

Numerička matematika

5. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Interpolacija polinomima:
 - Problem interpolacije polinomima.
 - Egzistencija i jedinstvenost.
 - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
 - Lagrangeova baza.
 - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
 - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.
 - Newtonova baza i podijeljene razlike.
 - Računanje Newtonovog oblika IP.
 - Newton za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
 - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
 - Primjer Runge.

Informacije

Konzultacije (službeno):

- 🕒 samo za NM: ponedjeljak u 13 sati (iza predavanja),
- 🕒 petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna **predavanja** od prošlih **5** godina, a stizat će i **nova** (kako nastaju).

Skraćena verzija **skripte** — **1. dio** (prvih **7** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija **skripte** — **2. dio** (drugih **6** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima dva demonstratora:

- Mario Berljafa

- termini: utorak, 9–10 i petak, 12–13.

- e-mail: mberljaf@student.math.hr

- Marin Bužančić

- termin: utorak, 16–18.

- e-mail: buzancic@student.math.hr

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom bar dan ranije!

- Sastanak za demonstrature je pred oglasnom pločom (bar zasad).

Interpolacija polinomima

Interpolacija polinomima

Neka je funkcija f zadana na

- diskretnom skupu različitih točaka x_k , za $k = 0, \dots, n$, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Komentar. Kad bismo dozvolili da je $x_i = x_j$, za neke $i \neq j$,

- ili f nije funkcija (ako je $f_i \neq f_j$),
- ili imamo redundantan podatak (ako je $f_i = f_j$).

Ako je $[a, b]$ segment, u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

ali to ovdje nije bitno.

Egzistencija i jedinstvenost

Pitanja.

- Uz koje uvjete postoji interpolacijski polinom?
- Je li jedinstven?

Odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za zadane točke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstveni interpolacijski polinom $\varphi \in \mathcal{P}_n$, stupnja najviše n

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Egzistencija i jedinstvenost

Dokaz. Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

polinom stupnja **najviše** n . Uvjete interpolacije napišimo u obliku **linearnog sustava** s nepoznicama a_0, \dots, a_n ,

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = f_n.$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava **regularna**, pa sustav ima **jedinstveno rješenje**.

Egzistencija i jedinstvenost

Provjeru **regularnosti** napraviti ćemo računanjem vrijednosti **determinante**.

Pripadna determinanta je tzv. **Vandermondeova determinanta**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} .$$

Egzistencija i jedinstvenost

Definiramo determinantu koja “naliči” na D_n , samo umjesto x_n , stavimo da je **posljednji redak** u $V_n(x)$ funkcija od x :

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ \mathbf{1} & \mathbf{x} & \mathbf{x^2} & \cdots & \mathbf{x^n} \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$D_n = V_n(x_n).$$

Promatrajmo $V_n(x)$ kao **funkciju** varijable x .

Egzistencija i jedinstvenost

Razvojem po posljednjem retku uočavamo da je

- $V_n(x)$ polinom stupnja najviše n u varijabli x ,
- koeficijent tog polinoma uz x^n je D_{n-1} — “križanje” zadnjeg retka i stupca.

Ako u determinantu $V_n(x)$, redom, uvrštavamo x_0, \dots, x_{n-1} ,

- determinanta $V_n(x_k)$, za $k = 0, \dots, n - 1$, ima dva jednaka retka,

pa je

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \dots = V_n(x_{n-1}) = 0,$$

tj. točke x_0, \dots, x_{n-1} su nultočke polinoma $V_n(x)$ stupnja n .

Egzistencija i jedinstvenost

Za polinom $V_n(x)$ stupnja n znamo

• vodeći koeficijent — D_{n-1} ,

• sve nultočke — x_0, \dots, x_{n-1} ,

pa $V_n(x)$ možemo napisati kao

$$V_n(x) = D_{n-1} (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Uvrštavanjem $x = x_n$, dobivamo rekurzivnu relaciju za D_n

$$D_n = D_{n-1} (x_n - x_0) (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Odmah vidimo da je $D_0 = 1$ (lijevi gornji kut!), pa je

$$D_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Egzistencija i jedinstvenost

Budući da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, onda je

$$D_n \neq 0,$$

tj. matrica linearnog sustava je **regularna**, pa

☛ postoji **jedinstveno rješenje** a_0, \dots, a_n za koeficijente polinoma p_n ,

odnosno **jedinstveni interpolacijski polinom**. ■

Napomena. Nadalje ćemo se baviti

☛ **raznim formama** interpolacijskog polinoma,

☛ koje će **uvijek** predstavljati **isti** interpolacijski polinom,

samo **zapisan** u **raznim bazama**.

Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma \mathcal{P}_n izaberemo bazu $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, onda interpolacijski polinom p_n možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente a_0, \dots, a_n ima oblik

$$p_n(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \dots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \dots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \dots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n.$$

Pitanje: Može li se relativno jednostavno pronaći baza $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ za koju je matrica ovog sustava jedinična matrica?

Izbor baze za interpolaciju

Primjer

Primjer. Rješavanjem linearnog sustava za koeficijente, nađite interpolacijski polinom **stupnja 40** koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin x,$$

na intervalu $[0, 20\pi]$ na **ekvidistantnoj** mreži točaka.

Vandermondeov linearni sustav je **katastrofalno uvjetovan**,

$$\kappa_2 \approx 5.027 \cdot 10^{82},$$

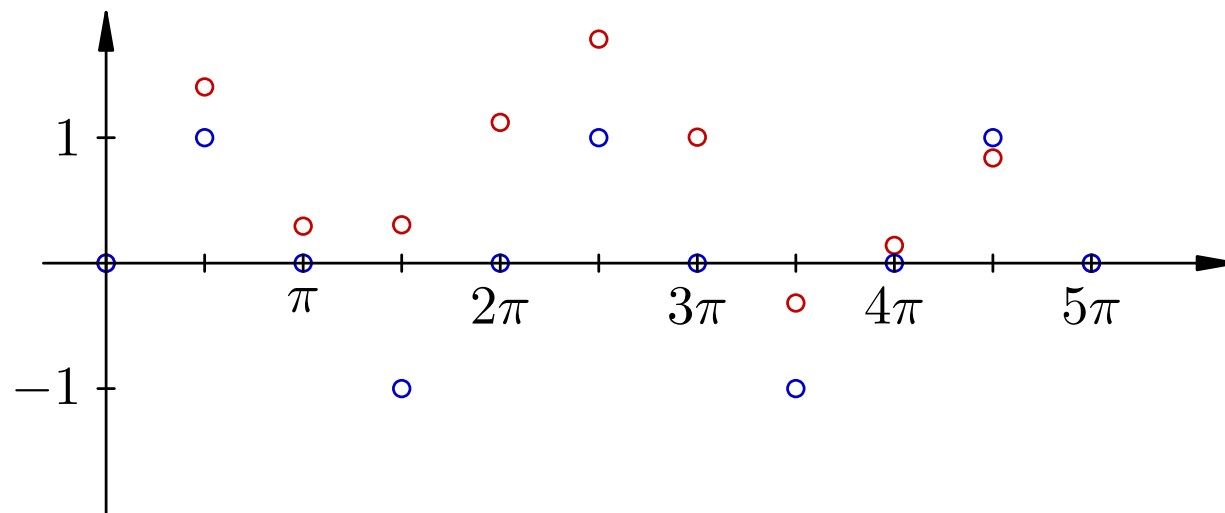
pa se očekuju **greške** u rješenju.

Kad izračunamo vrijednost u čvorovima interpolacije, **greške** su tolike da interpolacijski polinom **ne interpolira** zadane podatke — tj., ni **rezidual nije** malen.

Primjer (nastavak)

Legenda. Na slici je prikazan samo dio podataka

- plavim kružićima označeni su čvorovi interpolacije,
- crvenim kružićima označene su izračunate vrijednosti u čvorovima interpolacije.



Zaključak. Treba naći brži način računanja, koji u čvorovima daje grešku 0.

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Pogledajmo **uvjetovanost** Vandermondeovih matrica za neke standardne izbore **mreža čvorova**, u ovisnosti o **broju** čvorova.

Oznaka: Za zadani $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ promatramo **mrežu** s $n + 1$ čvorova

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad x_0^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}.$$

Pripadnu **Vandermondeovu matricu** reda $n + 1$ označavamo s

$$V^{(n+1)} = V^{(n+1)}(x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}),$$

a njezini elementi su

$$(V^{(n+1)})_{ij} = \left(x_{i-1}^{(n)}\right)^{j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n + 1.$$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 1. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[-1, 1]$,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^0$	8	$1.605 \cdot 10^3$	25	$2.131 \cdot 10^{11}$	60	$2.253 \cdot 10^{28}$
2	$3.226 \cdot 10^0$	10	$1.395 \cdot 10^4$	30	$5.642 \cdot 10^{13}$	70	$1.722 \cdot 10^{33}$
3	$8.012 \cdot 10^0$	12	$1.234 \cdot 10^5$	35	$1.496 \cdot 10^{16}$	80	$1.329 \cdot 10^{38}$
4	$2.353 \cdot 10^1$	14	$1.105 \cdot 10^6$	40	$4.044 \cdot 10^{18}$	90	$1.033 \cdot 10^{43}$
5	$6.383 \cdot 10^1$	16	$9.983 \cdot 10^6$	45	$1.093 \cdot 10^{21}$	100	$8.083 \cdot 10^{47}$
6	$1.898 \cdot 10^2$	18	$9.085 \cdot 10^7$	50	$2.989 \cdot 10^{23}$		
7	$5.354 \cdot 10^2$	20	$8.314 \cdot 10^8$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 2. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$2.618 \cdot 10^0$	8	$2.009 \cdot 10^6$	25	$2.628 \cdot 10^{21}$	60	$7.018 \cdot 10^{52}$
2	$1.510 \cdot 10^1$	10	$1.156 \cdot 10^8$	30	$7.896 \cdot 10^{25}$	70	$6.998 \cdot 10^{61}$
3	$9.887 \cdot 10^1$	12	$6.781 \cdot 10^9$	35	$2.404 \cdot 10^{30}$	80	$7.048 \cdot 10^{70}$
4	$6.864 \cdot 10^2$	14	$4.032 \cdot 10^{11}$	40	$7.391 \cdot 10^{34}$	90	$7.151 \cdot 10^{79}$
5	$4.924 \cdot 10^3$	16	$2.421 \cdot 10^{13}$	45	$2.289 \cdot 10^{39}$	100	ne ide
6	$3.606 \cdot 10^4$	18	$1.465 \cdot 10^{15}$	50	$7.132 \cdot 10^{43}$		
7	$2.678 \cdot 10^5$	20	$8.920 \cdot 10^{16}$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 3. Neekvidistantna “harmonijska” mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$6.342 \cdot 10^0$	8	$4.650 \cdot 10^9$	25	$9.112 \cdot 10^{39}$
2	$5.965 \cdot 10^1$	10	$6.033 \cdot 10^{12}$	30	$1.037 \cdot 10^{50}$
3	$7.532 \cdot 10^2$	12	$1.129 \cdot 10^{16}$	35	$2.649 \cdot 10^{60}$
4	$1.217 \cdot 10^4$	14	$2.878 \cdot 10^{19}$	40	$1.356 \cdot 10^{71}$
5	$2.404 \cdot 10^5$	16	$9.586 \cdot 10^{22}$	45	$1.277 \cdot 10^{82}$
6	$5.620 \cdot 10^6$	18	$4.041 \cdot 10^{26}$	50	$2.071 \cdot 10^{93}$
7	$1.518 \cdot 10^8$	20	$2.102 \cdot 10^{30}$		

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Za dani n , čvorovi “harmonijske” mreže su, redom,

$$x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2}, \quad x_n^{(n)} = \frac{1}{1},$$

pa zato i naziv “harmonijska”. Prvi čvor teži prema 0, kad $n \rightarrow \infty$.

Može se pokazati da je

$$\kappa_2(V^{(n+1)}) > (n+1)^{n+1}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, **nije potrebno** (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom p_n možemo napisati korištenjem tzv. Lagrangeove baze $\{\ell_k, k = 0, \dots, n\}$ prostora polinoma \mathcal{P}_n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \ell_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Polinomi l_k su stupnja n , pa je p_n polinom stupnja **najviše** n i vrijedi

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Kad to uvrstimo u p_n , vidimo da se suma svodi na **jedan jedini član** — za $i = k$, tj. da vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k,$$

čime smo pokazali da se radi o interpolacijskom polinomu u čvorovima (x_k, f_k) , za $k = 0, \dots, n$.

Iz oblika l_k vidi se da je za **računanje** polinoma u **Lagrangeovoj formi** potrebno $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

zovemo **polinom čvorova**.

Polinome $l_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'_k(x_k)}.$$

Nadalje, lako se vidi da je $\omega'_k(x_k) = \omega'(x_k)$, pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$, za $k = 0, \dots, n$ (za $x = x_k$ znamo da je $p_n(x_k) = f_k$). Broj operacija za svaku točku x je $O(n)$, tj. linearan u n .

Ipak, svrha Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma

- nije računanje vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za teoretske svrhe (dokaze).

Ako znamo neke informacije o funkciji f , možemo napraviti i ocjenu greške interpolacijskog polinoma. Razumno u praksi:

- f je “malo više” netrivialno glatka od polinoma.

Greška interpolacijskog polinoma

Teorem. Pretpostavimo da

- funkcija f ima $(n + 1)$ -u derivaciju na segmentu $[a, b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \dots, n$, su međusobno **različiti čvorovi interpolacije**, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- p_n je **interpolacijski polinom** za f u tim čvorovima.

Za **bilo koju** točku $x \in [a, b]$, **postoji** točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \dots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za **grešku** interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Greška interpolacijskog polinoma

Dokaz. 1. slučaj — ako je $x = x_k$, tj. x je **čvor interpolacije**.

Tada je $\omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan. Dakle, tvrdnja vrijedi!

2. slučaj — pretpostavimo da x nije **čvor** interpolacije.

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i **grešku** interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran (broj), čim x nije **čvor**.

Fiskirajmo x , a zatim definiramo funkciju $g = g_x$ u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t) \frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$

Greška interpolacijskog polinoma

Zaključak:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f , i one su neprekidne kad su to i derivacije od f ;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g . Ako za t uvrstimo čvor x_k , dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k) \frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n + 2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Greška interpolacijskog polinoma

Budući da je g derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$,

- Rolleov teorem $\implies g'$ ima barem $n + 1$ nultočku unutar (x_{\min}, x_{\max}) .

Tu koristimo $n \geq 0$, pa g' postoji.

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima bar $n + 2 - j$ nultočaka na (x_{\min}, x_{\max}) , za $j = 0, \dots, n + 1$;
- za $j = n + 1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Nultočka ξ , naravno, ovisi o x , kao i funkcija g .

Greška interpolacijskog polinoma

Nadalje,

- p_n je polinom stupnja **najviše** n , pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja $n + 1$,

pa je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n + 1)!.$$

Uvrštavanjem $e^{(n+1)}(t)$ u $(n + 1)$ -u derivaciju za g , dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t) \frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n + 1)! \frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Greška interpolacijskog polinoma

Konačno, ako uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno,

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

što smo trebali dokazati. ■

Uočite: u dokazu je **bitno**

🕒 samo da $f^{(n+1)}(x)$ postoji, za **svaki** $x \in [a, b]$,
bez daljnih zahtjeva (ograničenost, neprekidnost, i sl.).

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Pojačanje tvrdnje.

- Ako je $f^{(n+1)}$ ograničena na $[a, b]$, ili, jače,
- ako je $f \in C^{n+1}[a, b]$, tj. f ima neprekidnu $(n + 1)$ -u derivaciju na $[a, b]$,

onda vrijedi sljedeća “globalna” ocjena greške interpolacijskog polinoma p_n za funkciju f , u bilo kojoj točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n + 1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost M_{n+1} .

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- nije pogodan za povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji Newtonova forma interpolacijskog polinoma

- koja se izvodi tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije, tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Interpolacijski polinom stupnja 0

Nađimo konstantu koja interpolira funkciju f u točki x_0 . Očito

$$p_0(x) = f_0.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Interpolacijski polinom stupnja 1

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1 .

Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1 ,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Uočimo

- r_1 mora biti stupnja 1;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$, odnosno r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0),$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

• iz uvjeta interpolacije u x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$, pa je

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Interpolacijski polinom stupnja 2

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2 .

Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2 ,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Uočimo

- r_2 mora biti stupnja 2;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 i x_1 imamo

$$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \quad k = 0, 1,$$

tj. mora biti $r_2(x_k) = 0$, odnosno, r_2 mora imati oblik

$$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

- koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u x_2 .

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nastavimo li postupak, konstruirali smo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

tj. konstruirali smo “donju trokutastu” Newtonovu bazu

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n .

Sada samo treba **odrediti** koeficijente a_k .

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da **dižemo** stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k **ovisi samo o** funkciji f i točkama x_0, \dots, x_k .

Oznaka:

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k],$$

a veličinu $f[x_0, \dots, x_k]$ zovemo k -ta **podijeljena razlika**.

Katkad se koristi “**operatorska**” oznaka $[x_0, \dots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema. Za međusobno različite točke x_0, \dots, x_n , podijeljena razlika $f[x_0, \dots, x_n]$ **ne ovisi** o permutaciji točaka σ , tj.

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

• s a_k — ako je **poredak točaka** x_0, \dots, x_n ,

• s b_k — ako je **poredak točaka** $x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \dots + b_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Podijeljene razlike

Budući da se radi o istom polinomu

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije od x moraju biti jednaki;
- uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$. ■

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \dots, x_n]$.

Lema. Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$.

Podijeljene razlike

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

• s a_k — ako je poredak točaka x_0, \dots, x_n ,

• s b_k — ako je poredak točaka x_n, \dots, x_0 .

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \dots + b_n \prod_{k=1}^n (x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1} .

Podijeljene razlike

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao **zbroj dva** koeficijenta:

- koeficijent uz **pretposljednji** član u p_n , što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u **posljednjem** članu — u produktu faktora $\prod_{k=1}^n (x - x_k)$, uzmemo iz **jedne** zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x ,

odnosno

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^n x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^n x_k,$$

Podijeljene razlike

pa dobivamo

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$

Budući da je

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n],$$

$$a_{n-1} = f[x_0, \dots, x_{n-1}],$$

$$b_{n-1} = f[x_n, \dots, x_1] = f[x_1, \dots, x_n],$$

odmah izlazi tražena **rekurzija**.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz **konstantnog** interpolacijskog polinoma. ■

Tablica podijeljenih razlika

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	\cdots	$f[x_0, \dots, x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		\ddots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		$f[x_0, \dots, x_n]$
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		\ddots	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1] (x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0) (x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo “gornji rub”.
To se može **izračunati** u jednom **jednodimenzionalnom polju**.

Algoritam računanja podijeljenih razlika

```
za i = 1 do n radi {
  za j = n do i radi {
    f[j] = (f[j] - f[j - 1]) / (x[j] - x[j - i]);
  };
};
```

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nakon završetka algoritma za računanje **podijeljenih razlika**

● “**gornji rub**” $f[x_0, \dots, x_i]$ se nalazi redom u polju **f**.

Algoritam **izvrednjavanja** interpolacijskog polinoma u nekoj točki x ima oblik **Hornerove sheme**.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma

```
sum = f[n];  
za i = n - 1 do 0 radi {  
    sum = sum * (x - x[i]) + f[i];  
};  
/* Na kraju je  $p_n(x) = \text{sum}$ . */
```

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Grešku interpolacijskog polinoma (jednaku onoj iz Lagrangeove forme), možemo pisati korištenjem podijeljenih razlika.

Ideja. Dodajmo još jedan čvor x_{n+1} u Newtonov oblik polinoma, tako da je $x_{n+1} \in \langle a, b \rangle$, s tim da x_{n+1} nije jednak ni jednom od polaznih čvorova x_0, \dots, x_n . Tada je

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0) \dots (x - x_n). \\ &= p_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Budući da je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}),$$

onda je

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= p_n(x_{n+1}) \\ &\quad + (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n) f[x_0, \dots, x_{n+1}] \\ &= p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1}) f[x_0, \dots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Usporedimo to s ocjenom greške iz u Lagrangeovog oblika, (napisanoj u točki x_{n+1} , a ne x)

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \frac{\omega(x_{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Iz prethodne formule odmah čitamo da je

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ova se formula uobičajeno piše u ovisnosti o varijabli x , (tj. x_{n+1} se zamijeni s x), pa je

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Zanimljivo je da ova formula **vrijedi** i kad čvorovi **nisu** međusobno **različiti** (v. Hermiteova interpolacija).

Podijeljene razlike visokog reda za polinome

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ **polinom** stupnja najviše n , onda je

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0, \quad \text{za } k \geq n + 1,$$

za **bilo koji** izbor točkaka x_0, \dots, x_k .

Dokaz. Tada je $f^{(k)}(\xi) = 0$ u **svakoj** točki ξ . ■

Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

ako su čvorovi ekvidistantni.

Prisjetimo se, Newtonov interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1] (x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0) (x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja radi se u

podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$,

faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Pojednostavnimo prvo **podijeljenu razliku**.

Točke su **ekvidistantne** s “razmakom” (ili korakom) h , ako je

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \quad j = 0, \dots, n.$$

Konačnu razliku unaprijed definiramo kao

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo **operator konačnih razlika unaprijed**.

Konačnu razliku reda k , za $k \in \mathbb{N}$, definiramo **rekurzivno** kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor (definiciju) $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Nađimo vezu **podijeljenih** i **konačnih** razlika.

Lema. Ako su točke x_j **ekvidistantne**, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f_j.$$

Dokaz. Ide indukcijom po redu k .

Za $k = 0$, rezultat je očito istinit — po definiciji.

Baza indukcije. Za $k = 1$ imamo

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h},$$

pa tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Podijeljene i konačne razlike

Korak indukcije. Pretpostavimo da za sve uzastopne točke x_j, \dots, x_{j+k-1} , za bilo koji “dozvoljeni” j , vrijedi

$$f[x_j, \dots, x_{j+k-1}] = \frac{1}{(k-1)! h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_j.$$

Zaključak. Ako je $j+k \leq n$, onda je

$$\begin{aligned} f[x_j, \dots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] - f[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \\ &= \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] - f[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}{k \cdot h} = (\text{pretp. ind.}) \\ &= \frac{1}{kh} \left(\frac{1}{(k-1)! h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_{j+1} - \frac{1}{(k-1)! h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_j \right) \\ &= \frac{1}{k! h^k} (\Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j) = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f_j. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Zapišimo prvo točku x preko početnog čvora x_0 i koraka h ,

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

s tim da s može biti i realan broj. Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} ((s - j)h) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Po definiciji **binomnih koeficijenata**, s tim da **smije** biti i $s \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{s}{0} = 1, \quad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Odavde odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

Sada možemo napisati **Newtonov** oblik interpolacijskog polinoma s **ekvidistantnim čvorovima**.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Uočimo da se faktor $h^k k!$ skrati:

• u nazivniku dolazi od konačnih razlika,

• a u brojniku od produkta $\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$,

pa interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1] (x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0) (x - x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= \Delta^0 f_0 + \binom{s}{1} \Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica svih potrebnih konačnih razlika ima ovaj oblik:

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	\dots	$\Delta^n f_k$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0	$\Delta^2 f_0$		
\vdots	\vdots	Δf_1	\vdots	\ddots	
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-2}$	\ddots	$\Delta^n f_0$
x_n	f_n	Δf_{n-1}			

Ova tablica se računa u jednom jednodimenzionalnom polju, kao i kod podijeljenih razlika.

**Koliko je “dobar”
interpolacijski polinom?**

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera.

Legenda:

- crna boja — funkcija f ,
- crvena boja — interpolacijski polinom p_n .

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo **grafove** interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na **ekvidistantnoj mreži** za $x \in [0.1, 10]$.

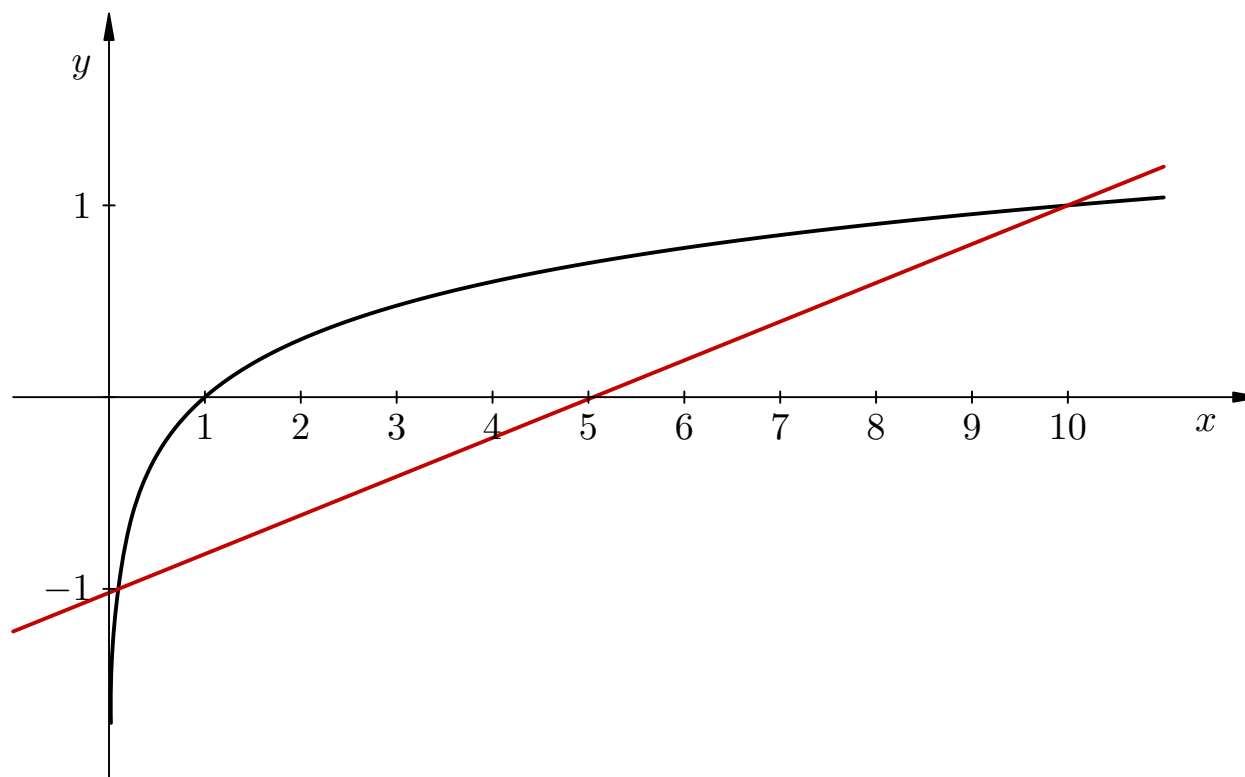
Primijetit ćete da je **greška** interpolacije

● **najveća** na **prvom** intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima **singularitet** u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je **vrlo blizu** tog singulariteta.

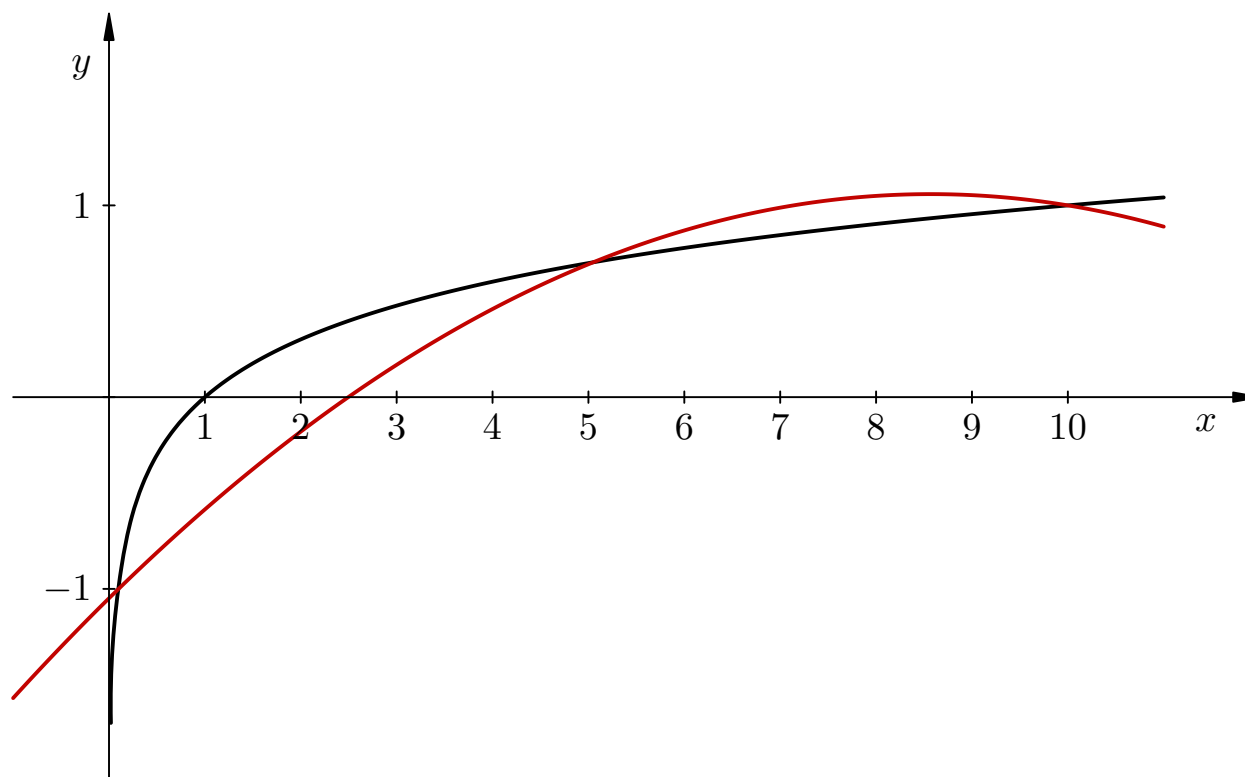
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša **izvan** intervala interpolacije.

Logaritam — ekvidistantna mreža



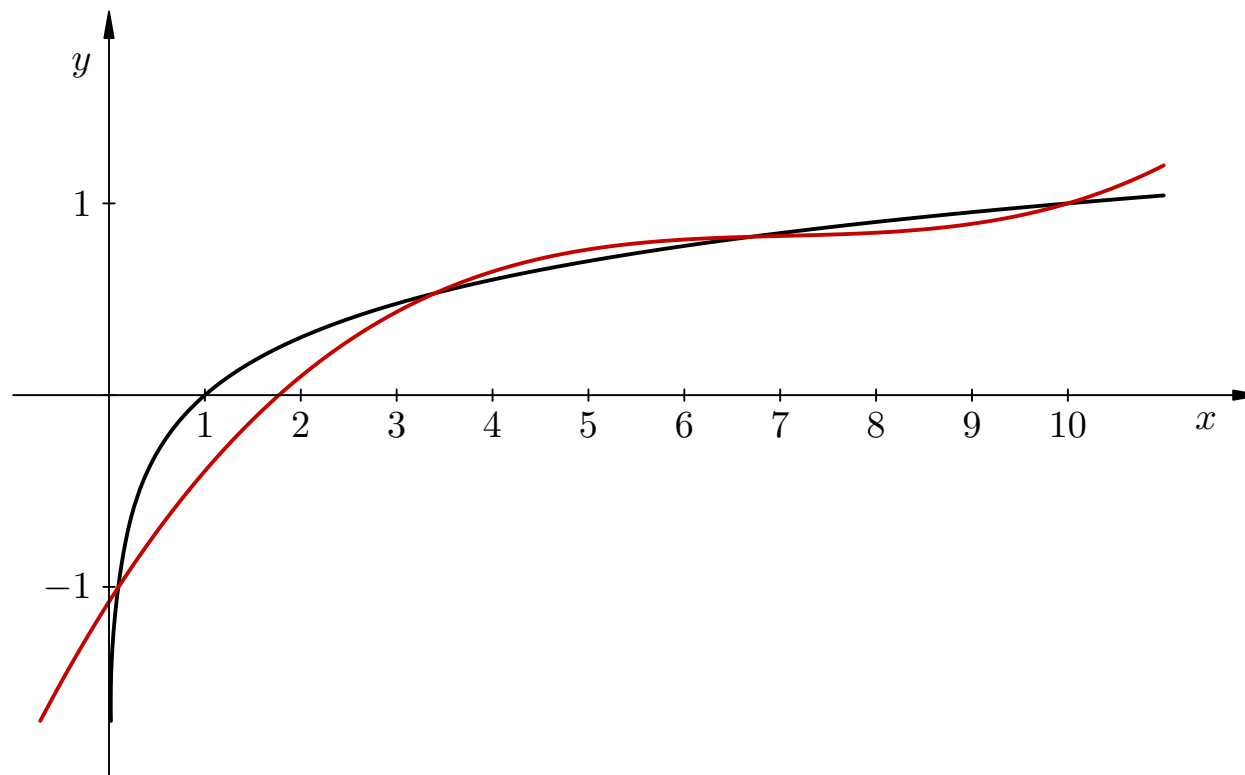
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



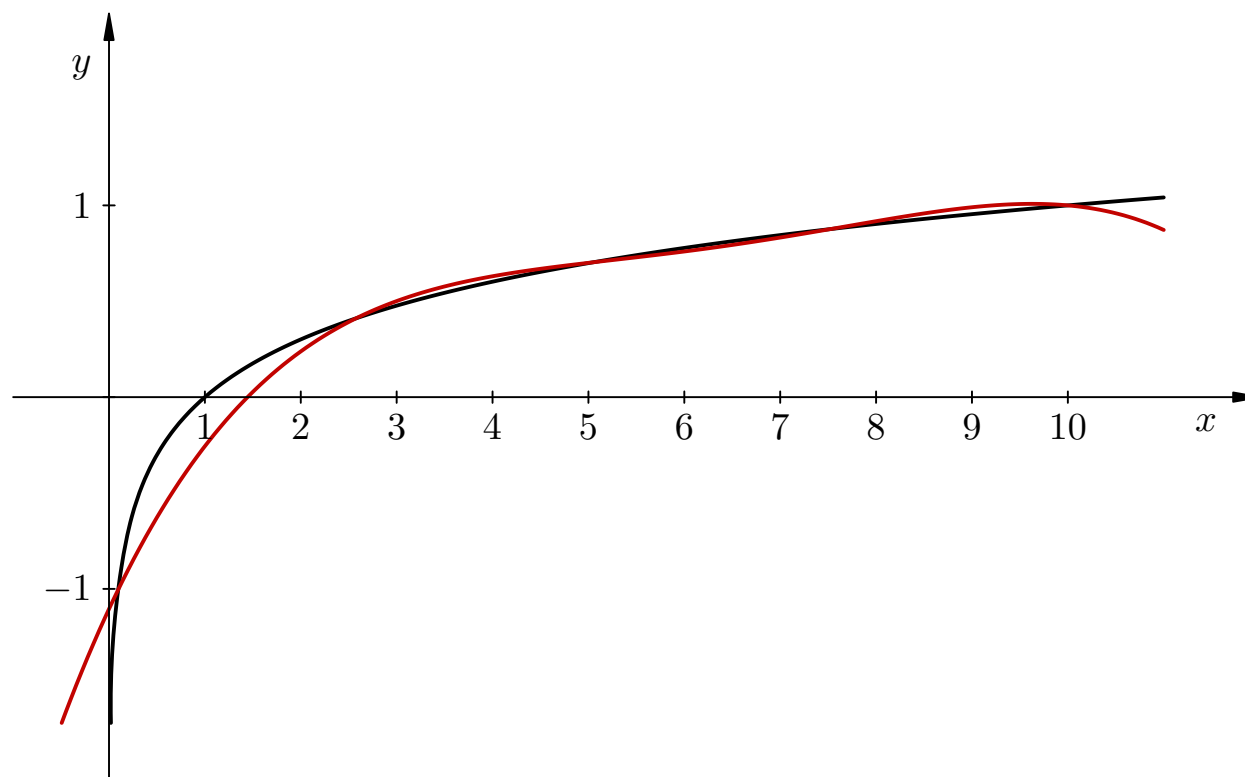
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



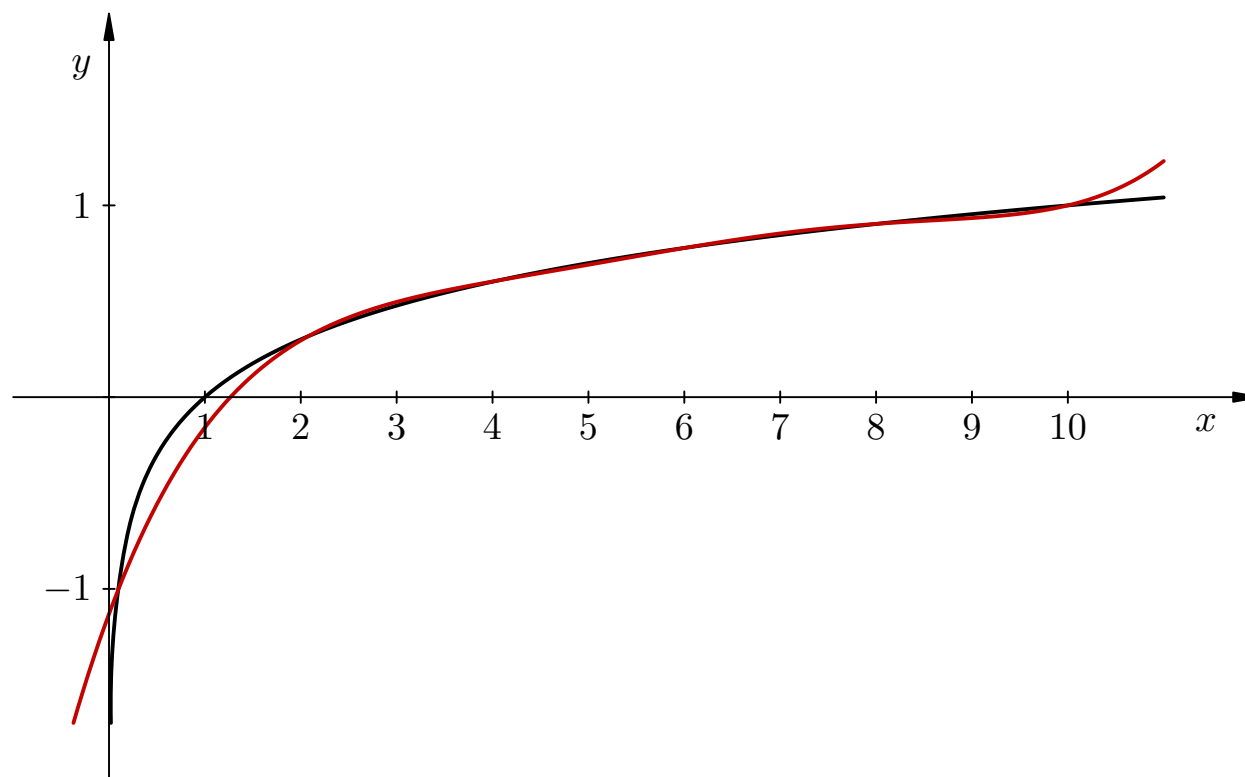
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



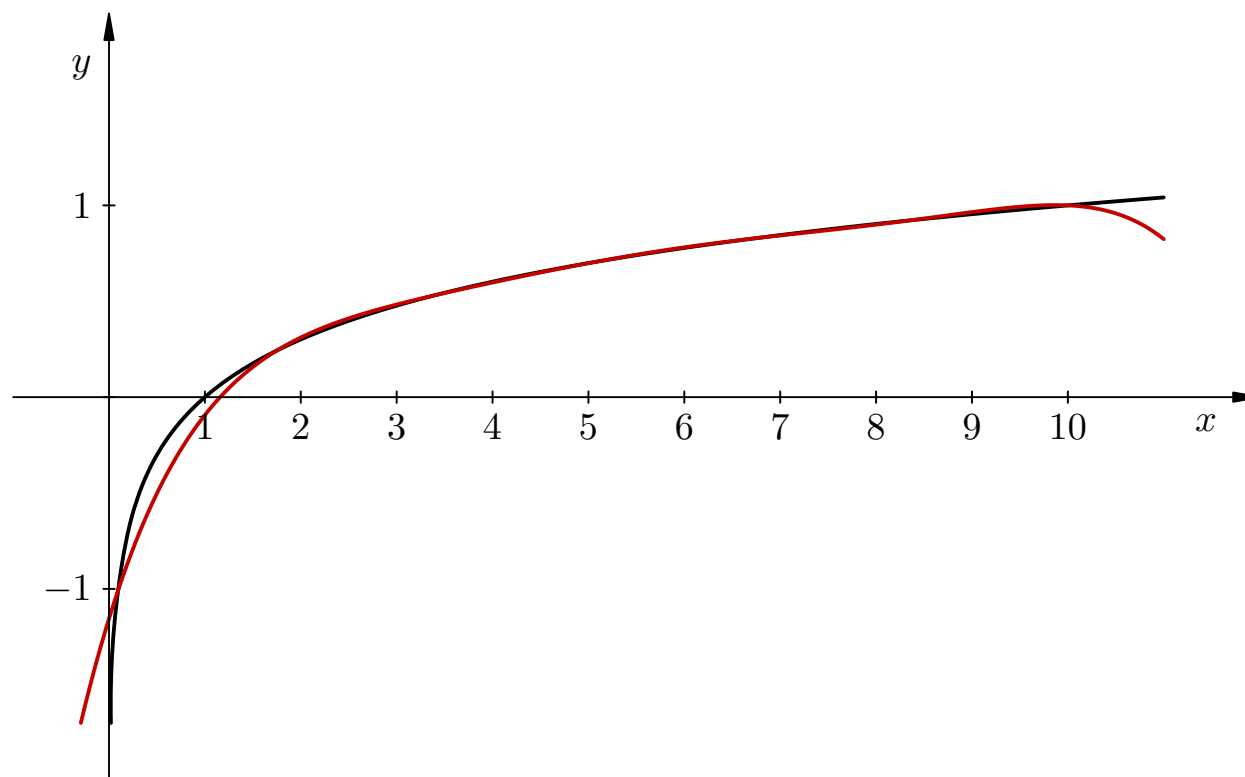
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



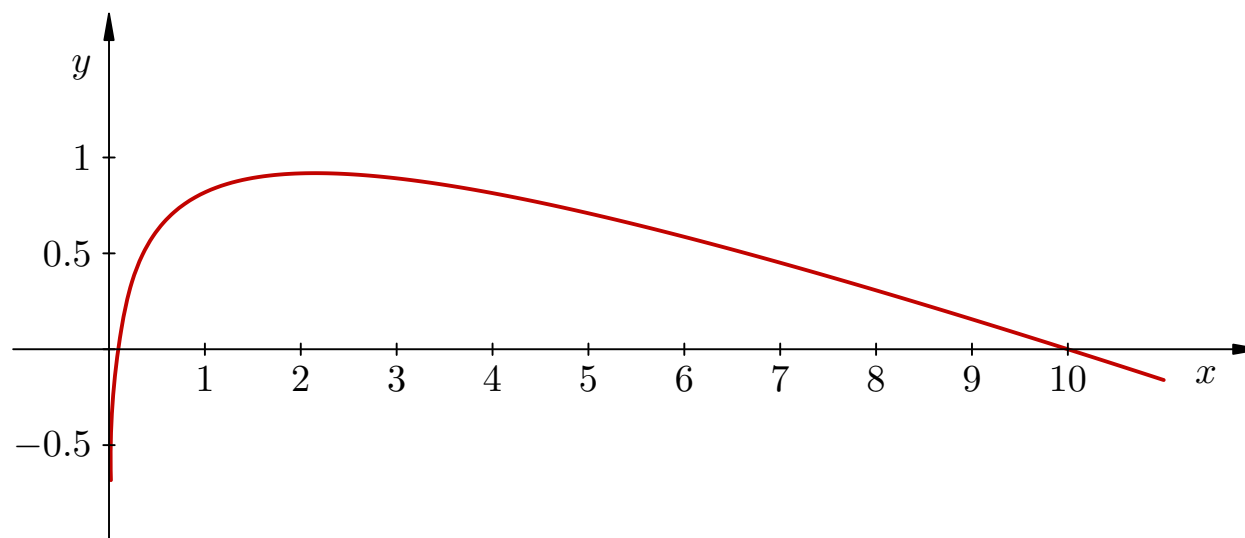
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

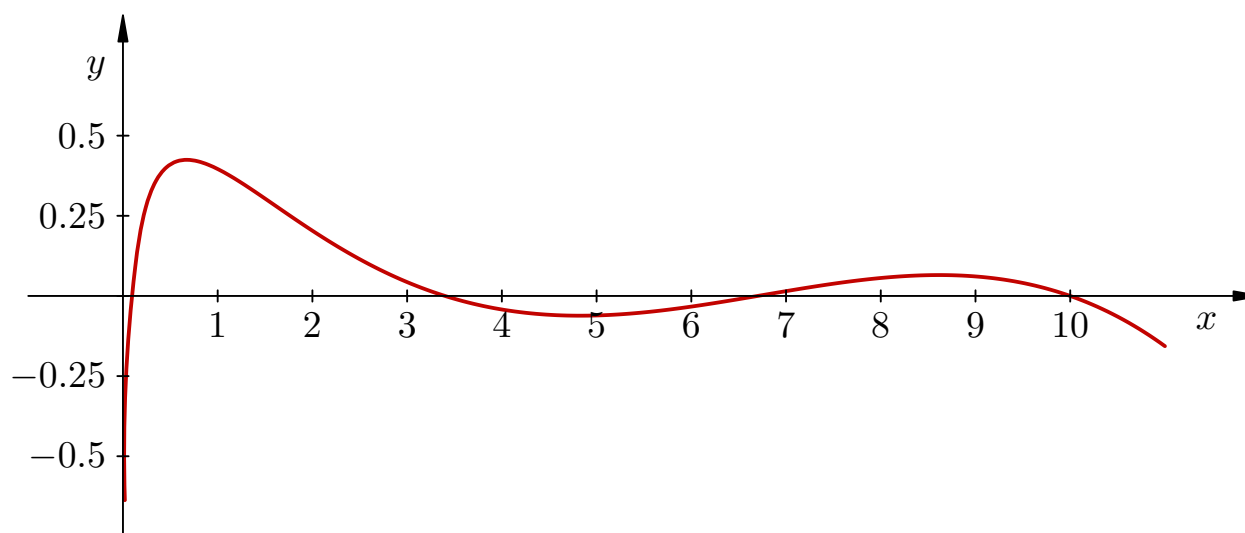
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite **skalu** na y -osi.

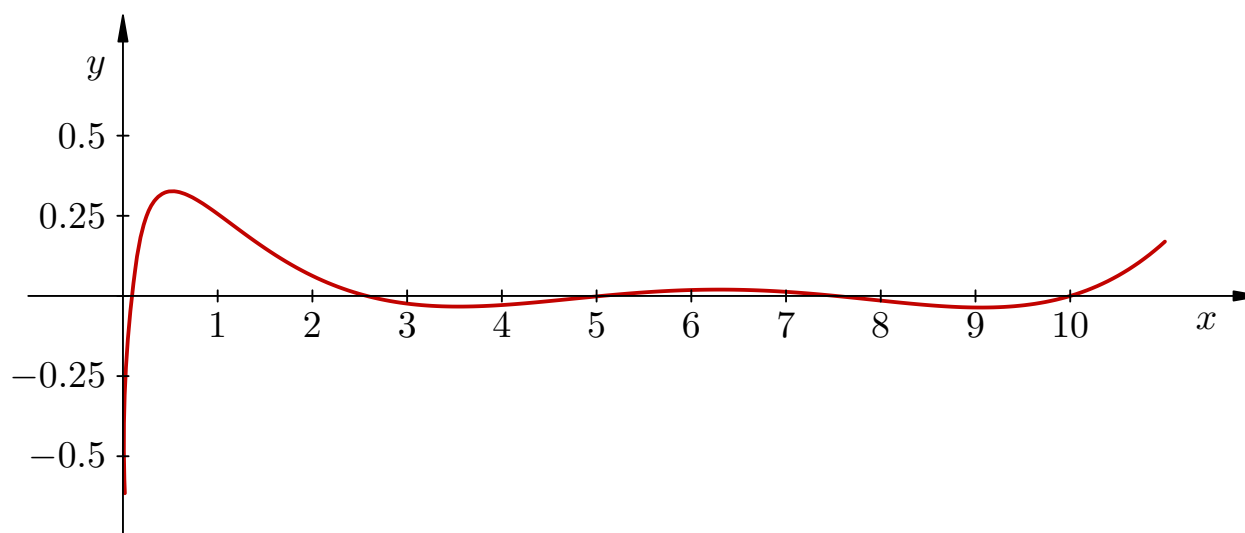
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite *skalu* na y -osi.

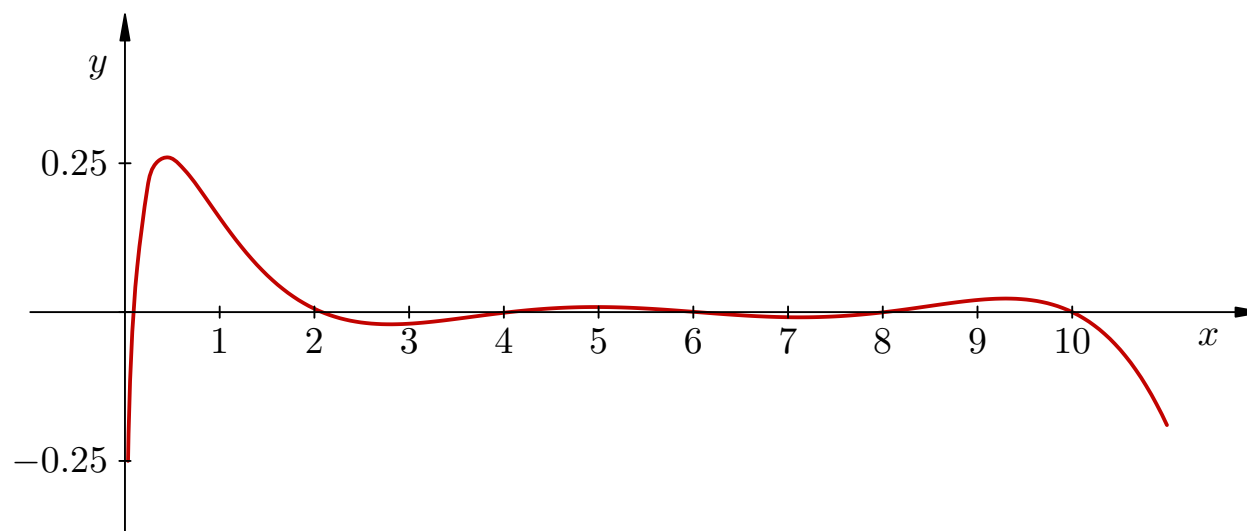
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite *skalu* na *y*-osi.

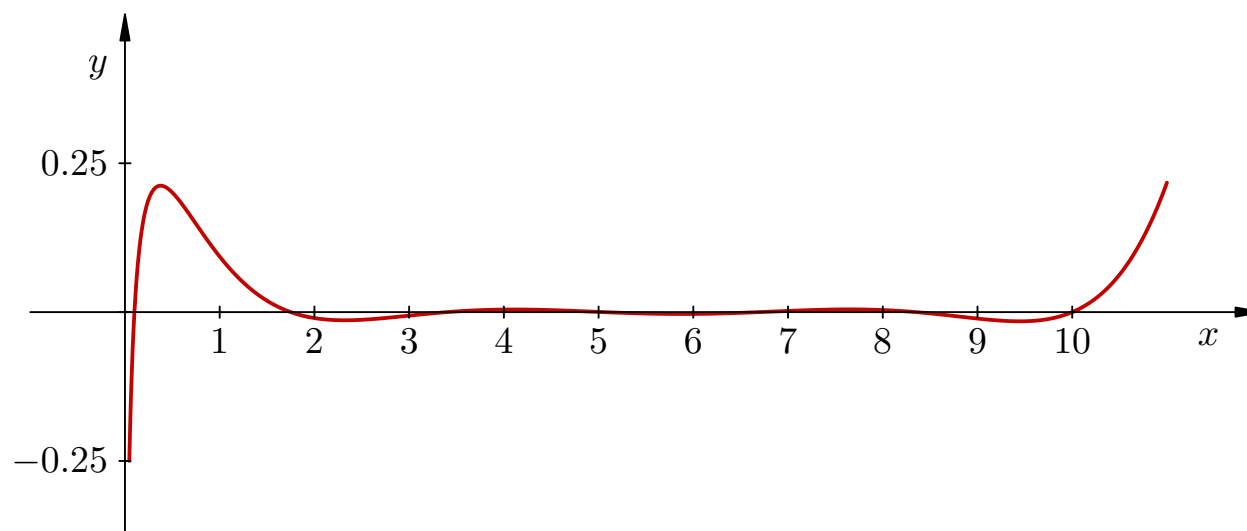
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite *skalu* na *y*-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite *skalu* na *y*-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar **Runge** prvi je uočio

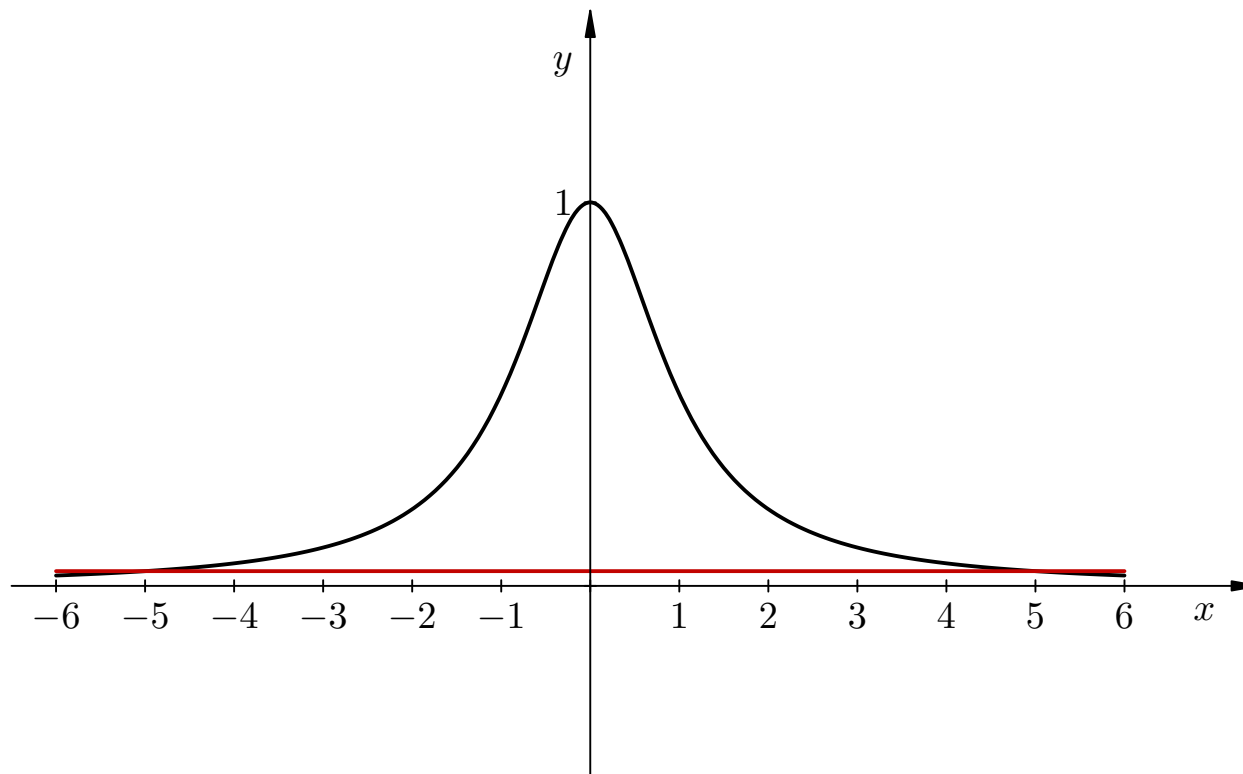
- probleme koji nastupaju kod interpolacije **polinomima** na **ekvidistantnoj** mreži.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao **funkcija Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{na } [-5, 5],$$

takvu da niz interpolacijskih polinoma na **ekvidistantnoj** mreži **ne konvergira** prema toj funkciji.

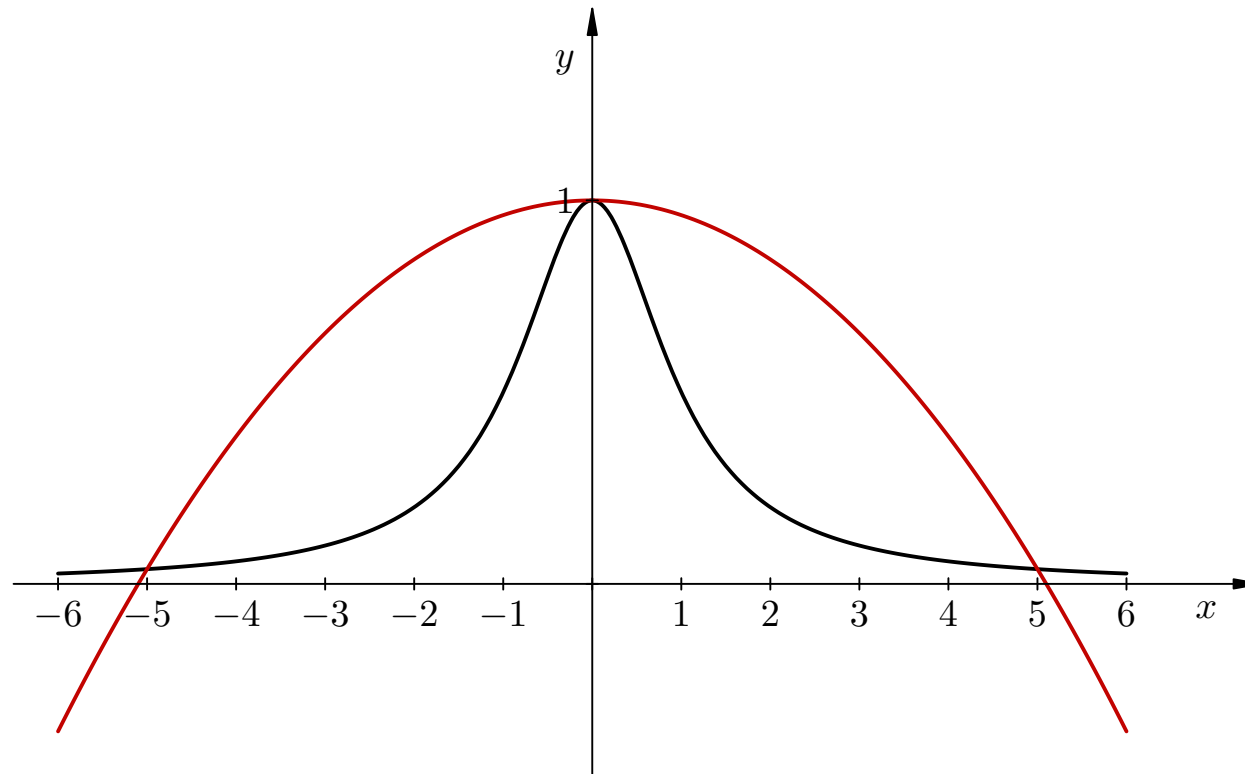
Promotrimo interpolaciju na **ekvidistantnoj mreži** polinomima stupnjeva **1–6, 8, 10, 12, 14 i 16** (parnost funkcije!).

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



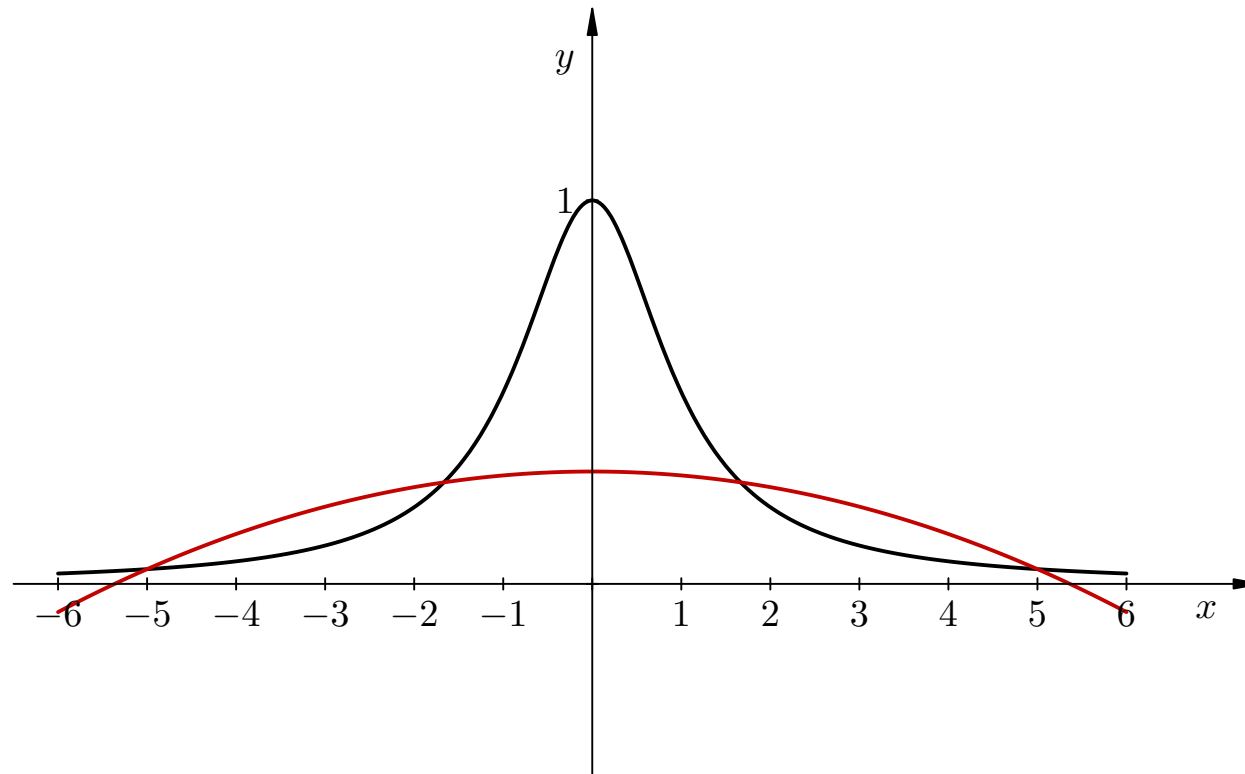
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



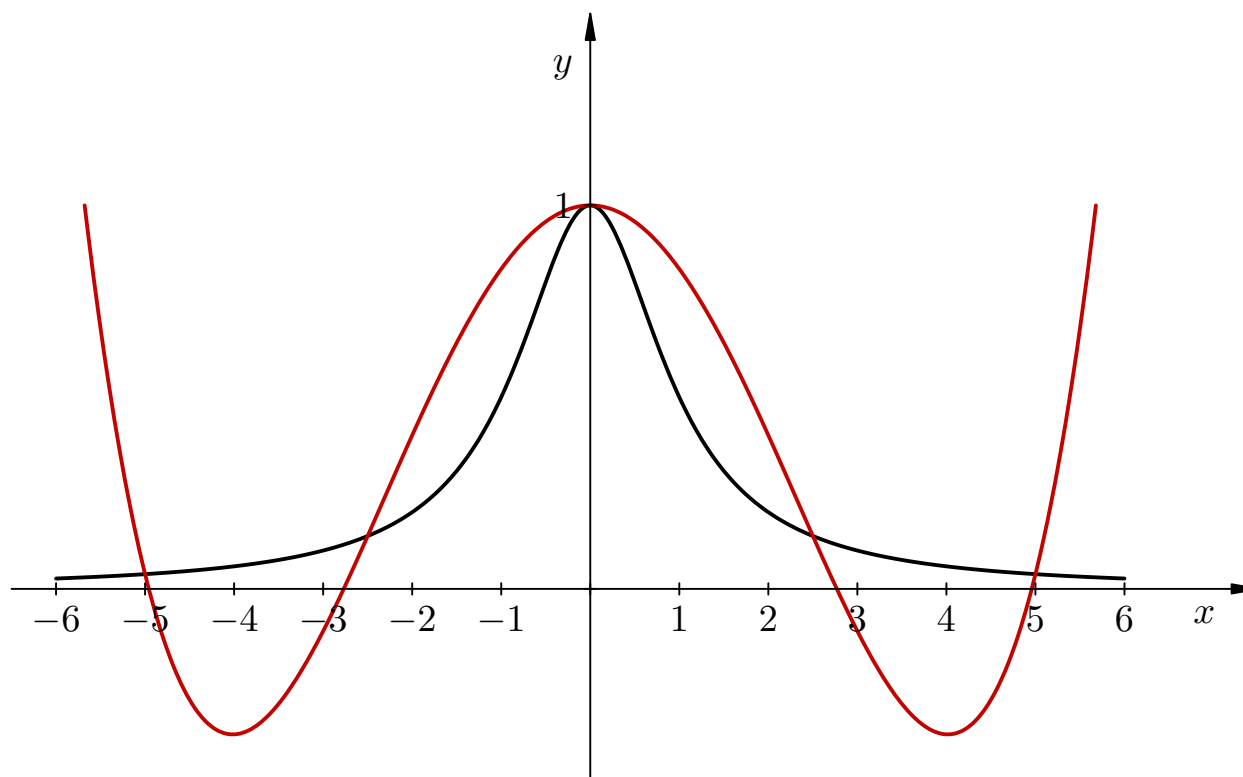
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



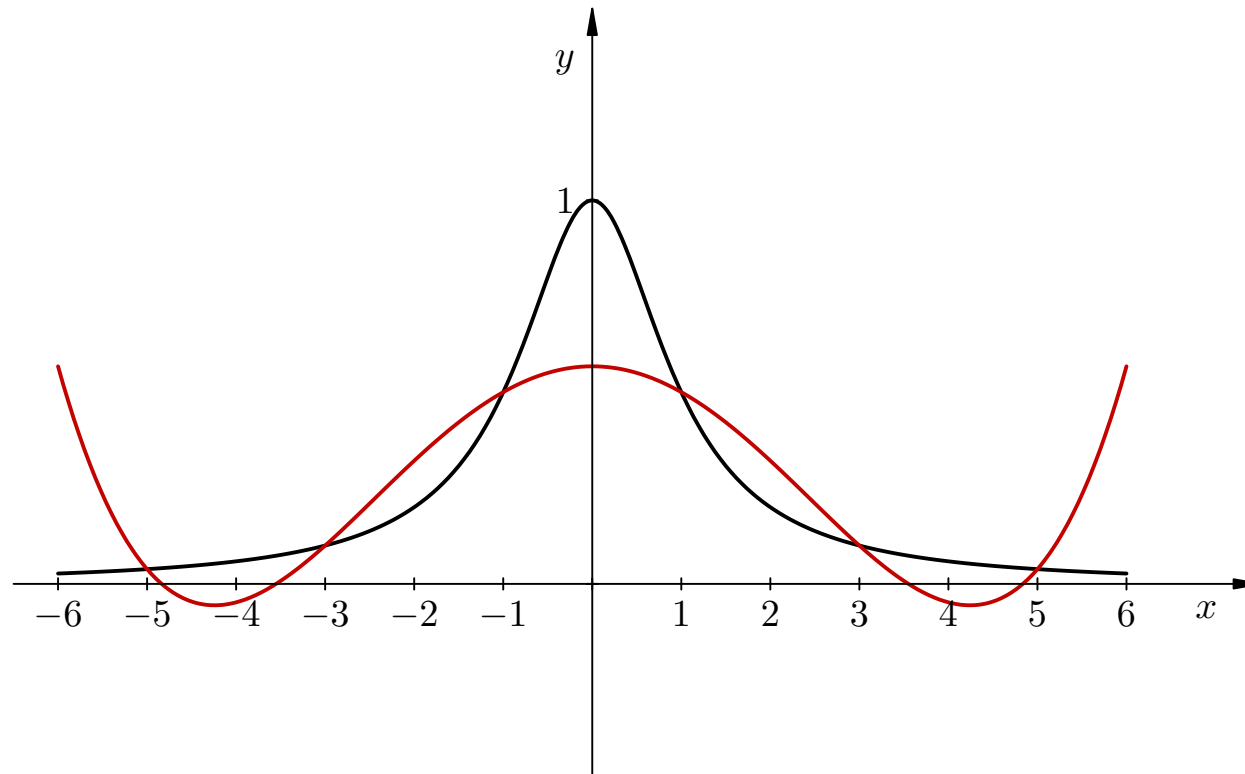
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



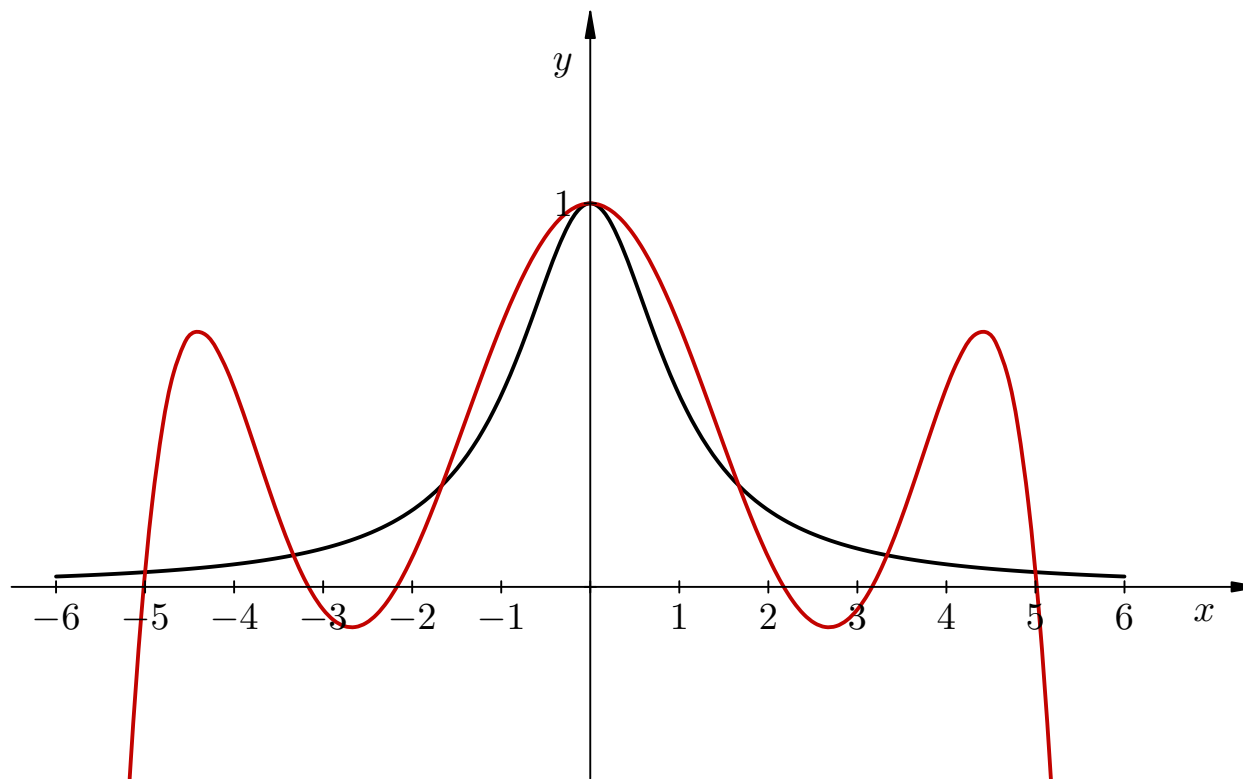
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



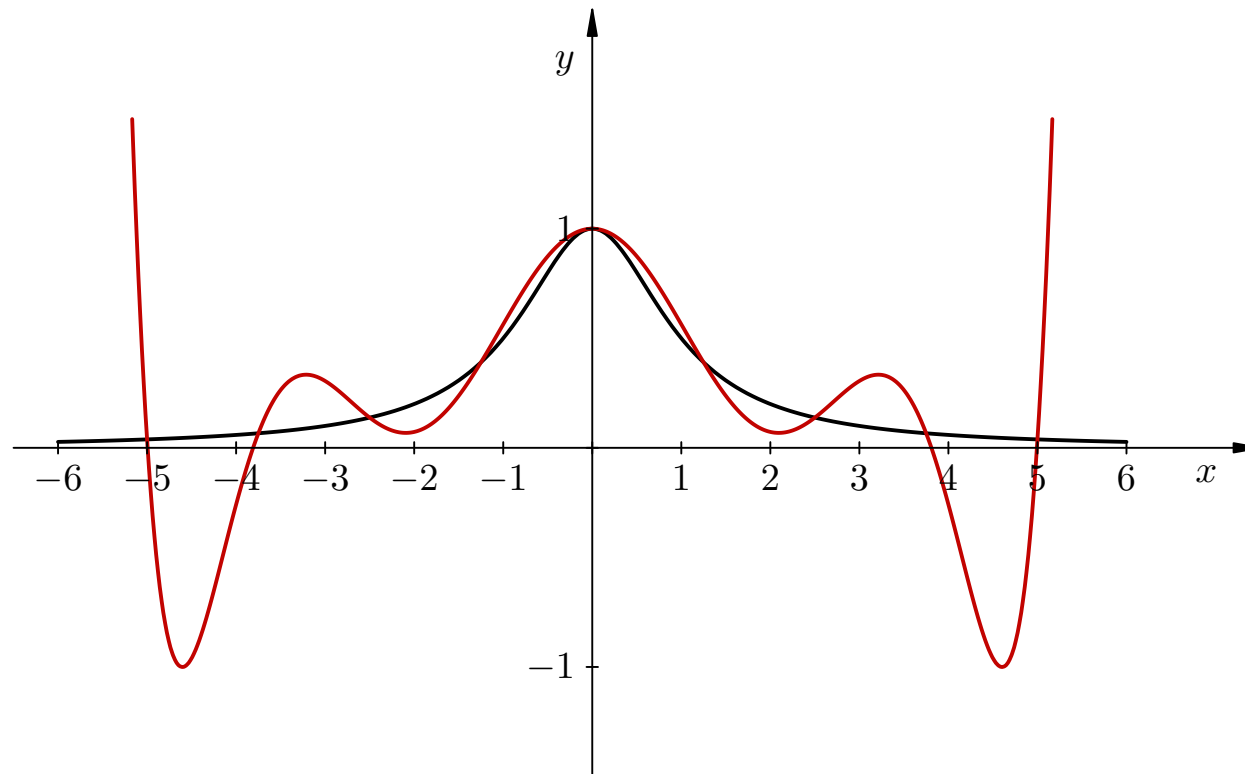
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



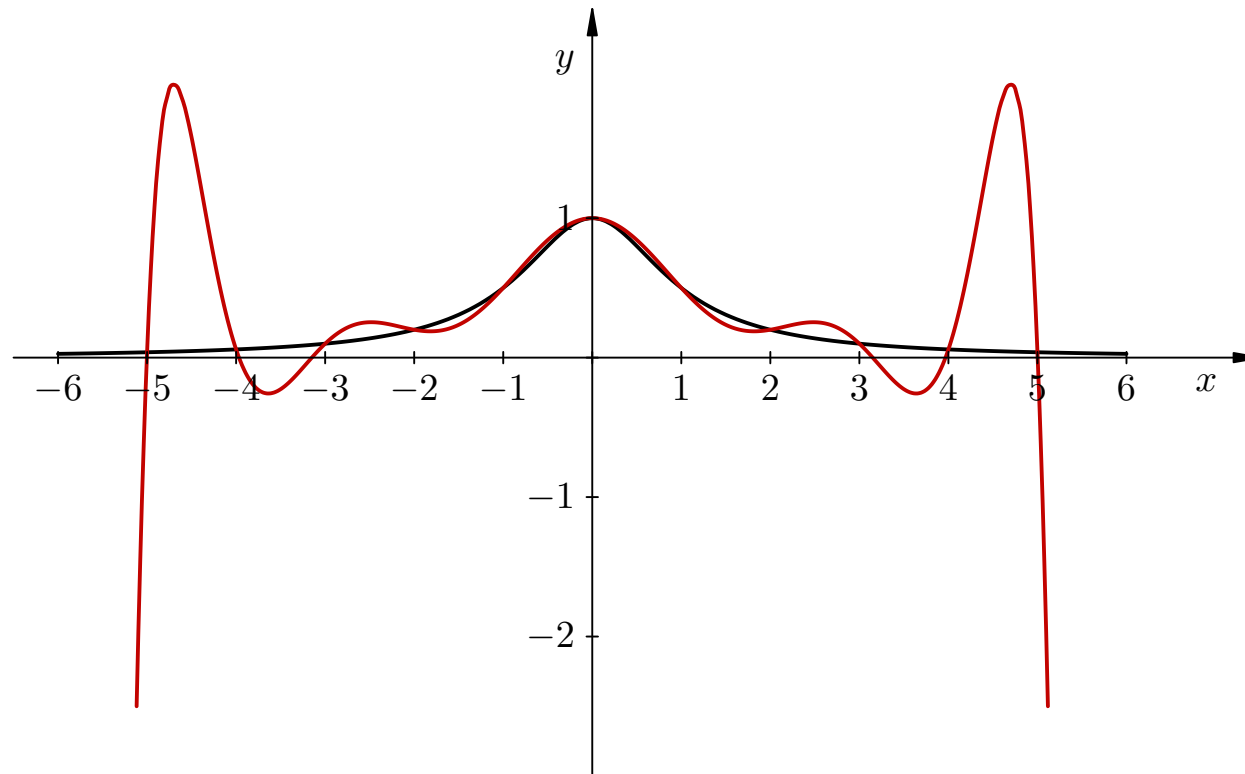
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



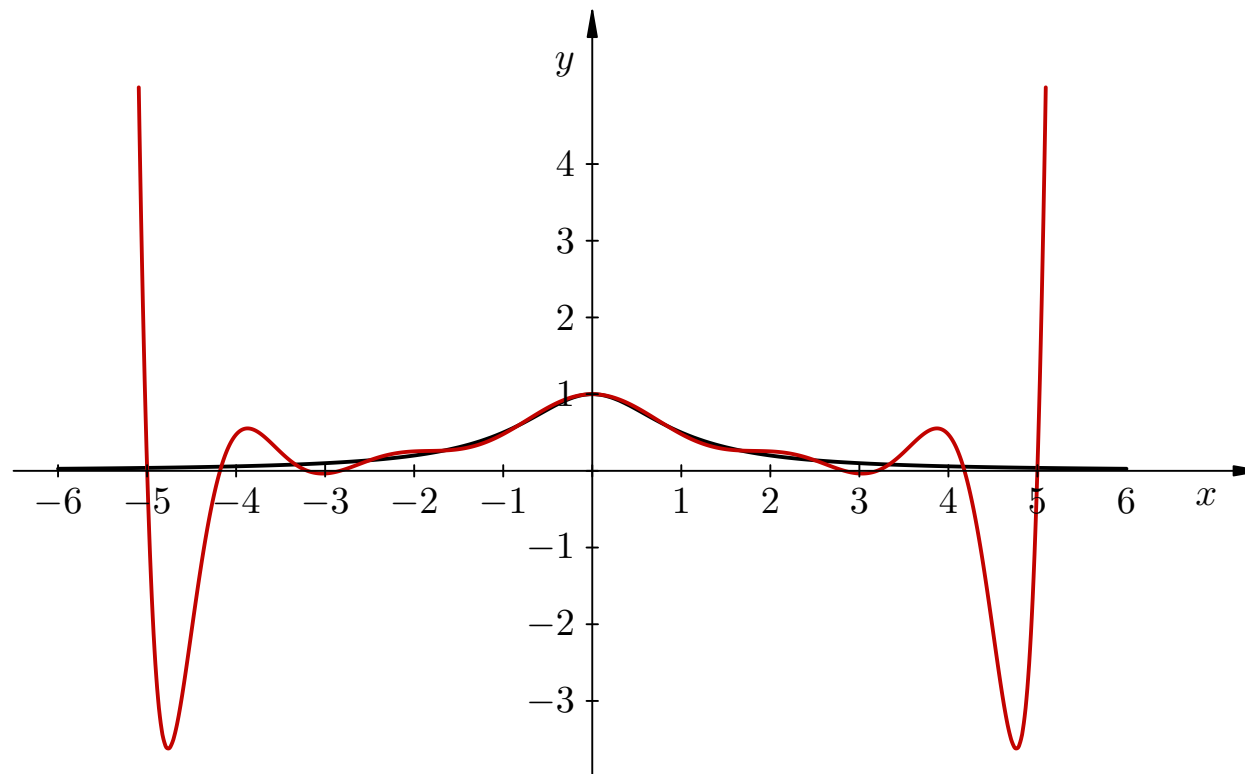
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



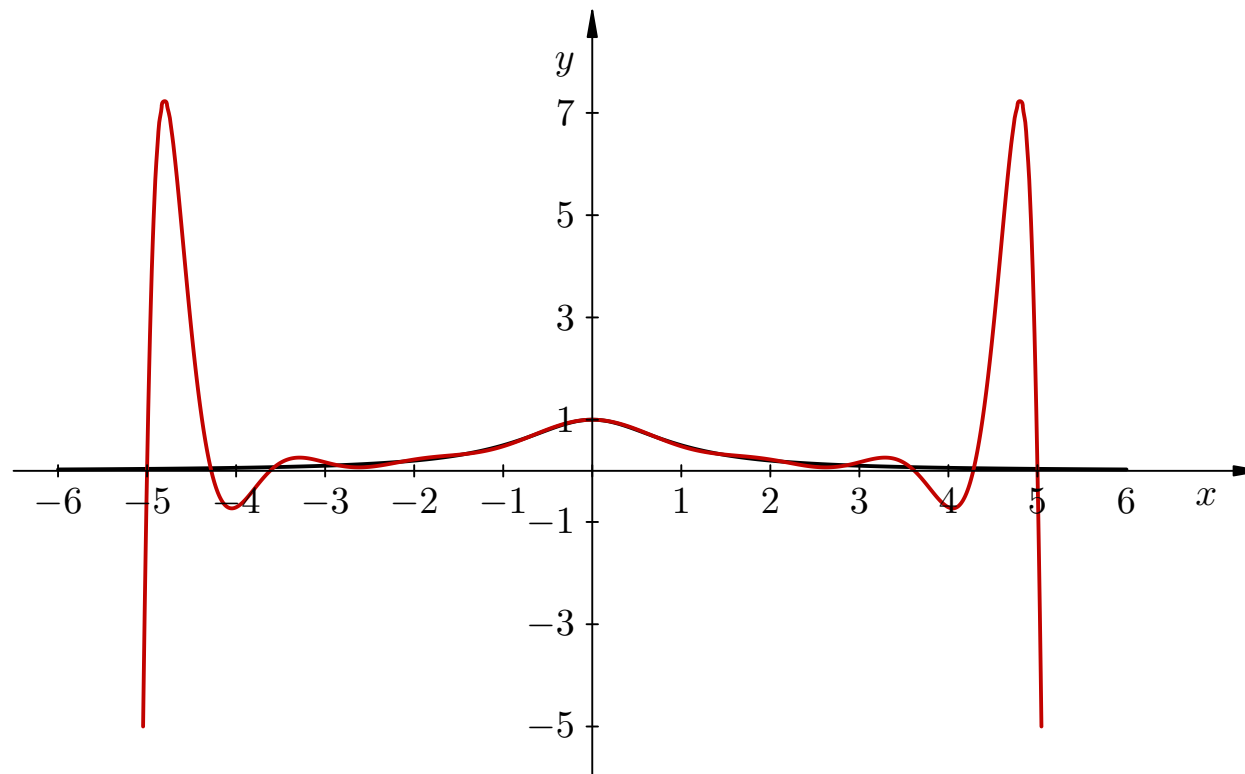
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



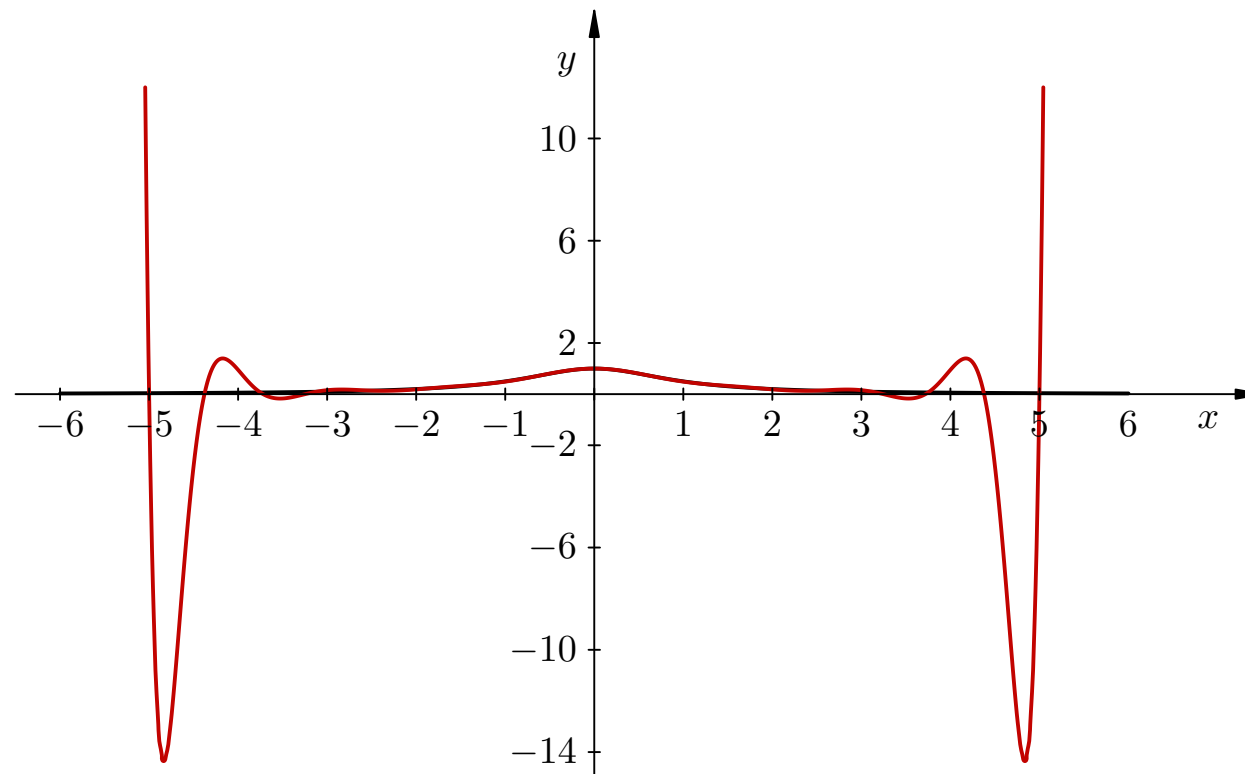
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



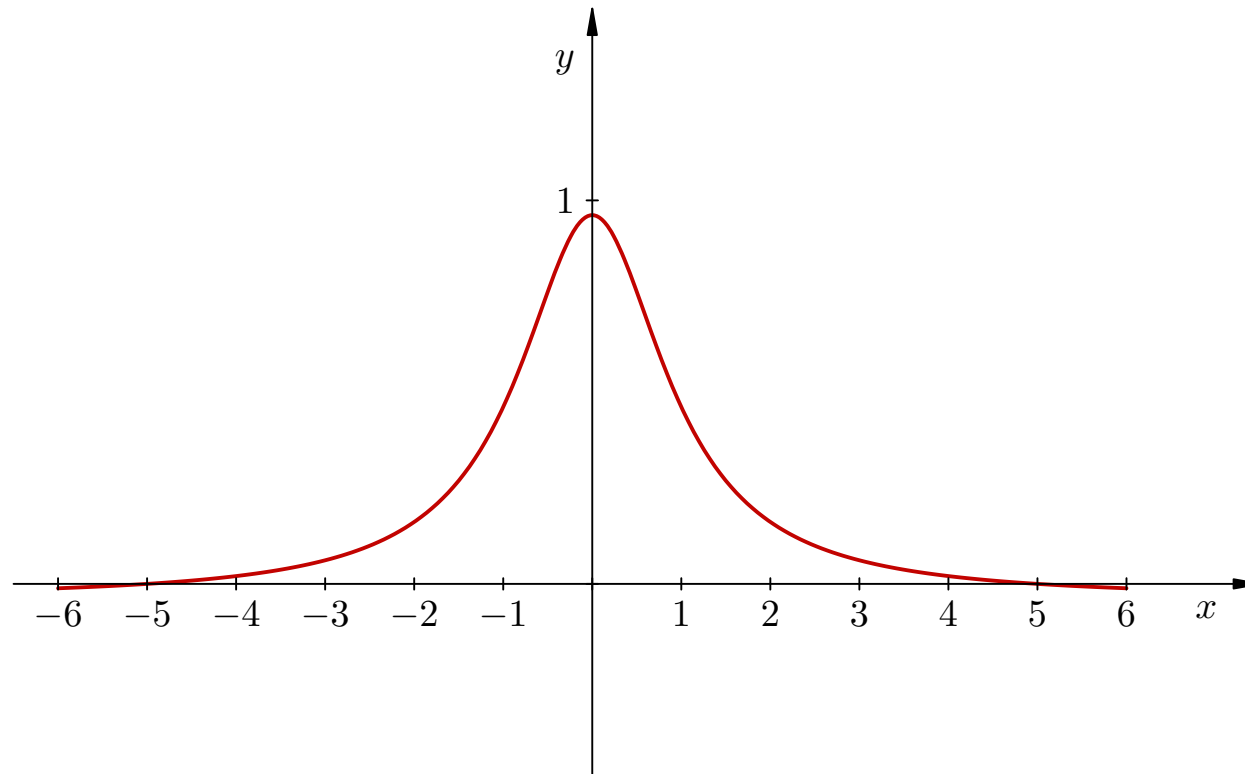
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



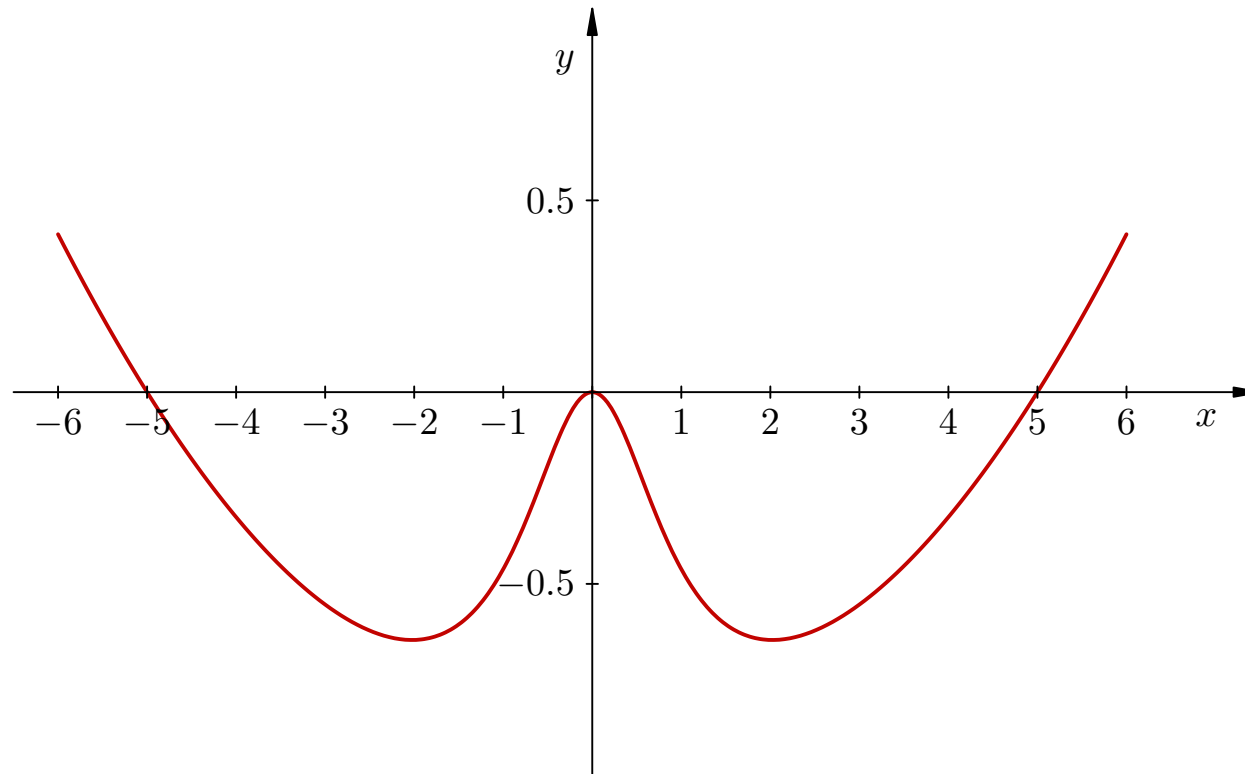
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



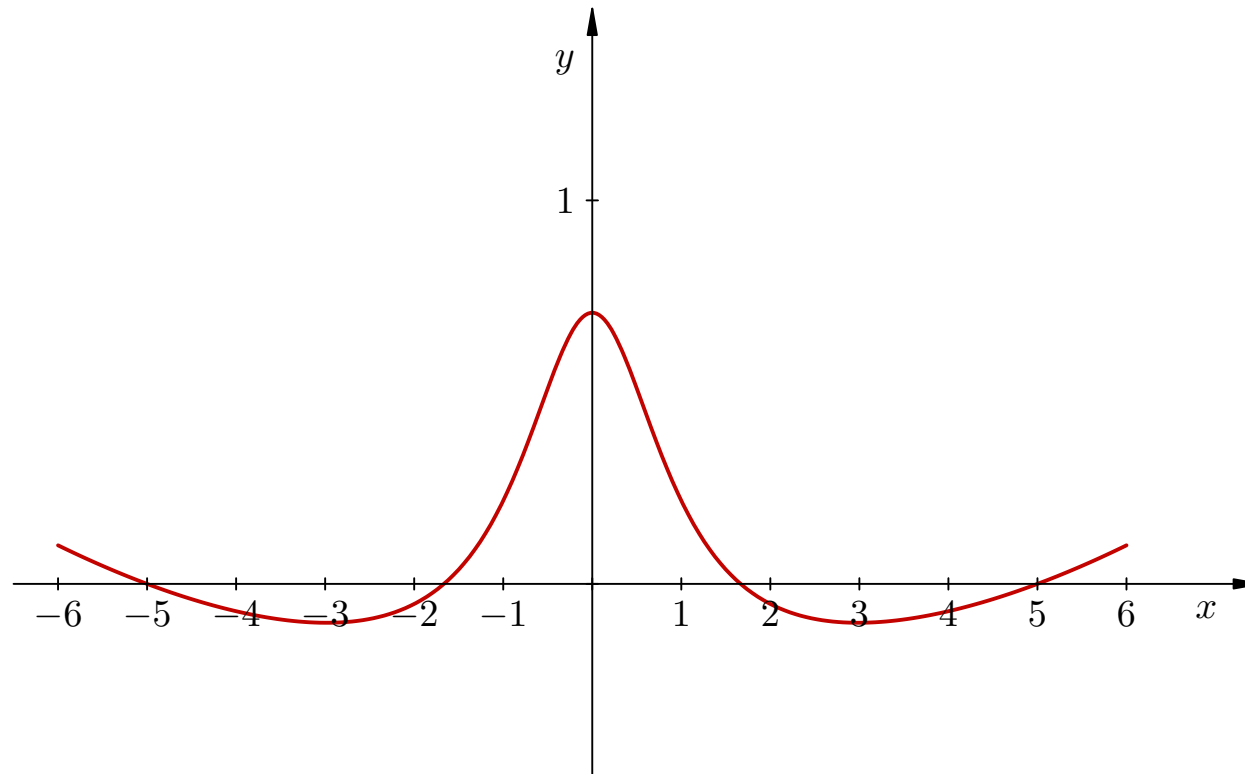
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



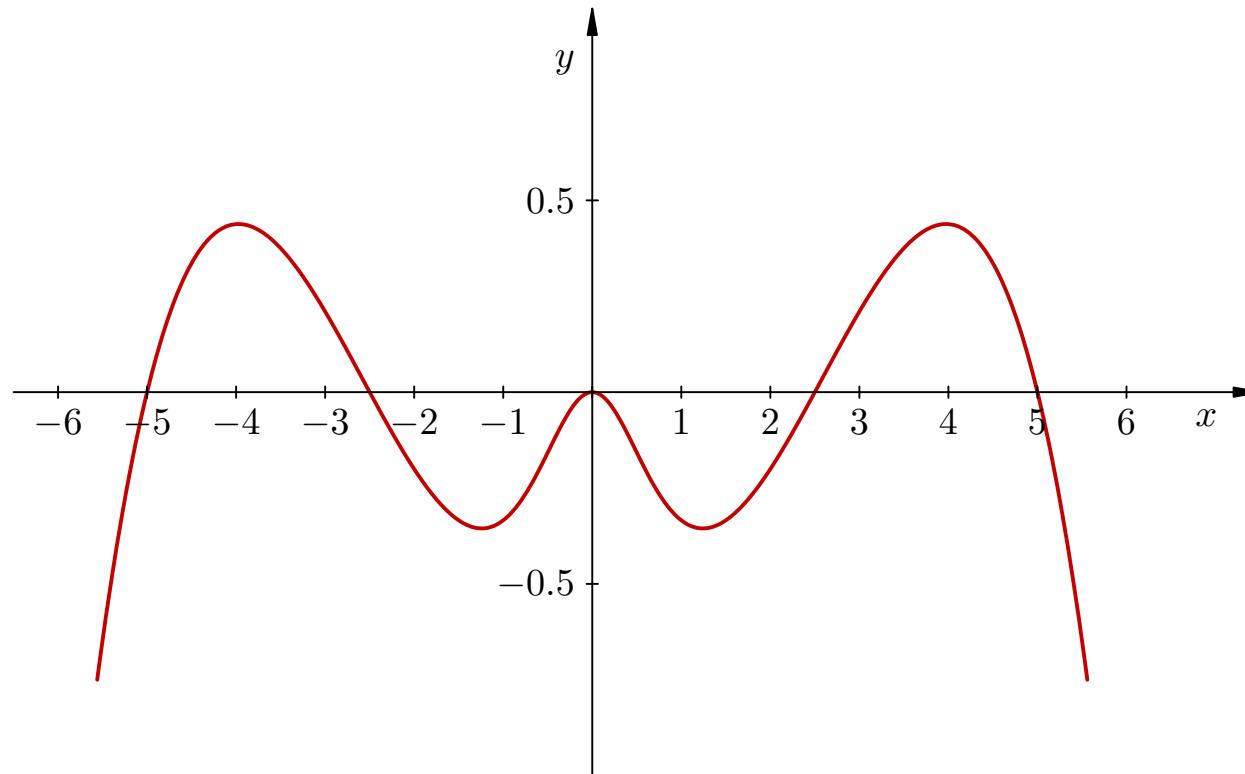
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



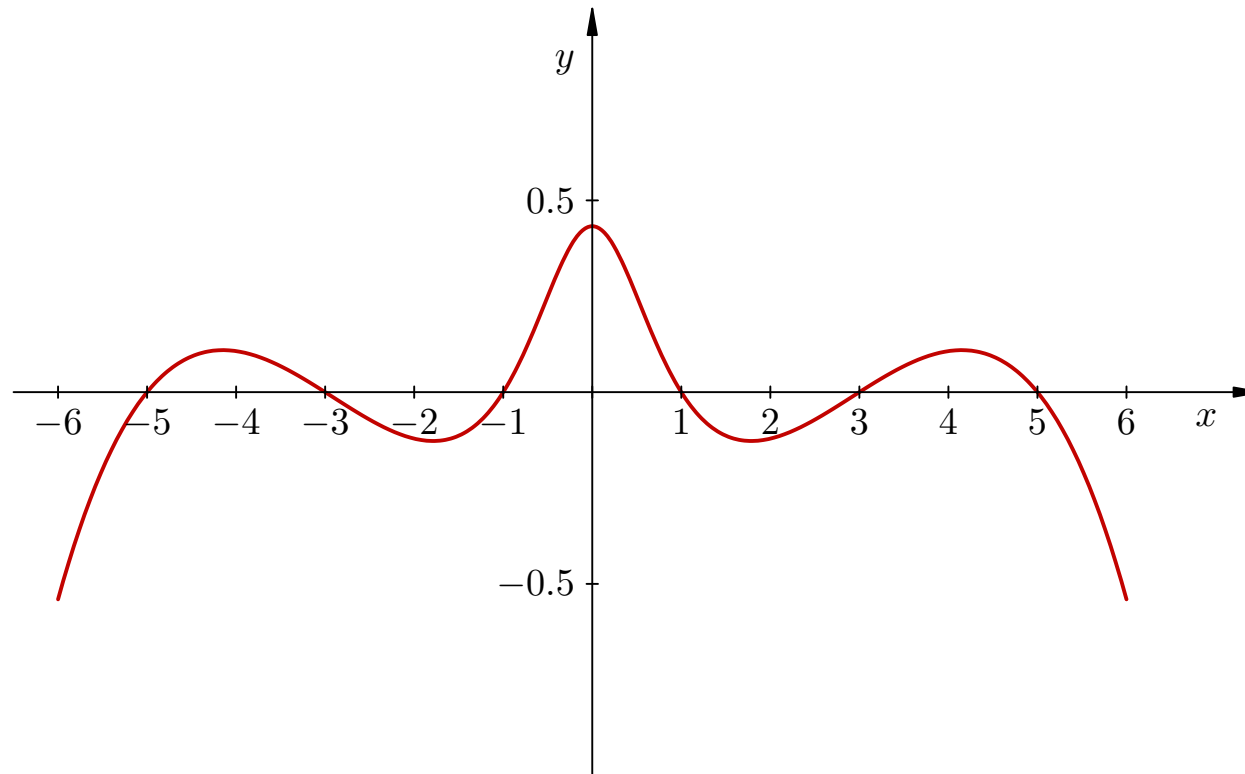
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



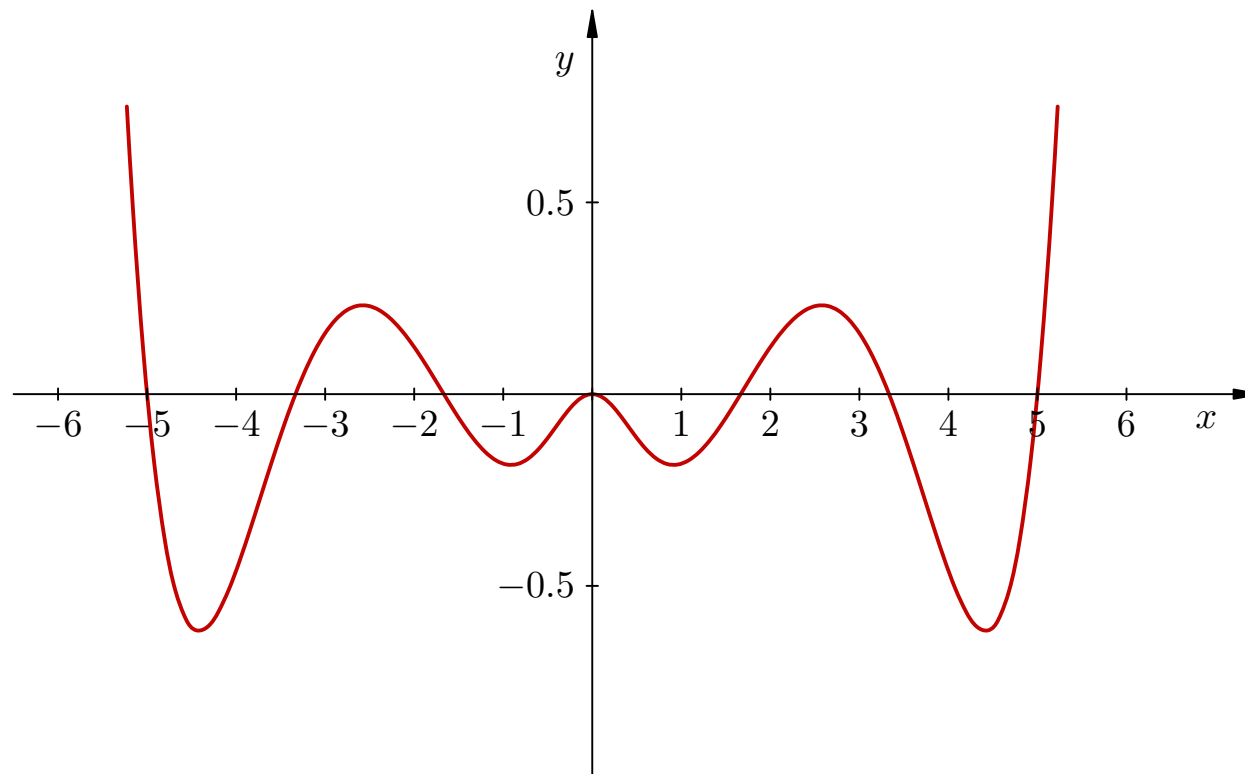
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



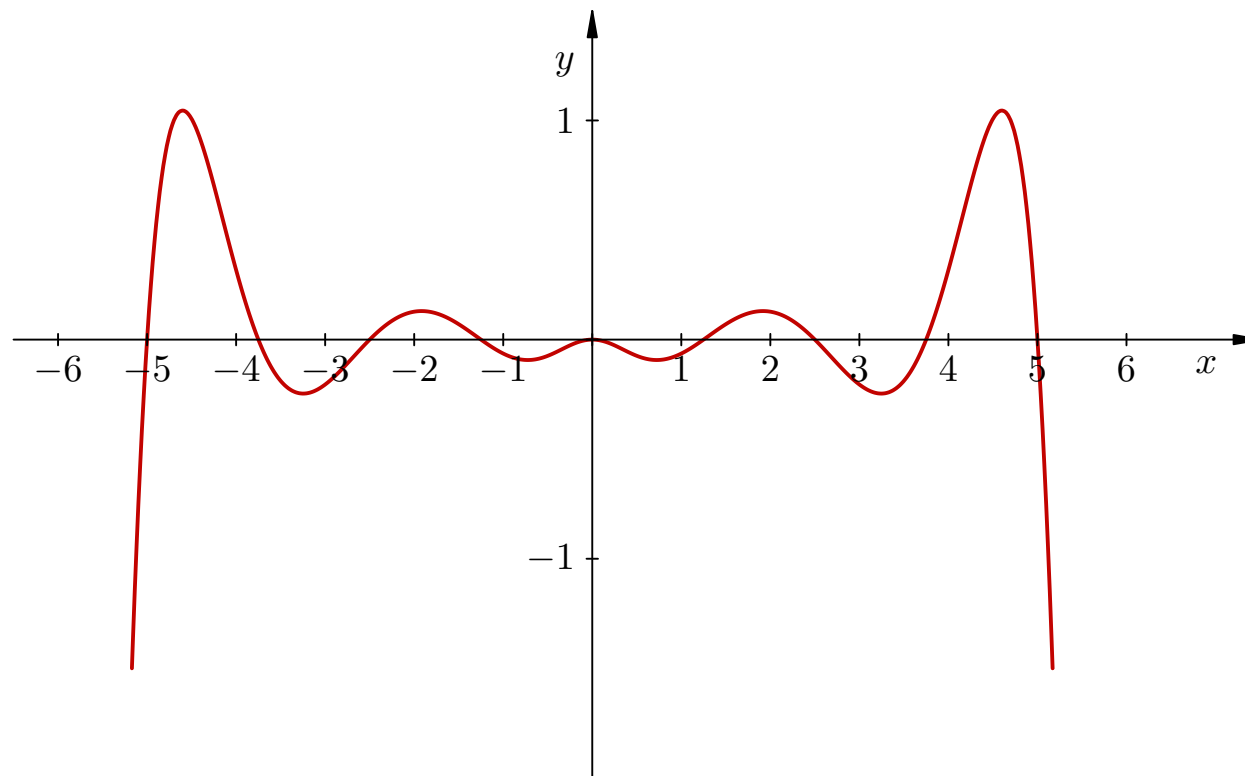
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



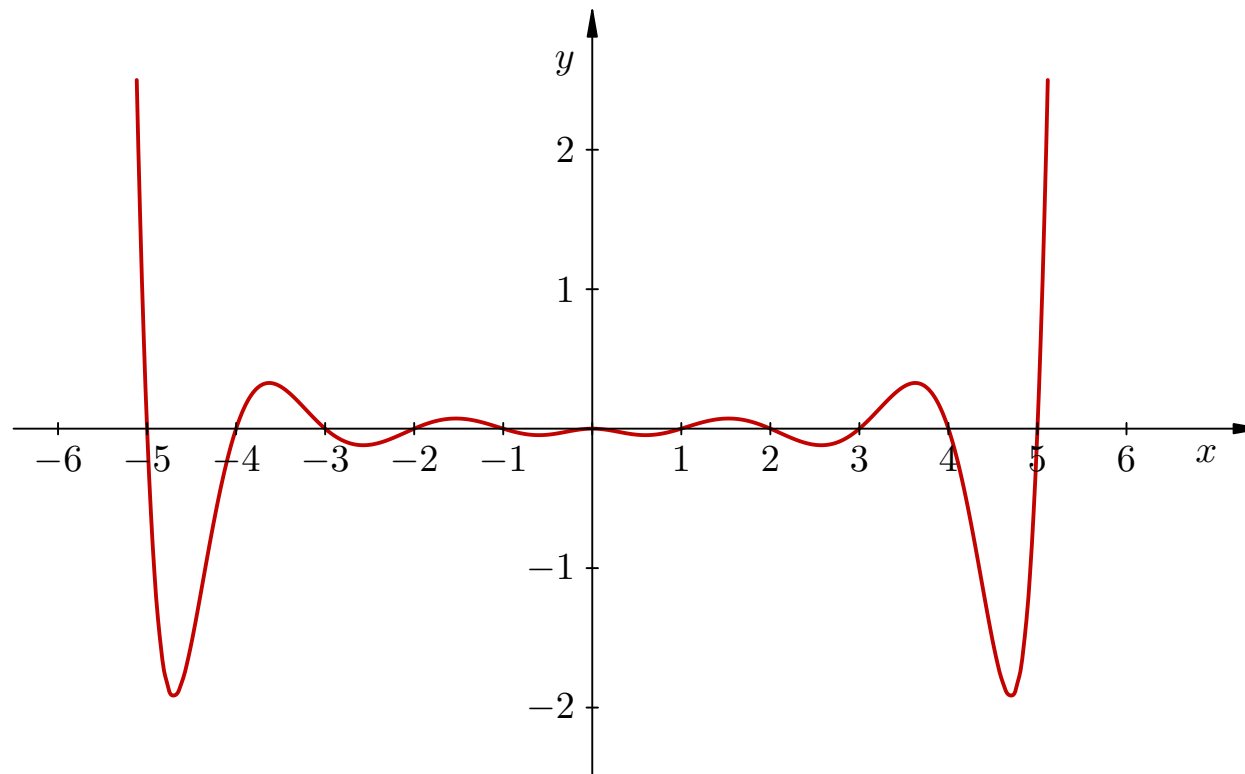
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



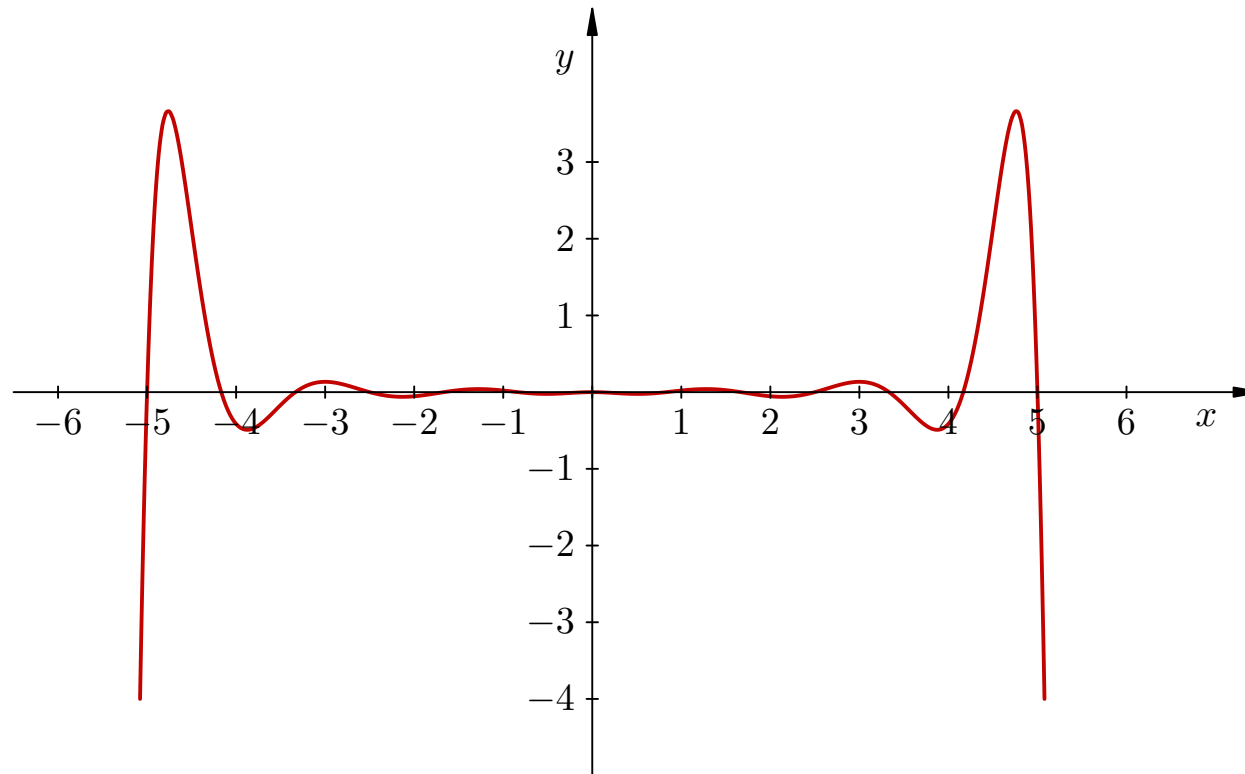
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



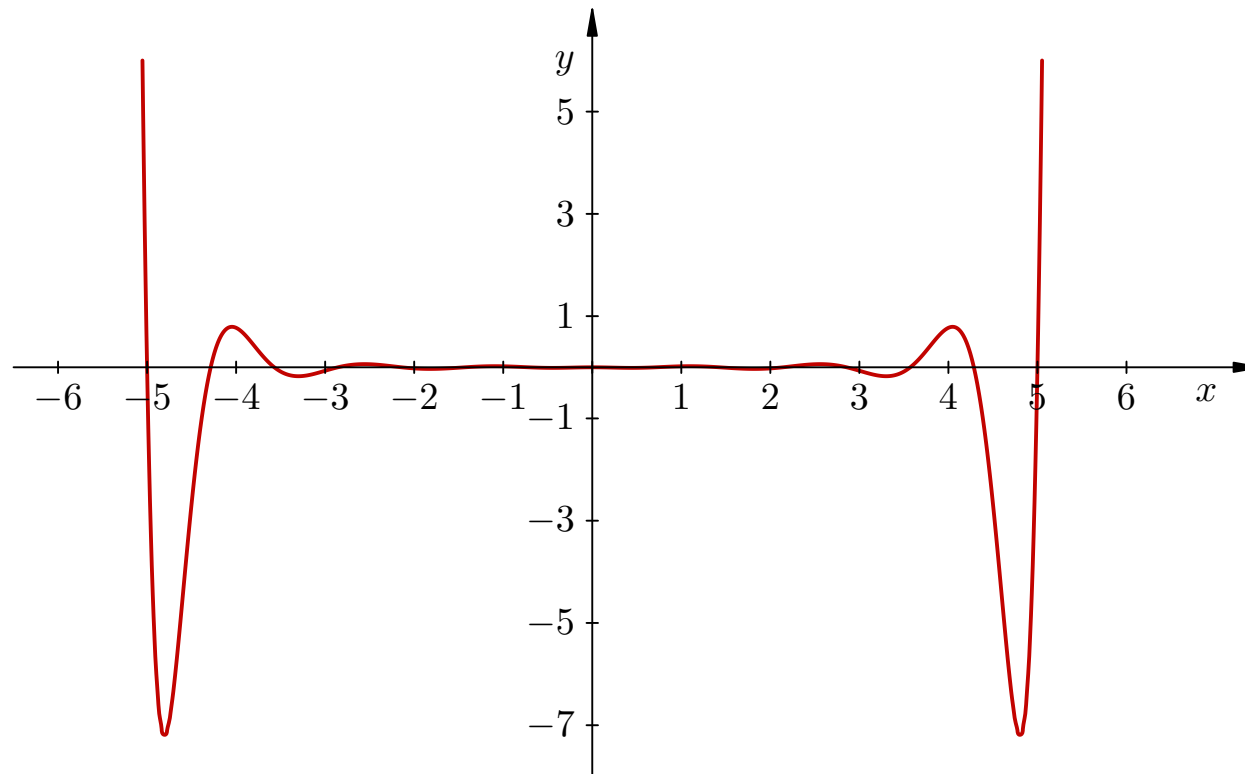
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



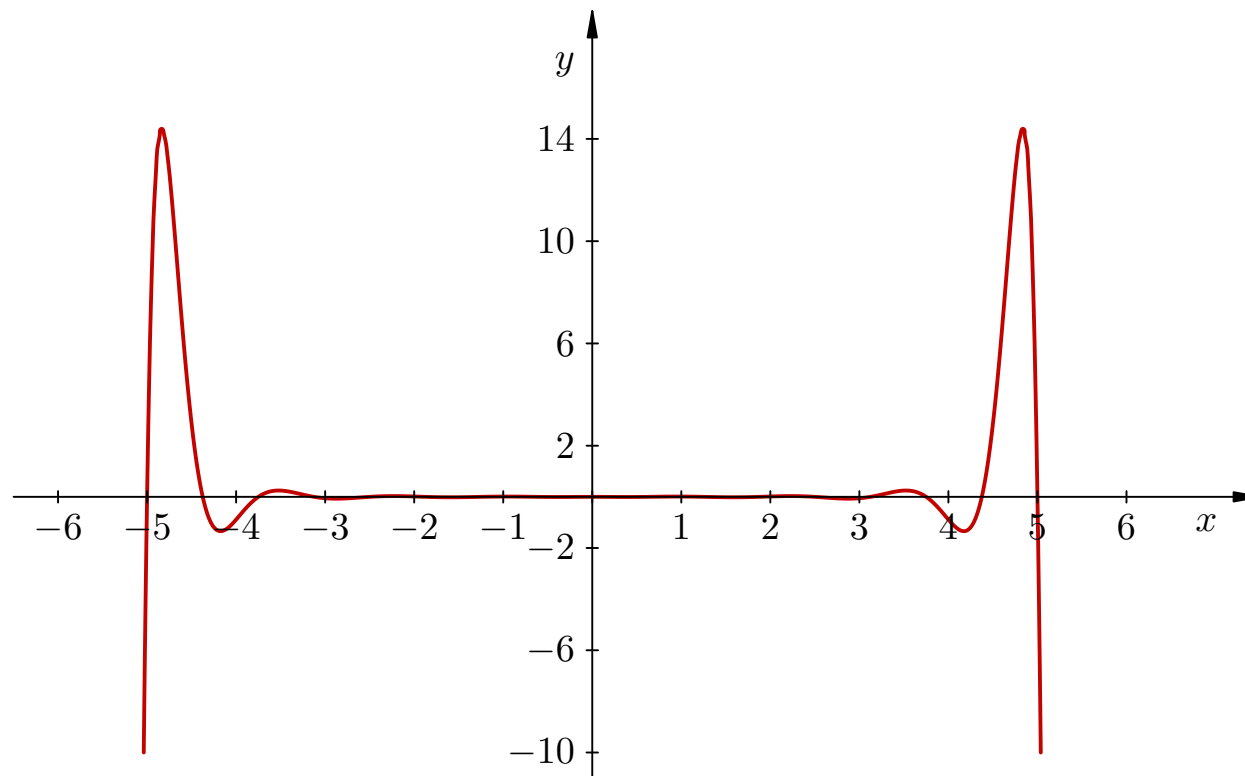
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer **Runge** može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63\dots$, a interpolira se u ekvidistantnim točkama, niz interpolacijskih polinoma **divergira**.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još **gora** situacija — niz interpolacijskih polinoma **konvergira** samo u **3** točke.

Primjer. (Bernstein, 1912.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n + 1$ ekvidistantnih točaka na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \rightarrow 0$, kad $n \rightarrow \infty$, **samo** u **tri** točke: $x = -1, 0, 1$.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji Runge “pomoći”? Može!

Ako umjesto ekvidistantnih točaka interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije,

• tzv. Čebiševljeve točke,

onda će, porastom stupnja n , niz interpolacijskih polinoma p_n

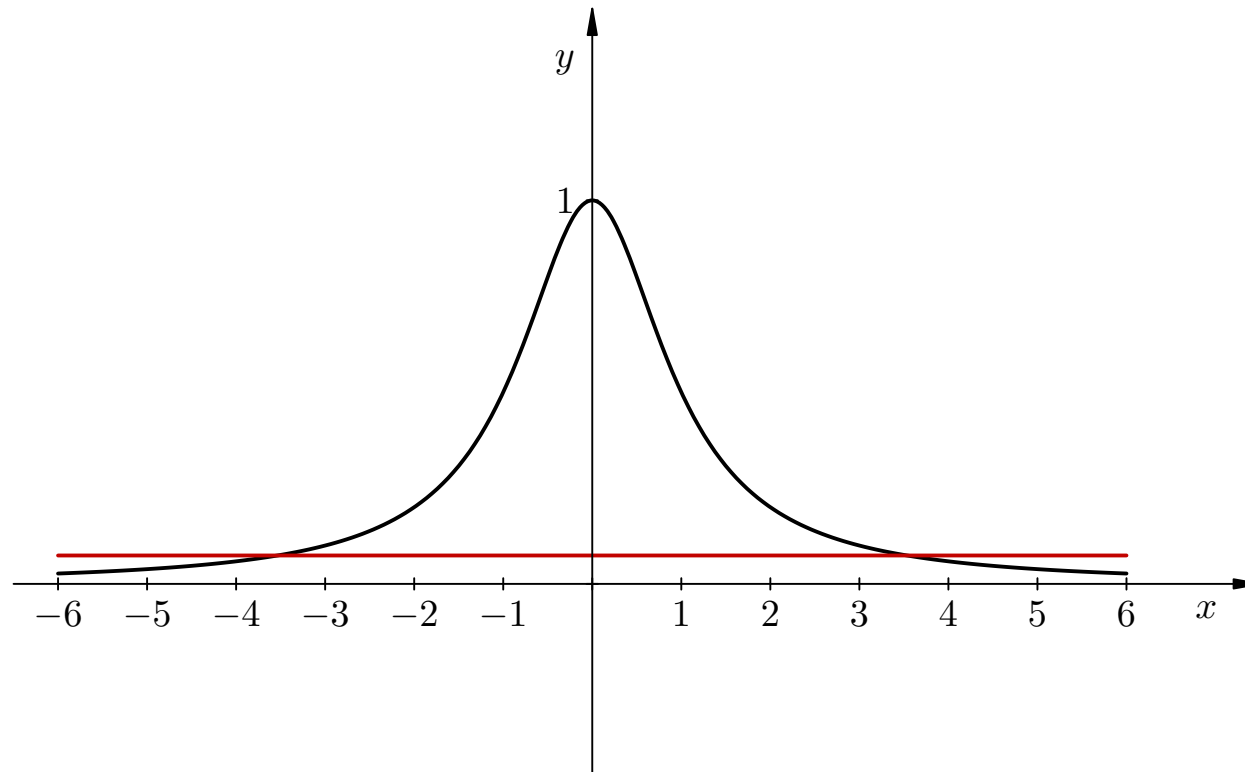
• konvergirati (i to uniformno) prema funkciji f .

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \dots, n.$$

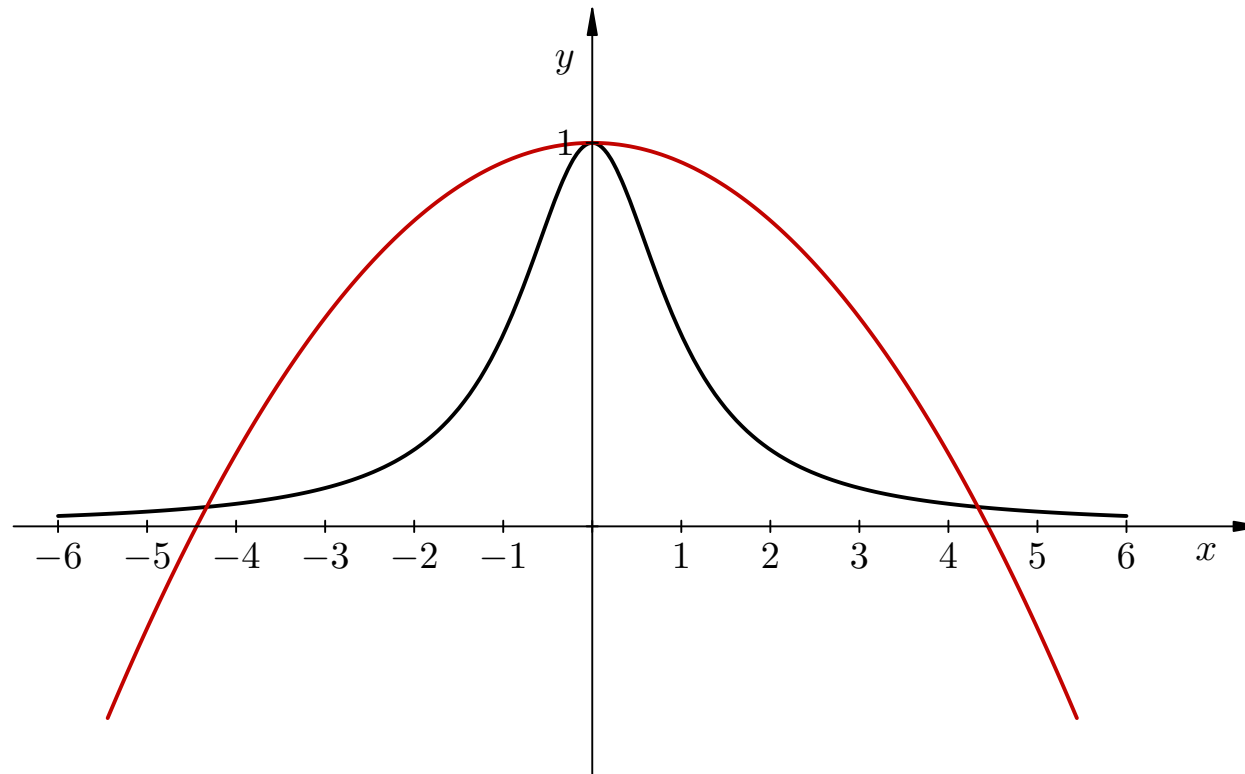
O njima više — malo kasnije. Prvo primjer za funkciju Runge.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



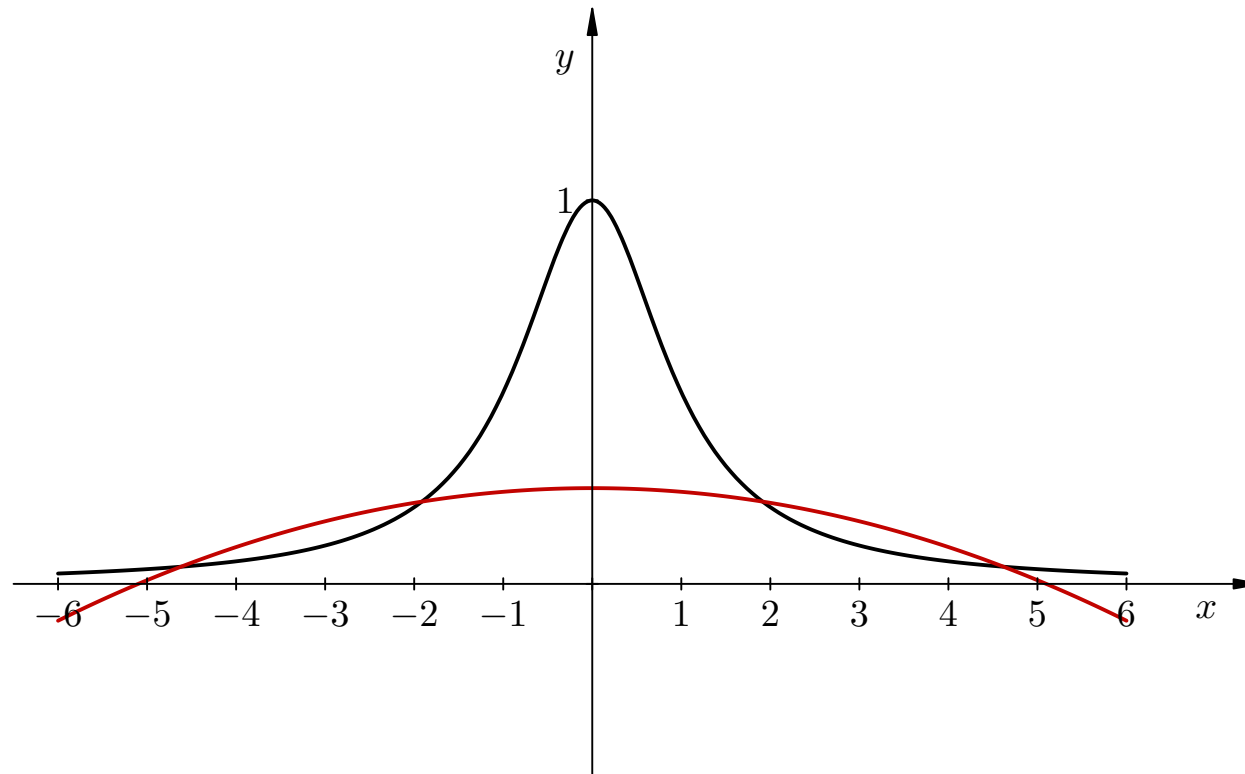
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



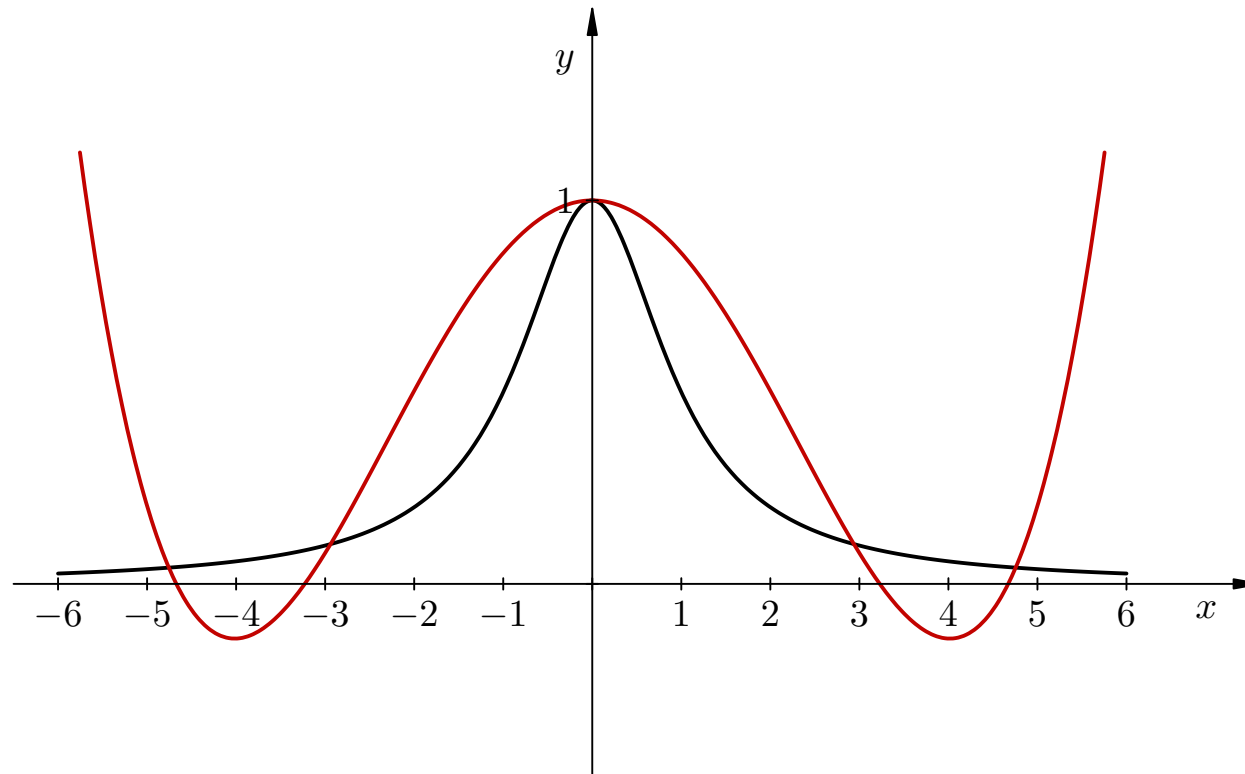
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



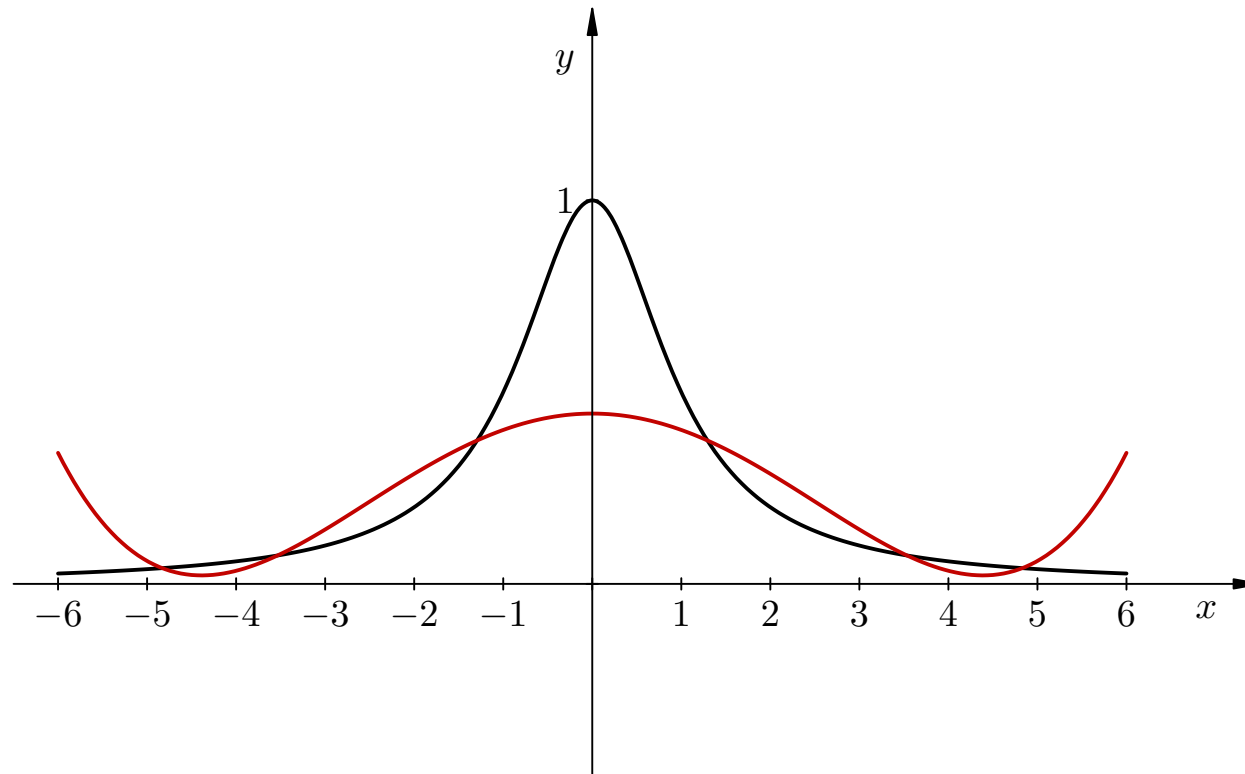
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



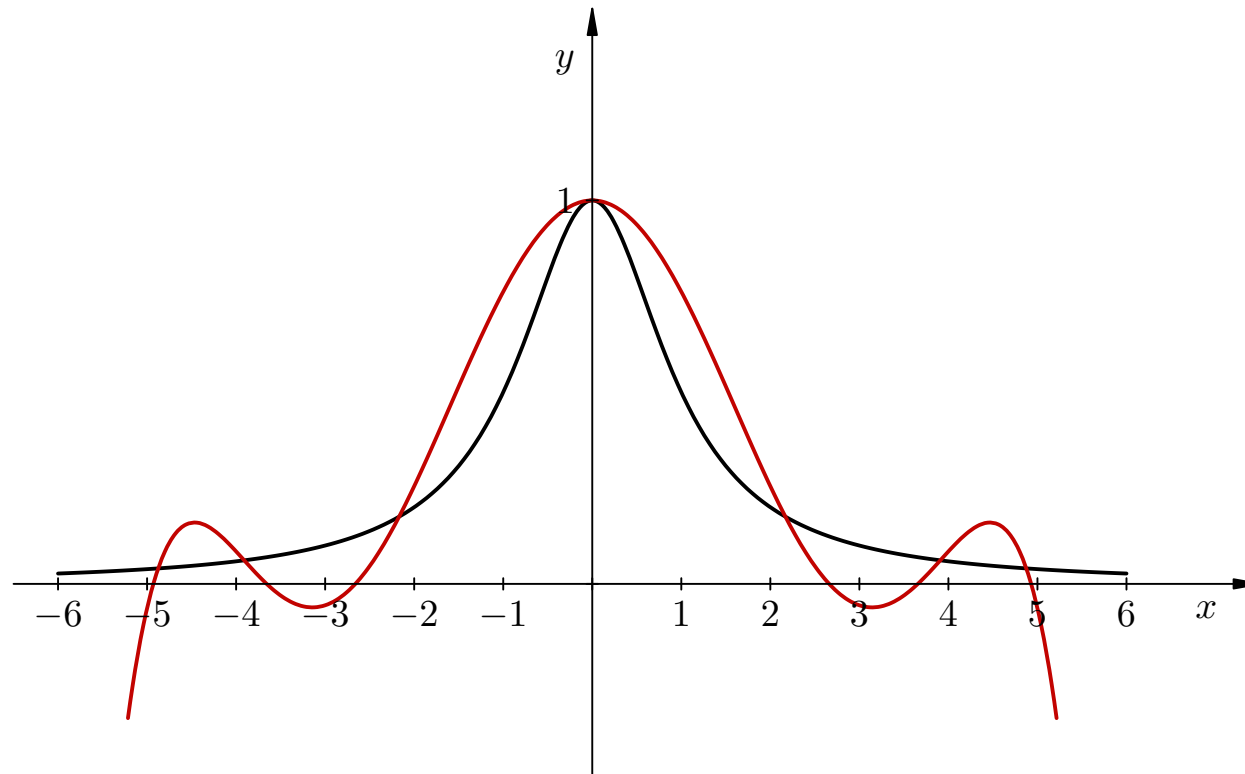
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



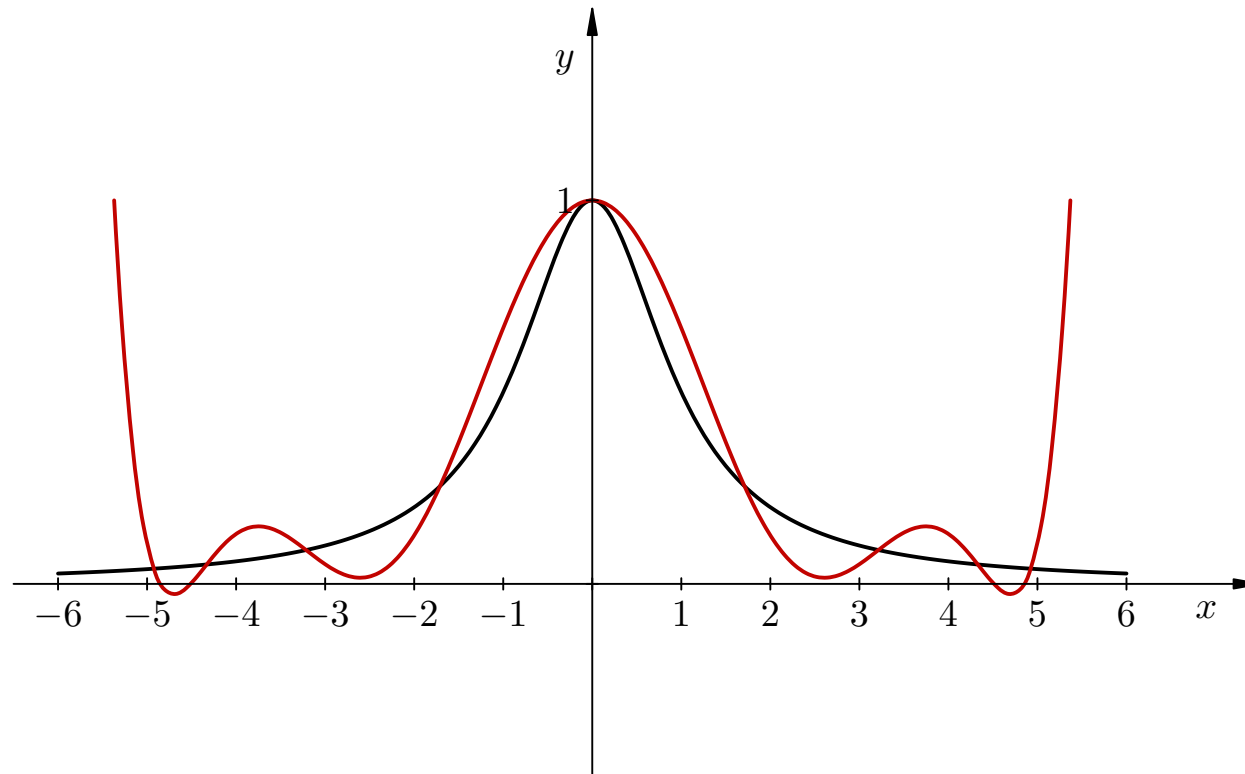
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



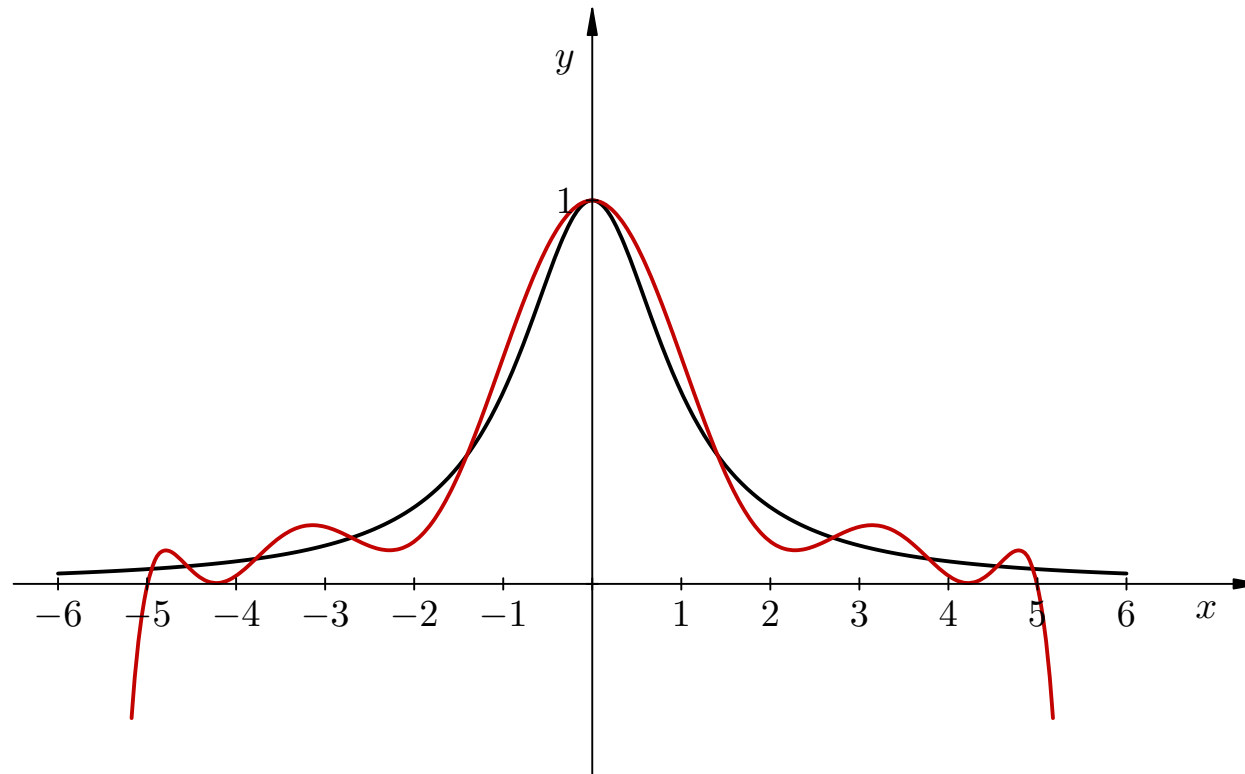
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



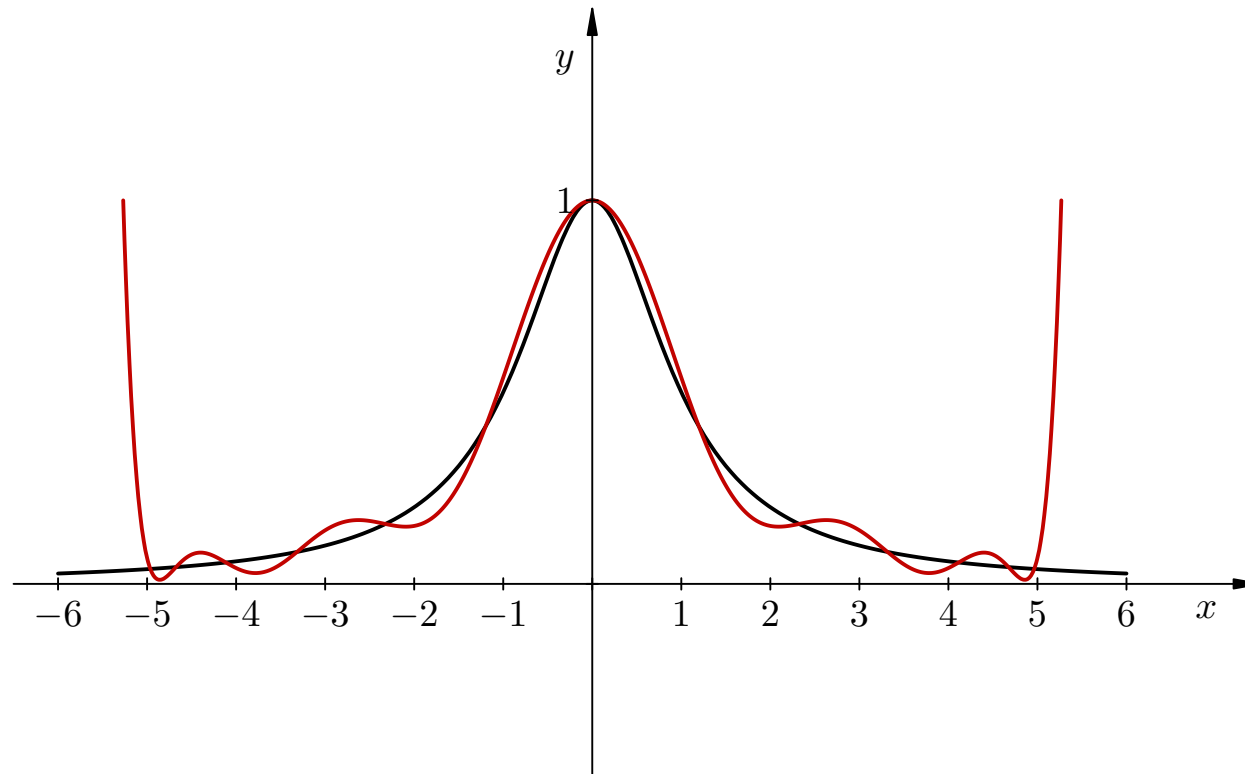
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



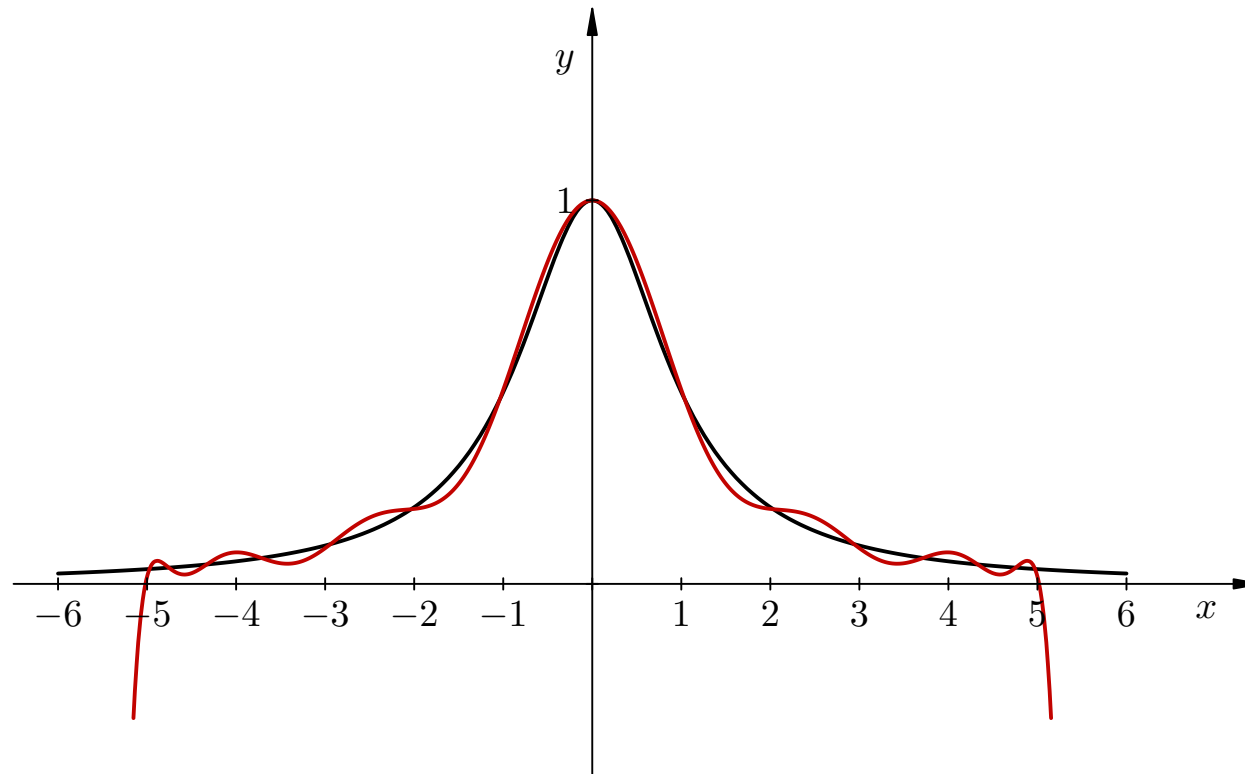
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



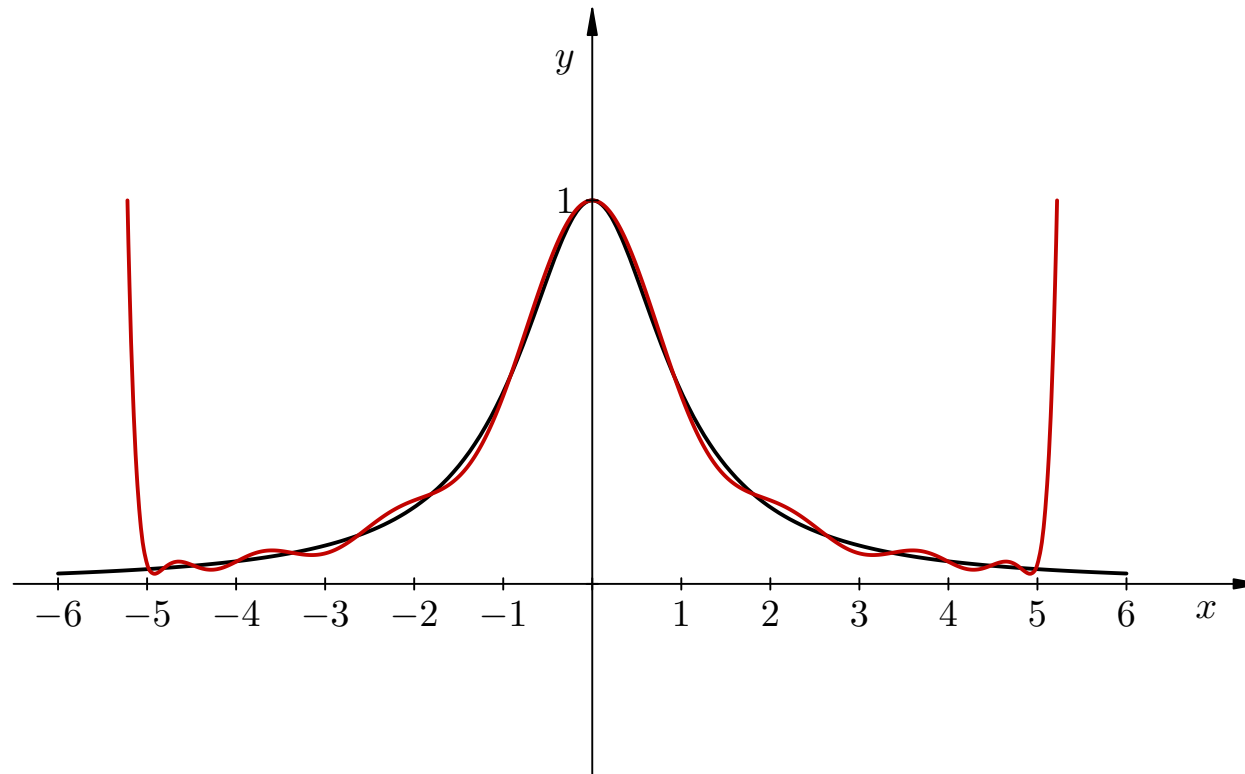
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



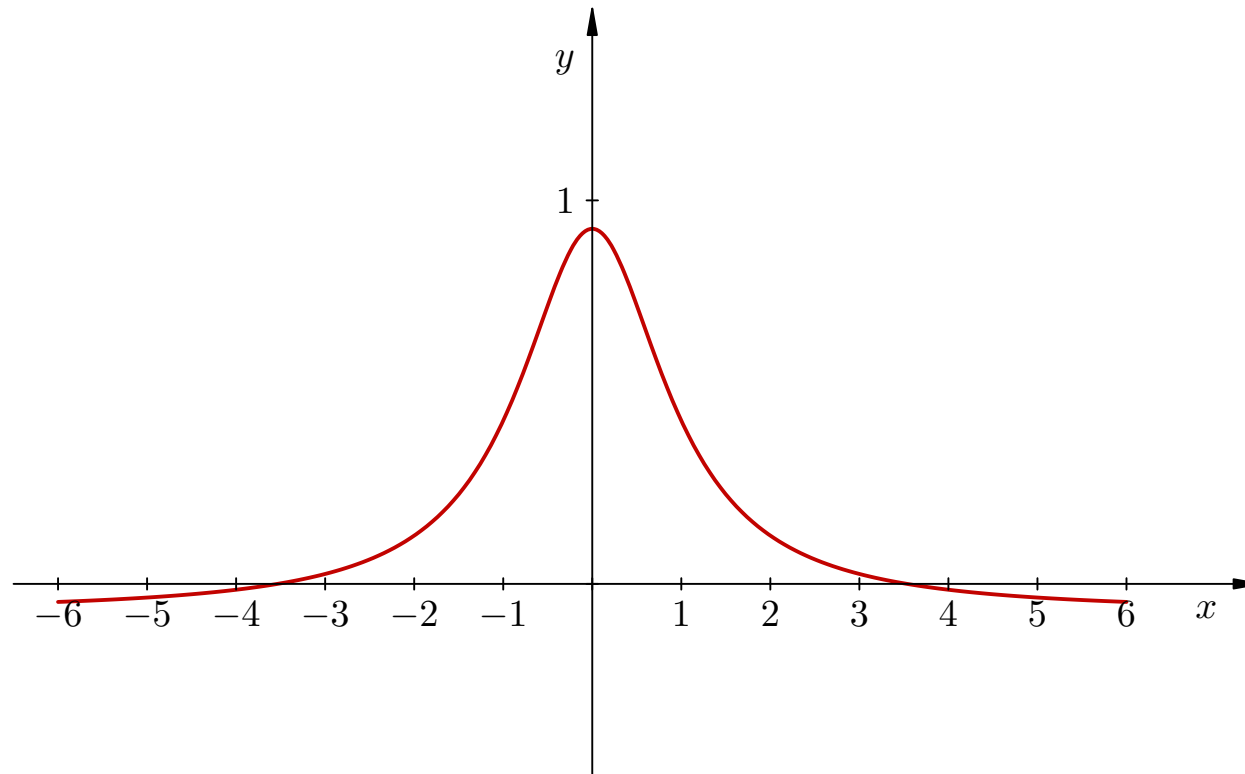
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



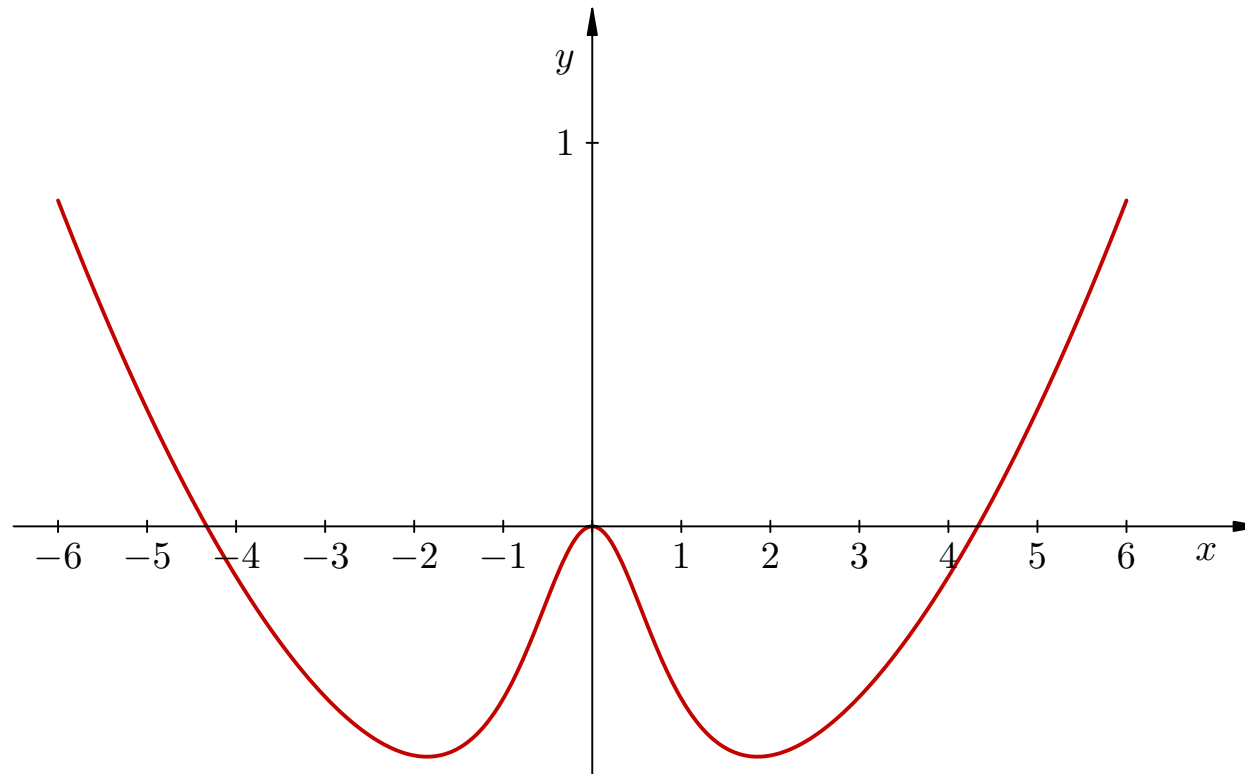
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



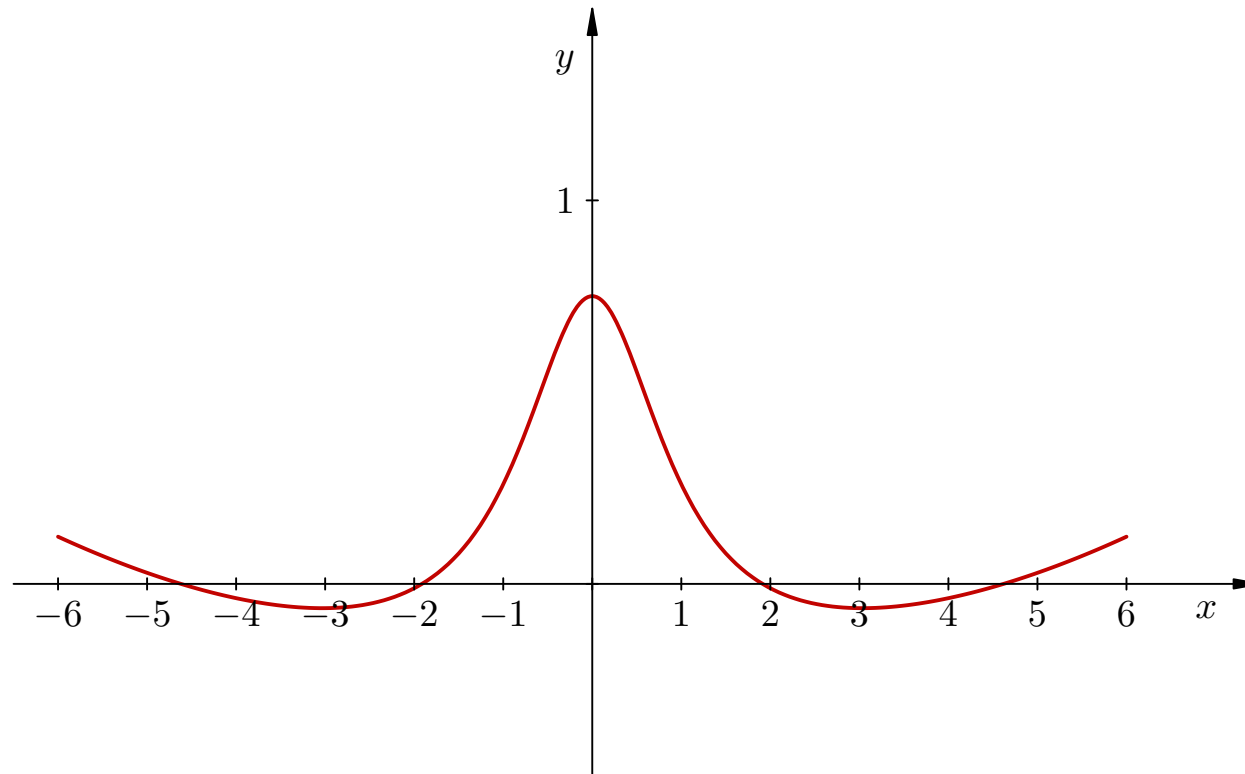
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



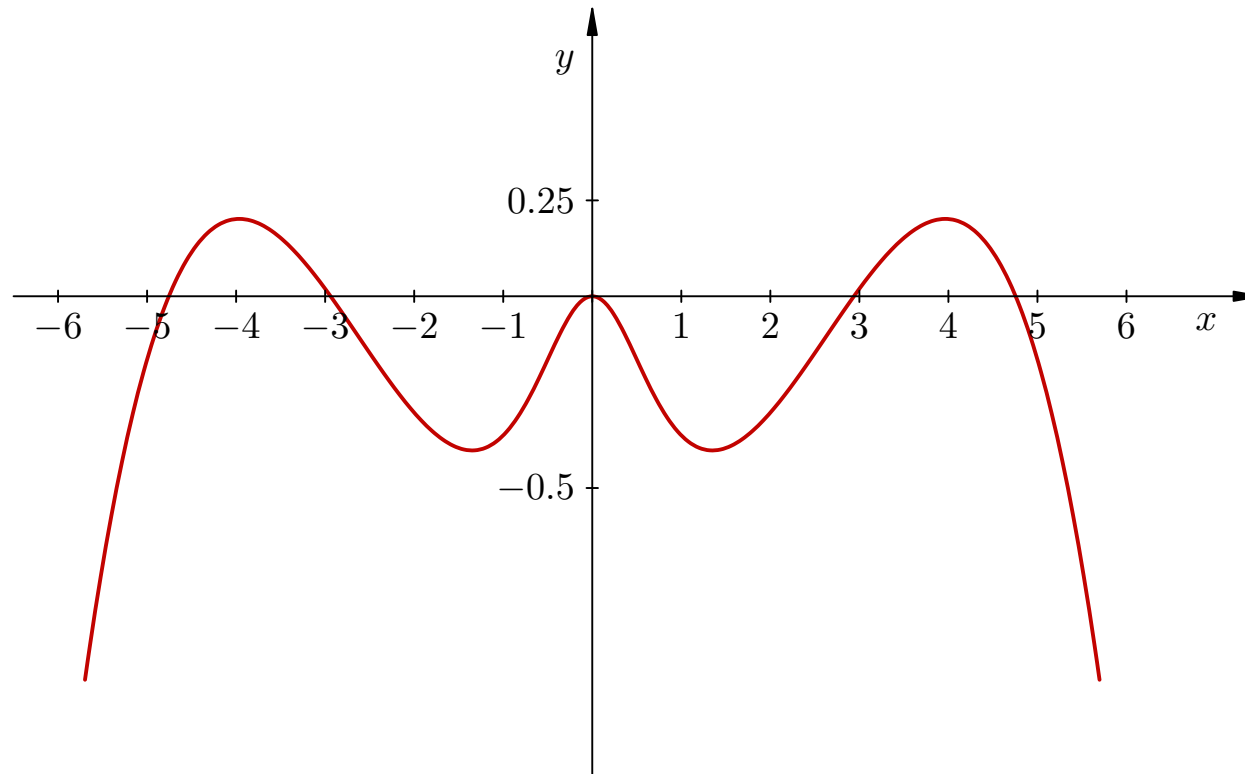
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



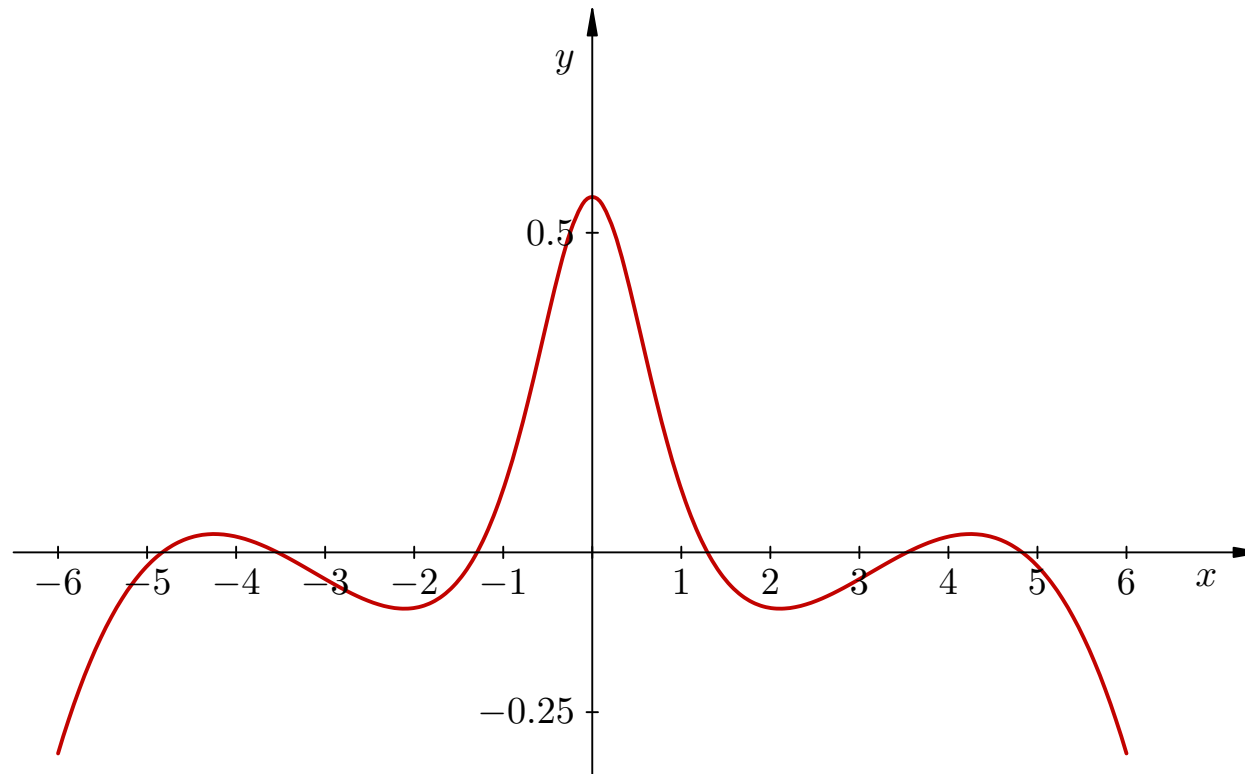
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



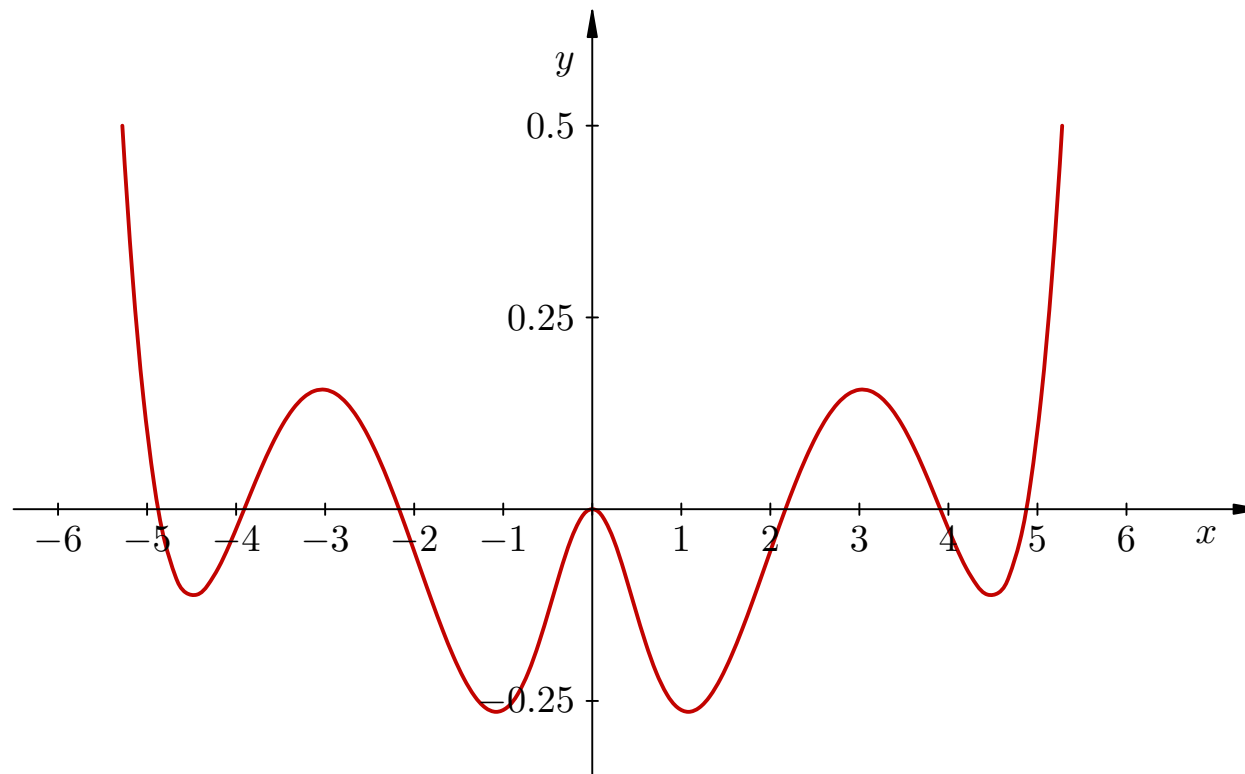
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



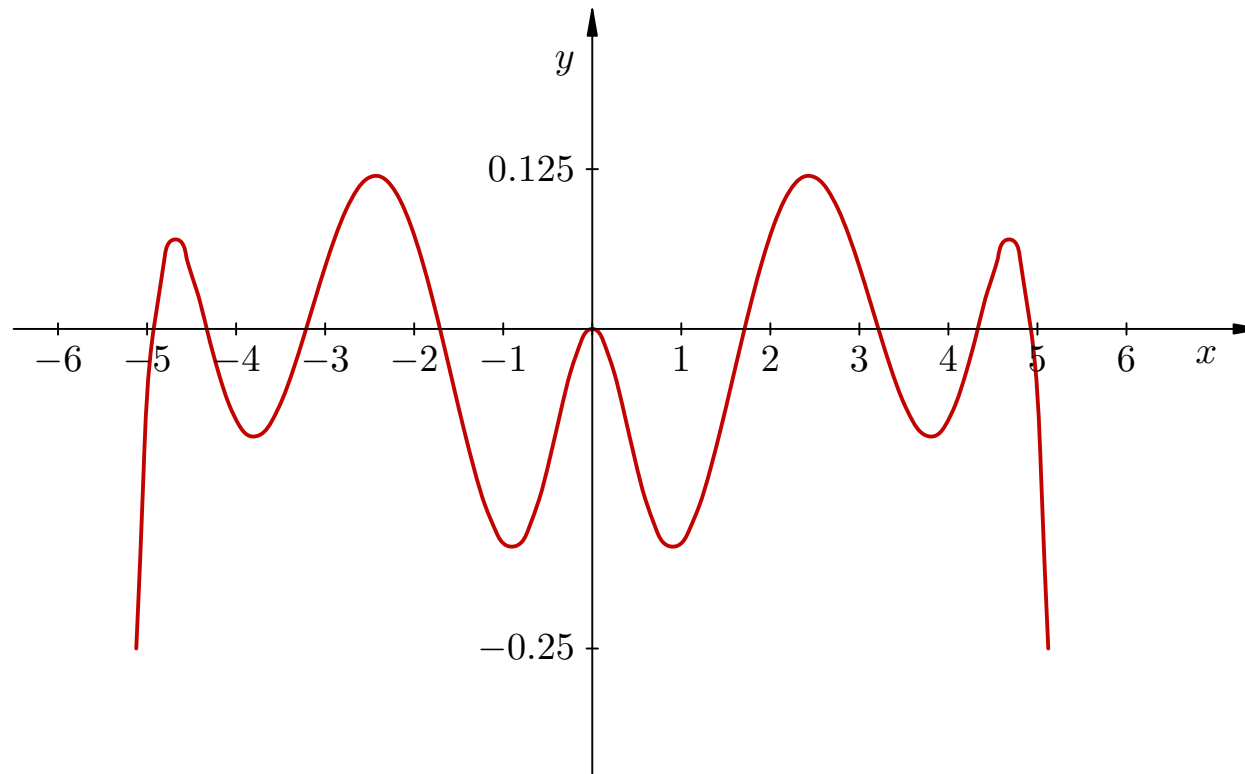
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



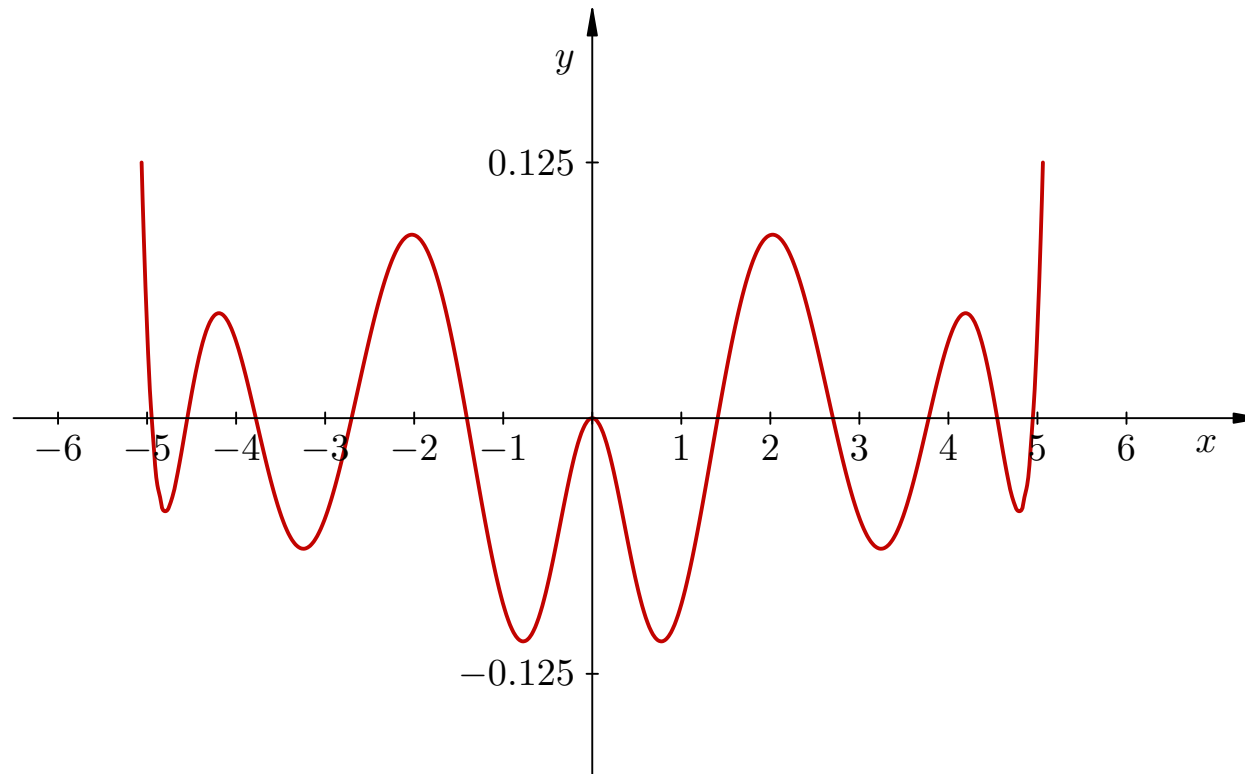
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



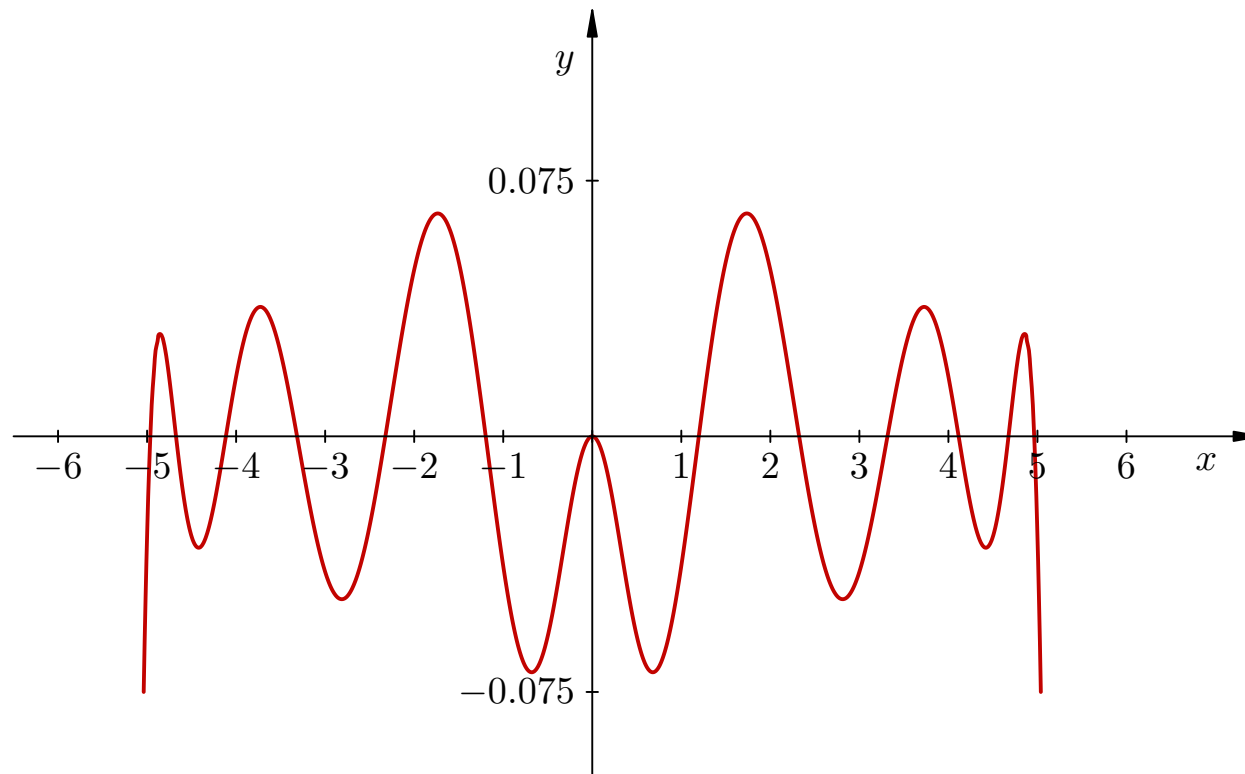
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



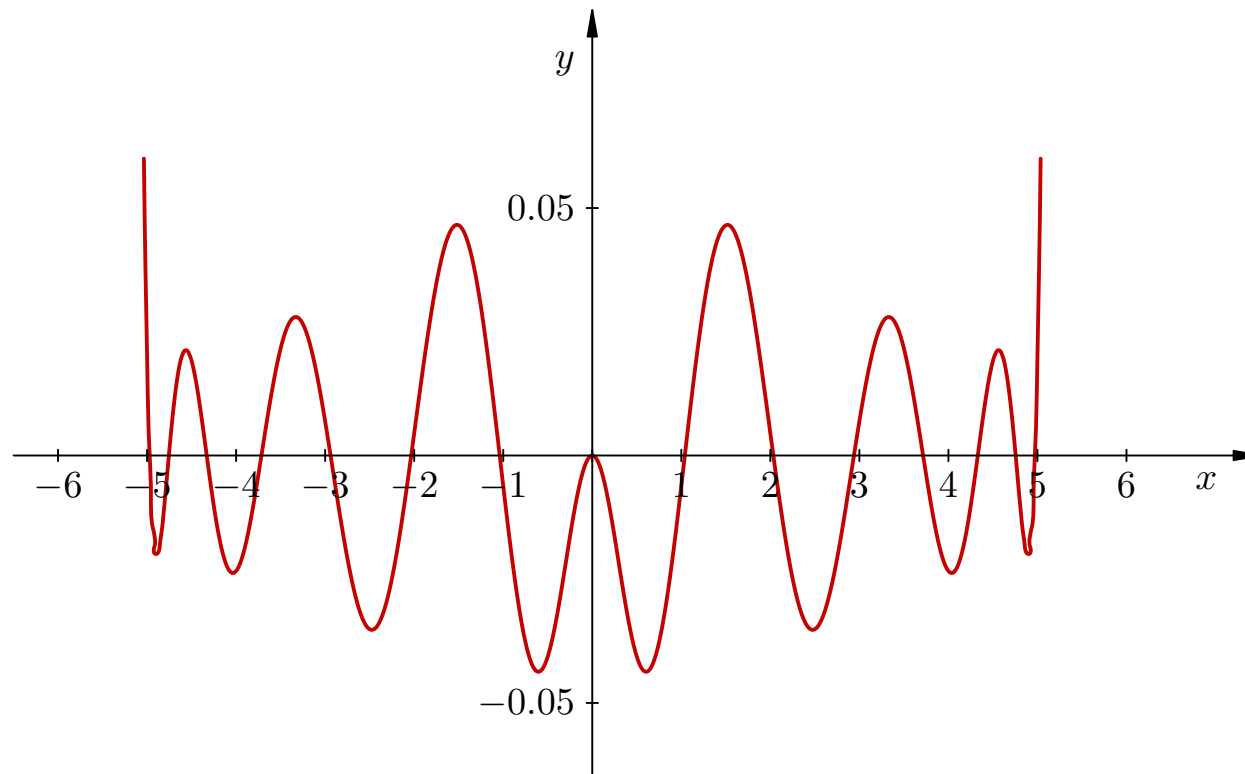
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



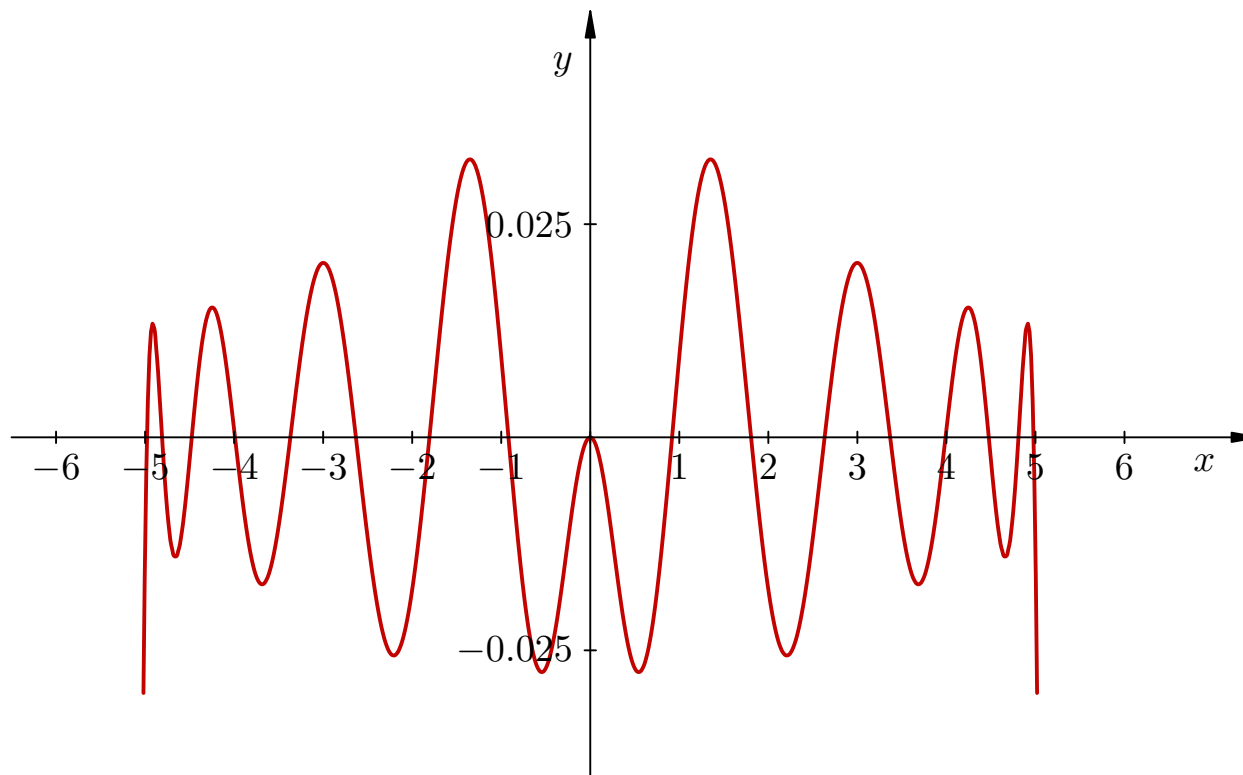
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- **nemoguće** naći takav izbor **točaka** interpolacije polinomima, koji bi bio **dobar** za **svaku** funkciju.

Teorem. (Faber, 1914.) Za **svaki** mogući izbor **točaka** interpolacije, tj. za **svaki niz** skupova čvorova

$$X^{(n)} = \{x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

postoji neprekidna funkcija f , za čiji **niz** interpolacijskih polinoma p_n , stupnja n , s čvorovima iz skupa $X^{(n)}$, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Dakle, **nema** (uniformne) konvergencije, tj. “**nema spasa**”!

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \dots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \dots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo “kontrolirati”.

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo **minimizirati** po apsolutnoj vrijednosti **maksimalnu** grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je **maksimalna** greška **minimalna** se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^* , može se pokazati da susjedni **maksimumi** grešaka imaju **suprotne** znakove, ali su po **apsolutnoj** vrijednosti **jednaki**.
- Jedina je **nevolja** da je postupak traženja takve aproksimacije **iterativan** (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se **minimaks** aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.