# *Numerička matematika*
# *3. predavanje*

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Rješavanje linearnih sustava:
  - Gaussove eliminacije.
  - Zamjene jednadžbi (redaka) — parcijalno pivotiranje.
  - Zamjene redaka i stupaca — potpuno pivotiranje.
  - Gaussove eliminacije u praksi — LR (LU) faktorizacija.
  - Veza Gaussovih eliminacija i LR faktorizacije.
  - Pivotiranje u LR (LU) faktorizaciji.
  - Pivotni rast kao mjera nestabilnosti.
  - Teorija perturbacije linearnih sustava (početak).

# Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja od prošlih 5 godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

# Informacije — demonstratori

Kolegij "Numerička matematika" ima dva demonstratora:

- Mario Berljafa
  - termini: utorak, 9–10 i petak, 12–13.
  - e–mail: `mberljaf@student.math.hr`
- Marin Bužančić
  - termin: utorak, 16–18.
  - e–mail: `buzancic@student.math.hr`

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom bar dan ranije!

- Sastanak za demonstrature je pred oglasnom pločom (bar zasad).

# Rješavanje linearnih sustava

# Općenito o linearnim sustavima — teorija

Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ polje realnih brojeva (može i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Zadani su:

- (pravokutna) matrica $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ i vektor $b \in \mathbb{F}^m$.

Tražimo rješenje linearnog sustava

$$Ax = b.$$

Teorem Kronecker–Capelli kaže da linearni sustav $Ax = b$

- ima rješenje $x \in \mathbb{F}^n$ — ako i samo ako je rang matrice $A$, u oznaci $r$, jednak rangu proširene matrice $\widehat{A} = [\,A \mid b\,]$,
- rješenje sustava je jedinstveno ako je $r = n$.

Znamo čak i malo više!

# Linearni sustavi — teorija (nastavak)

Opće rješenje sustava $Ax = b$ (ako postoji) ima oblik

$$x = x_p + \mathcal{N}(A),$$

gdje je

- $x_p$ jedno partikularno rješenje polaznog sustava $Ax = b$,
- $\mathcal{N}(A)$ je nul-potprostor od $A$, ili opće rješenje pripadnog homogenog sustava $Ax = 0$.

Iz teorema o rangu i defektu za matricu $A$

$$r + \dim \mathcal{N}(A) = n,$$

slijedi tvrdnja o jedinstvenosti rješenja:

- $\dim \mathcal{N}(A) = 0 \iff r = n.$

# Linearni sustavi — od teorije prema praksi

U praksi se najčešće rješavaju linearni sustavi $Ax = b$ kod kojih je matrica $A$ kvadratna i regularna.

- $A$ kvadratna — znači da je $m = n$ ($A$ je reda $n$).
- $A$ regularna — znači, na primjer, $\det A \neq 0$.

Iz teorema Kronecker–Capelli onda izlazi da

- rješenje $x$ takvog sustava postoji i jedinstveno je.

$\Longrightarrow$ ima smisla promatrati algoritme za računanje rješenja.

Nema smisla računati nešto što (možda) i ne postoji, ili nije jedinstveno (koje od mnogo rješenja računamo).

Oprez: To što unaprijed znamo da je $A$ regularna

- ne znači da to vrijedi i numerički!

## Kako naći rješenje? — Inverz matrice

Teorija (1). Možemo naći inverz matrice $A$, tj. matricu $A^{-1}$

- i slijeva pomnožiti sustav $Ax = b$ matricom $A^{-1}$.

Dobivamo

$$x = A^{-1}b.$$

Samo je pitanje: kako ćemo izračunati inverz $A^{-1}$?

Zaključak: Lakši problem sveli smo na teži — u prijevodu, pali smo s konja na magarca.

Zašto? Jednostavno, zato što je

- $j$-ti stupac inverza, upravo, rješenje sustava $Ax = e_j$.

Dakle, za $n$ stupaca od $A^{-1}$ treba riješiti $n$ linearnih sustava. A krenuli smo od jednog (sustava)! Ne tako!

# Kako naći rješenje? — Cramerovo pravilo

Teorija (2). Iz linearne algebre znate za Cramerovo pravilo:

- $j$-ta komponenta rješenja sustava je

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

- pri čemu je matrica $A_j$ jednaka matrici $A$,
- osim što je $j$-ti stupac u $A_j$ zamijenjen desnom stranom $b$.

Treba još "samo" izračunati determinante — i to $n + 1$ njih. A kako ćemo to?

"Klasični" odgovor: pa ... recimo, Laplaceovim razvojem.

Jao, jao ... Bilo kako, samo ne tako!

# Kako naći rješenje? — Zaboravite Cramera

Zašto? Laplaceovim razvojem dobijemo (kao u definiciji det)

- "samo" $n!$ pribrojnika u svakoj determinanti,
- a svaki pribrojnik je produkt od $n$ faktora.

Prava "sitnica". I tako to, još $n + 1$ puta ...

Zaključak: Ako determinante računamo na ovaj način,

- složenost Cramerovog pravila za rješavanje linearnog sustava je eksponencijalna u $n$ (dokažite to!)
- i nikad se ne koristi kao metoda numeričkog rješavanja.

# Zaboravite determinante i Cramera — finale

Komentar: Determinante možemo računati i puuuno brže,

- tako da matricu svedemo na trokutasti oblik,
- postupkom sličnim Gaussovim eliminacijama.

Naime, determinanta trokutaste matrice (gornje ili donje) je

- produkt dijagonalnih elemenata,

pa se lako računa!

No, isti postupak eliminacija koristimo i za

- rješavanje "cijelog" linearnog sustava $Ax = b$,
- i to samo jednom, a ne $n + 1$ puta.

Dakle, Cramerovo pravilo se ne isplati ni kad ovako računamo determinante.

## *Kako naći rješenje? — Gaussove eliminacije!*

Najjednostavnija metoda za rješavanje linearnih sustava su

- Gaussove eliminacije, odnosno
- slične metode svođenja na trokutastu formu.

Ideja: Sustav $Ax = b$ se ekvivalentnim transformacijama svodi na sustav oblika

$$Rx = y,$$

gdje je

- $R$ trokutasta matrica (recimo, gornja),

iz kojeg se lako, tzv. povratnom supstitucijom, nalazi rješenje.

Oznaka $R$ — “right” (desna) = gornja trokutasta matrica.

## Ekvivalentne transformacije sustava

Ekvivalentne transformacije sustava su

- one koje ne mijenjaju rješenje sustava.

Standardne ekvivalentne transformacije su (v. LA):

- zamjena poretka jednadžbi (nužno!),
- množenje jednadžbe brojem različitim od nule,
  - ova transformacija "skaliranja" se obično ne koristi, ili se vrlo pažljivo koristi — za povećanje stabilnosti,
- množenje jedne jednadžbe nekim brojem i dodavanje drugoj jednadžbi (ključno!),

  = dodavanje linearne kombinacije preostalih jednadžbi, s tim da uzmemo samo jednu preostalu jednadžbu.

# Gaussove eliminacije — komentari

Par komentara, prije detaljnog opisa metode.

Gaussove eliminacije su metoda direktnog transformiranja linearnog sustava $Ax = b$, zajedno s desnom stranom $b$.

Možemo ih implementirati i tako da se desna strana $b$ ne transformira istovremeno kad i matrica $A$.

- Tada se formiraju dvije matrice $L$ i $R$ takve da je $A = LR$, gdje je $R$ gornja trokutasta matrica iz Gaussovih eliminacija, a $L$ je donja trokutasta matrica.
- Tako implementirane Gaussove eliminacije zovemo LR (ili LU) faktorizacija matrice $A$ — standard u praksi.
- Ovaj pristup je posebno zgodan kad imamo više desnih strana za isti $A$.

# Gaussove eliminacije — komentari (nastavak)

U praksi se koriste za "opće", ali ne pretjerano velike matrice ($n$ u tisućama), ili za sustave s tzv. "vrpčastom" strukturom.

Složenost: polinomna i to kubna, tj. $O(n^3)$, što je sporo za još veće sustave. Za njih se koriste iterativne metode.

Mnogi sustavi imaju specijalna svojstva koja koristimo za brže i/ili točnije rješenje. Na primjer,

- za simetrične, pozitivno definitne matrice koristi se "simetrična" LR faktorizacija, tzv. faktorizacija Choleskog,
- za dijagonalno dominantne sustave ne treba pivotiranje,
- za vrpčaste, posebno, trodijagonalne matrice, algoritam se drastično skraćuje (v. kubična spline interpolacija).

# Gaussove eliminacije

## Gaussove eliminacije — algoritam

Označimo $A^{(1)} := A$, $b^{(1)} := b$ na početku prvog koraka.

U skraćenoj notaciji, bez pisanja nepoznanica $x_i$, linearni sustav $Ax = b$ možemo zapisati proširenom matricom, kao

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right].$$

Svođenje na trokutastu formu radimo u $n - 1$ koraka.

# Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)

1. korak.

- U prvom stupcu matrice $A^{(1)}$ poništimo sve elemente, osim prvog.

Kako se to radi?

Ako je element $a_{11}^{(1)} \neq 0$, onda redom, možemo

- od $i$-te jednadžbe oduzeti
- prvu jednadžbu pomnoženu s

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Pritom se prva jednadžba se ne mijenja.

## *Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)*

Prva jednadžba — kao redak proširene matrice $[\,A^{(1)} \mid b^{(1)}\,]$, je

$$\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \end{array}.$$

Polazna $i$-ta jednadžba — pisana na isti način, za $i = 2, \ldots, n$

$$\begin{array}{cccc:c} a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} & b_i^{(1)} \end{array}.$$

Nova $i$-ta jednadžba — pisana na isti način, za $i = 2, \ldots, n$

$$\begin{array}{cccc:c} a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(2)} & \cdots & a_{in}^{(2)} & b_i^{(2)} \end{array}.$$

Relacije za nove elemente su

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)},$$

za $j = 1, \ldots, n$, $i = 2, \ldots, n$. Prvi redak ($i = 1$) ostaje isti.

# Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)

Iz ovih relacija za nove elemente (prepisane još jednom)

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)},$$

vidimo da su multiplikatori

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

odabrani upravo tako da je $a_{i1}^{(2)} = 0$, za $i = 2, \ldots, n$.

Dakle, nakon prvog koraka dobivamo proširenu matricu $[\, A^{(2)} \mid b^{(2)} \,]$ u kojoj

- prvi stupac ima nule (strogo) ispod dijagonale, tj. gornju trokutastu formu.

# Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)

Time smo dobili ekvivalentni linearni sustav $A^{(2)}x = b^{(2)}$ s proširenom matricom

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right].$$

Postupak poništavanja možemo nastaviti s drugim stupcem matrice $A^{(2)}$ — na isti način.

Ako je $a_{22}^{(2)} \neq 0$, biramo faktore $m_{i2}$ tako da poništimo sve elemente drugog stupca ispod dijagonale. I tako redom.

## *Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)*

Općenito, $k$–ti korak izgleda ovako, za $k = 1, \ldots, n-1$:

- iz proširene matrice $[\, A^{(k)} \mid b^{(k)} \,]$ dobivamo novu proširenu matricu $[\, A^{(k+1)} \mid b^{(k+1)} \,]$,
- tako da poništimo sve elemente ispod dijagonale u $k$–tom stupcu matrice $A^{(k)}$.

Relacije za nove elemente koje treba izračunati u matrici $A^{(k+1)}$ i vektoru $b^{(k+1)}$ su

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \qquad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)},$$

za $i, j = k+1, \ldots, n$, a multiplikatori $m_{ik}$ su

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad i = k+1, \ldots, n.$$

## Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)

Prvih $k$ redaka u $[\, A^{(k+1)} \mid b^{(k+1)} \,]$ ostaju isti kao u $[\, A^{(k)} \mid b^{(k)} \,]$.

Konačno, ako su svi $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, za $i = 1, \ldots, n-1$, završni linearni sustav $[\, A^{(n)} \mid b^{(n)} \,]$, ekvivalentan polaznom, je

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right].$$

Dobili smo gornju trokutastu matricu $R = A^{(n)}$ (nule u strogo donjem trokutu matrice $R$ ne pišemo).

## *Gaussove eliminacije — algoritam (nastavak)*

Uz pretpostavku da je $a_{nn}^{(n)} \neq 0$, ovaj se linearni sustav lako rješava tzv. povratnom supstitucijom (supstitucijom unatrag)

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left( b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right), \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

Pitanje: Ako je $A$ kvadratna i regularna matrica,

- moraju li svi elementi $a_{ii}^{(i)}$ biti različiti od nule?

To je nužno (i dovoljno) da algoritam "prođe" u ovom obliku.

# Gaussove eliminacije — primjedba na algoritam

Odgovor: Ne!

Primjer. Linearni sustav $Ax = b$ s proširenom matricom

$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

je regularan ($\det A = -1$), sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = 1$,

- a ipak ga ne možemo riješiti Gaussovim eliminacijama,
- ako ne mijenjamo poredak jednadžbi.

Zaključak: Moramo dozvoliti promjenu poretka jednadžbi.

## Gaussove eliminacije s pivotiranjem

Pitanje: Dozvolimo li promjene poretka jednadžbi — tzv. "pivotiranje" u stupcu kojeg sređujemo,

- može li se Gaussovim eliminacijama s pivotiranjem riješiti svaki sustav kojemu je matrica kvadratna i regularna?

Odgovor: Ako dozvolimo pivotiranje

- zamjenom "ključne" jednadžbe i bilo koje druge koja ima ne-nula element (u tom stupcu),
- Gaussovim eliminacijama rješiv je svaki regularni kvadratni linearni sustav.

Objašnjenje: Ako u prvom stupcu nemamo ne-nula elemenata, matrica je singularna. Isto vrijedi i za svaki sljedeći korak (dokaz = Laplaceov razvoj determinante!).

## Gaussove eliminacije — kako pivotiramo?

Pitanje: Kako vršiti pivotiranje, tj. zamjene jednadžbi?

- Zamjenom "ključne" jednadžbe i bilo koje druge koja ima ne-nula element (u tom stupcu)?

Odgovor: Tu je ključna razlika između egzaktnog i približnog računanja (kad imamo greške zaokruživanja).

- U teoriji — kod egzaktnog računanja, dovoljno je naći bilo koji ne-nula element (u tom stupcu).
- U praksi — kad računamo približno, to može dovesti do potpuno pogrešnog rezultata.

Jedna jedina operacija može upropastiti rezultat!

- Postoji i puno bolja strategija za pivotiranje, kojom se to (barem dijelom) može izbjeći.

# Gaussove eliminacije — primjer

Primjer. Zadan je linearni sustav

$$\begin{aligned} 0.0001\, x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Matrica sustava je regularna, pa postoji jedinstveno rješenje

$$x_1 = 1.\dot{0}00\dot{1}, \quad x_2 = 0.\dot{9}99\dot{8}.$$

Riješimo taj sustav "računalom" koje ima 4 decimalne znamenke mantise i 2 znamenke eksponenta (ovo nije bitno).

Uočiti: Broj $0.0001 = 10^{-4}$ je "mali", ali nije nula. Po teoriji,

- možemo ga uzeti kao prvi (ili bilo koji) ne-nula element.

## *Gaussove eliminacije — primjer (nastavak)*

Sustav zapisan u takvom "računalu" pamti se kao

$$
\begin{aligned}
1.000 \cdot 10^{-4}\, x_1 + 1.000 \cdot 10^{0}\, x_2 &= 1.000 \cdot 10^{0} \\
1.000 \cdot 10^{0}\quad x_1 + 1.000 \cdot 10^{0}\, x_2 &= 2.000 \cdot 10^{0}.
\end{aligned}
$$

Množenjem prve jednadžbe s $-10^4$ i dodavanjem drugoj, dobivamo novu drugu jednadžbu

$$(1.000 \cdot 10^{0} - 1.000 \cdot 10^{4})\, x_2 = 2.000 \cdot 10^{0} - 1.000 \cdot 10^{4}.$$

Oduzimanje u računalu se vrši tako da manji eksponent postane jednak većem, a mantisa se denormalizira. Dobivamo

$$
\begin{aligned}
1.000 \cdot 10^{0} &= 0.100 \cdot 10^{1} = 0.010 \cdot 10^{2} = 0.001 \cdot 10^{3} \\
&= 0.000|1 \cdot 10^{4}.
\end{aligned}
$$

## Gaussove eliminacije — primjer (nastavak)

Za zadnju jedinicu nema mjesta u mantisi, pa je mantisa postala $0$, tj. prvi broj “nema” utjecaja na rezultat. Slično se dogodi i s desnom stranom (i $2$ je “zanemariv” prema $10^4$).

Dakle, nova druga jednadžba glasi

$$-1.000 \cdot 10^4 \, x_2 = -1.000 \cdot 10^4.$$

Rješenje ove jednadžbe je očito $x_2 = 1.000 \cdot 10^0$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} 1.000 \cdot 10^{-4} \, x_1 &= 1.000 \cdot 10^0 - 1.000 \cdot 10^0 \cdot 1.000 \cdot 10^0 \\ &= 0.000 \cdot 10^0, \end{aligned}$$

pa je $x_1 = 0$, što nije niti približno točan rezultat.

# Gaussove eliminacije — primjer (nastavak)

Razlog za ogromnu relativnu grešku (100%):

- prvu jednadžbu množimo velikim brojem $-10^4$ (po apsolutnoj vrijednosti) i dodajemo drugoj,
- što "uništava" drugu jednadžbu.

Drugim riječima, utjecaj polazne druge jednadžbe

- postaje zanemariv u novoj drugoj jednadžbi.

U polaznoj drugoj je moglo pisati "bilo što" (dovoljno malo)!

Isto bi nam se dogodilo za bilo koju drugu jednadžbu oblika

$$x_1 + \alpha x_2 = \beta,$$

gdje su $|\alpha|, |\beta| < 5$.

## Gaussove eliminacije s pivotiranjem — primjer

Promijenimo li poredak jednadžbi, dobivamo

$$
\begin{aligned}
1.000 \cdot 10^{0}\ \ x_1 + 1.000 \cdot 10^{0}\, x_2 &= 2.000 \cdot 10^{0} \\
1.000 \cdot 10^{-4}\, x_1 + 1.000 \cdot 10^{0}\, x_2 &= 1.000 \cdot 10^{0}.
\end{aligned}
$$

Množenjem prve jednadžbe s $-10^{-4}$ i dodavanjem drugoj, dobivamo novu drugu jednadžbu

$$(1.000 \cdot 10^{0} - 1.000 \cdot 10^{-4})\, x_2 = 1.000 \cdot 10^{0} - 2.000 \cdot 10^{-4}.$$

Ovdje nema oduzimanja — drugi broj s $10^{-4}$ je "zanemariv" prema $1$, na obje strane. Dakle, nova druga jednadžba sad glasi

$$1.000 \cdot 10^{0}\, x_2 = 1.000 \cdot 10^{0}.$$

# Gaussove eliminacije s pivotiranjem — primjer

Ponovno dobivamo rješenje $x_2 = 1.000 \cdot 10^0$. Međutim, uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} 1.000 \cdot 10^0 \, x_1 &= 2.000 \cdot 10^0 - 1.000 \cdot 10^0 \cdot 1.000 \cdot 10^0 \\ &= 1.000 \cdot 10^0, \end{aligned}$$

pa je $x_1 = 1.000 \cdot 10^0$, što je točan rezultat — korektno zaokruženo egzaktno rješenje na četiri decimalne znamenke!

Razlog za vrlo malu relativnu grešku:

- prvu jednadžbu sad množimo malim brojem $-10^{-4}$ (po apsolutnoj vrijednosti) i dodajemo drugoj,
- što nema utjecaja na drugu jednadžbu — tj. ovdje nema “uništavanja” jednadžbi.

## Gaussove eliminacije s pivotiranjem — primjer

Kao i ranije, u koraku eliminacije,

- (bivša) druga jednadžba nema utjecaja na (bivšu) prvu.

Međutim, nakon zamjene

- prva jednadžba (bivša druga) ostaje netaknuta u prvom koraku eliminacije i uredno utječe na rješenje.

Zaključak: Sigurno nije dovoljno uzeti

- prvi (bilo koji) ne-nula element u stupcu

kao ključni element za eliminacije,

- jer možemo dobiti potpuno pogrešan rezultat.

# Gaussove eliminacije s pivotiranjem — primjer

Primjer. Usporedimo izračunata rješenja sustava

$$\begin{aligned} \varepsilon\, x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

za $\varepsilon = 10^{-1}, \ldots, 10^{-25}$, Gaussovim eliminacijama bez zamjena i sa zamjenom poretka jednadžbi, u aritmetici računala.

Računanjem u najvećoj mogućoj preciznosti (`extended`) dobivamo sljedeću tablicu.

U tablici je $x_2$ naveden samo jednom — jer ga obje metode izračunaju jednako (i točno)!

U prvom stupcu pišu samo eksponenti $p$, pri čemu je $\varepsilon = 10^p$.

# Gaussove eliminacije s pivotiranjem — primjer

| $p$ | $x_1$ bez pivotiranja | $x_1$ s pivotiranjem | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $-4$ | 1.00010001000100000 | 1.00010001000100010 | 0.99989998999899990 |
| $-5$ | 1.00001000010000200 | 1.00001000010000100 | 0.99998999989999900 |
| $-6$ | 1.00000100000099609 | 1.00000100000100000 | 0.99999899999900000 |
| $-7$ | 1.00000009999978538 | 1.00000010000001000 | 0.99999989999999000 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $-17$ | 0.99746599868666408 | 1.00000000000000001 | 0.99999999999999999 |
| $-18$ | 0.97578195523695399 | 1.00000000000000000 | 1.00000000000000000 |
| $-19$ | 1.08420217248550443 | 1.00000000000000000 | 1.00000000000000000 |
| $-20$ | 0.00000000000000000 | 1.00000000000000000 | 1.00000000000000000 |
| $\vdots$ | isto | isto | isto |

# Gaussove eliminacije s parcijalnim pivotiranjem

Standardni naziv: pivotni element = element koji se prije $k$-tog koraka eliminacije dovodi na dijagonalno mjesto $a_{kk}^{(k)}$.

U praksi se obično bira korištenjem parcijalnog pivotiranja.

- U $k$-tom koraku, pivotni element je po apsolutnoj vrijednosti najveći u "ostatku" $k$-tog stupca — na glavnoj dijagonali ili ispod nje.

Preciznije, ako je u $k$-tom koraku

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|,$$

onda ćemo prvo zamijeniti $r$-ti i $k$-ti redak, a zatim početi korak eliminacije elemenata $k$-tog stupca.

# Gaussove eliminacije s parcijalnim pivotiranjem

Motivacija: elementi "ostatka" linearnog sustava koje treba izračunati u matrici $A^{(k+1)}$ u $k$-tom koraku transformacije su

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)},$$

za $i, j = k+1, \ldots, n$, a multiplikatori $m_{ik}$ su

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Ako je multiplikator $m_{ik}$ velik, u aritmetici računala može doći do kraćenja najmanje značajnih znamenki $a_{ij}^{(k)}$, tako da izračunati $a_{ij}^{(k+1)}$ može imati veliku relativnu grešku.

# Gaussove eliminacije s parcijalnim pivotiranjem

Sasvim općenito, ideja pivotiranja je minimizirati "korekcije" elemenata pri prijelazu s $A^{(k)}$ na $A^{(k+1)}$. Dakle,

- multiplikatori $m_{ik}$ trebaju biti što manji, po apsolutnoj vrijednosti.

Ekvivalentno, pivotni element treba biti što veći, jer ulazi u nazivnik multiplikatora.

Za multiplikatore kod parcijalnog pivotiranja vrijedi

$$|m_{ik}| \leq 1, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

U praksi, parcijalno pivotiranje funkcionira izvrsno, ali matematičari su konstruirali primjere kad ono "nije savršeno" (v. malo kasnije).

# Gaussove eliminacije s potpunim pivotiranjem

Osim parcijalnog, može se provoditi i potpuno pivotiranje.

- U $k$-tom koraku, bira se najveći element u cijelom "ostatku" matrice $A^{(k)}$, a ne samo u $k$-tom stupcu.

Ako je u $k$-tom koraku

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k \leq i,j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|,$$

onda ćemo prvo zamijeniti $r$-ti i $k$-ti redak, $s$-ti i $k$-ti stupac, a zatim početi korak eliminacije elemenata $k$-tog stupca.

Oprez: zamjenom $s$-tog i $k$-tog stupca zamijenili smo ulogu varijabli $x_s$ i $x_k$.

Ovo nisu jedine mogućnosti pivotiranja kod rješavanja linearnih sustava.

# GE s parcijalnim pivotiranjem — algoritam i složenost

## Algoritam

Gaussove eliminacije s parcijalnim pivotiranjem

```
/* Trokutasta redukcija */

za k = 1 do n - 1 radi {
    /* Nađi maks. |element| u ostatku stupca */
  max_elt = |A[k, k]|;
  ind_max = k;
  za i = k + 1 do n radi {
    ako je |A[i, k]| > max_elt onda {
      max_elt = |A[i, k]|;
      ind_max = i;
    }
  }
```

# Algoritam (nastavak)

```
ako je max_elt > 0.0 onda {
    /* Matrica ima ne-nula element u stupcu */
  ako je ind_max <> k onda {
      /* Zamijeni k-ti i ind_max-ti redak */
    za j = k do n radi {
      temp = A[ind_max, j];
      A[ind_max, j] = A[k, j];
      A[k, j] = temp;
    }
    temp = b[ind_max];
    b[ind_max] = b[k];
    b[k] = temp;
  }
```

# Algoritam (nastavak)

```
    /* Korak Gaussovih eliminacija */
  za i = k + 1 do n radi {
      /* Izračunaj multiplikator */
    mult = A[i, k] / A[k, k];
      /* Ažuriraj i-ti redak */
    za j = k + 1 do n radi {
      A[i, j] = A[i, j] - mult * A[k, j];
    }
    b[i] = b[i] - mult * b[k];
  }
inače
  /* Matrica je singularna, STOP */
}
```

# Algoritam (nastavak)

```
/* Povratna supstitucija */
ako je A[n, n] <> 0.0 onda {
    /* Rješenje x */
  x[n] = b[n] / A[n, n];
  za i = n - 1 do 1 radi {
    sum = b[i];
    za j = i + 1 do n radi {
      sum = sum - A[i, j] * x[j];
    }
    x[i] = sum / A[i, i];
  }
}
inače
  /* Matrica je singularna, STOP */
```

# *Složenost algoritma*

Prebrojimo sve aritmetičke operacije ovog algoritma.

U prvom koraku trokutaste redukcije obavlja se:

- $n - 1$ dijeljenje — računanje `mult`,
- $n(n-1)$ množenje — za svaki od $n - 1$ redaka imamo:
  - $n - 1$ množenje za računanje elemenata matrice $A$;
  - jedno množenje za računanje elementa vektora $b$,
- $n(n-1)$ oduzimanje — u istoj naredbi gdje i prethodna množenja.

Na sličan način zaključujemo da se u $k$-tom koraku obavlja:

- $n - k$ dijeljenja,
- $(n - k + 1)\,(n - k)$ množenja i $(n - k + 1)\,(n - k)$ oduzimanja.

# Složenost algoritma (nastavak)

Ukupan broj aritmetičkih operacija u $k$-tom koraku je

$$n - k + 2(n - k + 1)\,(n - k) = 2(n - k)^2 + 3(n - k).$$

Broj koraka $k$ varira od $1$ do $n - 1$, pa je ukupan broj operacija potrebnih za svođenje na trokutastu formu jednak

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[2(n - k)^2 + 3(n - k)\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \left(2k^2 + 3k\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(4n^3 + 3n^2 - 7n\right).$$

Druga suma se dobije se iz prve zamjenom indeksa $n - k \mapsto k$.

## Složenost algoritma (nastavak)

Potpuno istim zaključivanjem dobivamo da u povratnoj supstituciji ima:

- $(n-1)\,n/2$ množenja i $(n-1)\,n/2$ zbrajanja,
- $n$ dijeljenja,

što je, zajedno, točno $n^2$ operacija.

Dakle, ukupan broj operacija u Gaussovim eliminacijama je

$$OP(n) = \frac{1}{6}\big(4n^3 + 9n^2 - 7n\big),$$

što je približno $2n^3/3$, za malo veće $n$.

# LR faktorizacija

## LR faktorizacija

U praksi se linearni sustavi najčešće rješavaju korištenjem LR faktorizacije — matricu $A$ faktoriziramo kao

$$A = LR,$$

pri čemu je

- $L$ donja trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali,
- $R$ gornja trokutasta matrica.

Matrica $L$ je regularna, jer je $\det L = 1$, pa je regularnost matrice $A$ ekvivalentna regularnosti matrice $R$, jer je

$$\det A = \det L \cdot \det R = \det R.$$

# LR faktorizacija — rješenje sustava

Ako znamo LR faktorizaciju od $A$, onda linearni sustav $Ax = b$ postaje

$$LRx = b.$$

Uz oznaku $y = Rx$, sustav $LRx = b$ svodi se na dva sustava

$$Ly = b, \qquad Rx = y.$$

Lako pamćenje: matrice u sustavima idu slijeva $\mapsto$ udesno.

Prednost LR faktorizacije:

- za zadani $b$, rješavaju se dva jednostavna sustava,
- desna strana $b$ ne transformira se istovremeno s matricom $A$, pa promjena desne strane košta samo $O(n^2)$ operacija.

## LR faktorizacija — rješenje sustava (nastavak)

Oba sustava se lako rješavaju:

- prvi $Ly = b$ — supstitucijom unaprijed

$$y_1 = b_1,$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij}\, y_j, \quad i = 2, \ldots, n,$$

- drugi $Rx = y$ — povratnom supstitucijom (unatrag)

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}},$$

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}\, x_j \right), \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

# LR faktorizacija — nalaženje

Kako izračunati elemente $\ell_{ij}$ i $r_{ij}$ matrica $L$ i $R$?

- Iskoristimo poznatu strukturu matrica $L$ i $R$
- i činjenicu da je $A = L \cdot R$.

Dobivamo:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} \ell_{ik}\, r_{kj}, \quad \text{uz} \quad \ell_{ii} = 1.$$

Iz ovih $n^2$ jednadžbi računamo, redom, one elemente matrica $L$ i $R$ koje možemo izračunati iz već poznatih elemenata.

- Za $i = 1$, zbog $\ell_{11} = 1$, dobivamo prvi redak matrice $R$.
- Zatim, za $j = 1$, dobivamo prvi stupac matrice $L$, jer znamo $r_{11}$. Itd ...

# LR faktorizacija — nalaženje (nastavak)

Tako dobivamo rekurzivne relacije za elemente matrica $L$ i $R$

$$r_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\ell_{j1} = \frac{a_{j1}}{r_{11}}, \quad j = 2, \ldots, n,$$

za $i = 2, \ldots, n$ :

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \, r_{kj}, \quad j = i, \ldots, n,$$

$$\ell_{ji} = \frac{1}{r_{ii}} \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{jk} \, r_{ki} \right), \quad j = i+1, \ldots, n.$$

U zadnjem koraku, za $i = n$, računamo samo $r_{nn}$.

# LR faktorizacija — nalaženje (nastavak)

Napomena. Ako je $r_{ii} \neq 0$, za $i = 1, \ldots, n-1$, onda iz prethodnih relacija možemo

- izračunati sve netrivijalne elemente matrica $L$ i $R$.

Drugim riječima,

- imamo egzistenciju i jedinstvenost matrica $L$ i $R$.

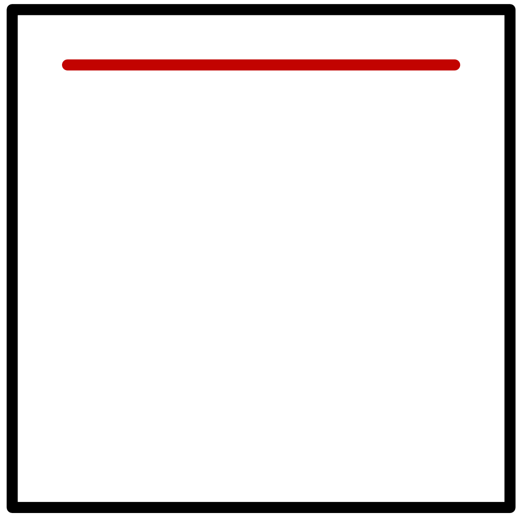
Primijetite, $r_{nn} \neq 0$ treba samo za povratnu supstituciju.

Pitanje: Kojim se redom računaju elementi od $L$ i $R$?

- Može točno prema prethodnim relacijama (v. slikice), ali
- neke elemente smijemo računati i kasnije — za efikasno korištenje tzv. cache memorije (poredak petlji).

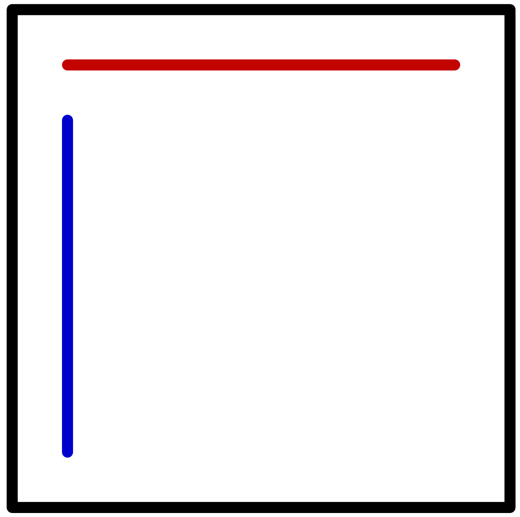
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



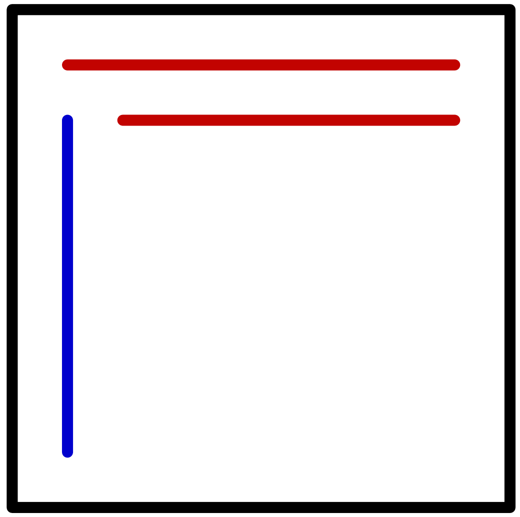
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



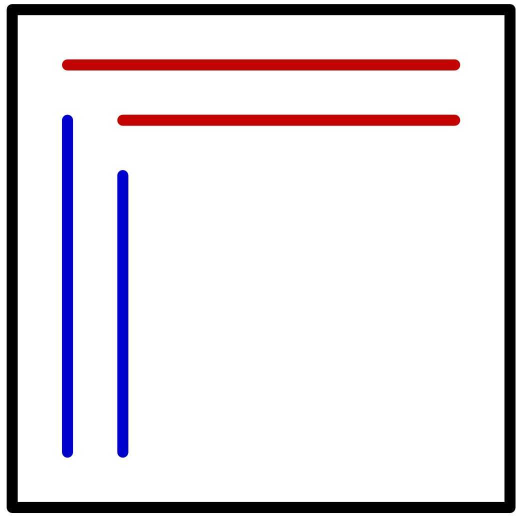
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



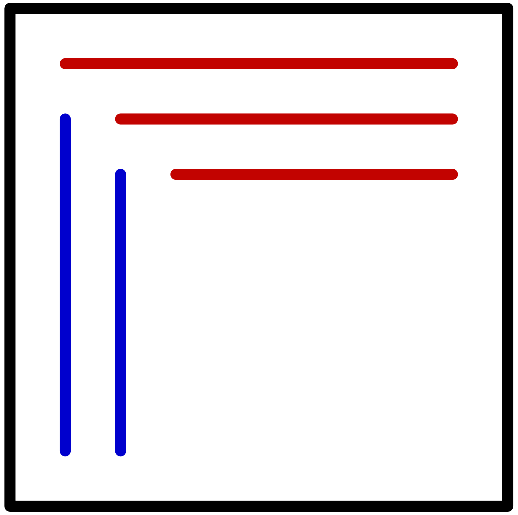
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



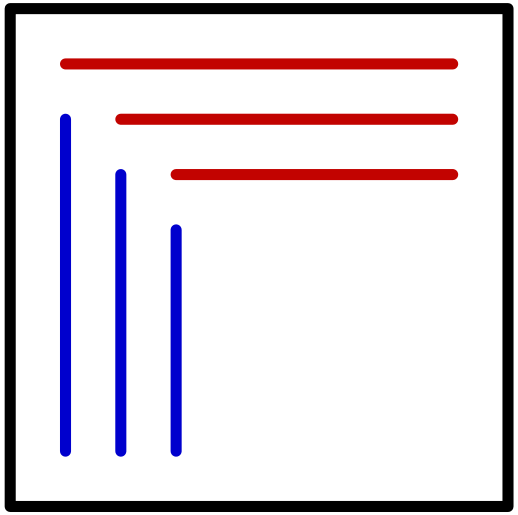
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



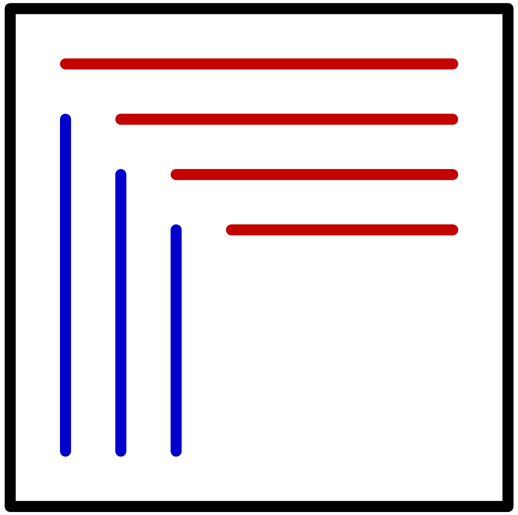
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



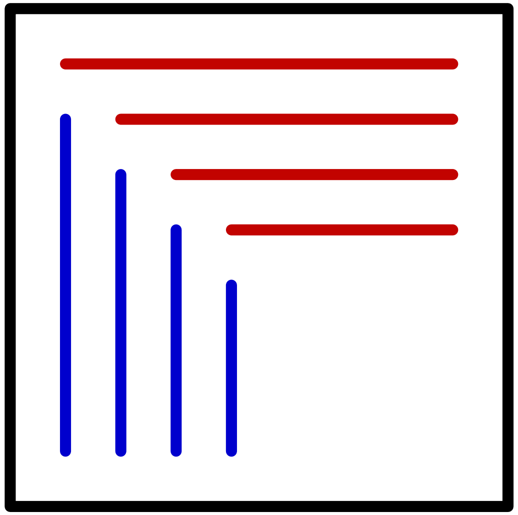
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



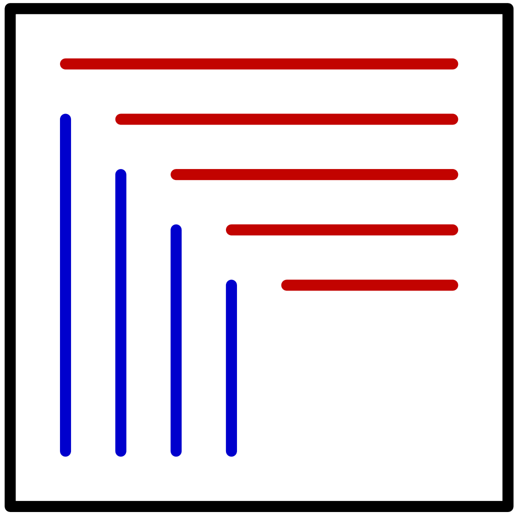
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



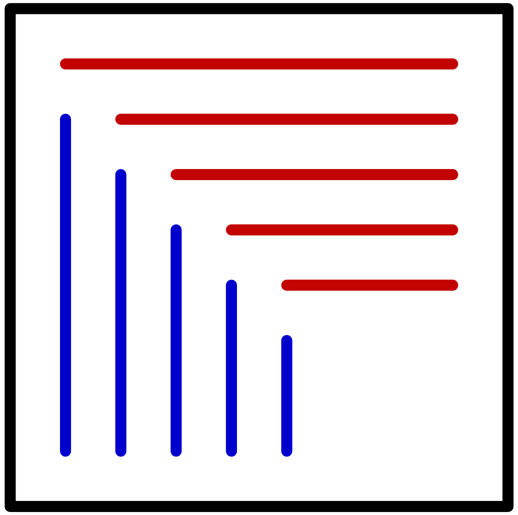
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



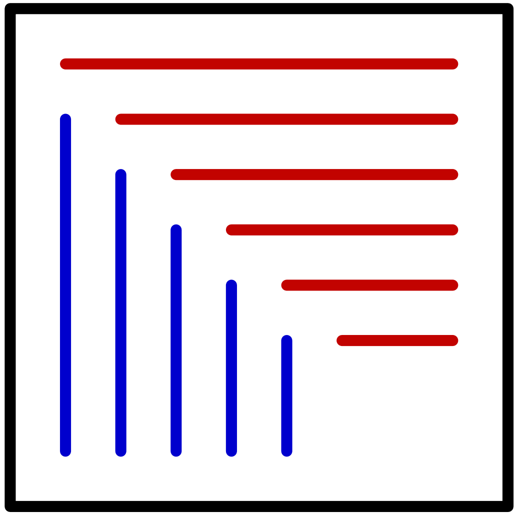
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



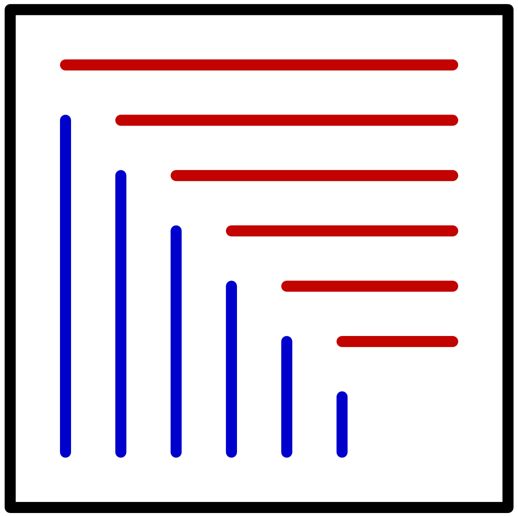
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



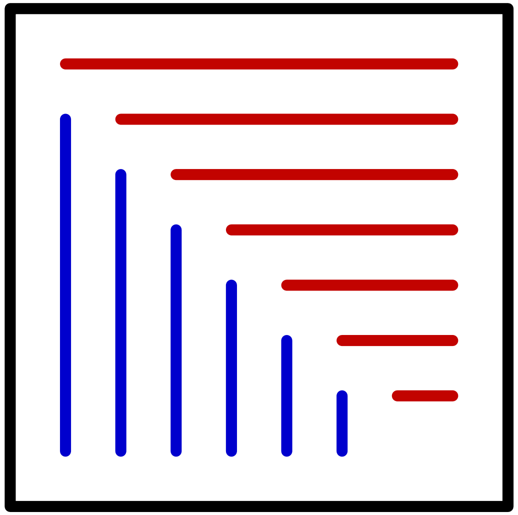
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



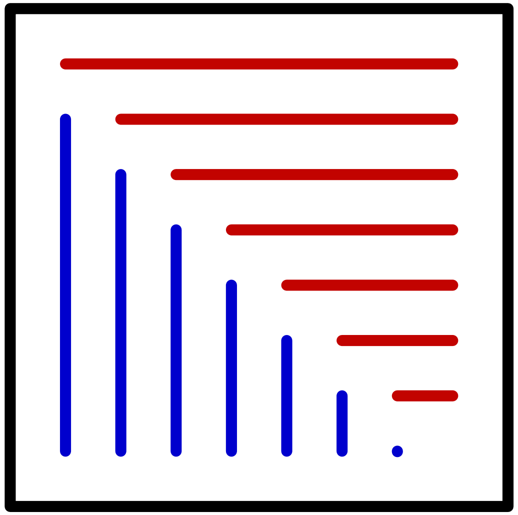
# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



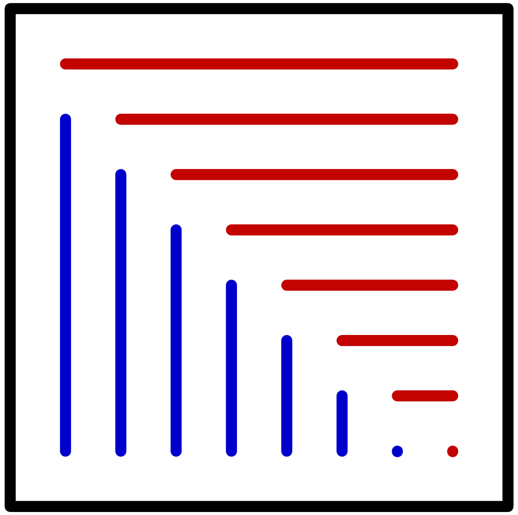
# *LR faktorizacija — poredak nalaženja*

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



# LR faktorizacija — poredak nalaženja

Poredak računanja elemenata — plavo za $L$ i crveno za $R$:



# LR faktorizacija — spremanje elemenata

Uobičajeno se LR faktorizacija matrice $A$ izvodi tako da se njezina "radna kopija" = neko polje u memoriji računala,

- koje, na početku, sadrži matricu $A$,
- postupno uništava i prepisuje elementima matrica $L$ i $R$

na sljedeći način:

- elementi matrice $R$ spremaju se u gornjem trokutu i na dijagonali,
- elementi matrice $L$ spremaju se u donjem trokutu, s tim da se dijagonala matrice $L$ ne sprema (znamo da su $1$).

Redosljed spremanja — kao na prošlim slikama, ili drugačije.

# Egzistencija i jedinstvenost LR faktorizacije

Ostaje vidjeti uz koje uvjete vrijedi $r_{ii} \neq 0$, za $i = 1, \ldots, n-1$.

Teorem. Postoji jedinstvena LR faktorizacija matrice $A$ ako i samo ako su vodeće glavne podmatrice $A_k := A(1:k, 1:k)$ regularne, za $k = 1, \ldots, n-1$.

Ako je $A_k$ singularna za neki $k$, faktorizacija može postojati, ali onda nije jedinstvena.

Dokaz. Za prvi smjer, pretpostavimo da su sve podmatrice $A_k$ regularne, za $k = 1, \ldots, n-1$. Konstrukcija LR faktorizacije za $A = A_n$ napreduje induktivno po dimenziji $k$.

Baza indukcije: Za $k = 1$, uvijek postoji jedinstvena LR faktorizacija

$$A_1 = [1]\,[a_{11}].$$

# Egzistencija i jedinstvenost LR faktorizacije

Korak indukcije: Pretpostavimo da je $k > 1$ i da podmatrica $A_{k-1}$ ima jedinstvenu LR faktorizaciju $A_{k-1} = L_{k-1}\, R_{k-1}$.

Tražimo LR faktorizaciju podmatrice $A_k$, gdje je

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & b \\ c^T & a_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ \ell^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{k-1} & r \\ 0 & r_{kk} \end{bmatrix} := L_k\, R_k.$$

Množenjem dobivamo da moraju vrijediti sljedeće jednadžbe

$$L_{k-1} r = b, \quad R_{k-1}^T \ell = c, \quad a_{kk} = \ell^T r + r_{kk}.$$

Matrice $L_{k-1}$ i $R_{k-1}$ su regularne, pa postoje jedinstvena rješenja prva dva sustava — vektori $r$, $\ell$. Iz zadnje jednadžbe dobivamo da je onda i $r_{kk}$ jedinstven. Dakle, vrijedi i za $A_k$.

## Egzistencija i jedinstvenost LR faktorizacije

Obrat. Pretpostavimo da matrica $A$ ima jedinstvenu LR faktorizaciju $A = LR$ i označimo

$$L_k := L(1:k, 1:k), \quad R_k := R(1:k, 1:k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Onda je, raspisom kao na prethodnoj stranici, za $k = n - 1$

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & b \\ c^T & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ \ell^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} & r \\ 0 & r_{nn} \end{bmatrix} := L\,R.$$

Množenjem dobivamo da onda vrijede sljedeće četiri jednadžbe

$$A_{n-1} = L_{n-1}\,R_{n-1}, \qquad \begin{aligned} L_{n-1} r &= b, \\ R_{n-1}^T \ell &= c, \end{aligned} \qquad a_{nn} = \ell^T r + r_{nn}.$$

Sad iskoristimo jedinstvenost matrica $L$ i $R$ u faktorizaciji.

# Egzistencija i jedinstvenost LR faktorizacije

To znači da vektor $\ell$ mora biti jedinstveno rješenje sustava

$$R_{n-1}^T \ell = c,$$

pa matrica $R_{n-1}$ mora biti regularna, tj. vrijedi

$$\det R_{n-1} = r_{11}\, r_{22} \cdots r_{n-1,n-1} \neq 0.$$

Iz strukture matrica $L$ i $R$ (rastavom unatrag) vidimo da je $A_k = L_k\, R_k$, za sve $k = 1, \ldots, n-1$, pa je $\det A_k = \det R_k$. Iz regularnosti $R_{n-1}$ onda slijedi

$$\det A_k = \det R_k = r_{11}\, r_{22} \cdots r_{kk} \neq 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Dakle, sve podmatrice $A_k$ su regularne, za $k = 1, \ldots, n-1$.

Samo zadnja matrica $A_n = A$ može biti singularna ($r_{nn} = 0$).

# Egzistencija i jedinstvenost LR faktorizacije

Primjer singularne matrice $A$ za koju postoji LR faktorizacija, ali nije jedinstvena:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovdje je $A_1 = R_1 = 0$, sustav za $\ell_{21}$ je $0 \cdot \ell_{21} = 0$ (u skladu s prethodnim dokazom), pa element $\ell_{21}$ može biti bilo što.

S druge strane, matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nema LR faktorizaciju, iako je regularna (fali pivotiranje). Sustav za $\ell_{21}$ ovdje glasi $0 \cdot \ell_{21} = 1$ i nema rješenja. ■

# Gaussove eliminacije i LR faktorizacija

# Veza Gaussovih eliminacija i LR faktorizacije

Može se pokazati da je

- matrica $R$ dobivena LR faktorizacijom jednaka
- matrici $R$ dobivenoj Gaussovim eliminacijama.

Neka je, kao ranije,

- $A^{(k)}$ matrica na početku $k$-tog koraka Gaussovih eliminacija,
- a $A^{(k+1)}$ matrica dobivena na kraju tog koraka.

Onda se $A^{(k+1)}$ može matrično napisati kao produkt

$$A^{(k+1)} = M_k A^{(k)},$$

pri čemu je …

# Veza Gaussovih eliminacija i LR faktorizacije

$$M_k = \left[\begin{array}{c|ccccc} I_{k-1} & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & -m_{k+1,k} & 1 & & & \\ & -m_{k+2,k} & & \ddots & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & -m_{n,k} & & & & 1 \end{array}\right],$$

a $m_{ik}$ su odgovarajući multiplikatori u $k$-tom koraku.

Na kraju eliminacija, nakon $n-1$ koraka, dobijemo gornju trokutastu matricu

$$\widetilde{R} := A^{(n)} = M_{n-1}\, M_{n-2} \cdots M_1\, A.$$

# Veza Gaussovih eliminacija i LR faktorizacije

Sve matrice $M_k$ su regularne, jer su $M_k$ donje trokutaste s $1$ na dijagonali, pa postoje njihovi inverzi. Onda se $A$ može napisati kao

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} \widetilde{R} := \widetilde{L}\widetilde{R},$$

gdje je

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ \vdots & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz jedinstvenosti LR faktorizacije slijedi da je $\widetilde{R} = R$. Usput, slijedi i $\widetilde{L} = L$, pa imamo vezu matrice $L$ s multiplikatorima.

## Parcijalno pivotiranje u LR faktorizaciji

Veza LR faktorizacije i Gaussovih eliminacija upućuje nas da pivotiranje vršimo na isti način kao kod Gaussovih eliminacija.

Ako koristimo parcijalno pivotiranje, onda se LR faktorizacija tako dobivene matrice — permutiranih redaka, zapisuje kao

$$PA = LR,$$

pri čemu je $P$ matrica permutacije.

Matrica permutacije $P$ u svakom retku i stupcu

- ima točno jednu jedinicu, a ostalo su nule.

$P$ je uvijek regularna matrica, čak ortogonalna — pokažite to!

## Parcijalno pivotiranje u LR faktorizaciji

Ako znamo "permutiranu" faktorizaciju $PA = LR$, kako ćemo riješiti linearni sustav $Ax = b$?

Najjednostavnije je lijevu i desnu stranu (slijeva) pomnožiti s $P$, pa dobivamo

$$PAx = LRx = Pb.$$

Dakle, u prvom koraku rješavamo sustav $Ly = Pb$.

Oprez: kad permutiramo, istovremeno zamjenjujemo retke

- u obje "radne matrice" — $(L - I)$ i $R$,

tj. permutiramo dosadašnje multiplikatore i jednadžbe.

Kako realiziramo permutacije u algoritmu?

# Parcijalno pivotiranje u LR faktorizaciji

Realizacija permutacija:

- Fizički zamjenjujemo retke u radnoj matrici $A$, u kojoj formiramo $L$ i $R$,
  - $L - I$ u strogo donjem trokutu od $A$,
  - $R$ u gornjem trokutu od $A$.
- Moramo pamtiti permutaciju $P$, zbog naknadne permutacije desne strane — vektora $b$.
- Matrica $P$ se pamti kao vektor $p$, koji na mjestu $i$ ima
  - indeks stupca $j$, gdje se nalazi jedinica u $i$-tom retku od $P$, tj.

$$p[i] = j \iff P_{ij} = 1.$$

Za velike matrice — može i bez zamjena, dovoljan je vektor $p$.

## Parcijalno pivotiranje u LR faktorizaciji

Primjer. Ako u LR faktorizaciji sustava s 3 jednadžbe

- prvo zamijenimo prvi i treći redak,
- pa onda trenutni drugi i treći redak,

onda će se $P$, odnosno, $p$ mijenjati ovako:

$$P: \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$p: \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

# Potpuno pivotiranje u LR faktorizaciji

Ako koristimo potpuno pivotiranje, dobivamo LR faktorizaciju matrice koja ima permutirane retke i stupce obzirom na $A$, tj.

$$PAQ = LR,$$

gdje su $P$ i $Q$ matrice permutacije.

Skica rješenja. $Q$ je unitarna, pa iz $PA = LRQ^T$, uz pokratu $Q^T x = z$, imamo

$$PAx = LR(Q^T x) = LRz = Pb.$$

Dakle, jedina razlika obzirom na parcijalno pivotiranje je

- da na kraju treba "izokretati" rješenje $z$ da se dobije $x$, tj. $x = Qz$.

# Pivotni rast

## Parcijalno vs. potpuno pivotiranje

Možemo li, i na temelju čega, reći da je potpuno pivotiranje "bolje" od parcijalnog?

- Tradicionalno, to se čini na temelju tzv. pivotnog rasta.

Pivotni rast ili "faktor rasta", u oznaci $\rho_n$, je omjer

- najvećeg (po apsolutnoj vrijednosti) elementa u svim koracima eliminacije — ovisi o pivotiranju,
- i (apsolutno) najvećeg elementa u originalnoj matrici $A$,

$$\rho_n(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}.$$

Intuitivno je jasno da nije dobro da elementi jako narastu po apsolutnoj vrijednosti, jer to može dovesti do gubitka točnosti. To je analogno "uništavanju" polaznih jednadžbi!

## Pivotni rast — parcijalno pivotiranje

Koliki je pivotni rast $\rho_n^p$ kod parcijalnog pivotiranja?

Transformacije elemenata u $k$-tom koraku eliminacija su

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}.$$

Kod parcijalnog pivotiranja, za multiplikatore $m_{ik}$ vrijedi

$$|m_{ik}| \leq 1,$$

pa je

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \leq |a_{ij}^{(k)}| + |a_{kj}^{(k)}| \leq 2 \max_{i,j} |a_{ij}^{(k)}|.$$

Nakon $n-1$ koraka algoritma, ova ocjena daje pivotni rast $\rho_n^p$

$$\rho_n^p \leq 2^{n-1}.$$

## Pivotni rast — parcijalno pivotiranje (nastavak)

Već je J. H. Wilkinson primijetio da se taj pivotni rast može dostići za sve matrice oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ -1 & 1 & & & 1 \\ -1 & -1 & \ddots & & 1 \\ -1 & -1 & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eksponencijalno rastu elementi posljednjeg stupca.

Ovo je samo "umjetno" konstruirani primjer, a u praksi je takvih matrica izrazito malo, pa se parcijalno pivotiranje ponaša mnogo bolje od očekivanog.

# Pivotni rast — potpuno pivotiranje

J. H. Wilkinson je 1961. godine dokazao da za pivotni rast $\rho_n^c$ kod potpunog pivotiranja vrijedi ocjena odozgo

$$\rho_n^c \leq n^{1/2} \Big( 2 \cdot 3^{1/2} \cdots n^{1/(n-1)} \Big)^{1/2} \approx c\, n^{1/2}\, n^{(\log n)/4}$$

i da se ta ocjena ne može dostići.

Dugo se mislilo da vrijedi

$$\rho_n^c \leq n.$$

Međutim, nađeni su kontraprimjeri matrica kad to ne vrijedi.

- 1991. g. — matrica reda 13 za koju je $\rho_{13}^c = 13.0205$,
- 1992. g. — matrica reda 25 za koju je $\rho_{25}^c = 32.986341$.

Točno ponašanje $\rho_n^c$ je otvoren problem!

# Teorija perturbacije linearnih sustava

# Teorija perturbacije linearnih sustava

Teorija perturbacije linearnih sustava bavi se ocjenom (po elementima i/ili po normi) koliko se najviše promijeni rješenje sustava $x$, ako se malo promijene elementi od $A$ i/ili $b$.

Problem. Neka je

$$Ax = b,$$

gdje je $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ regularna matrica, a $b$ zadani vektor.

Zanima nas koliko će se najviše promijeniti rješenje $x$ ovog problema, ako perturbiramo $A$, odnosno, $b$. Za ovaj problem

- ulazni podaci su elementi od $A$ i $b$ — njih $n^2 + n$,
- a rezultat je vektor $x \in \mathbb{F}^n$.

U općem obliku problema, ulaznih podataka je puno.

# Koliko je dobro uvjetovan linearni sustav?

Za početak, pojednostavnimo problem i pretpostavimo da je

- $A$ "fiksna" matrica (ne varira),
- a dozvoljene su perturbacije samo vektora $b$ (on varira).

Pripadna funkcija problema je onda $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, uz

$$x = f_A(b) := A^{-1}b.$$

Iz prethodnog predavanja znamo da je relativna uvjetovanost problema (samo, umjesto $x$, pišemo $b$)

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(b) = (\mathrm{cond}\, f_A)(b) := \left| \frac{b\, f_A'(b)}{f_A(b)} \right|.$$

Za višedimenzionalne probleme, u finijoj analizi (gledano po komponentama) dobivamo matricu brojeva uvjetovanosti.

# Koliko je dobro uvjetovan linearni sustav?

U grubljoj analizi uzmemo relativne perturbacije "po normi", a "derivacija" je Jacobijeva matrica funkcije $f_A(b) = A^{-1}b$. Iz linearnosti funkcije $f_A$ dobivamo

$$\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial f_A}{\partial b} = J_{f_A}(b) = A^{-1},$$

pa je

$$\kappa_{\text{rel}}(b) = \frac{\|b\|_2 \|A^{-1}\|_2}{\|A^{-1}b\|_2} = \frac{\|Ax\|_2 \|A^{-1}\|_2}{\|x\|_2}.$$

Gledamo najgoru moguću uvjetovanost, po svim vektorima $b$,

$$\max_{\substack{b \in \mathbb{F}^n \\ b \neq 0}} \kappa_{\text{rel}}(b) = \max_{\substack{x \in \mathbb{F}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \|A^{-1}\|_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

## Primjer

Za mjeru uvjetovanosti sustava možemo uzeti broj

$$\mathrm{cond}(A) := \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Pitanje: Ako je ova uvjetovanost mala, mora li onda rješenje izračunato računalom biti dobro?

Primjer. Sjetimo se sustava $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Za vježbu izračunajte da je

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{300000001 + 10001\sqrt{499980001}}{199980000} \approx 2.61838527365482686 89.$$

## Primjer

Je li to dobro uvjetovan sustav? Jest!

Digresija. Nije teško pokazati da za regularne matrice vrijedi

$$1 = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}(A),$$

a jednakost se dostiže za unitarne matrice. Uvjetovanost je loša ako je $\mathrm{cond}(A) \gg 1$. ■

U prethodnom sustavu je nešto “pošlo po zlu”! Što?

Na bitnom mjestu u računu došlo je do “underflow-a”, tj.

- mali broj je pretvoren u nulu,

i više ne možemo govoriti o malim relativnim perturbacijama!