k)}(x)$, za $k \geq 2$.

- U praksi to **gotovo nikada** nije potrebno.
- Sve “korisne” familije funkcija p_n , $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju **diferencijalne** jednačbe **drugog** reda, s parametrom n .

Primjer: klasični ortogonalni polinomi!

Generalizirana Hornerova shema — primjeri

Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su **neparne**, a parni su **parne** funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za **nulti** i **prvi** polinom, tvrdnja očito vrijedi, jer je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja n), **parne**, a svi neparni, **neparne** funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ **suprotne** parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je **iste** parnosti kao T_{n-1} ,
- pa je T_{n+1} **iste** parnosti kao T_{n-1} . ■

Rekurzija za parne/neparne Čebiševljeve pol.

Isti dokaz kao za **parnost/neparnost** Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se **parne** funkcije razvijaju po **parnim**, a **neparne** po **neparnim** Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su **parne/neparne** funkcije, korisno je imati rekurziju samo za **parne/neparne** polinome.

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = 0$$

$$T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) = 0,$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove. Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su **prva dva parna** polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za **neparne** polinome, rekurzija se dobiva na sličan način.

Pokažite da je rekurzija za neparne Čebiševljeve polinome **istog** oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za **parne/neparne** polinome izvodi se na **isti** način.

Napomena. Rekurziju za **parne/neparne** Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti, korištenjem

- **adicijske** formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po **parnim** normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k} \left(\frac{2x}{\pi} \right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevimi polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.47200121576823476745	6	0.00000000021934576590
1	-0.49940325827040708740	7	-0.00000000000074816487
2	0.02799207961754761751	8	0.00000000000000193230
3	-0.00059669519654884650	9	-0.00000000000000000391
4	0.00000670439486991684	10	0.00000000000000000001
5	-0.00000004653229589732		

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x . Testirati za razne n i x .
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x .

Kosinus je parna funkcija, pa je treba aproksimirati parnim funkcijama.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije **kosinus** na intervalu $[-1, 1]$ po **parnim** Čebiševljevim polinomima.

U algoritmu za generaliziranu Hornerovu shemu treba uvrstiti da je za parne Čebiševljeve polinome

$$\alpha(x) = 2(1 - 2x^2), \quad \beta(x) = 1,$$

$$p_0(x) = T_0(x), \quad p_1(x) = T_2(x).$$

Koeficijenti a_k u razvoju **brzo padaju**, pa su **greške** u aproksimaciji vrlo **male** i približno jednake **prvom odbačenom** članu.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Konačno, treba reći kako se **dobivaju** koeficijenti a_k u ovakvom razvoju.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da radimo na **standardnom** intervalu $[-1, 1]$.

Relacija **ortogonalnosti** za **Čebiševljeve** polinome **prve** vrste ima oblik

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x) T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq \ell, \\ \pi, & \text{za } k = \ell = 0, \\ \pi/2, & \text{za } k = \ell \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da je $\|T_0\|^2 = 2 \|T_k\|^2$, za bilo koji $k \geq 1$.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Zato se **razvoj** zadane funkcije f po T_k obično piše u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

Pripadne formule za **koeficijente** u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati **analitički**

🔴 tek za **poneke** funkcije f .

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Aproksimacija f_n funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata je

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k T_k(x).$$

Za **numeričko** računanje koeficijenata a_k , za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss-Čebiševljeva integracija reda **većeg** od n ,
- **diskretna** ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u **nultočkama** ili **ektremima** Čebiševljevog polinoma T_{N+1} , za $N \geq n$.

Za razvoje po T_k , ova dva pristupa su **ekvivalentna**.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi T_k zapravo **kosinusi**, za njih vrijede

- vrlo slične relacije **diskretne** ortogonalnosti kao kod **trigonometrijskih** funkcija (v. malo kasnije).

Neka su x_j sve različite **nultočke** Čebiševljevog polinoma T_{N+1} , tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos \vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za Čebiševljeve polinome na skupu **nultočaka** $\{x_0, \dots, x_N\}$ vrijede sljedeće relacije **ortogonalnosti**

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N T_k(x_j) T_\ell(x_j) &= \sum_{j=0}^N \cos(k\vartheta_j) \cos(\ell\vartheta_j) \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Skica **dokaza**: **Produkt** kosinusa pretvorimo u **zbroj** kosinusa.

- Pripadne **sume** računaju se prijelazom na **kompleksne** brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao **geometrijske** sume ($N+1$ -i korijeni iz jedinice).

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Dakle, $\{T_0, T_1, \dots, T_N\}$ je **ortogonalna** baza u prostoru polinoma \mathcal{P}_N obzirom na **diskretni** skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^N f(x_j) g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija **ne možemo** dodati **sljedeći** Čebiševljev polinom T_{N+1} , jer je

• njegov **vektor** vrijednosti u zadanim točkama **nul-vektor**.

Napomena: **Unitarni** prostor “događaja” je \mathbb{R}^{N+1} , s tim da

• svakoj **funkciji** f pridružujemo

• **vektor** njezinih vrijednosti u točkama x_0, \dots, x_N .

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Neka je f_n aproksimacija za f po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^n d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \|T_k\|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_k(x_j), \quad k = 0, \dots, N.$$

Napomena: koeficijenti d_k ovise o N , samo to nije posebno označeno!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za zadane f i N , ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_k(x_j), \quad k = 0, \dots, N,$$

se **jednostavno** računaju!

Ako koeficijenti a_k relativno **brzo** padaju, onda za relativno **male** vrijednosti N (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se a_k i d_k **podudaraju** na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije **diskretne** ortogonalnosti vrijede i u **ekstremima** polinoma T_{N+1} .

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0, 1]$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0, 1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x - 1)$.

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.37645281291919543163	13	0.00000000001717587317
1	0.34314575050761980479	14	-0.00000000000273642009
2	-0.02943725152285941438	15	0.00000000000043819577
3	0.00336708925556438925	16	-0.00000000000007048360
4	-0.00043327588861004446	17	0.000000000000001138172
5	0.00005947071198957983	18	-0.000000000000000184431
6	-0.00000850296754120286	19	0.000000000000000029978
7	0.00000125046736220057	20	-0.000000000000000004886
8	-0.00000018772799565082	21	0.000000000000000000798
9	0.00000002863025064840	22	-0.000000000000000000131
10	-0.00000000442095698068	23	0.000000000000000000021
11	0.00000000068956027323	24	-0.000000000000000000004
12	-0.00000000010845068551	25	0.000000000000000000001

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x . Testirati za razne n i x .
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x .

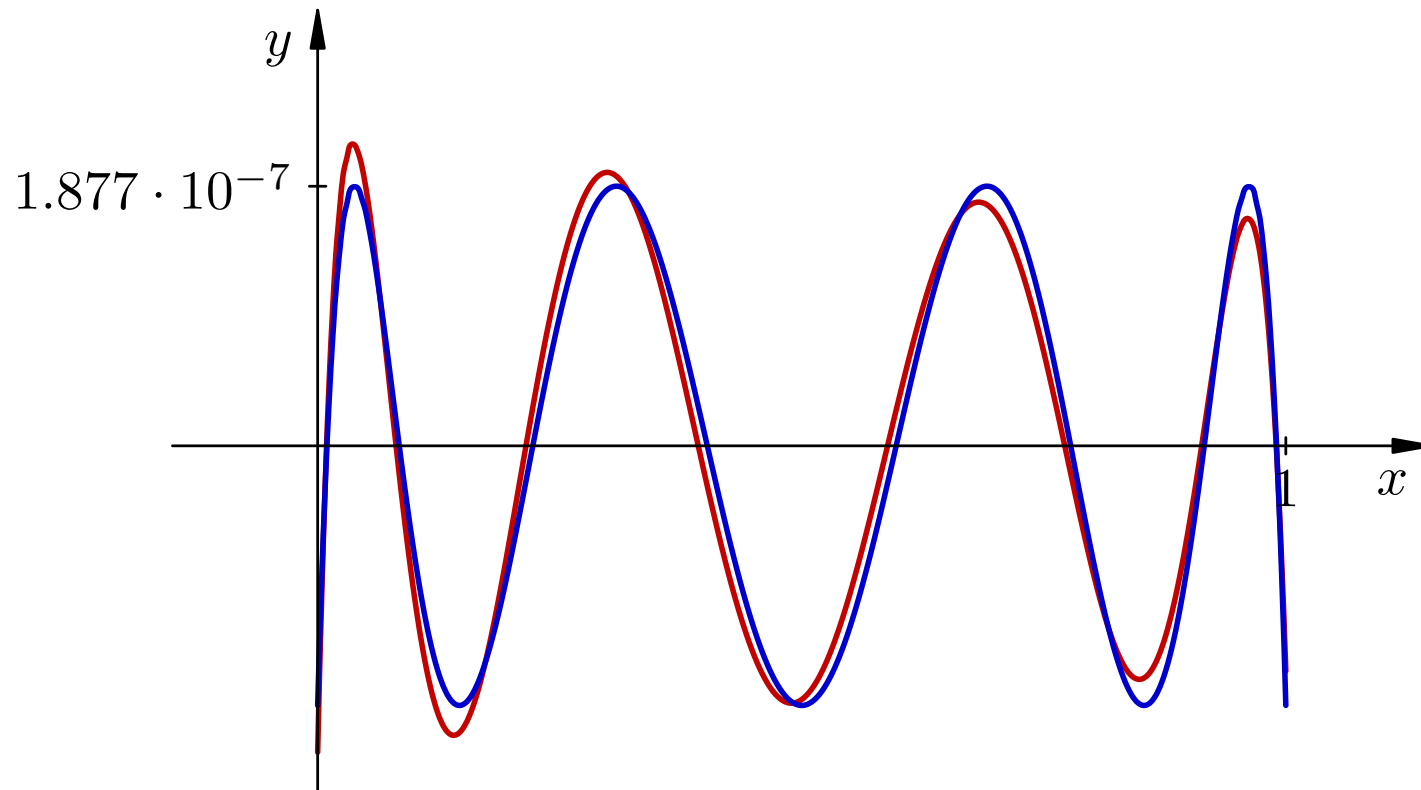
U prethodnom razvoju za $\ln(x + 1)$ uzmemo samo članove do indeksa 7, tj. neka je prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$.

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^7 a_k T_k^*(x), \quad e_7(x) = a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).$$

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8T_8^*(x)$ plavom bojom.



Računanje koeficijenata iz diskretne ortog.

Ilustracija **brzine** konvergencije koeficijenata $d_k^{(N+1)}$ prema pravim koeficijentima a_k , u ovisnosti o **broju** točaka $N + 1$:

- `09_PROGS\TN_COEF\tn_28.out` za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$,
- `09_PROGS\TN_COEF\tn_04.out` za $\ln(1 + x)$ na $[0, 1]$.

Spomeni dva algoritma za računanje.

Literatura

- Luke Y. L., “**Mathematical functions and their approximations**”, Academic Press, 1975.