

# *Numerička matematika*

## *11. predavanje*

Saša Singer

[singer@math.hr](mailto:singer@math.hr)

[web.math.hr/~singer](http://web.math.hr/~singer)

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Numerička integracija (nastavak):
  - Produljena trapezna formula za trigonometrijske polinome.
  - Ekstrapolacija i Rombergov algoritam.
  - Primjeri za Rombergov algoritam.
  - Integracijske formule visokog stupnja egzaktnosti.
    - Gauss–Christoffel formule.
    - Gauss–Radau formule.
    - Gauss–Lobatto formule.
  - Primjer za težinske Newton–Cotesove i Gaussove formule.

## Informacije — zadaće i rok

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

**Dodatni** bodovi “čekaju na vas”.

**Rok za predaju** zadaća je

1 dan **drugog** kolokvija, do **početka** kolokvija.

Aplikacija se tada “zatvara za javnost” — bodovi su **konačni**.

# Informacije

Konzultacije (službeno):

- samo za NM: ponedjeljak u 13 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu A2.

- Drugi kolokvij: ponedjeljak, 28. 5., u 12 sati,
- Popravni kolokvij: ponedjeljak, 11. 6., u 12 sati.

Uputa: “izbjegnite” popravni — obavite to ranije!

# Informacije

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/](http://web.math.hr/~singer/num_mat/)

Tamo su kompletna **predavanja** od prošle **četiri** godine, a stizat će i **nova** (kako nastaju).

**Skraćena** verzija **skripte** — **1. dio** (prvih **7** tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat1.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf)

**Skraćena** verzija **skripte** — **2. dio** (drugih **6** tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat2.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf)

# Informacije — demonstratori

Kolegij “**Numerička matematika**” ima čak **tri demonstratora**:

- **Mario Berljafa** — termin: **petak, 10–12**, u **Pr3**, **poželjna** najava mailom,
- **Anastasia Kruchinina** — termin: **ponedjeljak, 17–19**, **poželjna** najava mailom,
- **Melkior Ornik** — termin: **utorak, 16–18**, sastanak pred oglasnom pločom, **nužna** najava mailom.

Demosi lijepo **mole** da im se **najavite** mailom koji dan ranije!

- Njihove mail adrese nađete na **oglasnoj ploči**,
- ili se javite meni.

# Produljena trapezna formula za periodičke funkcije

## Prednosti produljene trapezne metode

Iako produljena trapezna metoda **egzaktno** integrira samo polinome stupnja 1 (odnosno, linearne splajnove), ona “puno bolje” integrira **trigonometrijske funkcije**.

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je  $[a, b]$  interval  $[0, 2\pi]$  i neka je  $\mathcal{T}_N$  familija trigonometrijskih funkcija,

$$\mathcal{T}_N[0, 2\pi] = \left\{ f \mid f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\}.$$

**Tvrdnja.** Neka je  $E_n^T(f)$  greška **produljene** trapezne formule s  $n$  podintervala za funkciju  $f$ . Tada vrijedi

$$E_n^T(f) = 0 \quad \text{za svaki } f \in \mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi],$$

tj. imamo **egzaktnu** integraciju na prostoru  $\mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi]$ .



# Greška trapezne metode za trig. funkcije

**Dokaz.** Provjeru je najlakše napraviti korištenjem kompleksne eksponencijalne funkcije

$$e_k(x) := e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Greška **produljene trapezne formule** za funkciju  $e_k$  je prava vrijednost integrala **minus** aproksimacija po trapeznoj formuli

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e_k(x) dx - \frac{\pi}{n} \left( e_k(0) + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} e_k\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + e_k(2\pi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n}. \end{aligned}$$

## Greška trapezne metode za trig. funkcije

Kad je  $k = 0$ , onda je

$$E_n^T(e_0) = \int_0^{2\pi} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = x \Big|_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Kad je  $k > 0$ , imamo

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n} \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} = 0 \right\} = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left( e^{2\pi ki/n} \right)^\ell. \end{aligned}$$

## Greška trapezne metode za trig. funkcije

Ako  $n|k$ , tj. ako je  $k = 0 \pmod{n}$ , onda je  $e^{2\pi ki/n} = 1$ , pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = -2\pi.$$

Ako  $n \nmid k$ , tj. ako je  $k \neq 0 \pmod{n}$ , onda je  $e^{2\pi ki/n} \neq 1$ , pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (e^{2\pi ki/n})^\ell = (\text{geometrijski red})$$

$$= -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - e^{2\pi kin/n}}{1 - e^{2\pi ki/n}} = -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi ki/n}} = 0.$$

# Greška trapezne metode za trig. funkcije

Zaključujemo da je

$$E_n^T(e_k) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Uzimanjem **realnog** i **imaginarnog** dijela dobivamo

$$E_n^T(\cos(kx)) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}, \end{cases}$$

$$E_n^T(\sin(kx)) = 0.$$

Posebno, iz prve relacije odmah **slijedi** da je

$$E_n^T(e_k) = 0 \quad \text{za } k = 0, \dots, n-1. \quad \blacksquare$$

# Integral Fourierovog reda

Neka je  $f$  periodička funkcija s periodom  $2\pi$ , koja ima **uniformno konvergentan** Fourierov razvoj (smijemo integrirati član po član!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

pri čemu su  $a_k$  i  $b_k$  **Fourierovi koeficijenti** za funkciju  $f$ .

**Greška** aproksimacije za integral funkcije  $f$  korištenjem **produljene trapezne** formule je

$$E_n^T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k E_n^T(\cos(kx)) + b_k E_n^T(\sin(kx))) = -2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell \cdot n}.$$

Što je funkcija  $f$  **glada**, to Fourierovi koeficijenti **brže** teže u 0.

# Integral Fourierovog reda

Preciznije, neka je  $f \in C^r(\mathbb{R})$ , tj.  $f$  ima  $r$  neprekidnih derivacija na cijelom  $\mathbb{R}$ . Onda je

$$a_k = O(k^{-r}) \quad \text{za } k \rightarrow \infty.$$

Slično vrijedi i za  $b_k$ . To znači da je greška u  $E_n^T(f)$  približno jednaka prvom članu greške za  $\ell = 1$ , tj.

$$E_n^T(f) \approx -2\pi a_n,$$

odakle slijedi

$$E_n^T(f) = O(n^{-r}) \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Budući da je općenito  $h = (b - a)/n$  (ovdje je  $h = 2\pi/n$ ), onda ovu ocjenu možemo zapisati kao

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za } h \rightarrow 0.$$

# Integral Fourierovog reda

Ako je  $r > 2$ , onda je ova ocjena za **periodičke** funkcije

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za } h \rightarrow 0,$$

bitno **bolja** od relacije

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = O(h^2), \quad \text{za } h \rightarrow 0,$$

koja vrijedi za **neperiodičke** funkcije  $f$ .

Zadnju “standardnu” asimptotsku ocjenu možemo napisati i kao  $E_n^T(f) = O(n^{-2})$ , za  $n \rightarrow \infty$ .

Posebno, ako je  $r = \infty$ , onda **produljena trapezna** formula za **periodičke** funkcije konvergira brže od **bilo koje** potencije od  $h$ .

## Još jedno dobro svojstvo produljene trapezne $f$ .

Neka je  $f$  definirana na  $\mathbb{R}$  i za neki  $r \geq 1$  ima sljedeća svojstva:

$$f \in C^{2r+1}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2r+1)}(x)| dx < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(2\rho-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(2\rho-1)}(x) = 0, \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Tada se može pokazati da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) + E(f; h),$$

pri čemu greška zadovoljava  $E(f; h) = O(h^{2r+1})$ , kad  $h \rightarrow 0$ .



# Brza konvergencija produljene trapezne formule

**Primjer.** Korištenjem produljene trapezne formule izračunajte

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

za razne vrijednosti  $h$ .

Funkcija  $e^{-x^2}$  zadovoljava sva **svojstva** s prethodne folije, i to za **svaki**  $r \in \mathbb{N}$ . Onda možemo upotrijebiti formulu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh),$$

s tim da za grešku vrijedi  $E(f; h) = O(h^{2r+1})$ , kad  $h \rightarrow 0$ .

Primjenom za  $r = 1, 2, 3, \dots$ , vidimo da **greška** teži u nulu **brže** od bilo koje potencije od  $h$ .

## Brza konvergencija produljene trapezne formule

Prethodnu formulu upotrebljavamo tako da u sumi, umjesto  $\infty$ , uzmemo **dovoljno velik** realni (cijeli) broj  $M$ , pa dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-M}^M f(kh).$$

Budući da  $e^{-x^2}$  **brzo trne** za  $x \rightarrow \infty$ , odredimo  $M$  tako da je  $Mh = 10$ , što odgovara granicama integracije od  $-10$  do  $10$ .

**Prava** vrijednost integrala je  $1$ , a za razne  $h$  dobivamo

$h$	$n$	Aproksimacija $I_n(f)$	Greška $I(f) - I_n(f)$
1	20	1.000103446372407640	-0.000103446372407639
0.5	40	1.00000000000000000010	-0.00000000000000000015
0.25	80	1.00000000000000000000	-0.00000000000000000000

# Integracija singularne funkcije

Pretpostavimo sada da integriramo funkciju  $f$  na **konačnoj** domeni, s tim da  $f$  ima **singularitet** u **jednoj** ili **obje** granice.

**Ideja.** Napraviti takvu transformaciju da

- **granice** integracije postanu  $\pm\infty$ , a
- funkcija zadovoljava “**lijepa svojstva**” za **brzu** integraciju produljenom trapeznom formulom.

Pretpostavimo da računamo integral

$$I := \int_a^b f(x) dx,$$

takav da su obje granice  $a$  i  $b$  konačne.

# Integracija singularne funkcije

Konstruiramo preslikavanje

$$z = z(x) \quad (\text{ili ekvivalentno}) \quad x = x(z),$$

takvo da je

$$z(a) = -\infty, \quad z(b) = \infty.$$

Tada se zamijeni varijabla u integralu  $I$ , pa imamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x(z)) \left( \frac{dx}{dz} \right) dz.$$

**Točnost** numeričke integracije ovisi o izabranoj transformaciji.

# Integracija singularne funkcije

Primjeri takvih transformacija:

● eksponencijalna transformacija

$$x = \frac{1}{2}(a + b + (b - a) \operatorname{th}(z)),$$

odnosno

$$z = \operatorname{Arth} \left( \frac{2x - a - b}{b - a} \right),$$

● dvostruka eksponencijalna transformacija (jako dobra)

$$x = \frac{1}{2} \left[ a + b + (b - a) \operatorname{th} \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right) \right],$$

pri čemu je

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\pi}{4}(b - a) \operatorname{ch} z}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right)}.$$

# Rombergov algoritam

# Općenito o Rombergovom algoritmu

Pri izvodu Rombergovog algoritma koristimo se sljedećim principima:

- udvostručavanjem broja podintervala u produljenoj trapeznoj metodi,
- eliminacijom vodećeg člana u asimptotskom razvoju greške, iz dvije susjedne produljene formule.

Ponovljena primjena ovog principa zove se Richardsonova ekstrapolacija.

Za početak, treba objasniti

- što je to asimptotski razvoj.

# Asimptotski razvoj

Da bismo mogli približno izračunati sumu **konvergentnog** reda neke funkcije  $f$  u točki  $x$ , oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

red smo aproksimirali **konačnom** parcijalnom sumom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n p_n(x).$$

Time smo podrazumijevali da **ostatak** reda teži prema **nuli**, i to **po**  $N$ , za **fiksni**  $x$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f(x) - f_N(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n p_n(x) = 0.$$



## Precizna definicija asimptotskog niza

Ako zamijenimo ulogu  $N$  i  $x$  u konvergenciji razvoja, dobivamo novi pojam **asimptotskog** razvoja. Pritom red uopće **ne mora** konvergirati.

Precizna definicija **asimptotskog razvoja** u **okolini** neke točke bazirana je na definiciji asimptotskog **niza** u okolini te točke.

**Definicija. (Asimptotski niz)** Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}$  neka domena i  $c \in \text{Cl } D$  neka **točka** iz zatvarača skupa  $D$ , s tim da  $c$  može biti i  $+\infty$  ili  $-\infty$ . Nadalje, neka je  $\varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , niz funkcija za kojeg vrijedi

$$\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x)) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

za **svaki**  $n \in \mathbb{N}$ . Tada kažemo da je  $(\varphi_n)$  **asimptotski niz** kad  $x \rightarrow c$  u skupu  $D$ . ■

## Precizna definicija asimptotskog razvoja

**Podsjetnik.** Oznaka  $\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x))$  znači da svaka funkcija  $\varphi_n$  raste **bitno sporije** od prethodne funkcije  $\varphi_{n-1}$  u okolini neke točke (kod nas  $c$ ), u smislu da vrijedi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in D}} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = 0,$$

što uključuje i pretpostavku da je  $\varphi_{n-1}(x) \neq 0$  na nekoj okolini točke  $c$  gledano u skupu  $D$ , osim eventualno u samoj točki  $c$ .

**Definicija.** (Asimptotski razvoj) Neka je  $(\varphi_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , **asimptotski niz** kad  $x \rightarrow c$  u skupu  $D$ . **Formalni red** funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

# Precizna definicija asimptotskog razvoja

je **asimptotski razvoj** funkcije  $f$  za  $x \rightarrow c$  u skupu  $D$ , oznaka

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

ako za **svaki**  $N \in \mathbb{N}$  vrijedi relacija asimptotskog ponašanja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_N(x)) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

tj. **apsolutna greška** između  $f$  i  $(N - 1)$ -e parcijalne sume reda **raste najviše jednako brzo** kao i  $N$ -ti član asimptotskog niza, u okolini točke  $c$ . ■

# Euler–MacLaurinova formula

Asimptotski razvoj pogreške za produljenu trapeznu metodu integracije daje Euler–MacLaurinova formula.

Teorem. (Euler–MacLaurinova formula) Neka su  $m$  i  $n$  cijeli brojevi takvi da je  $m \geq 0$  i  $n \geq 1$ . Definiramo ekvidistantnu mrežu s  $n$  podintervala na  $[a, b]$ , tj.

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Pretpostavimo da je  $f \in C^{(2m+2)}[a, b]$ . Za pogrešku produljene trapezne metode vrijedi

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^m \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

# Euler–MacLaurinova formula

gdje su koeficijenti

$$d_{2i} = -\frac{B_{2i}}{(2i)!} (b-a)^{2i} (f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)),$$

a ostatak je

$$F_{n,m} = \frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)! n^{2m+2}} \cdot \int_a^b \bar{B}_{2m+2} \left( \frac{x-a}{h} \right) f^{(2m+2)}(x) dx.$$

Ovdje su  $B_{2i}$  Bernoullijevi brojevi,

$$B_i = -\int_0^1 B_i(x) dx, \quad i \geq 1,$$

# Euler–MacLaurinova formula

a  $\overline{B}_i$  je periodičko proširenje običnih Bernoullijevih polinoma

$$\overline{B}_i(x) = \begin{cases} B_i(x), & \text{za } 0 \leq x \leq 1, \\ \overline{B}_i(x-1), & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz je u klasičnim udžebnicima numeričke analize. ■

U koeficijentima  $d_{2i}$  javljaju se Bernoullijevi brojevi. Osim  $B_1 = -\frac{1}{2}$ , svi ostali neparni Bernoullijevi brojevi su 0, a prvih nekoliko parnih je:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Nadalje, brojevi  $B_{2i}$  vrlo brzo rastu po apsolutnoj vrijednosti, tako da je  $B_{60} \approx -2.139994926 \cdot 10^{34}$ .

## Eliminacija člana greške

“Red” u  $n^{-2}$ , koji se javlja u **asimptotskoj** ocjeni pogreške za produljenu trapeznu metodu

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^m \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

- ne konvergira — kad “glatkoća”  $m$  raste u  $\infty$ , jer koeficijenti  $d_{2i}$  ne teže prema nuli.

Naravno, znamo da  $E_n(f) \rightarrow 0$ , kad broj podintervala  $n \rightarrow \infty$ .

**Ideja:** Ako je funkcija  $f$  dovoljno glatka,

- eliminirati član po član u sumi za grešku,
- na osnovu izračunatih vrijednosti integrala s  $n/2$  i  $n$  podintervala, odnosno, s duljinama koraka  $2h$  i  $h$ .

# Izvod Rombergovog algoritma

Neka je  $I_n^{(0)}$  trapezna formula  $n$  podintervala.

Iz Euler–MacLaurinove formule, (ako je funkcija  $f$  dovoljno glatka i  $n$  paran), za **asimptotski razvoj** greške imamo

$$I - I_n^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{d_4^{(0)}}{n^4} + \dots + \frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n,m}$$

$$I - I_{n/2}^{(0)} = \frac{4d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{16d_4^{(0)}}{n^4} + \dots + \frac{2^{2m}d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n/2,m}.$$

Želimo **eliminirati** prvi član greške s  $n^{-2}$ , pa **prvi** razvoj pomnožimo s 4 i oduzmemo mu **drugi** razvoj. Dobivamo

$$4(I - I_n^{(0)}) - (I - I_{n/2}^{(0)}) = -\frac{12d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{60d_6^{(0)}}{n^6} + \dots$$



# Izvod Rombergovog algoritma

Premješanjem članova koji imaju  $I$  na lijevu stranu, a zatim dijeljenjem, dobivamo

$$I = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} - \frac{4d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{20d_6^{(0)}}{n^6} + \dots$$

Prvi član zdesna uzimamo kao bolju, popravljenu aproksimaciju integrala. Označimo tu aproksimaciju s

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3}, \quad n \text{ paran}, n \geq 2.$$

Sada u formuli za grešku, da bismo lakše računali, definiramo

$$d_4^{(1)} = -4d_4^{(0)}, \quad d_6^{(1)} = -20d_6^{(0)}, \dots$$

# Izvod Rombergovog algoritma

Time smo dobili **novi** integracijski niz  $I_2^{(1)}, I_4^{(1)}, I_8^{(1)}, \dots$

Njegova je greška

$$I - I_n^{(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{d_6^{(1)}}{n^6} + \dots$$

Sličan argument kao i prije možemo upotrijebiti i dalje.

Eliminirajmo **prvi** član pogreške iz  $I_n^{(1)}$  i  $I_{n/2}^{(1)}$ ,

$$I - I_{n/2}^{(1)} = \frac{16d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{64d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

uz uvjet da je funkcija dovoljno glatka i da je  $n$  djeljiv s 4.

Tada je

$$16(I - I_n^{(1)}) - (I - I_{n/2}^{(1)}) = \frac{-48d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

# Izvod Rombergovog algoritma

odnosno

$$I = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15} - \frac{-48d_6^{(1)}}{15n^6} + \dots$$

Ponovno, prvi član s desne strane proglasimo za novu aproksimaciju integrala

$$I_n^{(2)} = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15}, \quad n \text{ djeljiv s } 4, \quad n \geq 4.$$

Induktivno, nastavljanjem postupka, dobivamo Richardsonovu ekstrapolaciju

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad n \geq 2^k.$$

# Izvod Rombergovog algoritma

Pritom je **greška** jednaka

$$\begin{aligned} E_n^{(k)} &= I - I_n^{(k)} = \frac{d_{2k+2}^{(k)}}{n^{2k+2}} + \dots \\ &= \beta_k (b - a) h^{2k+2} f^{(2k+2)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \end{aligned}$$

Sada možemo složiti **Rombergovu tablicu**

$$\begin{array}{cccc} I_1^{(0)} & & & \\ I_2^{(0)} & I_2^{(1)} & & \\ I_4^{(0)} & I_4^{(1)} & I_4^{(2)} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

# Poredak računanja

Poredak računanja u tablici je sljedeći:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 2 & 3 & & \\ 4 & 5 & 6 & \cdot \\ 7 & 8 & 9 & \dots \end{array}$$

Iz ocjene greške možemo izvesti **omjere grešaka** u **stupcu** Rombergove tablice, uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije  $f$ . Dobivamo

$$\frac{E_n^{(k)}}{E_{2n}^{(k)}} \approx 2^{2k+2},$$

## Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

tj. omjeri pogrešaka u stupcu se moraju ponašati kao

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 4 & 1 & & & & & \\ 4 & 16 & 1 & & & & \\ 4 & 16 & 64 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Puno ilustrativnije od omjera grešaka  $E_n^{(k)} / E_{2n}^{(k)} \approx 2^{2k+2}$  je promatranje eksponenta omjera grešaka  $2k + 2$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 2 & 4 & 1 & & & & \\ 2 & 4 & 6 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

# Primjeri za Rombergov algoritam

## Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

Pokažimo na primjeru da prethodni omjeri pogrešaka u stupcu vrijede samo ako je funkcija dovoljno glatka.

**Primjer.** Rombergovim algoritmom s točnošću  $10^{-12}$  nađite vrijednosti integrala

$$\int_0^1 e^x dx, \quad \int_0^1 x^{3/2} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

i pokažite kako se ponašaju omjeri pogrešaka i eksponenti omjera pogrešaka u stupcima.



# Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija ima **beskonačno** mnogo **neprekidnih** derivacija na  $[0, 1]$ , pa bi se računanje integrala moralo ponašati po predviđanju.

Ako uspoređujemo vrijednosti samo “**po dijagonali**” tablice, nakon  $2^5 = 32$  podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost integrala  $I_5$  takvu da je

$$I_5 = 1.71828182845904524$$

$$I = e - 1 = 1.71828182845904524$$

$$I - I_5 = 0.$$

# Eksponencijalna funkcija

Omjeri pogrešaka u stupcima su

0	1.0000					
1	3.9512	1.0000				
2	3.9875	15.6517	1.0000			
3	3.9969	15.9913	62.4639	1.0000		
4	3.9992	15.9777	63.6087	249.7197	1.0000	
5	3.9998	15.9944	63.9017	254.4010	1000.5738	1.0000

pa uz malo “kreativnog vida” vidimo da su omjeri prema predviđanju 4, 16, 64, 256, 1024, ...

# *Eksponencijalna funkcija*

**Eksponenti** omjera pogrešaka su

0	1.0000					
1	1.9823	1.0000				
2	1.9955	3.9682	1.0000			
3	1.9989	3.9920	5.9650	1.0000		
4	1.9997	3.9980	5.9912	7.9642	1.0000	
5	1.9999	3.9995	5.9978	7.9910	9.9666	1.0000

pa ponovno čitamo da su eksponenti omjera pogrešaka  
2, 4, 6, 8, 10, ...

## Funkcija $x^{3/2}$

Funkcija  $f(x) = x^{3/2}$  ima **neograničenu drugu** derivaciju u 0,

- pa bi “**zanimljivo ponašanje**” moralo početi već u **drugom** stupcu Rombergove tablice, jer
- za **trapez** je funkcija **dovoljno glatka** za ocjenu pogreške.

Nakon  $2^{15}$  podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost

$$I_{15} = 0.400000000000004512$$

$$I = 2/5 = 0.400000000000000000$$

$$I - I_{15} = -0.000000000000004512.$$

Primijetite da je broj intervala poprilično **velik**!

# Funkcija $x^{3/2}$

Što je s omjerima pogrešaka?

0	1.0000					
1	3.7346	1.0000				
2	3.8154	5.4847	1.0000			
3	3.8721	5.5912	5.6484	1.0000		
4	3.9112	5.6331	5.6559	5.6566	1.0000	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
15	3.9981	5.6569	...	...	5.6569	1.0000

Nakon prvog stupca omjeri pogrešaka su se **stabilizirali**.

## Funkcija $x^{3/2}$

Bit će nam mnogo lakše provjeriti što se događa, ako napišemo samo **eksponente** omjera pogrešaka.

0	1.0000					
1	1.9010	1.0000				
2	1.9318	2.4554	1.0000			
3	1.9531	2.4832	2.4978	1.0000		
4	1.9676	2.4939	2.4998	2.4999	1.0000	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
15	1.9993	2.5000	...	...	2.5000	1.0000

Eksponenti omjera pogrešaka od **drugog** stupca nadalje su za točno **1** veći od eksponenta same funkcije (integriramo!).

## Funkcija $\sqrt{x}$

Situacija s funkcijom  $f(x) = \sqrt{x}$  mora biti još **gora**, jer ona ima **neograničenu** **prvu** derivaciju u 0.

Nakon  $2^{15}$  podintervala u trapeznoj formuli, **ne dobivamo** željenu točnost

$$I_{15} = 0.66666665510837633$$

$$I = 2/3 = 0.66666666666666666667$$

$$I - I_{15} = 0.00000001155829033.$$

# Funkcija $\sqrt{x}$

Omjeri pogrešaka u tablici su:

0	1.0000						
1	2.6408	1.0000					
2	2.6990	2.8200	1.0000				
3	2.7393	2.8267	2.8281	1.0000			
4	2.7667	2.8281	2.8284	2.8284	1.0000		
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	
15	2.8271	2.8284	...		...	2.8284	1.0000



# Funkcija $\sqrt{x}$

Pripadni eksponenti su

0	1.0000						
1	1.4010	1.0000					
2	1.4324	1.4957	1.0000				
3	1.4538	1.4991	1.4998	1.0000			
4	1.4681	1.4998	1.5000	1.5000	1.0000		
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	
15	1.4993	1.5000	...		...	1.5000	1.0000

Produljena trapezna formula još uvijek konvergira, ali konvergencija više nije  $O(h^2)$ , već samo  $O(h^{3/2})$ .

# Zadaci

U posljednja dva primjera, Rombergovom algoritmu može se “pomoći” tako da **supstitucijom** u integralu dobijemo **glatku** funkciju.

● U oba slučaja, supstitucija je  $x = t^2$ .

Provjerite što se događa u Rombergovom algoritmu **nakon** ove supstitucije.

Ako u posljednjem integralu promijenimo **granice** integracije

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx$$

što mislite kojoj će se funkciji iz prethodnih primjera **najsličnije** ponašati omjeri pogrešaka?

## Druge oznake

U literaturi postoji i drugačija oznaka za aproksimacije integrala u Rombergovoj tablici

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}.$$

Sama tablica ima oblik

$$\begin{array}{cccc} T_0^{(0)} & & & \\ T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & \\ T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

## Još malo o Rombergovoj tablici

**Tvrdnja.** Drugi stupac Rombergove tablice odgovara produljenoj **Simpsonovoj** formuli — redom, s  $2, 4, 8, 16, \dots$  podintervala.

Nadimo **eksplicitnu** formulu za  $I_n^{(1)}$ . Ako trapezna formula ima

- $n$  podintervala, onda je pripadni  $h = (b - a)/n$ ,
- $n/2$  podintervala, onda je pripadni  $h_1 = 2(b - a)/n = 2h$ .

Iz **trapezних formula** za  $n$  i  $n/2$  podintervala,

$$I_n^{(0)} = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$I_{n/2}^{(0)} = \frac{h_1}{2}(f_0 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + f_n),$$

## Još malo o Rombergovoj tablici

uvrštavanjem u  $I_n^{(1)}$ , dobivamo

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1}{2} (f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{2h}{3} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{h}{3} (f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n), \end{aligned}$$

što je **Simpsonova formula** s  $n$  podintervala.

## Zadatak

Odgovaraju li ostali stupci u Rombergovoj tablici sljedećim **Newton–Cotesovim** formulama (Simpsonovoj formuli  $3/8$ , Booleovoj formuli, ... )?

Na sreću, odgovor je **ne!**

U protivnom, Rombergov algoritam **ne bi** konvergirao, recimo, za funkciju **Runge**. Za točnost  $10^{-12}$ , ako uspoređujemo “**dijagonalni dio**” tablice, potrebno je  $2^{10} = 1024$  podintervala, a dobiveni rezultat je

$$I_{10} = 2.74680153389003183$$

$$I = 2.74680153389003172$$

$$I - I_{10} = -0.000000000000000011.$$

## Oprez s oscilirajućim funkcijama

**Primjer.** Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(17\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka  $10^{-4}$ .

Podintegralna funkcija je **relativno brzo oscilirajuća** i ima **17** “grba”.

Tablicu ispisujemo **samo** na prvih par decimala (a računamo u punoj točnosti tipa **extended**).

## Oprez s oscilirajućim funkcijama

Rombergova tablica:

0	0.0000								
1	0.5000	0.6667							
2	0.6036	0.6381	0.6362						
3	0.6284	0.6367	0.6366	0.6366					
4	-0.0063	-0.2177	-0.2746	-0.2891	-0.2927				
5	0.0283	0.0398	0.0598	0.0622	0.0636	0.0640			
6	0.0352	0.0376	0.0374	0.0371	0.0370	0.0370	0.0370		
7	0.0369	0.0375	0.0374	0.0374	0.0374	0.0375	0.0375	0.0375	

Rezultat (sa svim znamenkama):

$$I_7 = 0.03744821953512704$$

$$I = 0.03744822190397537$$

$$I - I_7 = 0.00000000236884834.$$



## Oprez s oscilirajućim funkcijama

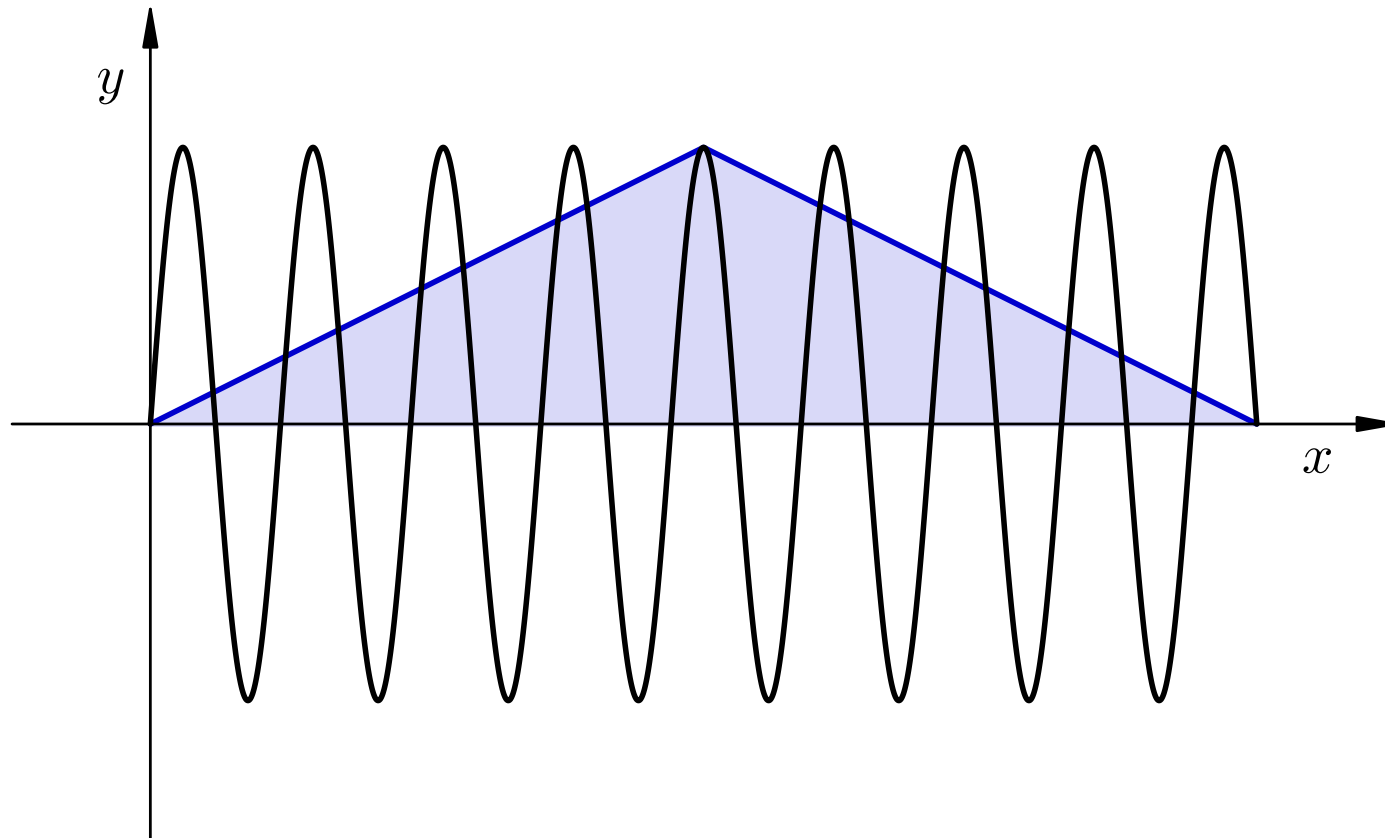
Što je razlog **stabilizacije** oko **jedne**, pa oko **druge** vrijednosti?

- **Nedovoljan** broj podintervala u trapeznoj formuli, koji **ne opisuje** dobro ponašanje funkcije.
- **Rješenje problema**: u svaku “**grbu**” treba staviti **barem nekoliko** točaka.

Sljedeće slike nam to zorno i pokazuju. Tek kad smo stavili **16** točaka u trapeznu formulu,

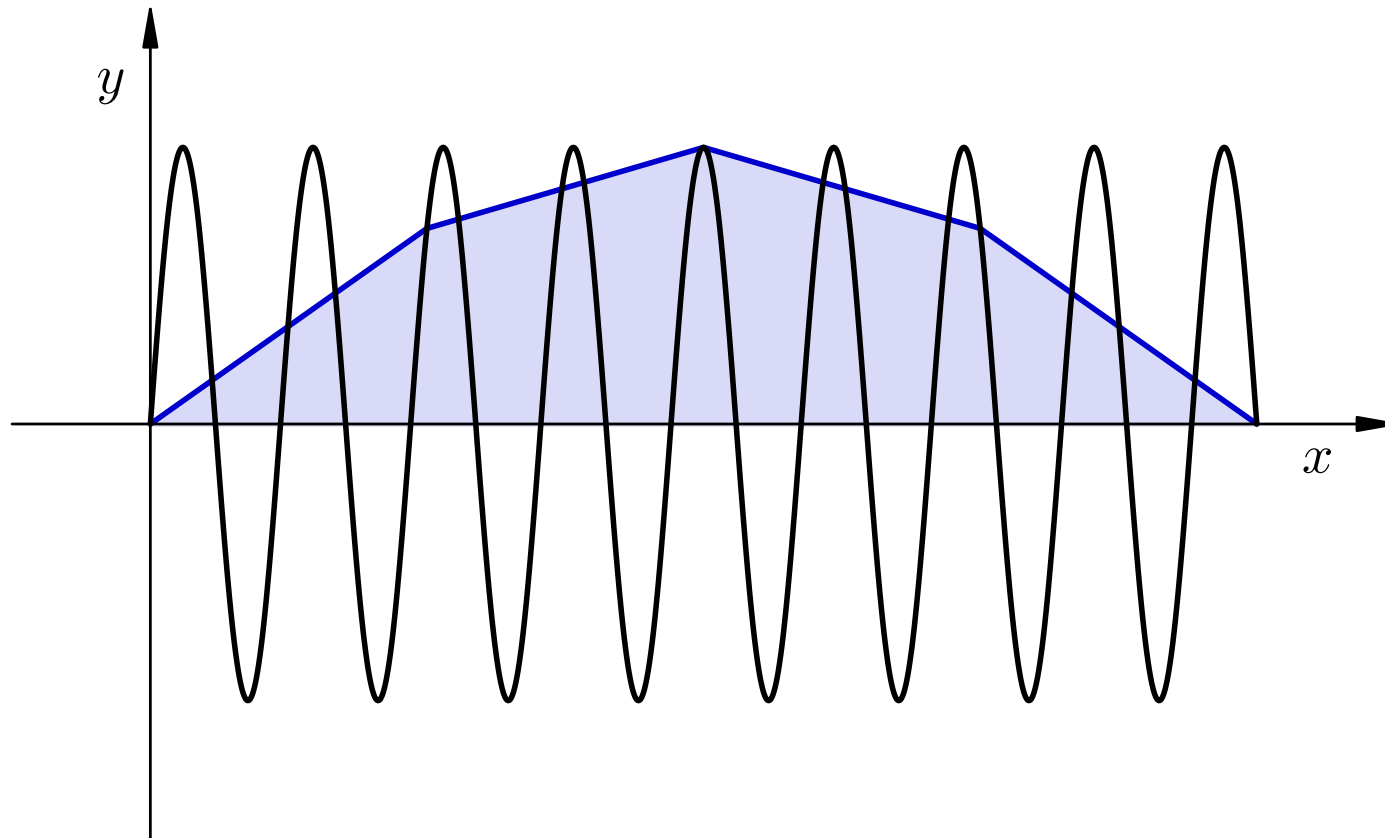
- stavili smo **skoro** jednu točku po grbi
- i trapezna formula je počela “**prepoznavati oblik**” podintegralne funkcije.

# Oprez s oscilirajućim funkcijama



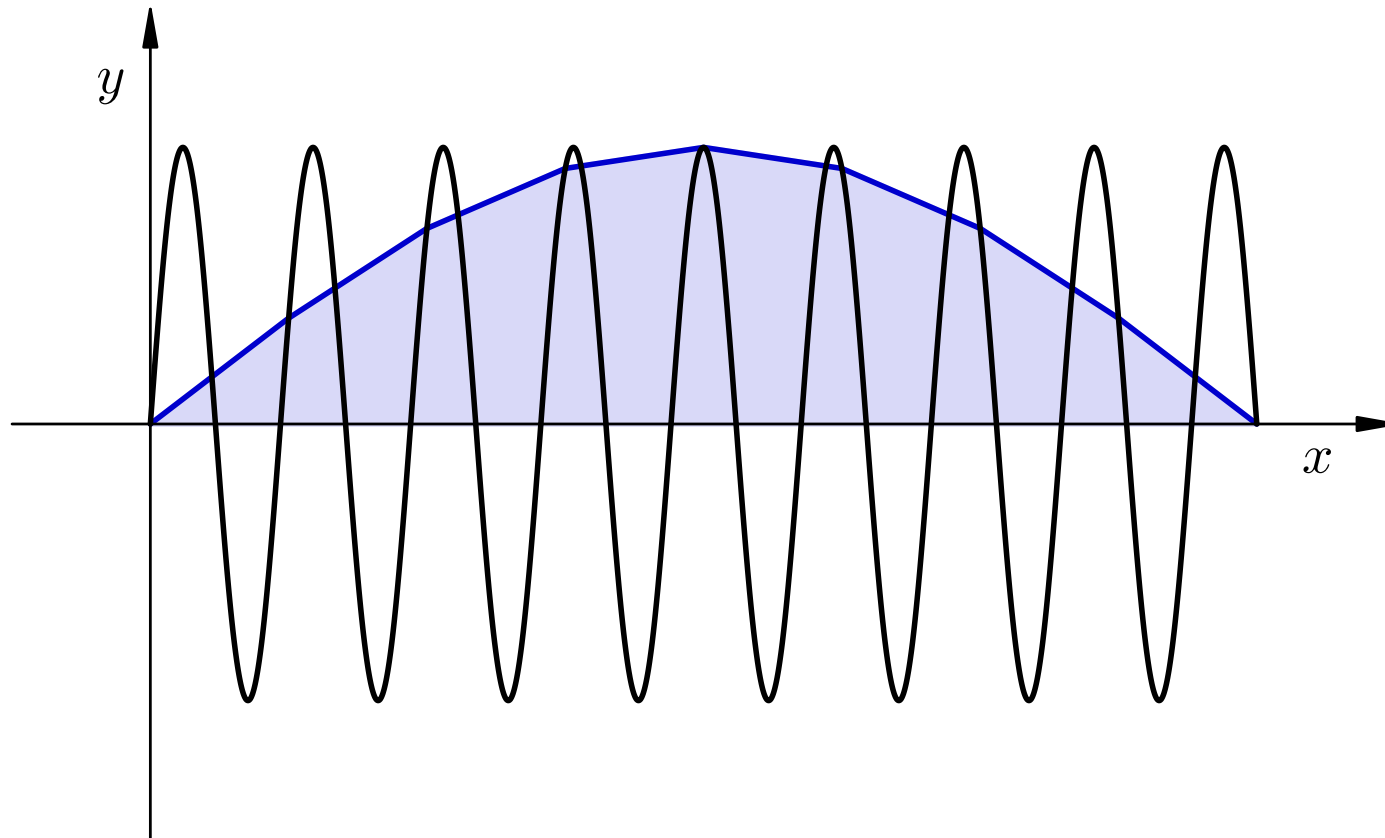
Produljena trapezna formula s 2 podintervala.

# Oprez s oscilirajućim funkcijama



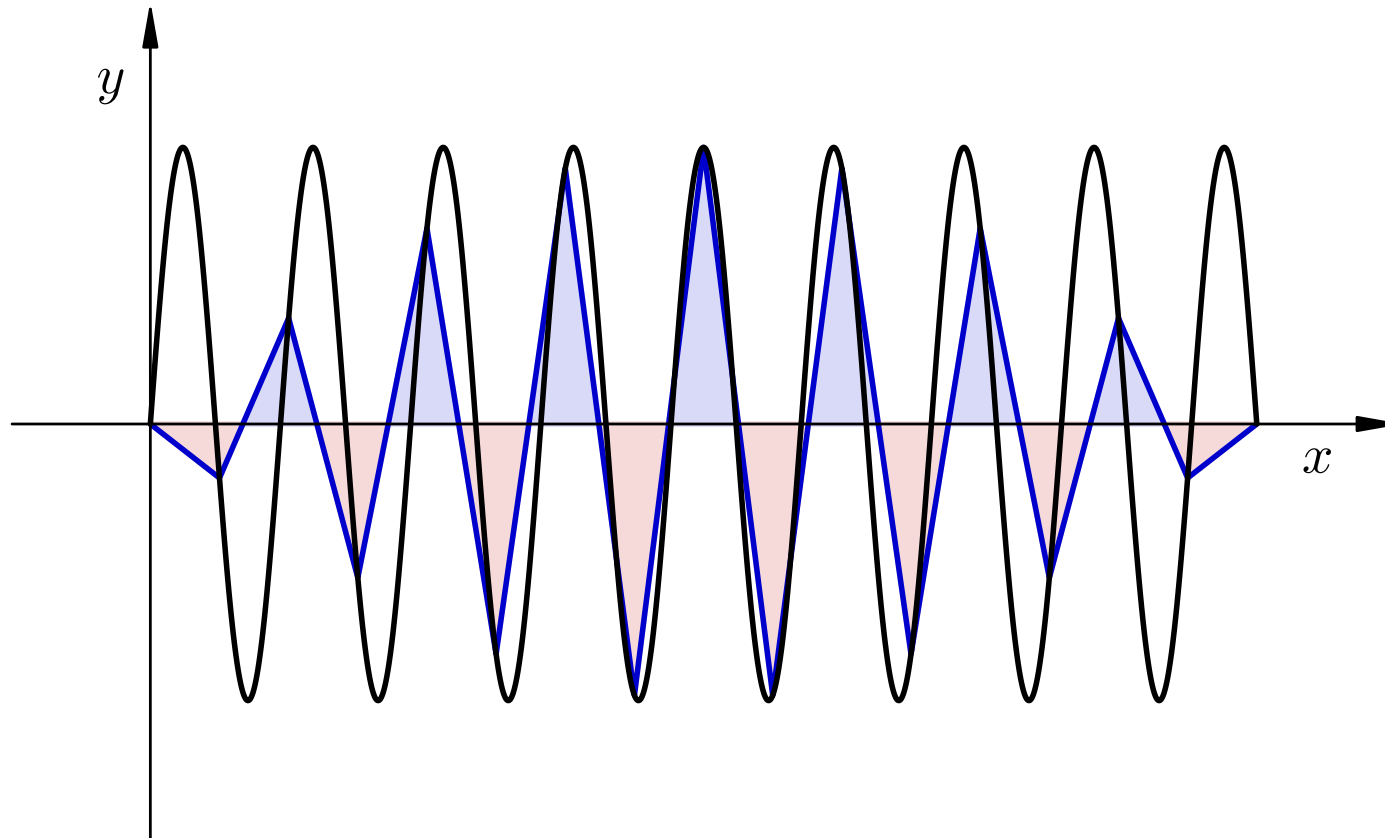
Produljena trapezna formula s 4 podintervala.

# Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula s 8 podintervala.

# Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula sa **16** podintervala.

## Zadatak

Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(257\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka  $10^{-12}$ .

Opres, ako u Rombergovom algoritmu

🚫 ne zahtijevate stavljanje dovoljnog broja podintervala, dobiveni rezultat bit će pogrešan!

# Trapez može biti brži od Romberga

**Primjer.** Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 e^{\cos(\pi x)} \cos(\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka  $10^{-4}$ .

U ovom primjeru događa se zanimljiv fenomen:

- produljena **trapezna** formula može **brže** izračunati **točan** rezultat nego **Rombergov** algoritam.

**Razlog:** “**Dobro**” ponašanje produljene **trapezne** formule za **periodičke** funkcije!

## Trapez može biti brži od Romberga

Početni dio Rombergove tablice:

0	1.17520119364380146		
1	0.58760059682190073	0.39173373121460049	
2	0.56516070872910212	0.55768074603150258	0.56874388035262938
3	0.56515910399248505	0.56515856908027936	0.56565709061686448
4	0.56515910399248503	0.56515910399248502	0.56515913965329873
5	0.56515910399248503	0.56515910399248503	0.56515910399248503

Crveno označeni brojevi imaju sve znamenke točne.

Rombergov algoritam daje netočniju aproksimaciju

$$I_5 = 0.56515914375273593.$$



# Trapez može biti brži od Romberga

**Sporost** Rombergovog algoritma posljedica je činjenice da

- trapezna formula s **jednim** podintervalom ima **veliku** grešku.
- Budući da ona ulazi u ekstrapolaciju rezultata na “**dijagonali**”, dijagonalni rezultati su **dosta** pogrešni.

Stvarno, za produljenu **trapeznu** formulu **ne vrijedi** isti razvoj pogreške (puno je **točnija** — zbog periodičnosti funkcije  $f$ , za koeficijente u **Euler–MacLaurin**ovoj formuli vrijedi  $d_{2i} = 0$ )!

**Rješenje problema:**

- usporedimo **susjedne** rezultate u **stupcima** tablice i ako se oni “**slože**” na odgovarajuću točnost, uzmemo ih kao aproksimaciju.

# Teorija integracijskih formula — nastavak

# Težinske integracijske formule — sažetak

Do sada smo radili **integracijske** formule oblika

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

(ispuštamo gornje indekse  $m$ ) u kojima su

- **čvorovi** integracije  $x_0, \dots, x_m$  bili **fiksni** — unaprijed **zadani**,
- a **težinske** koeficijente  $w_0, \dots, w_m$  određivali smo iz uvjeta **egzaktnosti** na vektorskom prostoru **polinoma**  $\mathcal{P}_d$  što **većeg** stupnja  $d$ .

Iz teorema o “interpolacijskim” formulama znamo da za **polinomni** stupanj egzaktnosti  $d$  takvih formula vrijedi  $d = m$ .

## Težinske integracijske formule — sažetak

Kod nekih formula (Simpson, srednja točka) dobili smo da je

- za **parne**  $m$ , stvarni stupanj egzaktnosti za **jedan veći**, tj. vrijedi  $d = m + 1$ ,

iako se težine **određuju** iz uvjeta **egzaktnosti** na prostoru  $\mathcal{P}_m$ .

U nastavku tražimo **integracijske** formule još **višeg** stupnja egzaktnosti — za koje vrijedi  $d > m$ . To znači da

- neki ili **svi čvorovi** integracije moraju biti “**slobodni**”,
- tako da i **njih** određujemo iz uvjeta **egzaktne** integracije.

Iz tradicionalnih razloga, zbog veze s

- **ortogonalnim** polinomima i njihovim **nultočkama**,
- takve formule se malo **drugačije** označavaju!

# Promjena oznaka za integracijske formule

Promjene u oznakama su:

- čvorovi se broje od 1, a ne od 0,
- broj čvorova označava se s  $n$ , umjesto  $m + 1$ .

Težinska integracijska ili kvadratura formula onda ima sljedeći oblik:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

- Broj  $n \in \mathbb{N}$  zove se red formule.

Opet ispuštamo gornje indekse  $n$ , tj. ne pišemo  $w_k^{(n)}$ ,  $x_k^{(n)}$ .

# Težinska funkcija u integracijskoj formuli

Pretpostavljamo da je **težinska** funkcija  $w$

- **pozitivna** (ili barem **nenegativna**) i **integrabilna** na  $[a, b]$ .

Ako je interval  $[a, b]$  **beskonačan**, moramo osigurati da prethodni integral **postoji**, bar u slučaju kad je

- funkcija  $f$  **polinom**, neovisno o stupnju.

To postizemo **zahtjevom** da svi **momenti** težinske funkcije  $w$

$$\mu_k := \int_a^b x^k w(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

**postoje** (kao integrali) i da su **konačni**.

Takve težinske funkcije  $w$  zovemo **polinomno** dopustivima.

Nadalje pretpostavljamo da je  $w$  takva!

# Interpolacijske težinske kvadrature formule

Uz ove pretpostavke i oznake,

• za bilo kojih  $n$  različitih čvorova  $x_1, \dots, x_n$ ,  
težinska integracijska ili kvadratura formula

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + E_n(f)$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem)  $d = n - 1$ ,

• ako i samo ako je interpolacijska,

tj. dobivena je kao

• egzaktni integral interpolacijskog polinoma funkcije  $f$  u čvorovima  $x_1, \dots, x_n$ .

## Težine u interpolacijskim formulama

Ekvivalentno, **polinomni** stupanj egzaktnosti **integracijske** formule je (barem)  $d = n - 1$ , **ako i samo ako** za **težinske** koeficijente  $w_k$  vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su  $\ell_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ , polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$  (stupanj tih polinoma je sada  $n - 1$ )

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Napomena: Ovo smo već **dokazali**, samo oznake su **nove!** ■



# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Nameće se prirodno pitanje: može li se postići i bolje, tj.

- možemo li dobiti veći stupanj egzaktnosti,  $d > n - 1$ ?

Uočite: Jedina šansa za to je

- “pažljiviji” izbor čvorova integracije  $x_k$ .

Naime, čim je  $d \geq n - 1$ ,

težine  $w_k$  su nužno određene prethodnom formulom, pa njih više ne možemo “birati”.

Odgovor je potvrđan i relativno jednostavan!

Za formulaciju rezultata definiramo tzv. polinom čvorova

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

**Teorem.** Neka je  $k$  zadani cijeli broj takav da je  $0 \leq k \leq n$ .

**Težinska integracijska formula**

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

ima **polinomni** stupanj egzaktnosti  $d = n - 1 + k$ , **ako i samo ako** je formula **interpolacijska i**

- polinom **čvorova**  $\omega_n$  je **ortogonalan** na **sve** polinome  $p \in \mathcal{P}_{k-1}$  s težinskom funkcijom  $w$ ,

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{k-1}.$$

# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

**Dokaz.** Iz prošlog teorema znamo da za stupanj **egzaktnosti** vrijedi  $d \geq n - 1$  ako i samo ako je formula **interpolacijska**.

● Preostaje pokazati da je  $d = n - 1 + k$  **ekvivalentno** relaciji **ortogonalnosti** za polinom  $\omega_n$ .

**1. smjer** (nužnost):  $d = n - 1 + k \implies$  **ortogonalnost**.

Neka je  $p \in \mathcal{P}_{k-1}$  **bilo koji** polinom stupnja najviše  $k - 1$ .

Za **produkt**  $f = \omega_n p$  onda vrijedi  $\omega_n p \in \mathcal{P}_{n+k-1}$ .

Zbog pretpostavke  $d = n - 1 + k$ , integracijska formula **egzaktno** integrira polinom  $f = \omega_n p$ , pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \omega_n(x_k) p(x_k).$$

# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

No, **svi** čvorovi  $x_k$  su **nultočke** polinoma čvorova  $\omega_n$ , tj. vrijedi

$$\omega_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Onda je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \omega_n(x_k) p(x_k) = 0,$$

za **svaki**  $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ , što dokazuje prvi smjer.

**2. smjer** (dovoljnost): **ortogonalnost**  $\implies d = n - 1 + k$ .

Neka je  $p \in \mathcal{P}_{n+k-1}$  **bilo koji** polinom. Treba pokazati da integracijska formula  $I_n$  **egzaktno** integrira polinom  $p$ .

# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Prvo **podijelimo**  $p$  s polinomom čvorova  $\omega_n$  — po **Euklidovom** teoremu o dijeljenju s ostatkom. Onda je

$$p = q\omega_n + r,$$

gdje je  $q \in \mathcal{P}_{k-1}$  **kvocijent**, a  $r \in \mathcal{P}_{n-1}$  **ostatak**.

Egzaktnom integracijom dobivamo

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)q(x)\omega_n(x) dx + \int_a^b w(x)r(x) dx.$$

Zbog  $q \in \mathcal{P}_{k-1}$  i pretpostavke **ortogonalnosti**

🔴 **prvi** integral na **desnoj** strani je **nula**.

# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dobivamo da je

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)r(x) dx.$$

No, zbog  $r \in \mathcal{P}_{n-1}$  i pretpostavke da je formula **interpolacijska**,  
• formula  $I_n$  **egzaktno** integrira polinom  $r$ .

Zato je

$$\int_a^b w(x)r(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k r(x_k).$$

# Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Sad uvrstimo  $r = p - q\omega_n$ . Dobivamo redom

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n w_k r(x_k) &= \sum_{k=1}^n w_k (p(x_k) - q(x_k)\omega_n(x_k)) \\ &= \{ \text{znamo } \omega_n(x_k) = 0, \text{ za } k = 1, \dots, n \} \\ &= \sum_{k=1}^n w_k p(x_k).\end{aligned}$$

Kad “**spojimo**” zadnje **tri** relacije, izlazi

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k p(x_k) = I_n(p),$$

pa formula  $I_n$  **egzaktno** integrira **sve** polinome  $p \in \mathcal{P}_{n+k-1}$ . ■

# O granicama za stupanj egzaktnosti

Nekoliko komentara na prethodni rezultat.

Relacija ortogonalnosti

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{k-1},$$

omogućava povećanje stupnja egzaktnosti formule za  $k$ ,

• s  $d = n - 1$ ,

• na  $d = n - 1 + k$ .

Ograničenje  $0 \leq k \leq n$  u teoremu je prirodno i nužno!

Naime, relacija ortogonalnosti postavlja

• točno  $k$  dodatnih uvjeta na čvorove  $x_1, \dots, x_n$ .



## O granicama za stupanj egzaktnosti

Za  $k = 0$  — **nema** dodatnih ograničenja, jer za **bilo koji** izbor čvorova možemo dobiti  $d = n - 1$  (interpolacijska formula).

S druge strane, zbog **nenegativnosti** težnske funkcije  $w$ , **mora** biti  $k \leq n$ . **Opravdanje:**

- Polinom čvorova  $\omega_n$  mora biti **ortogonalan** na sve polinome iz  $\mathcal{P}_{k-1}$ , tj. na polinome stupnja najviše  $k - 1$ .
- Za  $k > n$ , polinom  $\omega_n$  bi trebao biti **ortogonalan** na sve polinome iz  $\mathcal{P}_n$ , a to znači i na **samog sebe**, što je **nemoguće!**

Dakle,  $k = n$  je **maksimalno** povećanje stupnja egzaktnosti koje se može postići, a

- **maksimalni** stupanj egzaktnosti je  $d_{\max} = 2n - 1$ .

## Gaussove integracijske formule — $d = 2n - 1$

Integracijske ili kvadraturene formule **maksimalnog** stupnja egzaktnosti  $d = 2n - 1$  zovu se

• Gaussove ili Gauss–Christofellove formule.

Relacija **ortogonalnosti** iz prethodnog teorema za  $k = n$  glasi

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Drugim riječima, polinom čvorova  $\omega_n$  (stupnja  $n$ )

• mora biti **ortogonalan** na **sve** polinome **nižeg** stupnja — do najviše  $n - 1$ .

No, to **isto** svojstvo zadovoljava i odgovarajući **ortogonalni** polinom  $p_n$ , stupnja  $n$ , s **težinskom** funkcijom  $w$  na  $[a, b]$ .

# Čvorovi u Gaussovima formulama

Znamo da je  $p_n$  jednoznačno određen, do na multiplikativnu konstantu.

Ako za  $p_n$  uzmemo da ima vodeći koeficijent  $A_n = 1$ , onda je

$$\omega_n = p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zato se formule najvišeg stupnja egzaktnosti obično zovu

• Gaussove formule s težinskom funkcijom  $w$  na  $[a, b]$ .

U Gaussovima formulama, čvorovi  $x_k$  su potpuno određeni kao sve nultočke polinoma  $p_n$ ,

$$p_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sjetite se, te nultočke su realne, jednostruke i leže u otvorenom intervalu  $(a, b)$ .

# Težine u Gaussovima formulama

Za težine  $w_k$  znamo da vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su  $\ell_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ , polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$  (stupanj od  $\ell_k$  je  $n - 1$ ).

Kod Lagrangeove **interpolacije** pokazali smo da polinome  $\ell_k$  možemo izraziti preko polinoma čvorova  $\omega_n = p_n$  (ranije  $\omega$ ), u obliku

$$\ell_k(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p_n'(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Uočite da **multiplikativna** konstanta u  $p_n$  **nije** bitna — **skrati** se, pa možemo uzeti **bilo koju** normalizaciju za polinome  $p_n$ .

# Težine u Gaussovima formulama

Dobivamo izraz za težine  $w_k$  preko ortogonalnih polinoma  $p_n$

$$w_k = \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p'_n(x_k)} dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ova formula se rijetko koristi za stvarno računanje težina. Prema autoru formule, težine  $w_k$  u Gaussovima formulama ponekad se zovu i Christofellovi brojevi.

O ostalim svojstvima Gaussovih formula — malo kasnije.

Prvo, spomenimo još dva tipa integracijskih formula koje se koriste u praksi, a imaju

- visoki, ali ne i maksimalni stupanj egzaktnosti, tj.  $k < n$ .

# Integracijske formule s fiksnim rubovima

Prethodni teorem ima praktične primjene i za  $k < n$ .

U **težinskoj** integracijskoj ili kvadraturnoj formuli

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

unaprijed **zadamo**  $n - k$  čvorova integracije u  $[a, b]$ , a

- **preostalih**  $k$  čvorova određujemo tako da dobijemo **maksimalni** mogući stupanj egzaktnosti  $d = n - 1 + k$ .

Ovaj pristup se najčešće koristi za  $k = n - 1$  i  $k = n - 2$ , a **zadani** čvorovi su

- **jedan** ili **oba ruba** intervala integracije  $[a, b]$ , s tim da **zadani** rubni čvor mora biti **konačan**.

## Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Neka je **lijevi** rub intervala — točka  $a$  konačna

• i **zadana** kao čvor integracije  $x_1 = a$ .

Preostalih  $k = n - 1$  čvorova određujemo tako da

• dobijemo **maksimalni** stupanj egzaktnosti  $d = 2n - 2$ .

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Radau** formule.

Prema prethodnom teoremu, pripadni polinom **čvorova**

$$\omega_n(x) = (x - a)(x - x_2) \cdots (x - x_n) =: (x - a) p_{n-1}(x)$$

mora zadovoljavati relaciju **ortogonalnosti** za  $k = n - 1$

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

## Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

To možemo zapisati i ovako

$$\int_a^b w(x) (x - a) p_{n-1}(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Faktor  $(x - a)$ , koji odgovara fiksnom čvoru  $x_1 = a$ , ima **fiksn** predznak na  $[a, b]$  — **nenegativan** je. Zato ga smijemo

- “izvaditi” iz polinoma čvorova  $\omega_n$
- i “dodati” težinskoj funkciji  $w$ .

Tako dobivamo “**novu**” težinsku funkciju

$$w_a(x) := (x - a) w(x),$$

koja je, također, **nenegativna** na  $[a, b]$ .



## Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Relacija ortogonalnosti sada ima oblik

$$\int_a^b w_a(x) p_{n-1}(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2},$$

gdje je  $p_{n-1}$  polinom stupnja  $n - 1$ .

Slično ranijem, odavde dobivamo sljedeći **zaključak**:

- preostalih  $n - 1$  čvorova  $x_2, \dots, x_n$  moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma  $p_{n-1}$  s **težinskom** funkcijom  $w_a$ .

Potpuno **isti** princip radi i za **desni** rub  $b$ , s faktorom  $b - x$ .

Ako **fiksiramo**  $x_n = b$ , preostali čvorovi  $x_1, \dots, x_{n-1}$  moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma  $p_{n-1}$  s **težinskom** funkcijom  $w_b(x) := (b - x) w(x)$ .

## Gauss–Lobatto formule — oba ruba, $d = 2n - 3$

Neka su **oba** ruba intervala — točke  $a$  i  $b$  konačne

• i **zadane** kao čvorovi integracije  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ .

Preostala  $k = n - 2$  čvora određujemo tako da

• dobijemo **maksimalni** stupanj egzaktnosti  $d = 2n - 3$ .

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Lobatto** formule.

Na potpuno isti način se dokazuje da

• **preostala**  $n - 2$  čvora  $x_2, \dots, x_{n-1}$  moraju biti nultočke **ortogonalnog** polinoma  $p_{n-2}$  s **težinskom** funkcijom  $w_{a,b}$ ,

$$w_{a,b}(x) := (x - a)(b - x) w(x).$$

Napomena: ovo “**transformiranje**” težinske funkcije radi **samo** za čvorove u **rubovima** intervala (**nenegativnost**).

# Primjer za težinske formule

# Težinska Newton–Cotesova vs. Gaussova f.

Primjer. Napravimo usporedbu

- zatvorene **Newton–Cotesove** formule i
- **Gaussove** formule

s 2 čvora, za **težinsku** funkciju  $w(x) = x^{-1/2}$  na intervalu  $[0, 1]$ .

Tražene integracijske formule glase:

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx \approx \begin{cases} w_1^{NC} f(0) + w_2^{NC} f(1) & \text{(Newton–Cotes)}, \\ w_1^G f(x_1) + w_2^G f(x_2) & \text{(Gauss)}. \end{cases}$$

# Težinska Newton–Cotesova formula

Za Newton–Cotesovu formulu, težine  $w_1^{NC}$  i  $w_2^{NC}$  možemo izračunati iz eksplicitne formule

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, 2.$$

Lagrangeova baza  $\ell_1$  i  $\ell_2$  za zadane čvorove 0 i 1 jednaka je

$$\ell_1(x) = \frac{x - 1}{0 - 1} = -x + 1,$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - 0}{1 - 0} = x,$$

# Težinska Newton–Cotesova formula

pa imamo

$$\begin{aligned}w_1^{NC} &= \int_0^1 x^{-1/2} \ell_1(x) dx = \int_0^1 (x^{-1/2} - x^{1/2}) dx \\ &= \left( 2x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3},\end{aligned}$$

$$w_2^{NC} = \int_0^1 x^{-1/2} \ell_2(x) dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ovaj pristup ima smisla **samo** kad se polinomi  $\ell_1$  i  $\ell_2$  **lako** računaju, tj. **samo** kad su čvorovi “jednostavni”, poput 0 i 1.

## Težinska Newton–Cotesova formula

Obično je puno lakše iskoristiti da Newton–Cotesova formula egzaktno integrira bazu prostora polinoma  $\mathcal{P}_1$ .

Uvrštavanjem  $f(x) = 1$  dobivamo jednačbu

$$w_1^{NC} \cdot 1 + w_2^{NC} \cdot 1 = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2,$$

a uvrštavanjem  $f(x) = x$  dobivamo jednačbu

$$w_1^{NC} \cdot 0 + w_2^{NC} \cdot 1 = \int_0^1 x^{-1/2} x dx = \frac{2}{3}.$$

Odmah izlazi

$$w_2^{NC} = \frac{2}{3}, \quad w_1^{NC} = 2 - w_2^{NC} = \frac{4}{3}.$$

# Težinska Newton–Cotesova formula

Tražena zatvorena Newton–Cotesova formula glasi:

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx = \frac{4}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(1) + E_2^{NC}(f),$$

pri čemu je  $E_2^{NC}(f)$  pripadna greška.

Uočite da **korijenski** singularitet u **nuli** uzrokuje da

- vrijednost  $f(0)$  dobiva **dvostruko veću** težinu od vrijednosti  $f(1)$ .



## Gaussova formula

**Gaussovu** formulu najlakše je odrediti preko **ortogonalnih** polinoma. Treba nam **normalizirani** ortogonalni polinom  $p_2$ , stupnja 2, s težinom  $x^{-1/2}$  na  $[0, 1]$

$$p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0.$$

Taj polinom mora biti **ortogonalan** na polinome **nižeg** stupnja:

☛ za polinom 1 dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{-1/2} p_2(x) dx = \int_0^1 (x^{3/2} + a_1 x^{1/2} + a_0 x^{-1/2}) dx \\ &= \left( \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2a_1}{3} x^{3/2} + 2a_0 x^{1/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} a_1 + 2a_0, \end{aligned}$$

# Gaussova formula

za polinom  $x$  izlazi:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{-1/2} x p_2(x) dx = \int_0^1 (x^{5/2} + a_1 x^{3/2} + a_0 x^{1/2}) dx \\ &= \left( \frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{2a_1}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} a_0 x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{2}{5} a_1 + \frac{2a_0}{3}. \end{aligned}$$

Sustav za koeficijente polinoma  $p_2$  je:

$$\frac{2}{3} a_1 + 2a_0 = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} a_1 + \frac{2}{3} a_0 = -\frac{2}{7}$$

## Gaussova formula

Rješenje tog sustava je

$$a_1 = -\frac{6}{7}, \quad a_0 = \frac{3}{35},$$

pa je **ortogonalni** polinom  $p_2$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35}.$$

Čvorovi za **Gaussovu** integracijsku formulu su **nultočke** polinoma  $p_2$ :

$$x_1 = \frac{1}{7} \left( 3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}} \right) \approx 0.11558710999704793517,$$

$$x_2 = \frac{1}{7} \left( 3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}} \right) \approx 0.74155574714580920769.$$

## Gaussova formula

Za računanje težinskih koeficijenata  $w_1^G$  i  $w_2^G$ , mogli bismo iskoristiti formulu za  $w_k$ , kao kod Newton–Cotesove formule.

Međutim, kad imamo čvorove  $x_1$  i  $x_2$ , puno je lakše iskoristiti da Gaussova formula egzaktno integrira bazu polinoma

• stupnja 0, pa stavljamo  $f(x) = 1$  i dobivamo jednadžbu

$$w_1^G + w_2^G = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2,$$

• i stupnja 1, pa stavljamo  $f(x) = x$  i dobivamo jednadžbu

$$w_1^G x_1 + w_2^G x_2 = \int_0^1 x^{-1/2} x dx = \frac{2}{3}.$$

## Gaussova formula

Rješenje prethodnog sustava od dvije jednačbe je

$$w_1^G = 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 1.30429030972509228525,$$

$$w_2^G = 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0.69570969027490771475.$$

Sada je težina

•  $w_1^G$  približno 1.87476 puta **veća** od težine  $w_2^G$ .

# Gaussova formula

Tražena Gaussova formula glasi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx &= \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cdot f\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cdot f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &\quad + E_2^G(f), \end{aligned}$$

pri čemu je  $E_2^G(f)$  pripadna greška.

## Težinska Newton–Cotesova vs. Gaussova f.

Usporedimo prethodne dvije formule na integralu

$$I = \int_0^1 x^{-1/2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = 2C(1) \approx 1.55978680075364565895,$$

pri čemu  $C$  označava **Fresnelov** kosinusni integral.

Aproksimacije po obje formule za  $f(x) = \cos(\pi x/2)$  su

$$I_{NC} = \frac{4}{3} \approx 1.3333333333333333333333333333,$$

$$I_G \approx 1.55758955959339386882,$$

a pripadne greške su

$$E_{NC} \approx 0.2264535, \quad E_G \approx 0.0021972,$$

što pokazuje da je Gaussova formula **puno bolja**.