

Numerička matematika

6. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Interpolacija polinomima (nastavak):
 - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
 - Hermiteova interpolacija i ocjena greške.
 - Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma.
- Interpolacija splajnovima:
 - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
 - Linearni spline i ocjena greške.
 - Po dijelovima kubična interpolacija — uvod.
 - Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.
 - Ocjene pogreške za kubičnu Hermiteovu interpolaciju.
 - Aproksimacije derivacija i numeričko deriviranje.

Informacije

Konzultacije (službeno):

- 🕒 samo za NM: ponedjeljak u 13 sati (iza predavanja),
- 🕒 petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna **predavanja** od prošlih **5** godina, a stizat će i **nova** (kako nastaju).

Skraćena verzija **skripte** — **1. dio** (prvih **7** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija **skripte** — **2. dio** (drugih **6** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima dva demonstratora:

- Mario Berljafa

- termini: utorak, 9–10 i petak, 12–13.

- e-mail: mberljaf@student.math.hr

- Marin Bužančić

- termin: utorak, 16–18.

- e-mail: buzancic@student.math.hr

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom bar dan ranije!

- Sastanak za demonstrature je pred oglasnom pločom (bar zasad).

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \dots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \dots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo “kontrolirati”.

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo **minimizirati** po apsolutnoj vrijednosti **maksimalnu** grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je **maksimalna** greška **minimalna** se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^* , može se pokazati da susjedni **maksimumi** grešaka imaju **suprotne** znakove, ali su po **apsolutnoj** vrijednosti **jednaki**.
- Jedina je **nevolja** da je postupak traženja takve aproksimacije **iterativan** (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se **minimaks** aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto egzaktne **minimaks** aproksimacije p_n^* funkcije f na intervalu $[a, b]$, zadovoljimo se “**skromnijim**” ciljem:

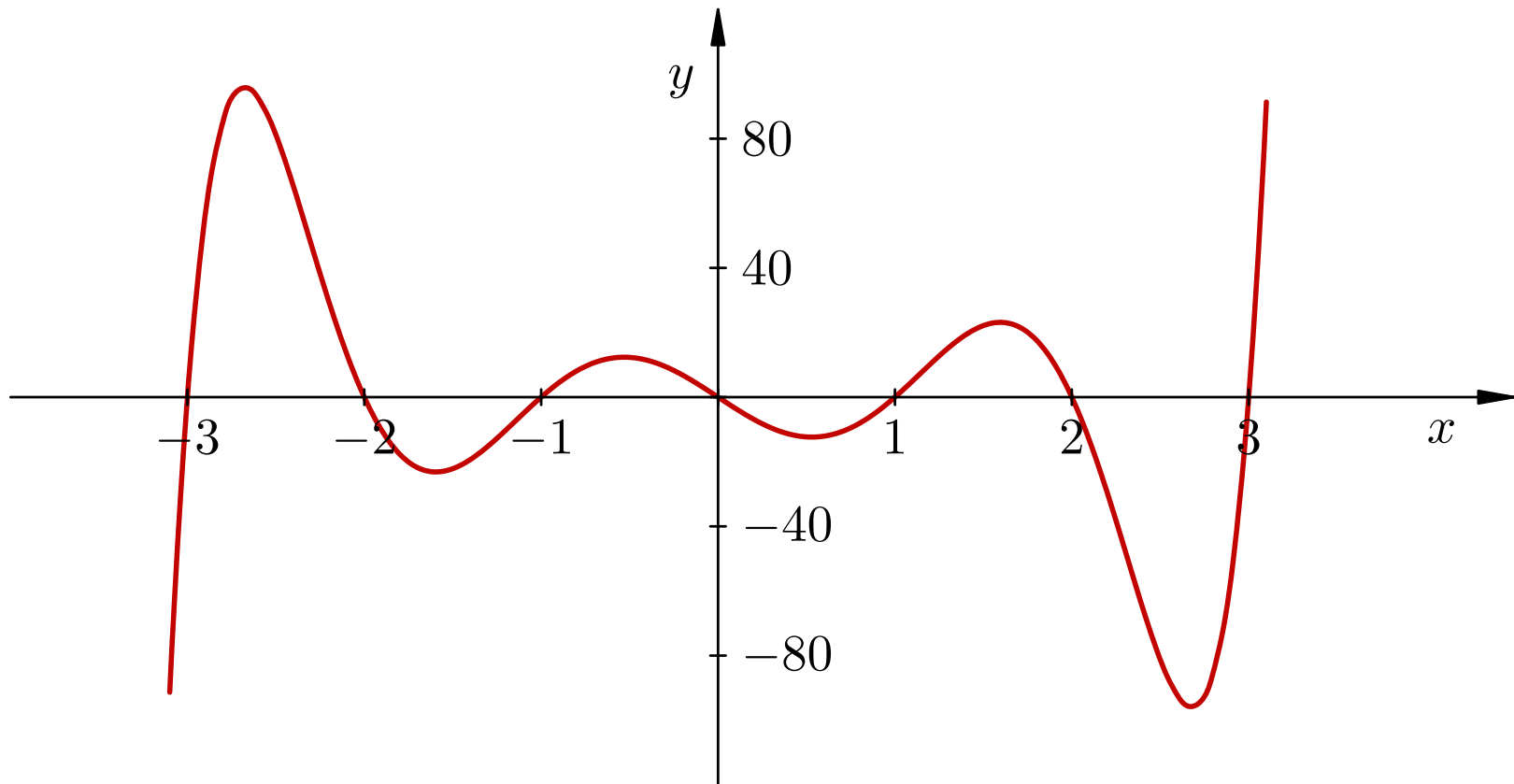
- ako **možemo birati čvorove** interpolacije x_0, \dots, x_n ,
- minimizirajmo maksimalnu** pogrešku polinoma **čvorova**

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

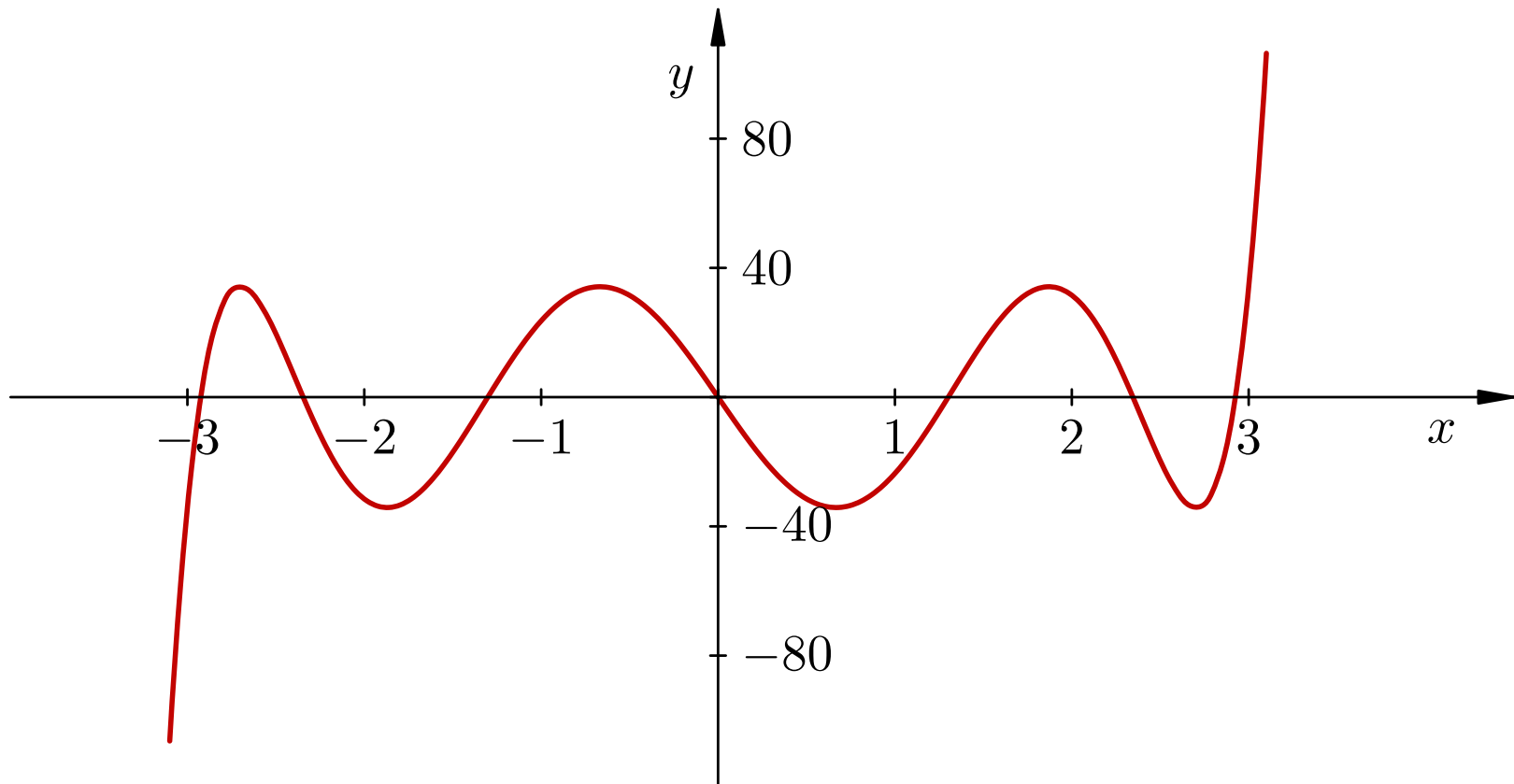
- ekvidistantni** — **najmanja** greška je pri **sredini** intervala, a **raste** prema **rubu**,
- Čebiševljevi** — **maksimalna** greška je **jednaka** na **svakom** podintervalu između čvorova, uključivo i rubove a, b .

Polinom čvorova za $n = 6$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 6$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da,

- kad se uzmu Čebeševljevi čvorovi,
- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki (v. primjer Runge).

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na “standardnom” intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda ju linearnom (afinom) transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n - k) + 1)\pi}{2n + 2}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Ako je $a = -1$, $b = 1$, onda su Čebiševljeve točke x_k , za $k = 0, \dots, n$,

• sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1} .

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi **prve** vrste, oznaka je T_n , za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju **tročlanu** rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj **cosinusa** preko produkta), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n **polinom** stupnja n . Usput, za $|x| \geq 1$ vrijedi $T_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} x)$.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \dots, n,$$

dok su ekstremi na segmentu $[-1, 1]$ (opet, silazno indeksirani)

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n+1.$$

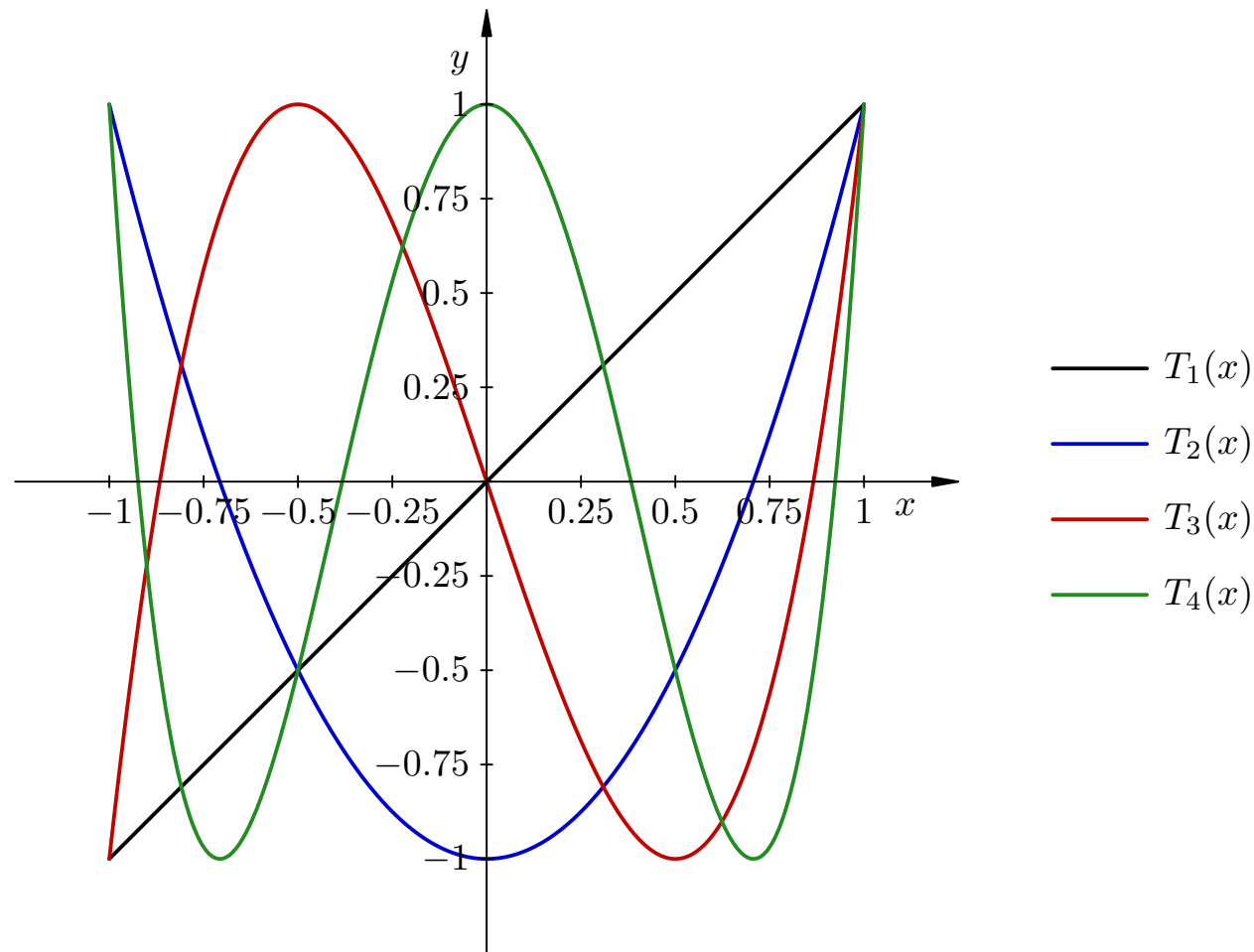
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x'_k) = (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ (rubovi -1 i 1 su uključeni) i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo **minimizacije** “**uniformnog odklona** polinoma od **nule**” na segmentu $[-1, 1]$.

Teorem. Za zadani prirodni broj n , promatrajmo **minimizacijski** problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \right\},$$

gdje je P polinom. **Minimum** τ_n se **dostiže** samo za polinom

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška ili “**otklon** od **nule**” je $\tau_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1} , tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n na $[-1, 1]$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Očito je

$$-1 = x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1 < x'_0 = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x'_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Polinom $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš **jednak** desnoj strani. Pretpostavimo **suprotno**, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na **kontradikciju**.

Iz definicije τ_n preko **infimuma** i prethodne pretpostavke, zaključujemo da **postoji** polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \leq n - 1,$$

za kojeg vrijedi

$$\tau_n \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \leq n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima polinoma T_n . Iz gornje ograde za τ_n , redom, izlazi

$$R(x'_0) = R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0,$$

$$R(x'_1) = -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x'_1) < 0, \quad \dots$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\text{sign}(R(x'_k)) = (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Budući da ima bar $n + 1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

No, onda je $\max_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| = 1/2^{n-1}$, što je kontradikcija s $<$.

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. Istim argumentom izlazi opet $M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$. ■

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu **optimalnog** izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati točke interpolacije $x_k \in [-1, 1]$ tako da **minimiziraju**

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima **vodeći** koeficijent **1**. Po Teoremu o **minimalnom otklonu**, **minimum** ćemo dobiti ako stavimo

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a **minimalna** će vrijednost biti $1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Odatle odmah čitamo da su čvorovi x_0, \dots, x_n **nultočke** polinoma T_{n+1} . U **silaznom** poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos \frac{(2k + 1)\pi}{2n + 2}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo **zamijenom** indeksa $k \mapsto n - k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za **Čebiševljeve** točke (**uzlazno**) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n - k) + 1)\pi}{2n + 2}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije **funkcijskih vrijednosti** funkcije f u čvorovima x_k , možemo tražiti i interpolaciju **derivacije** f'

- da **derivacija** h' interpolacijskog polinoma h interpolira **derivaciju** f' u čvorovima x_k .

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se **Hermiteova interpolacija**.

Prvo, treba odgovoriti na nekoliko **važnih** pitanja:

- postoji** li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji, je li **jedinstven**;
- ako postoji i jedinstven je, kojeg je **stupnja**.

Hermiteova polinomna interpolacija

Uvedimo **skraćene** oznake za vrijednosti f i f' u čvorovima

$$f_k := f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Problem **egzistencije** i **jedinstvenosti** Hermiteove interpolacije **konstruktivno** rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji **jedinstveni** polinom h_{2n+1} , stupnja najviše $2n + 1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n+1}(x_k) = f'_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

gdje su x_k međusobno **različite točke** i f_k, f'_k zadani realni brojevi.

Dokaz. Ideja = konstrukcija baze **nalik** na **Lagrangeovu**.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tražimo “bazične polinome” $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, za $k = 0, \dots, n$, za koje vrijede tzv. “kardinalni” uvjeti interpolacije

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \quad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \quad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo takve polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x)).$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x)),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^n (f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i)) = f_k,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^n (f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i)) = f'_k.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu napisati kao

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)] \ell_k^2(x)$$

$$h_{k,1}(x) = (x - x_k) \ell_k^2(x),$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom **Lagrangeove baze**.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h'_{k,0}(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h'_{k,1}(x_i)$ zadovoljavaju tražene **uvjete** vrši se direktno — uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n ,

• onda su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,

• pa je h_{2n+1} stupnja **najviše** $2n + 1$.

Time smo dokazali **egzistenciju**. Preostaje još **jedinstvenost**.

Hermiteova polinomna interpolacija

Primijetite da **funkcija pogreške** polinoma h

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x)$$

ima **dvostruke nultočke** u čvorovima x_0, \dots, x_n , jer i funkcija e_h , i njezina derivacija e'_h imaju nultočke u x_i , tj.

$$e_h(x_i) = 0, \quad e'_h(x_i) = 0.$$

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji zadovoljava uvjete interpolacije. Za razliku p tih polinoma onda vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (f(x) - q_{2n+1}(x)) - (f(x) - h_{2n+1}(x)) \\ &= e_q(x) - e_h(x). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Polinom p je stupnja najviše $2n + 1$ i

- ima dvostruke nultočke u čvorovima x_i , za $i = 0, \dots, n$, odnosno, ukupno ima barem $2n + 2$ nultočke.

Zaključak. Polinom p je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven. ■

Zato što greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma ima dvostruke nultočke u x_0, \dots, x_n , polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije.

Greška Hermiteove interpolacije

Jedine **razlike**: ovdje je h_{2n+1} stupnja $2n + 1$, a polinom čvorova je $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Neka je $f \in C^{2n+2}[a, b]$ i neka su $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ međusobno **različite** točke, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$.

Nadalje, neka je e_h **greška Hermiteovog** interpolacijskog polinoma h_{2n+1} za funkciju f na mreži čvorova x_0, \dots, x_n .

Za **svaku** točku $x \in [a, b]$, **postoji** točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, gdje je

$$x_{\min} := \min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x, x_0, \dots, x_n\},$$

takva da je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}.$$



Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u **Newtonovoj bazi** — što je zgodnije za računanje.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n$, tj. svaka od njih je **dvostruki čvor**.

Pitanje: Što je **podijeljena razlika** u dvostrukom čvoru?

Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo da $h \rightarrow 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f[x_0, x_0] &= \lim_{h \rightarrow 0} f[x_0, x_0 + h] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Dakle, $f[x_k, x_k] = f'_k$ su baš **zadani** podaci! Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike računaju se na **uobičajeni** način.

Podijeljene razlike

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	\cdots	$f[x_0, \dots, x_n]$
x_0	$f[x_0]$	$f'(x_0)$			
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$	\ddots	
x_1	$f[x_1]$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$		\cdots
x_1	$f[x_1]$		$f[x_1, x_1, x_2]$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
x_n	$f[x_n]$		$f[x_{n-1}, x_n, x_n]$		
x_n	$f[x_n]$	$f'(x_n)$			

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi je

$$\begin{aligned}h_{2n+1}(x) = & f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\ & + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) + \dots \\ & + f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n](x - x_0)^2 \dots (x - x_{n-1})^2(x - x_n).\end{aligned}$$

Naziv “**Hermiteova interpolacija**” koristi se i za **općenitiju**, tzv. **proširenu Hermiteovu** (ili **Hermite–Birkhoff**) interpolaciju.

- 🕒 Ovdje se mogu interpolirati i **više** derivacije od prvih.
- 🕒 **Bitno**: u svakom čvoru x_i , “**redom**” se interpoliraju **funkcijska vrijednost** i prvih nekoliko **uzastopnih** derivacija, a broj podataka po čvoru može **varirati**.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše n (broj podataka $- 1$).

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom zadane vrijednosti $f, f', \dots, f^{(n)}$ u čvoru x_0 .

U ovom primjeru, x_0 je $(n + 1)$ -struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{(k+1) \text{ puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, \dots, n,$$

pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n , za funkciju f oko točke x_0 .

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo “preskakanje” nekih derivacija u nekim točkama, problem interpolacije

ne mora uvijek imati jedinstveno rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f'_1, \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0) , (x_1, f'_1) i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2 \iff$ regularnost matrice sustava za interpolaciju.

Interpolacija splajnovima

Interpolacija polinomima — zaključci

Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva,
- u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.

Pretpostavka: čvorovi interpolacije (rubovi podintervala) interpolacije su uzlazno numerirani,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo **polinom** fiksnog stupnja m , tj. tražimo da je

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_m$.

Svaki polinom p_k (stupnja m)

- određen je s $m + 1$ koeficijenata, i
- moramo odrediti koeficijente n takvih polinoma (na svakom intervalu po jedan).

Dakle, **ukupan broj koeficijenata** koje treba odrediti je

$$(m + 1) \cdot n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Interpolacijski uvjeti su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

što za **svaki** polinom p_k daje po 2 uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \quad \text{za } k = 1, \dots, n,$$

odnosno, **ukupno** imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Digresija. Uvjetima interpolacije osigurali smo **neprekidnost** funkcije φ u svim “unutarnjim” čvorovima mreže x_1, \dots, x_{n-1} , jer je

$$p_{k-1}(x_{k-1}) = p_k(x_{k-1}), \quad k = 2, \dots, n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Zaključak.

- Uvjeta interpolacije je $2n$, a
- treba naći $(m + 1) \cdot n$ koeficijenata.

Bez dodatnih uvjeta, to je moguće napraviti

- samo za $m = 1$,
- tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

Za $m > 1$

- dodaju se uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije φ u (unutarnjim) čvorovima interpolacije.

Po dijelovima linearna interpolacija

Osnovna ideja po dijelovima linearne interpolacije je:

- umjesto jednog polinoma visokog stupnja,
- koristi se više polinoma, ali stupnja 1.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k je stupnja 1

- i **jedinstveno** je određen iz uvjeta interpolacije.

Zapisujemo ga relativno obzirom na početnu točku intervala (**stabilnost**) u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}),$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.

Po dijelovima linearna interpolacija

Interpolacijski polinom zapisujemo u **Newtonovoj formi**

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}),$$

pa je očito

$$c_{0,k} = f[x_{k-1}] = f_{k-1},$$

$$c_{1,k} = f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Za aproksimaciju vrijednosti funkcije f u **jednoj točki** $x \in [a, b]$, treba

- prvo pronaći indeks k takav da vrijedi $x_{k-1} \leq x \leq x_k$,
- a onda izračunati koeficijente pripadnog **linearnog polinoma**.

Po dijelovima linearna interpolacija

Za traženje tog intervala koristimo **binarno pretraživanje**.

Binarno pretraživanje

```
low = 0;
high = n;
dok je (high - low) > 1 radi {
    /* U sljedećoj liniji cjelobrojno dijeljenje */
    mid = (low + high) / 2;
    ako je x < x[mid] onda
        high = mid;
    inače
        low = mid;
};
```

Trajanje ovog algoritma je proporcionalno s $\log_2(n)$.

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ako je funkcija f klase $C^2[a, b]$, onda je **pogreška** takve interpolacije zapravo

• **maksimalna** pogreška od n linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ pogreška je

• **greška linearne interpolacije**

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ocijenimo $\omega(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$, tj. nađimo njezin **maksimum** po apsolutnoj vrijednosti.

Funkcija ω može imati **maksimum** samo na otvorenom intervalu (x_{k-1}, x_k) — u rubovima je greška 0.

Deriviranjem dobivamo da je lokalni ekstrem funkcije

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k),$$

točka $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ (**parabola!**).

Vrijednost funkcije ω u lokalnom ekstremu je

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})(x_e - x_k) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Za bilo koji $x \in (x_{k-1}, x_k)$ je $\omega(x) < 0$, pa je x_e

- točka lokalnog **minimuma** za ω , odnosno,
- točka lokalnog **maksimuma** za $|\omega|$,

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Neka je h **maksimalni razmak čvorova** po svim podintervalima

$$h := \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je M_2 **maksimum** apsolutne vrijednosti f'' na cijelom intervalu $[a, b]$

$$M_2 := \max_{1 \leq k \leq n} M_2^k = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Na cijelom intervalu $[a, b]$, onda možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da maksimalni razmak čvorova $h \rightarrow 0$,

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

pogreška je reda veličine h^2 , odnosno n^{-2} .

Komentar na po dijelovima linearnu interpolaciju

Mane po dijelovima **linearne** interpolacije.

- Potrebno je **dosta podintervala** da se dobije **umjerena točnost** aproksimacije.
- Na primjer, za $h = 0.01$, tj. za $n = 100$, greška aproksimacije je reda veličine 10^{-4} .
- Funkcija φ **nije dovoljno glatka** — samo je **neprekidna**.

Po dijelovima parabolička interpolacija

Ako stavimo $m = 2$, tj. na svakom podintervalu postavimo kvadratni polinom,

- moramo naći $3n$ koeficijenata,
- a imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Zahtijevamo da aproksimacijska funkcija φ u unutarnjim čvorovima interpolacije x_1, \dots, x_{n-1} ima

- neprekidnu prvu derivaciju, pa smo dodali još $n - 1$ uvjet.
- dakle, treba nam još jedan uvjet!

Taj uvjet ne može se postaviti simetrično, ali se aproksimacija može naći.

Ona se uobičajeno ne koristi, jer kontrolu derivacije možemo napraviti samo na jednom rubu.

Primjer za linearnu splajn interpolaciju

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Primjer. Funkciju

$$f(x) = \ln x$$

na intervalu $[1, 100]$ aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom, s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, koju tražimo na cijelom intervalu.

Nađite broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne ta točnost ε , uz

- (a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu,
- (b) interval $[1, 100]$ podijelimo na tri podintervala $[1, 2]$, $[2, 7]$, $[7, 100]$ i na svakom od njih koristimo posebnu ekvidistantnu mrežu.

Po obje metode nađite aproksimaciju za $\ln 2$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje. Za po dijelovima linearnu interpolaciju φ vrijedi sljedeća ocjena pogreške

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \cdot M_2.$$

Ako je mreža **ekvidistantna** na $[a, b]$, onda je

$$h = \frac{b - a}{n},$$

pri čemu je n **broj** podintervala interpolacije.

Tražimo li **točnost** ε , onda mora biti

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Da bi se to postiglo, **dovoljno** je zatražiti da je

$$\frac{1}{8} h^2 \cdot M_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 M_2 \leq \varepsilon.$$

Odatle odmah slijedi da mora biti

$$n \geq (b-a) \sqrt{\frac{M_2}{8\varepsilon}}.$$

Sada još samo treba izračunati M_2 . Deriviranjem dobivamo

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Budući da je f'' negativna, strogo rastuća funkcija, onda je maksimum njezine apsolutne vrijednosti na lijevom rubu, tj.

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{a^2}.$$

Rješenje za (a). Na intervalu $[1, 100]$ je $M_2 = 1$. Dobivamo

$$n \geq (100 - 1) \sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9900}{\sqrt{8}} \approx 3500.1785667,$$

pa je $n = 3501$, dok je broj čvorova $n + 1 = 3502$.

Da bismo odredili aproksimaciju za $\ln 2$, moramo naći u kojem podintervalu se 2 nalazi.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Ako je \hat{x} u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, mora biti

$$a + (k - 1) \cdot \frac{b - a}{n} \leq \hat{x} \leq a + k \cdot \frac{b - a}{n}.$$

U našem slučaju je $\hat{x} = 2$. Onda dobivamo

$$1 + (k - 1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 2 \leq 1 + k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k - 1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 1 \leq k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k - 1) \leq \frac{3501}{99} \leq k$$

$$(k - 1) \leq 35.\dot{3}\dot{6} \leq k.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Prema tome, $k = 36$, $x_{35} \approx 1.9897172240$, $x_{36} \approx 2.0179948590$, pa imamo tablicu **podijeljenih razlika**

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
1.9897172240	0.6879925301	
		0.4990461264
2.0179948590	0.7021043744	

Interpolacijski polinom na tom **podintervalu** onda glasi:

$$p_1(x) = 0.6879925301 + 0.4990461264(x - 1.9897172240),$$

pa je

$$p_1(2) = 0.6931241097, \quad |\ln(2) - p_1(2)| = 0.0000230709.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje za (b). Na intervalu $[1, 2]$ je $M_2 = 1$, pa je

$$n_1 \geq (2 - 1) \sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{100}{\sqrt{8}} \approx 35.3535,$$

pa je $n_1 = 36$.

Na intervalu $[2, 7]$ je $M_2 = \frac{1}{4}$, pa je

$$n_2 \geq (7 - 2) \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{500}{2\sqrt{8}} \approx 88.388834765,$$

pa je $n_2 = 89$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Na intervalu $[7, 100]$ je $M_2 = \frac{1}{49}$, pa je

$$n_3 \geq (100 - 7) \sqrt{\frac{\frac{1}{49}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9300}{7\sqrt{8}} \approx 469.7209334,$$

pa je $n_3 = 470$.

Ukupan broj podintervala je $n = n_1 + n_2 + n_3 = 595$, što je skoro **6 puta manje** nego u (a). Broj čvorova je **596**.

Budući da je **2 čvor** interpolacije, onda nemamo što računati, i vrijednost u čvoru je upravo $\ln 2 \approx 0.693147181$.

Po dijelovima kubična interpolacija

Po dijelovima kubična interpolacija

Kod po dijelovima kubične interpolacije, restrikcija aproksimacijske funkcije φ na svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ je kubični polinom

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_3$.

Ove polinome p_k obično zapisujemo relativno obzirom na početnu točku intervala x_{k-1} , u obliku

$$\begin{aligned} p_k(x) = & c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) \\ & + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \end{aligned}$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, i za $k = 1, \dots, n$.

Broj nepoznatih parametara i broj uvjeta

Ukupno imamo n kubičnih polinoma,

- od kojih **svakome** treba odrediti 4 koeficijenta,
- dakle, **ukupno** moramo odrediti $4n$ koeficijenata.

Uvjeta **interpolacije** je $2n$, jer svaki **kubični** polinom p_k

- mora **interpolirati** funkciju f u rubovima svog podintervala $[x_{k-1}, x_k]$,

tj. mora vrijediti

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, n.$$

Ovi uvjeti automatski osiguravaju **neprekidnost** funkcije φ .

Dodatni uvjeti interpolacije na derivaciju

Obično želimo da interpolacijska funkcija φ bude **glada**:

- barem klase $C^1[a, b]$, tj.
- da je i **derivacija** funkcije φ **neprekidna** i u čvorovima.

Dodavanjem tih uvjeta za **svaki kubični** polinom p_k , dobivamo točno još $2n$ uvjeta “**interpolacije**”

$$\begin{aligned} p'_k(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ p'_k(x_k) &= s_k, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, n,$$

pri čemu su s_k neki brojevi.

Njihova uloga može biti **višeznačna**, pa ćemo je **detaljno** opisati kasnije.

- Ideja — brojeve s_k možemo birati/zadati na **razne** načine.

Neprekidnost derivacije interpolacijske funkcije

Zasad, možemo zamišljati da su brojevi s_k

- neke **aproksimacije derivacije** funkcije f u čvorovima.

Oznaka s_k dolazi od engleske riječi “**slope**” = **nagib**.

Primijetite da je takvim izborom **dodatnih** uvjeta

- osigurana **neprekidnost** **prve derivacije** funkcije φ u svim **unutrašnjim** čvorovima,

jer je

$$p'_{k-1}(x_{k-1}) = p'_k(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n.$$

Ako pretpostavimo da su s_k nekako **zadani** brojevi, dobivamo problem **Hermiteove** interpolacije za **svaki** polinom p_k .

Nađimo **koeficijente** interpolacijskog polinoma p_k .

Zapis po dijelovima kubične interpolacije

Za ovaj problem Hermiteove interpolacije

- najzgodnije je koristiti Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_k ,
- s tzv. dvostrukim čvorovima x_{k-1} i x_k .

Razlog. U oba čvora x_{k-1} i x_k zadajemo po dva podatka:

- vrijednost funkcije i derivacije.

Razmak susjednih različitih čvorova označavamo ovako:

$$h_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ponovimo što, zapravo, znači da je x_k dvostruki čvor.

Dvostruki čvorovi u podijeljenim razlikama

Ako se u podijeljenoj razlici $f[x_k, x_k + h]$ ova dva čvora približavaju jedan drugom, onda na limesu kad $h \rightarrow 0$ dobivamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} f[x_k, x_k + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = f'(x_k),$$

naravno, pod uvjetom da f ima derivaciju u točki x_k . Drugim riječima, vrijedi

$$f[x_k, x_k] = f'(x_k).$$

U našem slučaju, ako u točki x_k

• derivaciju $f'(x_k)$ zadajemo ili aproksimiramo sa s_k ,

onda je

$$f[x_k, x_k] = s_k.$$

Tablica podijeljenih razlika za polinom p_k

Tablica podijeljenih razlika za Hermiteov interpolacijski polinom p_k koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k je

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}]$
x_{k-1}	f_{k-1}			
		s_{k-1}		
x_{k-1}	f_{k-1}		$\frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}$	
		$f[x_{k-1}, x_k]$		$\frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}$
x_k	f_k		$\frac{s_k - f[x_{k-1}, x_k]}{h_k}$	
		s_k		
x_k	f_k			

Newtonov oblik polinoma p_k

Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma p_k koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k je

$$\begin{aligned} p_k(x) = & f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ & + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ & + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2(x - x_k), \end{aligned}$$

uz uvažavanje da je

$$f[x_{k-1}, x_{k-1}] = s_{k-1},$$

$$f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k},$$

$$f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] = \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}.$$

Newtonov oblik polinoma p_k

Uvrštavanjem čvorova x_{k-1} i x_k u prethodnu formulu za p_k , odmah možemo provjeriti da je

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, & p'_k(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, & p'_k(x_k) &= s_k. \end{aligned}$$

Drugim riječima, našli smo traženi polinom p_k na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$.

Za nalaženje koeficijenata $c_{i,k}$ u standardnom zapisu, treba još

- Newtonov oblik polinoma p_k “preurediti” tako da bude napisan po potencijama od $(x - x_{k-1})$.

Standardni oblik polinoma p_k

Posljednji član **Newtonovog** oblika polinoma p_k možemo napisati kao

$$\begin{aligned}(x - x_{k-1})^2(x - x_k) &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} + x_{k-1} - x_k) \\ &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} - h_k) \\ &= (x - x_{k-1})^3 - h_k(x - x_{k-1})^2.\end{aligned}$$

Zapis polinoma p_k sada glasi

$$\begin{aligned}p_k(x) &= f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &\quad + \left(f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \right) \\ &\quad \quad \quad \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &\quad + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^3.\end{aligned}$$

Standardni oblik polinoma p_k

Uspoređivanjem **koeficijenata** uz odgovarajuće potencije od $(x - x_{k-1})$, dobivamo

$$c_{0,k} = p_k(x_{k-1}) = f_{k-1},$$

$$c_{1,k} = p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1},$$

$$c_{2,k} = \frac{p_k''(x_{k-1})}{2} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k],$$

$$c_{3,k} = \frac{p_k'''(x_{k-1})}{6} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k].$$

Promotrimo li posljednje **dvije** relacije, otkrivamo da se **isplati**

- **prvo** izračunati koeficijent $c_{3,k}$,
- a **zatim** ga upotrijebiti za računanje $c_{2,k}$.

Standardni oblik polinoma p_k

Na kraju, dobivamo sljedeće relacije

• za koeficijente $c_{i,k}$ u standardnom zapisu polinoma p_k , napisane redom kako se računaju:

$$c_{0,k} = f_{k-1},$$

$$c_{1,k} = s_{k-1},$$

$$c_{3,k} = \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2},$$

$$c_{2,k} = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k},$$

za $k = 1, \dots, n$.

Po dijelovima kubična interpolacija — komentar

Drugim riječima, ako znamo s_k , onda

- nije problem naći koeficijente po dijelovima kubične interpolacije.

Ostaje nam samo pokazati kako bismo mogli birati brojeve s_k .

Tu postoje dva bitno različita načina.

- s_k su “prave” vrijednosti derivacije funkcije f u čvorovima, tj. $s_k = f'(x_k)$.
- s_k su neke aproksimacije za $f'(x_k)$. Takve aproksimacije možemo naći numeričkim deriviranjem.

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Vrijednosti s_k možemo izabrati tako da su one baš **jednake derivaciji** zadane funkcije u odgovarajućoj točki, tj. da vrijedi

$$s_k = f'(x_k).$$

U tom slučaju je **kubični polinom**

- određen **lokalno**, tj. ne ovisi o drugim kubičnim polinomima,
- **razlog** — na rubovima zadane **2** funkcijske vrijednosti i **2** vrijednosti derivacija.

Takva se interpolacija zove **po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija**.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je funkcija $f \in C^4[a, b]$. Za svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ vrijedi **ocjena greške** za Hermiteovu kubičnu interpolaciju

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_4^k}{4!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})^2(x - x_k)^2, \quad M_4^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

Ostaje samo još pronaći u kojoj je točki intervala $[x_{k-1}, x_k]$ **maksimum** funkcije $|\omega|$.

Dovoljno je naći sve **lokalne** ekstreme funkcije ω , jer je na rubovima greška 0.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Deriviranjem izlazi da se ekstrem (i to lokalni maksimum) dostiže u $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$.

Vrijednost u x_e je kvadrat vrijednosti greške za po dijelovima linearnu interpolaciju na istoj mreži čvorova

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2(x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}.$$

Prijelazom na apsolutnu vrijednost, slijedi da je x_e točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$ i

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Definiramo li, ponovno, maksimalni razmak čvorova

$$h = \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k = x_k - x_{k-1}\},$$

onda, na čitavom $[a, b]$, možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \frac{h^4}{16} = \frac{1}{384} h^4 \cdot M_4,$$

pri čemu je

$$M_4 = \max_{k=1, \dots, n} \{M_4^k\} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Drugim riječima, ako **ravnomjerno** povećavamo broj čvorova, tako da $h \rightarrow 0$, onda i maksimalna greška teži u 0.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je $f \in C^1[a, b]$ i pretpostavimo da

- f ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Tada je

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f'(x) - \varphi'(x)\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f''(x) - \varphi''(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{12} h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

$$\|f^{(3)}(x) - \varphi^{(3)}(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} h \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

Primjer — po dijelovima Hermiteova interp.

Primjer. Nađite po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju za podatke

x_k	0	1	2
f_k	1	2	0
f'_k	0	1	1

Očito, treba povući dva kubična polinoma

- p_1 na intervalu $[0, 1]$,
- p_2 na intervalu $[1, 2]$.

Primjer — po dijelovima Hermiteova interp.

Za polinom p_1 imamo sljedeću tablicu podijeljenih razlika

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, \dots, t_{k+3}]$
0	1			
0	1	0		
1	2	1	1	
1	2	1	0	-1

Iz nje dobivamo

$$p_1(x) = 1 + (1 + 1)(x - 0)^2 - 1(x - 0)^3 = 1 + 2x^2 - x^3.$$

Primjer — po dijelovima Hermiteova interp.

Na sličan način, za p_2 dobivamo tablicu podijeljenih razlika

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, \dots, t_{k+3}]$
1	2			
1	2	1		
2	0	-2	-3	6
2	0	1	3	

pa je

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 2 + (x - 1) + (-3 - 6)(x - 1)^2 + 6(x - 1)^3 \\ &= 2 + (x - 1) - 9(x - 1)^2 + 6(x - 1)^3. \end{aligned}$$

Demo — po dijelovima kub. Hermiteova interp.

Pokazati kako izgleda po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija na primjeru funkcije Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$

na ekvidistantnim mrežama s parnim brojem podintervala.

 `Num_Pas\Interp\Comp_Her\GnuPlot\HerRung.plt`

Numeričko deriviranje

Numeričko deriviranje

U praksi, često derivacije funkcije **nisu dostupne**, već

- treba **aproksimirati** derivaciju diferencijabilne funkcije f na nekom skupu točaka, korištenjem **samo** vrijednosti funkcije f u zadanim točkama.

Ideja. Aproksimacija derivacije = derivacija aproksimacije.

Koristimo interpolacijski polinom. Uz pretpostavku da je f klase $C^{n+1}[a, b]$, funkciju f možemo napisati

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x),$$

gdje je $p_n(x)$ **interpolacijski** polinom

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

Derivacija funkcije = derivacija interp. polinoma

a $e_n(x)$ greška interpolacijskog polinoma

$$e_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Deriviranjem p_n , a zatim uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo aproksimaciju za $f'(x_0)$

$$p'_n(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2] (x_0 - x_1) \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_{n-1}),$$

Ako f ima još jednu neprekidnu derivaciju, tj. ako je f klase $C^{n+2}[a, b]$, onda je pogreška aproksimacije

$$e'_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n).$$

Greška = derivacija greške interp. polinoma

Dakle, $p'_n(x_0)$ je **aproksimacija** derivacije funkcije f u točki x_0 i vrijedi

$$f'(x_0) = p'_n(x_0) + e'_n(x_0).$$

Ako označimo s

$$H = \max_k |x_0 - x_k|,$$

onda je, za $H \rightarrow 0$, greška $e'_n(x_0)$ **reda veličine**

$$e'_n(x_0) = O(H^n).$$

To nam pokazuje da aproksimacijska formula za derivaciju može biti **proizvoljno visokog reda n** , ali takve formule s velikim n imaju **ograničenu praktičnu vrijednost**.

Numeričko deriviranje — linearni polinom

Pokažimo kako se ta formula ponaša za **niske** n .

$n = 1$.

Aproksimacija derivacije je

$$p'_1(x_0) = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h},$$

pri čemu smo napravili **grešku**

$$e'_1(x_0) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x_0 - x_1) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{2} h,$$

uz pretpostavku da je $f \in C^3[x_0, x_1]$. Greška je **reda veličine** $O(h)$ za $h \rightarrow 0$.

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

$n = 2$.

Za $n = 2$, točke x_1, x_2 možemo uzeti na **više** raznih načina.

1. Simetričan izbor točaka

Izaberemo x_1 i x_2 simetrično oko x_0

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 - h.$$

Sugestivnija oznaka je

$$x_{-1} := x_2,$$

jer se točke pišu u **prirodnom** redosljedu: x_{-1}, x_0, x_1 . U tom slučaju je

$$p'_2(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_{-1}] (x_0 - x_1).$$

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

Izračunajmo potrebne **podijeljene** razlike.

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$
x_{-1}	f_{-1}	$\frac{f_0 - f_{-1}}{h}$	
x_0	f_0	$\frac{f_1 - f_0}{h}$	$\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}$
x_1	f_1		

Uvrštavanjem dobivamo

$$p_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} - h \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

Prethodnu formulu zovemo **simetrična (centralna) razlika**, jer su točke x_1 i x_{-1} **simetrične** obzirom na x_0 .

Takva aproksimacija derivacije ima **bolju ocjenu** greške nego obične podijeljene razlike, tj. vrijedi

$$e'_2(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} (x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1}) = -h^2 \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

2. Slučaj x_1 i x_2 s iste strane x_0

Rasporedimo, na primjer, x_1 i x_2 desno od x_0 ,

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h.$$

Numeričko deriviranje — drugi izbor točaka

Iako su i u ovom slučaju točke ekvidistantne, deriviramo u najljevijoj, a ne u srednjoj točki.

Pripadna tablica podijeljenih razlika je

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$
x_0	f_0	$\frac{f_1 - f_0}{h}$	
x_1	f_1		$\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$
x_2	f_2	$\frac{f_2 - f_1}{h}$	

Numeričko deriviranje — drugi izbor točaka

Konačno, aproksimacija derivacije u x_0 je

$$\begin{aligned} p'_2(x_0) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2] (x_0 - x_1) \\ &= \frac{f_1 - f_0}{h} - h \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \\ &= \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}, \end{aligned}$$

dok je greška jednaka

$$e'_2(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = h^2 \frac{f^{(3)}(\xi)}{3},$$

tj. greška je istog reda veličine $O(h^2)$, međutim konstanta je **dvostruko** veća nego u prethodnom (simetričnom) slučaju.

Numeričko deriviranje — zaključci

Formula za derivaciju

- postaje sve **točnija** što su **bliže** točke iz kojih se derivacija aproksimira, tj. što je h manji.

To vrijedi samo **teoretski**.

U praksi, mnogi podaci su mjereni, pa nose neku **pogrešku**, u najmanju ruku zbog grešaka **zaokruživanja**.

Osnovu numeričkog deriviranja čine **podijeljene razlike**,

- ako su točke **bliske**, dolazi do **kraćenja**. Do kraćenja **mora** doći, zbog neprekidnosti funkcije f .

Problem je to **izrazitiji**, što su točke bliže, tj. što je h manji.

Dakle, imamo dva **oprečna** zahtjeva na veličinu h . Manji h daje bolju **ocjenu greške**, ali veću **grešku zaokruživanja**.

Numeričko deriviranje — ilustracija problema

Ilustrirajmo to analizom **simetrične razlike**,

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + e'_2(x_0), \quad e'_2(x_0) = -h^2 \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}.$$

Pretpostavimo da smo, umjesto vrijednosti f_{-1} i f_1 , uzeli malo **perturbirane vrijednosti**

$$\hat{f}_1 = f_1 + \varepsilon_1, \quad \hat{f}_{-1} = f_{-1} + \varepsilon_{-1}, \quad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_{-1}| \leq \varepsilon.$$

Ako odatle izrazimo f_1 i f_{-1} i uvrstimo ih u formulu za derivaciju, dobivamo

$$f'(x_0) = \frac{\hat{f}_1 - \hat{f}_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e'_2(x_0).$$

Koliko malen smije biti h ?

Prvi član s desne strane je ono što smo mi **zaista** izračunali kao aproksimaciju derivacije, a ostalo je **greška**.

Zbog **jednostavnosti** analize pretpostavimo da je

- h prikaziv u računalu,
- greška pri računanju **kvocijenta** u podijeljenoj razlici zanemariva.

U tom je slučaju napravljena **ukupna greška**

$$err_2 = f'(x_0) - \frac{\hat{f}_1 - \hat{f}_{-1}}{2h} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e'_2(x_0).$$

Ogradimo err_2 po **apsolutnoj** vrijednosti. Greška u prvom članu je **najveća** ako su ε_1 i ε_{-1} **suprotnih** predznaka, maksimalne apsolutne vrijednosti ε .

Koliko malen smije biti h ?

Za drugi član koristimo ocjenu za $e'_2(x_0)$, pa zajedno dobivamo

$$|err_2| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6}h^2, \quad M_3 = \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} |f^{(3)}(x)|.$$

Lako se vidi da je ocjena na desnoj strani najbolja moguća, tj. da se može dostići. Označimo tu ocjenu s $e(h)$

$$e(h) := \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6}h^2.$$

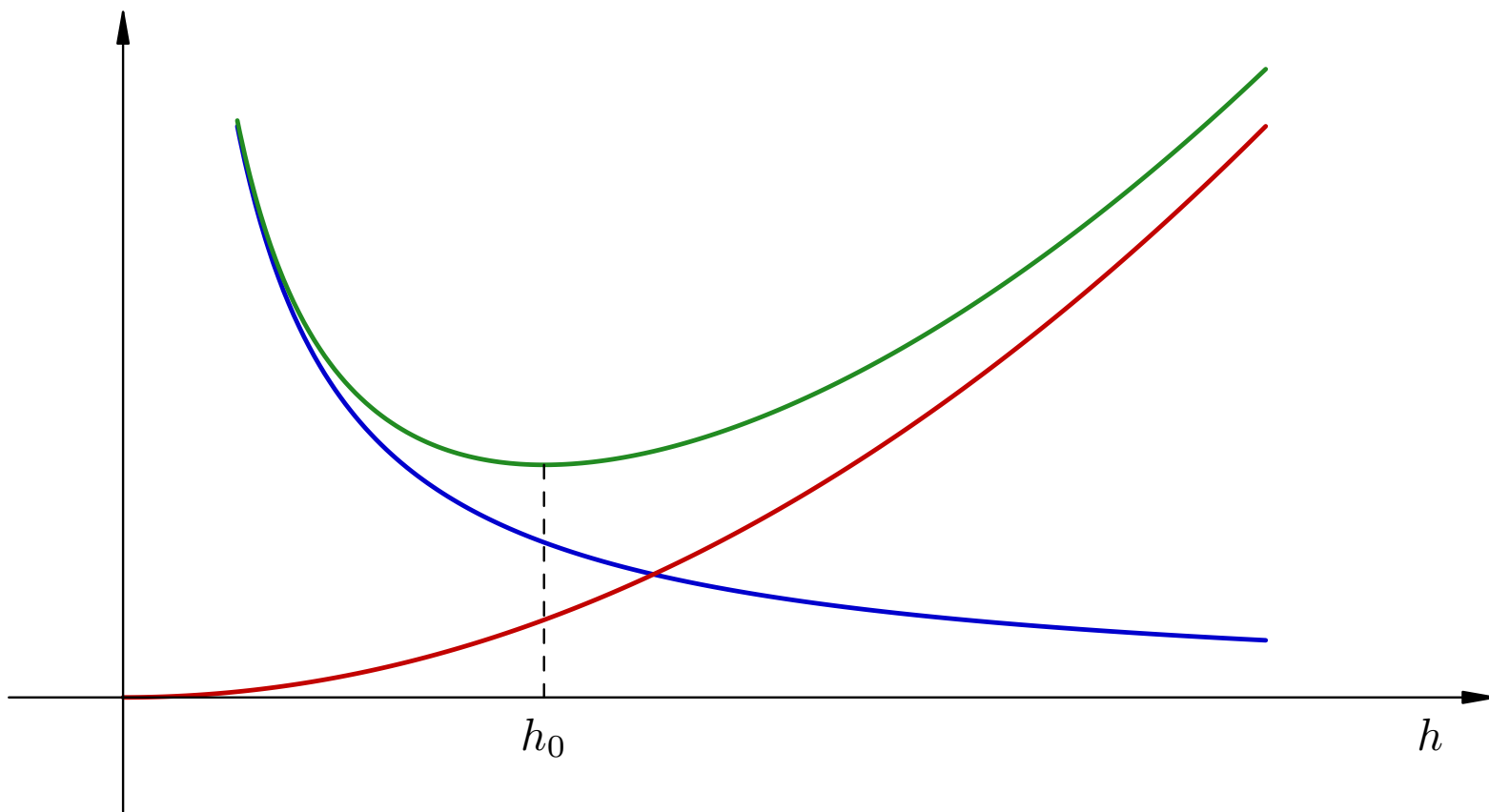
Ponašanje ove ocjene i njezina dva člana u ovisnosti od h možemo prikazati sljedećim grafom.

Koliko malen smije biti h ?

Legenda:

- plava boja — prvi član ε/h oblika hiperbole, koji dolazi od greške u podacima,
- crvena boja — drugi član oblika parabole, koji predstavlja maksimalnu grešku odbacivanja kod aproksimacije derivacije podijeljenom razlikom,
- zelena boja — označava zbroj grešaka $e(h)$.

Optimalni h_0



Optimalni h_0

Odmah vidimo da $e(h)$ ima **minimum** po h . Taj minimum se lako računa, jer iz

$$e'(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{M_3}{3}h = 0$$

izlazi da se lokalni, a onda (zbog $e''(h) > 0$ za $h > 0$) i **globalni** minimum postiže za

$$h_0 = \left(\frac{3\varepsilon}{M_3} \right)^{1/3}.$$

Najmanja vrijednost funkcije je

$$e(h_0) = \frac{3}{2} \left(\frac{M_3}{3} \right)^{1/3} \varepsilon^{2/3}.$$

Ukupna greška koju ne očekujemo

To pokazuje da je čak i u **najboljem** slučaju,

- kad je **ukupna greška** najmanja, ona je **reda veličine** $O(\varepsilon^{2/3})$, a **ne** $O(\varepsilon)$, kao što bismo željeli.

To predstavlja **značajni gubitak točnosti**.

Posebno, **daljnje** smanjivanje koraka h samo **povećava** grešku!

Isti problem se javlja, i to u još **ozbiljnijem** obliku, u formulama **višeg** reda za aproksimaciju derivacija.