Numerička matematika
10. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Računanje vrijednosti funkcija:
  - Primjeri.
    - Fourierov red.
- Numerička integracija:
  - Općenito o integracijskim formulama.
  - Newton–Cotesove formule.
    - Trapezna formula.
    - Simpsonova formula.
    - Formula srednje točke.
  - Teorija integracijskih formula.
  - Težinske Newton–Cotesove formule.
  - Produljene Newton–Cotesove formule.

Informacije — riješeni zadaci ...

Zadaci. Na mojoj i službenoj web stranici možete naći

- riješene zadatke iz neprekidnih najmanjih kvadrata (pdf format).

Tamo ima 6 zadataka s detaljnim rješenjima, a neki zadaci imaju i dva rješenja.

Neprekidni najmanji kvadrati se

- detaljno rade na predavanjima, skupa sa zadacima,

a ovo je dodatak za vježbanje.

Vježbe, kao i inače, prelaze

- na numeričku integraciju, pa na rješavanje jednadžbi,

tako da se sve "uredno stigne" do kraja.

Informacije

Konzultacije (službeno):

- samo za NM: ponedjeljak u 13 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, "žive" su i domaće zadaće na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

ili, izravno

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Dodatni bodovi "čekaju na vas".

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja od prošlih 5 godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima dva demonstratora:

- Mario Berljafa
  - termini: utorak, 9–10 i petak, 12–13.
  - e–mail: `mberljaf@student.math.hr`
- Marin Bužančić
  - termin: utorak, 16–18.
  - e–mail: `buzancic@student.math.hr`

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom bar dan ranije!

- Sastanak za demonstrature je pred oglasnom pločom (bar zasad).

Trigonometrijski polinomi — primjeri

Razvoj periodičkih funkcija

Za aproksimaciju periodičkih funkcija standardno koristimo Fourierove redove.

- Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je f periodička funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$.

Fourierov red za funkciju f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdje su

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Napomena. Granice integracije mogu (zbog periodičnosti) biti bilo koji c, $c + 2\pi$!

Konvergencija Fourierovog reda

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

Teorem. (Dirichlet) Pretpostavimo da je

(a) f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u tim točkama može imati i više vrijednosti),

(b) f je periodična s periodom 2π,

(c) f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Tada red Fourierov red konvergira prema

(1) $f(x)$, ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,

(2) $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ako u točki x funkcija ima prekid.

Razvoj periodičkih funkcija

Pretpostavimo da su koeficijenti a_n i b_n poznati i da želimo izračunati aproksimaciju trigonometrijskim polinomom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx),$$

gdje je N unaprijed zadan (zanemarimo poseban "status" a_0).

Trigonometrijski polinom sastoji se iz dva dijela: kosinusnog i sinusnog (to ćemo iskoristiti u algoritmu).

Nadalje, Fourierov red

- parne funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo kosinusni dio, a
- neparne funkcije $f(x) = -f(-x)$ samo sinusni dio razvoja.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f parna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

- U direktnoj sumaciji trebamo N računanja funkcije $\cos$, za $\cos(nx)$, uz $n \geq 1$.
- Možemo koristiti i generaliziranu Hornerovu shemu, samo treba naći tročlanu homogenu rekurziju za

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu kosinusa pretvara u produkt

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Ako stavimo $a = (n+1)x$ i $b = (n-1)x$, dobivamo

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u općoj tročlanoj rekurziji treba uzeti

$$\alpha_n(x) = -2\cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 1 + B_1 \big(\cos x - 2\cos x \cdot 1\big) \\ &= B_0 - B_1 \cos x. \end{aligned}$$

Sad imamo sve elemente za generaliziranu Hornerovu shemu.

Trigonometrijski polinom za parne funkcije

Fourierov “red” parne funkcije

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
alpha = 2 * cos(x);
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] + alpha * B_1 - B_2;
};
f_N(x) = B_0 - 0.5 * alpha * B_1;
```

Algoritam funkciju cos računa samo jednom.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f neparna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zbog sume koja ide od 1 treba biti oprezan. Zgodniji zapis je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

Sad očito treba definirati

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu sinusa pretvara u produkt

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

Ako stavimo $a = (n+2)x$ i $b = nx$, dobivamo

$$\sin((n+2)x) + \sin(nx) = 2\sin((n+1)x)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x \, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je potpuno isti oblik kao i za parne funkcije, odnosno za $p_n(x) = \cos(nx)$.

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Rekurzija za B_n ima isti oblik kao prije, samo starta od $N-1$

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$
$$B_n = b_{n+1} + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N-1, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i
$p_1(x) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot \sin x + B_1\big(2\sin x \cos x - 2\cos x \cdot \sin x\big) \\ &= B_0 \sin x. \end{aligned}$$

Algoritam napišite sami.

Razvoj periodičkih funkcija

Za opći Fourierov red koji ima i parni i neparni dio, treba spojiti prethodne algoritme.

Problem. Neparni je za 1 kraći, jer starta s $N - 1$.

Rješenje. Umjetno definiramo $b_0 = 0$ i pišemo

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zatim uzmemo

$$p_n(x) = \sin(nx).$$

Razvoj periodičkih funkcija

Rekurzija za p_n je ista, a za B_n vrijedi “produljena” rekurzija

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 0 + B_1 \big(\sin x - 2\cos x \cdot 0\big) \\ &= B_1 \sin x. \end{aligned}$$

To pokazuje da B_0 uopće ne treba računati, ali baš to i očekujemo, kad smo rekurziju pomakli za jedan indeks naviše!

Fourierov red za $x + |x|$

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x + |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

može se razviti u Fourierov red

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu svih članova do uključivo $\cos(nx)$, odnosno, $\sin(nx)$.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$ i pogrešku $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ za razne n.

Fourierov red za $x + |x|$

Napomena. Fourierov red konvergira prema prekidnoj funkciji

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ 2x, & x \in (0, \pi), \\ \pi, & x = \pi. \end{cases}$$

Ova funkcija je "periodičko" proširenje od f, s tim da ima korektnu vrijednost u točki prekida.

Koeficijente u Fourierovom razvoju možemo računati direktno

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x \cos(kx)\, dx.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Sad razlikujemo dva slučaja $k = 0$ i $k \neq 0$. Za $k = 0$ imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \, dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^\pi = \pi.$$

Za $k \neq 0$ imamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \, \cos(kx) \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 \, dx \\ dv = \cos(kx) \, dx & v = \sin(kx)/k \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{k} \sin(kx) \Big|_0^\pi - \frac{2}{k} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx \right) = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{k^2 \pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2 \pi} \big((-1)^k - 1 \big).$$

Fourierov red za $x + |x|$

Odatle odmah slijedi da je

$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, \qquad a_{2k} = 0.$$

Za b_k, budući da je $k \neq 0$ imamo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2x\,\sin(kx)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \sin(kx)\,dx & v = -\cos(kx)/k \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x}{k}\cos(kx)\,\Big|_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{2}{k^2}\sin(kx)\,\Big|_0^\pi \right) = -\frac{2}{k}(-1)^k.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Posljednji rezultat možemo zapisati i kao

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

Koeficijente u Fourierovom redu mogli smo računati zbrajanjem Fourierovih razvoja funkcija

- x na $[-\pi, \pi]$, (neparna funkcija), pa razvoj ima samo b_n,
- $|x|$ na $[-\pi, \pi]$, (parna funkcija), pa razvoj ima samo a_n.

Fourierov red za $x + |x|$

Za vježbu pokažite da je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$x = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

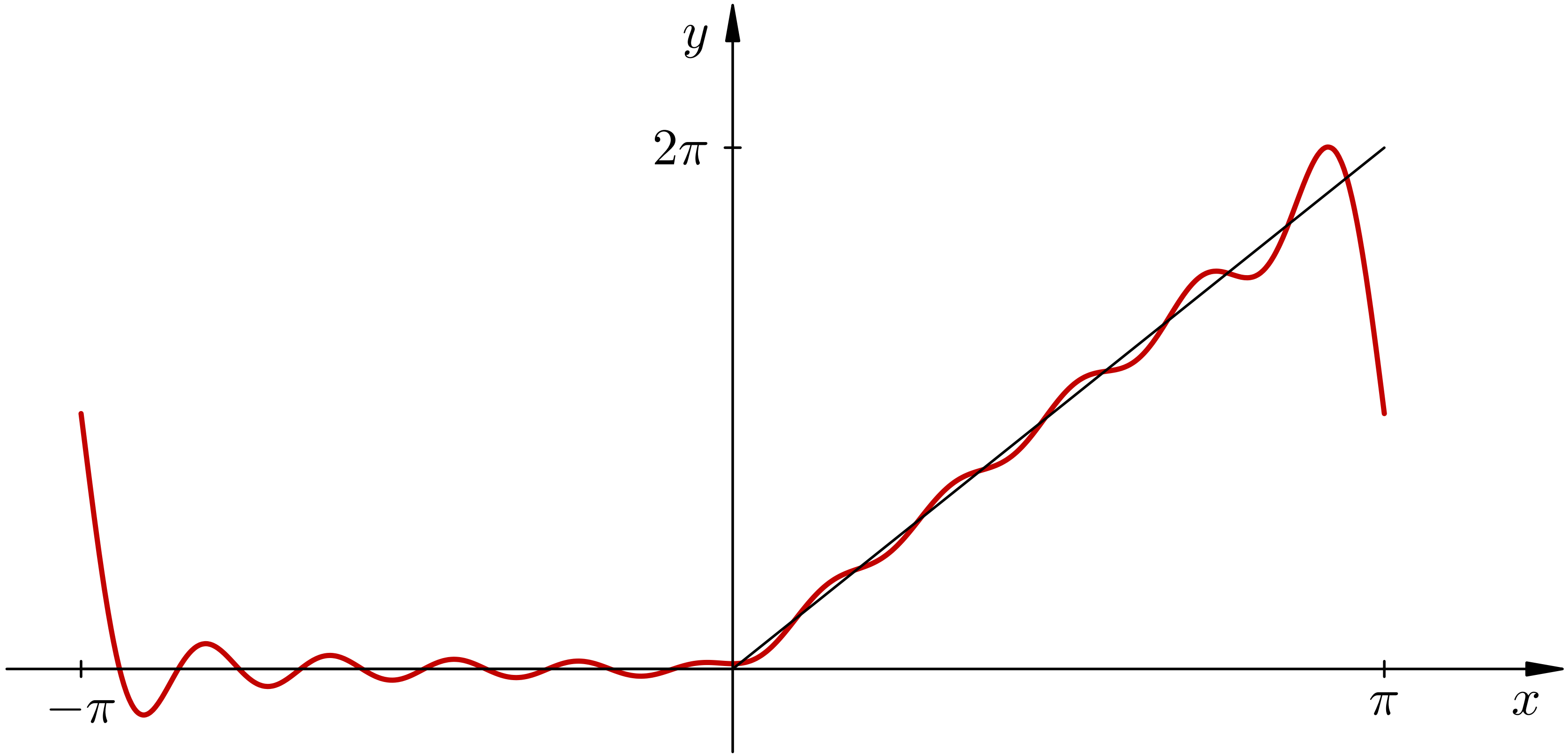
Zbog neprekidnosti periodičkog proširenja za $|x|$,

- koeficijenti a_k u razvoju trnu kao k^{-2}.

Periodičko proširenje za x ima prekid, pa

- koeficijenti b_k u razvoju trnu kao k^{-1}.

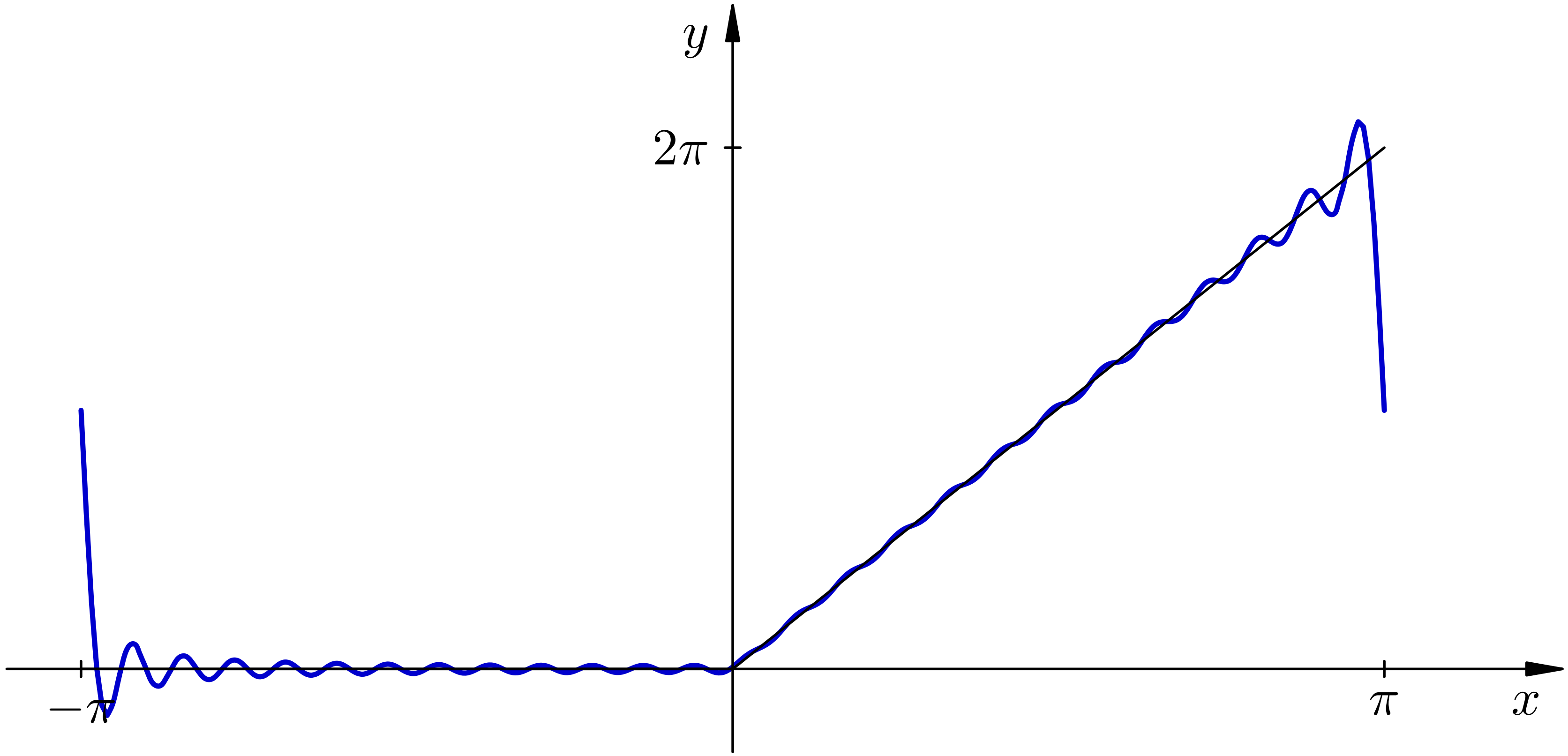
Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Trigonometrijski polinom za $x + |x|$

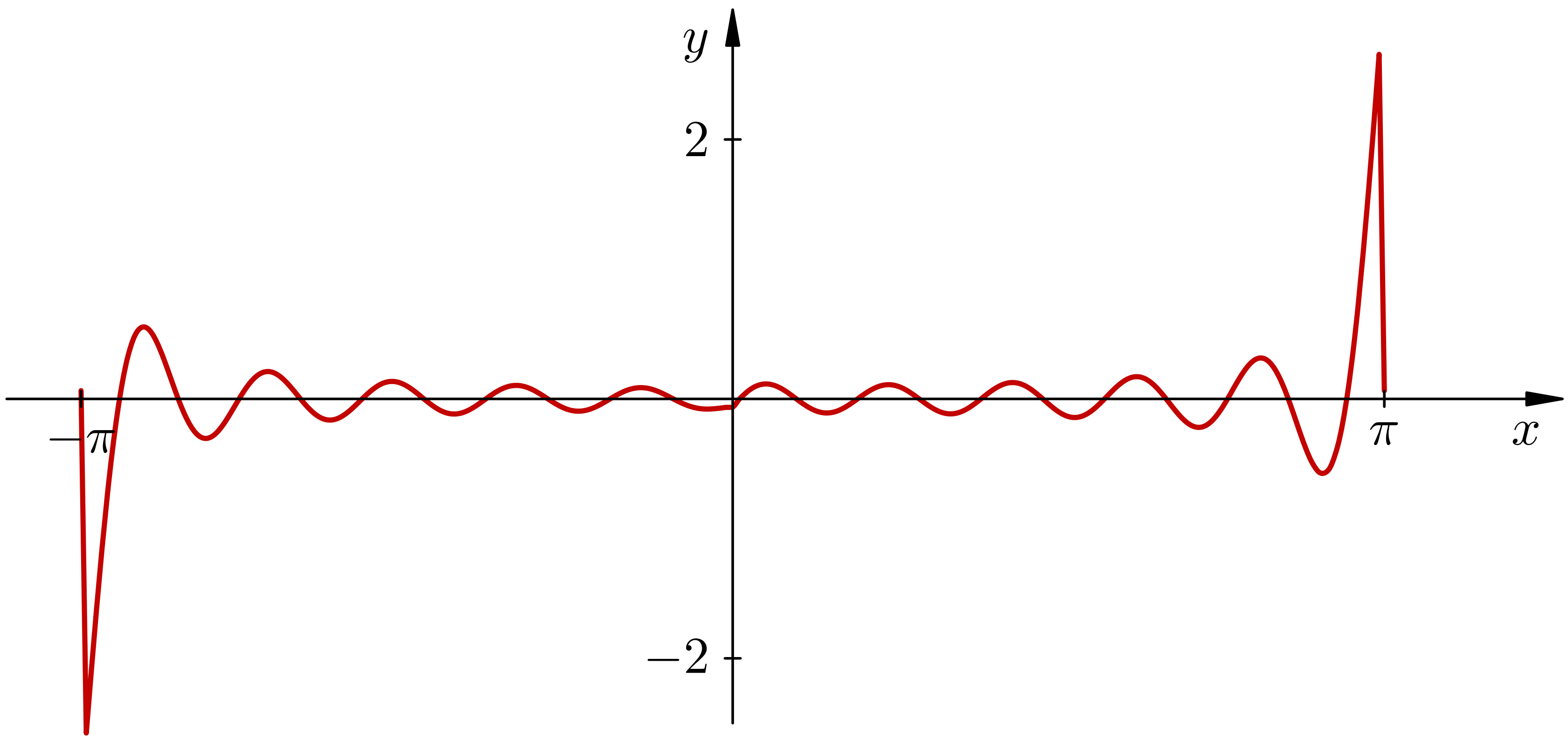
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



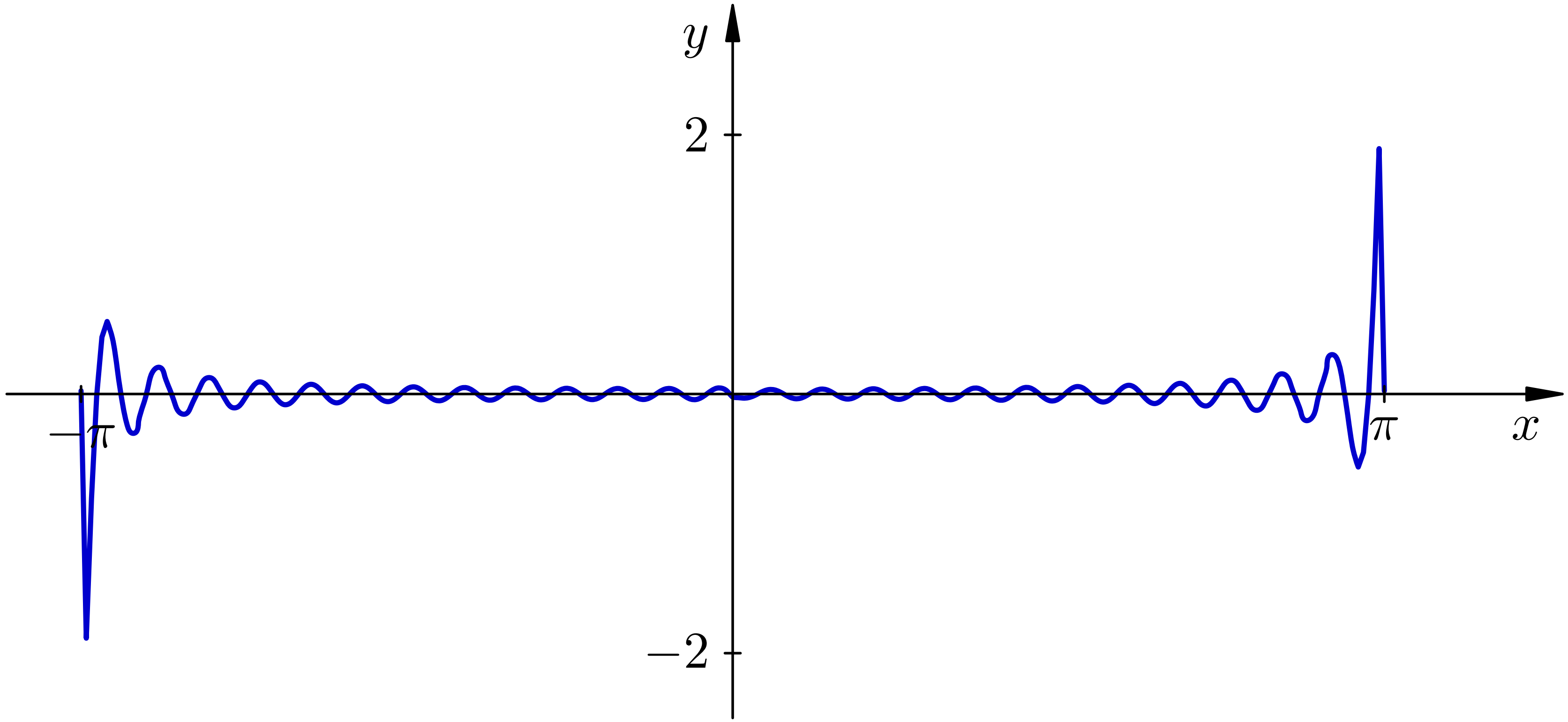
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za trigonometrijske funkcije, također, vrijede relacije diskretne ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome T_n.

Na mreži od $N+1$ točaka $0, 1, \ldots, N$, uz oznake $x_j = j$ i

$$x_{k,j} = \frac{2\pi}{N+1} k x_j, \quad x_{\ell,j} = \frac{2\pi}{N+1} \ell x_j, \quad j = 0, \ldots, N,$$

vrijede sljedeće relacije diskretne ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\sum_{j=0}^{N} \sin x_{k,j} \sin x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \text{ i } k = \ell = 0, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \sin x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = 0,$$

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

$$\sum_{j=0}^{N} \cos x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \\ N+1, & k = \ell = 0, \end{cases}$$

uz uvjet da je $k + \ell \leq N$.

Dokaz ovih relacija ide još malo jednostavnije nego za Čebiševljeve polinome.

- Produkt trigonometrijskih funkcija treba pretvoriti u zbroj ili razliku.
- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume.

Stabilnost rekurzija — primjeri

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Za rekurzije oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1,$$

možemo zaključiti da opasnost od kraćenja, pa onda i gubitak točnosti nastupa kad niz vrijednosti

$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_N(x)$$

naglo pada po apsolutnoj vrijednosti.

Dva su pitanja na koja bi bilo zgodno odgovoriti.

- Kako se tada ponaša silazni algoritam za računanje f_N?
- Može li se nekim trikom, poput okretanja rekurzije, popraviti stabilnost?

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Umjesto općeg odgovora, koji bi koji zahtijevao dublju analizu, ilustrirajmo situaciju na jednom klasičnom primjeru.

Primjer. Neka je $p_n(x) = e^{nx}$. Ove funkcije generiraju tzv. "eksponencijalne polinome" (umjesto x^n, imamo eksponencijalne funkcije e^{nx})

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{nx}.$$

Za takve p_n možemo sastaviti razne rekurzije.

Dvočlana ima oblik

$$p_{n+1}(x) - e^x p_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stabilnost eksponencijalnih polinoma

Tročlana homogena rekurzija je slična onima za trigonometrijske funkcije,

$$p_{n+1}(x) - 2\,\mathrm{ch}\,x\,p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $\mathrm{ch}\,x = (e^x + e^{-x})/2$ kosinus hiperbolni od x. Očito je da $p_n(x)$

- monotono raste za $x > 0$
- monotono pada za $x < 0$.

Testirajmo stabilnost ove rekurzije i pripadne generalizirane Hornerove sheme za računanje $p_n(x) = e^{nx}$ u točkama $x = 1$ i $x = -1$.

- `10_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_p.out` za $x = 1$,
- `10_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_n.out` za $x = -1$.

Općenito o numeričkim integracijskim formulama

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval (može biti i beskonačan). Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- takav se integral može egzaktno izračunati,
- pa jedino preostaje približno, numeričko računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je približno računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- vrijednosti funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom konačnom skupu točaka ($\approx$ Darboux).

Općenito o integracijskim formulama

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m+1$ = broj korištenih točaka (tzv. čvorova integracije),
- $I_m(f)$ = pripadna aproksimacija integrala,
- $E_m(f)$ = pritom napravljena greška.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

pri čemu je m neki unaprijed zadani broj, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Općenito o integracijskim formulama

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se čvorovi integracije, a brojevi $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti, ili samo težine.

U općem slučaju, za fiksni m, moramo odrediti $2m+2$ nepoznatih koeficijenata.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja.

Zbog linearnosti integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx,$$

dovoljno je gledati egzaktnost tih formula na nekoj bazi vektorskog prostora — recimo, na $\{1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su čvorovi fiksirani, recimo ekvidistantni, onda dobivamo Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$, baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednadžbi koji je regularan.
- Pokazat će da se te formule mogu dobiti i kao integrali interpolacijskog polinoma stupnja m za funkciju f na zadanoj (na primjer, ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule — zbroj "po komadima" domene.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Možemo i fiksirati samo neke čvorove, ili dozvoliti da su svi čvorovi “slobodni” (tako da dobijemo što veći stupanj n).

Ako su svi čvorovi slobodni, integracijske formule se zovu formule Gaussovog tipa.

Kod Gaussovih, ali i težinskih Newton–Cotesovih formula, integral, odnosno, podintegralna funkcija se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. težinska funkcija. Ideja je “razdvojiti” podintegralnu funkciju na dva dijela, tako da eventualni singulariteti budu uključeni u w.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Gaussove integracijske formule su egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_{2m+1}$, tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor dvostruko veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove se formule nikad ne računaju "direktno" iz uvjeta egzaktnosti, jer to vodi na nelinearni sustav jednadžbi.
- Pokazat ćemo vezu Gaussovih formula, funkcije w i ortogonalnih polinoma obzirom na w na intervalu $[a, b]$.
  - To omogućava efikasno računanje svih parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule nema puno smisla tražiti produljene formule.

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste dva tipa Newton–Cotesovih formula:

- zatvorene formule — rubovi intervala a i b su čvorovi,
- otvorene formule — rubovi intervala a i b nisu čvorovi.

Katkad se koriste i

- poluotvorene formule — jedan od rubova, a ili b, je čvor, a drugi nije.

Primjena je u integraciji diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom.

Za početak, uzimamo standardnu težinsku funkciju $w(x) = 1$ (najčešće u praksi za Newton–Cotesove formule).

Zatvorene Newton–Cotesove formule

Za zatvorenu (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m+1$ točaka, $[a,b]$ podijelimo na m podintervala. Čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + kh_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m},$$

pa je osnovni oblik zatvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + kh_m).$$

Ova suma ide po svim točkama, uključivo i rubove intervala.

Otvorene Newton–Cotesove formule

Da bismo dobili otvorene Newton–Cotesove formule s $m+1$ točaka, definiramo

$$x_{-1}^{(m)} := a, \quad x_{m+1}^{(m)} := b.$$

Interval $[a,b]$ podijelimo na $m+2$ podintervala, a čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + (k+1)h_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m+2},$$

pa je osnovni oblik otvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + (k+1)h_m).$$

Ova suma ide samo po "unutarnjim" točkama.

Osnovna trapezna formula

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$, zove se trapezna formula. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b - a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m, promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,

- tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za točno određenu formulu (fiksni m).
- Dogovor: ako znamo za koji red formule m računamo, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula

Dakle, osnovna trapezna formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći težinske koeficijente w_0 i w_1, tako da

- integracijska formula egzaktno integrira bazu $\{1, x, \ldots\}$ vektorskog prostora polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja.

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k\,dx, \quad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \ldots$.

Osnovna trapezna formula

Vrijedi

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

- Za $k = 0$, tj. za $f(x) = 1 = x^0$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0\,dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednadžba nije dovoljna za određivanje dva nepoznata parametra, pa zahtijevamo egzaktnost i na polinomima stupnja 1.

Osnovna trapezna formula

- Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x\,dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= b - a \\ aw_0 + bw_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $-a$ i dodavanjem drugoj, izlazi

$$(b-a)w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b-a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula

Budući da je $a \neq b$, dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2}\,(b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednadžbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2}\,(b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,\big(f(a) + f(b)\big).$$

Zadatak. Ponovite izvod na "simetričnoj" bazi $1, x - (a + b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime trapeznoj formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a),$$

vidimo da je

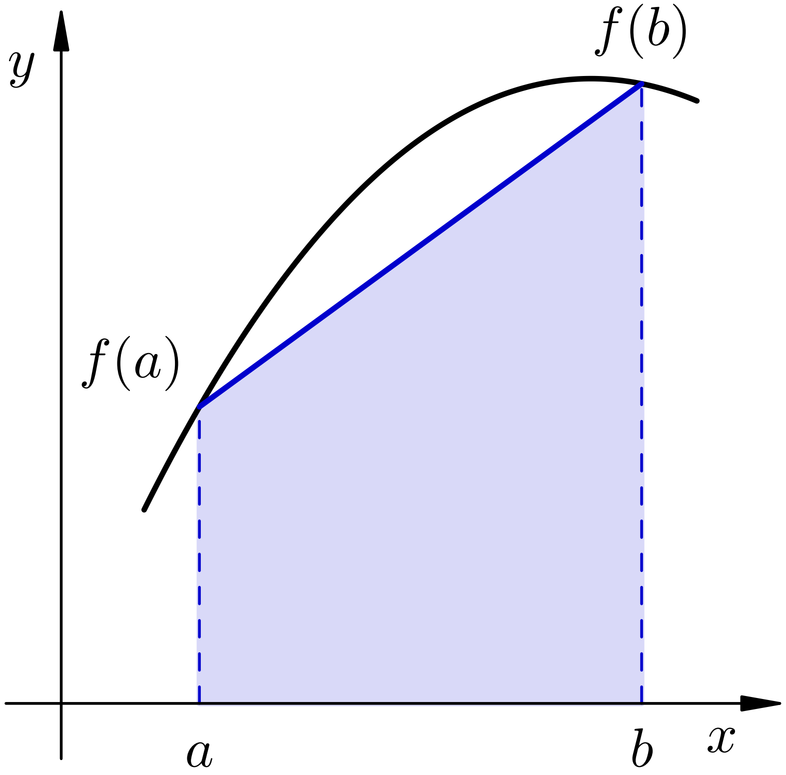
- $(f(a)+f(b))/2 =$ srednjica trapeza (stoji okomito), a
- $b-a =$ visina trapeza (leži vodoravno, kao "širina"),

za trapez na slici — sljedeća folija.

Drugim riječima, površinu ispod krivulje zamijenili smo (tj. aproksimirali) površinom trapeza.

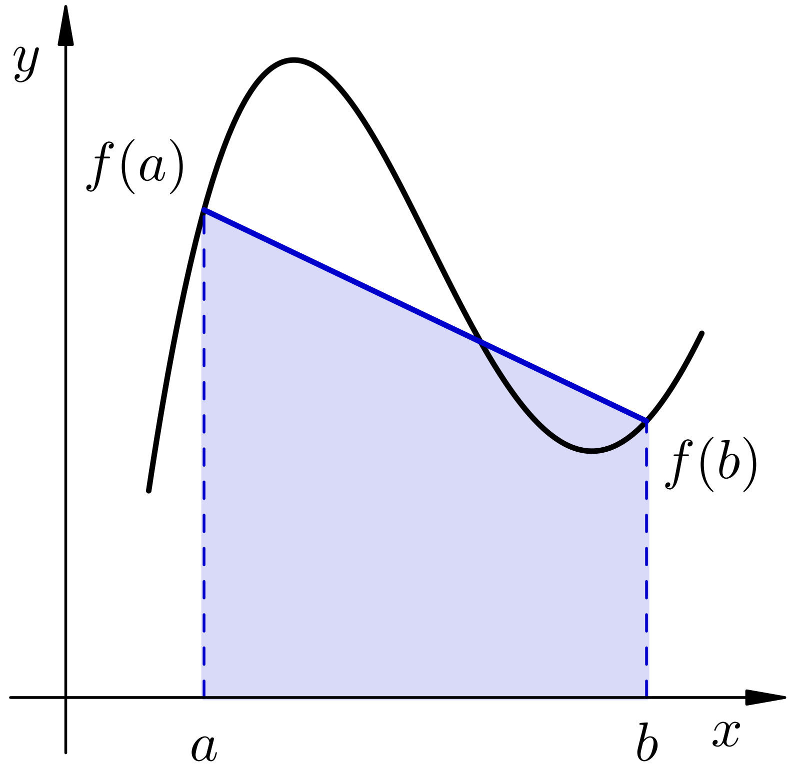
Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije integrala funkcije f površinom trapeza.



Zašto baš trapezna formula?

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo izveli iz uvjeta egzaktnosti prostoru polinoma $\mathcal{P}_1$ stupnja 1.

- Zato formula egzaktno integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona neće egzaktno integrirati sve polinome stupnja 2, jer ne integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\,dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2}\,(b - a).$$

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Povučemo li kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f,
- a zatim ga egzaktno integriramo,

dobivamo opet trapeznu formulu (dokaz je na sljedećoj foliji).

Dakle, vidimo da vrijedi

$$\text{aproksimacija integrala} = \text{integral aproksimacije} \\ \text{(interpolacije)}.$$

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule! Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski pravac za funkciju f koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ je

$$p_1(x) = f(a) + f[a,b]\,(x-a).$$

Njegov integral na $[a,b]$ je

$$\begin{aligned}\int_a^b p_1(x)\,dx &= \left(f(a)x - a\,f[a,b]x + f[a,b]\,\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_a^b \\ &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f[a,b] \\ &= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao integral greške interpolacijskog polinoma.

Neka je funkcija $f \in C^2[a, b]$.

- Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1 koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ na intervalu $[a, b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - a)\,(x - b)\,\frac{f''(\xi)}{2}.$$

- Greška trapezne formule je

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x)\,dx = \int_a^b (x - a)\,(x - b)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem (Teorem srednje vrijednosti za integrale). Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b w(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b w(x)\,dx.$$

Napomena. Za $w(x) = 1$, ovo ste sigurno već vidjeli!

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x),$$

pa integriranjem izlazi traženo (monotonost integrala). ■

Teorem (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama). Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ, takav da je $m \leq \mu \leq M$ i vrijedi

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b w(x)\,dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a,b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a,b]$ takav da je

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = g(\zeta) \int_a^b w(x)\,dx.$$

Napomena. I ovo znate za $w(x) = 1$, tj. za $\int_a^b w(x)\,dx = b - a$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x)\,dx = 0,$$

onda je, po teoremu srednje vrijednosti za integrale, i

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj

$$\int_a^b w(x)\,dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema srednje vrijednosti za integrale, dijeljenjem dobivamo

$$m \leq \mu \leq M, \quad \text{za} \quad \mu := \frac{\int\limits_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b w(x)\,dx}.$$

Zaključak o neprekidnom g slijedi iz

- činjenice da neprekidna funkcija na segmentu postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma, pa mora postići i μ (neprekidna slika segmenta je segment).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a,b]$ takav da je $\mu = g(\zeta)$. $\blacksquare$

Greška trapezne formule

Iskoristimo teoreme srednje vrijednosti za računanje greške trapezne formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,dx,$$

gdje je $(x-a)\,(x-b)$ polinom čvorova pripadne interpolacije.

Pritom je

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{2} \leq 0 \quad \text{na} \quad [a,b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}, \qquad g(x) = -f''(\xi).$$

Greška trapezne formule

Ako je $f \in C^2[a,b]$, onda da je $f'' \in C[a,b]$. Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, vrijedi da je

$$E_1(f) = -f''(\zeta) \int_a^b -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\,dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\int_a^b -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\,dx = \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{h^3}{12},$$

pa postoji $\zeta \in [a,b]$ za koji je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$

Osnovna Simpsonova formula

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo sljedeću (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$, poznatu pod imenom Simpsonova formula. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b - a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1 \, f\left(\frac{a + b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula

Imamo tri nepoznata parametra, pa moramo postaviti najmanje tri uvjeta za egzaktnost formule na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

- Za $f(x) = 1$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$

- Za $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \, \frac{a+b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula

- Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\, dx = w_0 \cdot a^2 + w_1 \frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice

$$w_0 + w_1 + w_2 = b - a$$

$$a w_0 + \frac{a+b}{2} w_1 + b w_2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$a^2 w_0 + \frac{(a+b)^2}{4} w_1 + b^2 w_2 = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Osnovna Simpsonova formula

Rješavanjem ovog sustava (izračunajte sami!), dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz egzaktnosti na svim polinomima stupnja manjeg ili jednakog 2, i glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zadatak. Ponovite izvod na “simetričnoj” bazi potencija

$$1, \quad x - \frac{a+b}{2}, \quad \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2,

- egzaktno integrira i sve polinome stupnja 3. Dovoljno je pokazati da egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

$$I_2(x^3) = \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula interpolacijska.

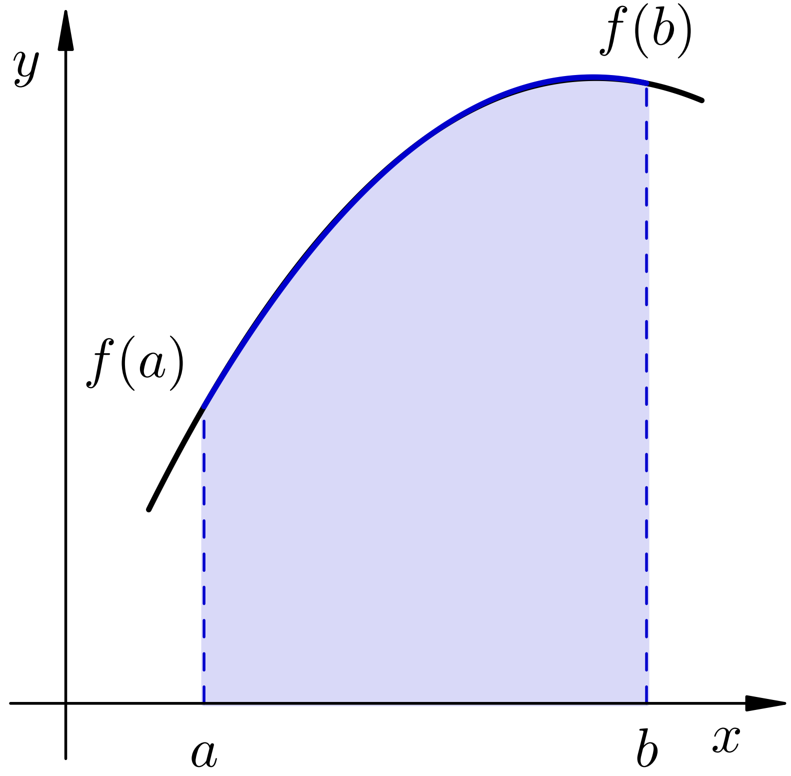
Ako povučemo kvadratni interpolacijski polinom kroz 3 točke

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \quad (b, f(b)),$$

a zatim ga egzaktno integriramo od a do b, dobivamo upravo Simpsonovu formulu.

Točnost Simpsonove formule

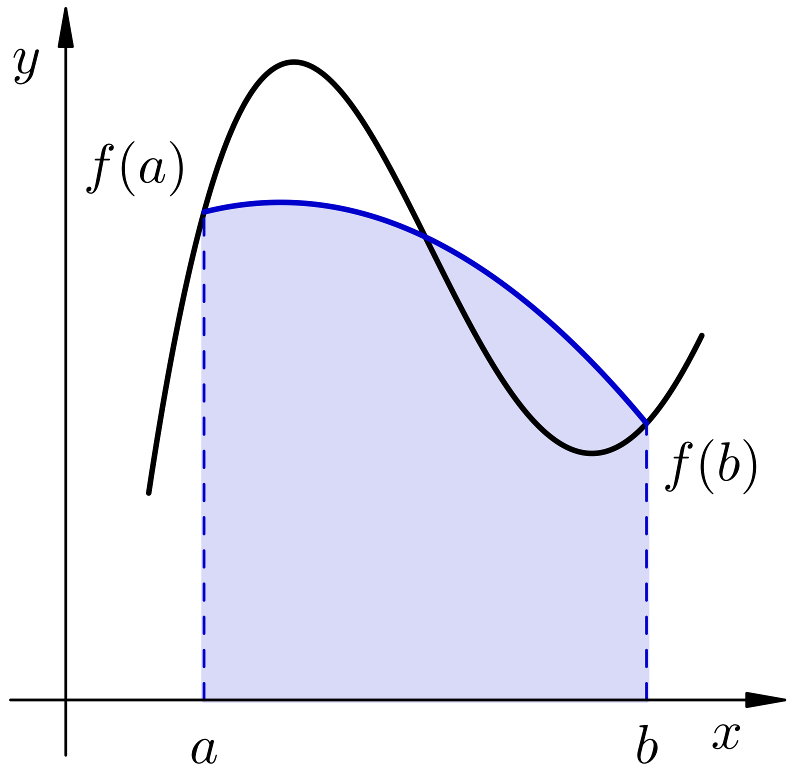
Ilustrirajmo kako Simpsonova formula funkcionira na integralu kojeg smo aproksimirali trapeznom formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala vrlo dobra.

Točnost Simpsonove formule

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija ne mora biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, integracijom greške kvadratnog interpolacijskog polinoma

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Za grešku Simpsonove formule vrijedi

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x)\,dx.$$

Nažalost, polinom čvorova

$$\omega(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

nije fiksnog znaka na $[a, b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti.

Greška Simpsonove formule

Pretpostavimo da je $f \in C^4[a,b]$. Označimo, za kraći zapis,

$$c := \frac{a+b}{2}$$

i definiramo $w(x)$ kao integral polinoma čvorova od a do x

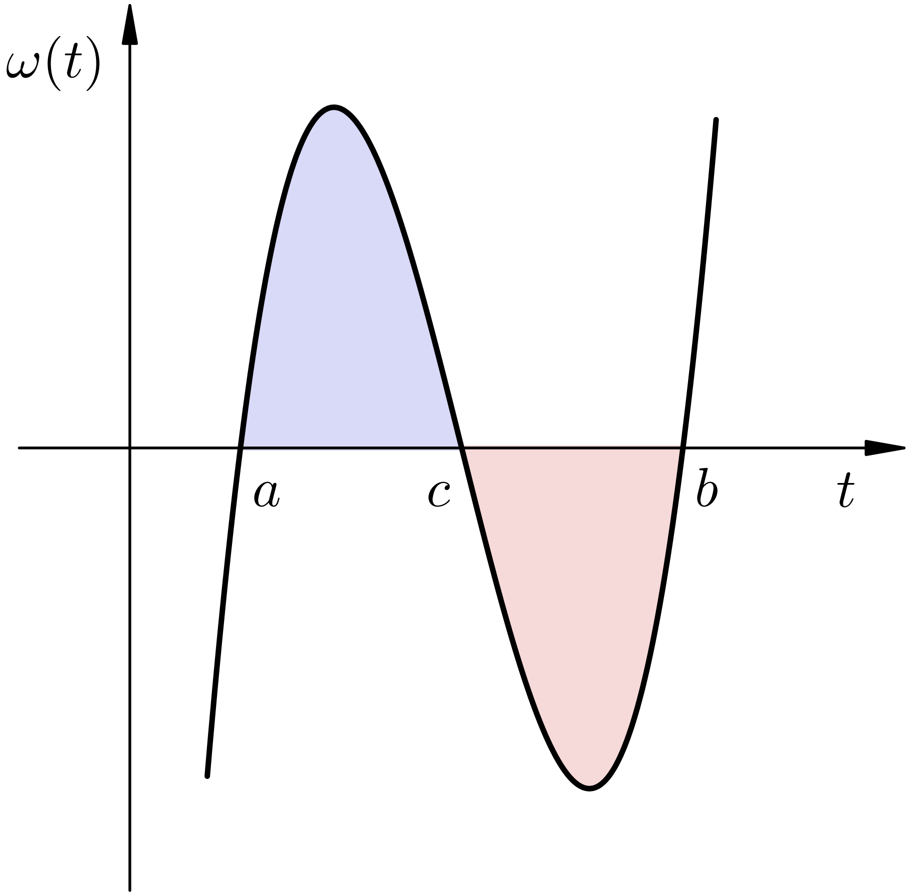
$$w(x) = \int_a^x \omega(t)\,dt = \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a,b).$$

Skiciramo li graf polinoma čvorova $\omega(t) = (t-a)(t-c)(t-b)$, odmah vidimo da je taj graf centralno simetričan oko srednje točke c, pa zaključujemo ...

Greška Simpsonove formule



da će integral rasti od 0 do svog maksimuma (plava površina), a zatim padati (kad dođe u crveno područje) upravo do 0.

Greška Simpsonove formule

Ostaje samo još napisati grešku interpolacijskog polinoma kao podijeljenu razliku. Za $n = 3$ vrijedi

$$f[a,b,c,x] = \frac{f'''(\xi)}{6},$$

pa grešku Simpsonove formule možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b \underbrace{w'(x)}_{\omega(x)} f[a,b,c,x]\, dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x)\, f[a,b,c,x] \Big|_a^b - \int_a^b w(x)\, \frac{d}{dx} f[a,b,c,x]\, dx.$$

Greška Simpsonove formule

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Ostaje još "srediti" drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s dvostrukim čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Na sličan je način derivacija treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x, isto što i
- četvrta podijeljena razlika s dvostrukim čvorom x.

Prema tome, dobivamo formulu za grešku u obliku

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x)\, f[a, b, c, x, x]\, dx.$$

Greška Simpsonove formule

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a, b, c, \eta, \eta] \int\limits_a^b w(x)\, dx,$$

gdje je $a \leq \eta \leq b$.

Napišemo $f[a, b, c, \eta, \eta]$ kao četvrtu derivaciju od f u nekoj točki ζ, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int\limits_a^b w(x)\, dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w.

Greška Simpsonove formule

Za funkciju w vrijedi

$$w(x) = \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt$$

$$= (\text{zamjena varijable } y = t - c)$$

$$= \int_{-h}^{x-c} (y-h)y(y+h)\,dy = \int_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2 y)\,dy$$

$$= \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-h}^{x-c} = \frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}.$$

Greška Simpsonove formule

Za integral funkcije w onda dobivamo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b w(x)\,dx &= \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2 \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dx \\
&= (\text{zamjena varijable } y = x - c) \\
&= \int_{-h}^{h} \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dy \\
&= \left(\frac{y^5}{20} - h^2 \frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4} \right) \Bigg|_{-h}^{h} = 2 \left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4} \right) \\
&= \frac{4}{15}\, h^5.
\end{aligned}
$$

Greška Simpsonove formule

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15}\,h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja, no što bi po upotrijebljenom interpolacijskom polinomu trebala biti.

Razlog tome je centralna simetrija polinoma čvorova ω oko srednje točke, pa je $w(a) = w(b) = 0$. To vrijedi za sve integracijske formule s neparnim brojem čvorova $m+1$, uz uvjet da su čvorovi simetrični oko polovišta intervala.

Osnovna formula srednje točke

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo otvorenu Newton–Cotesovu formulu za $m = 0$, poznatu pod imenom formula srednje točke, ili pod engleskim nazivom "midpoint" formula.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$ takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke

- Za $f(x) = 1$, imamo

$$b - a = \int_a^b 1\,dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

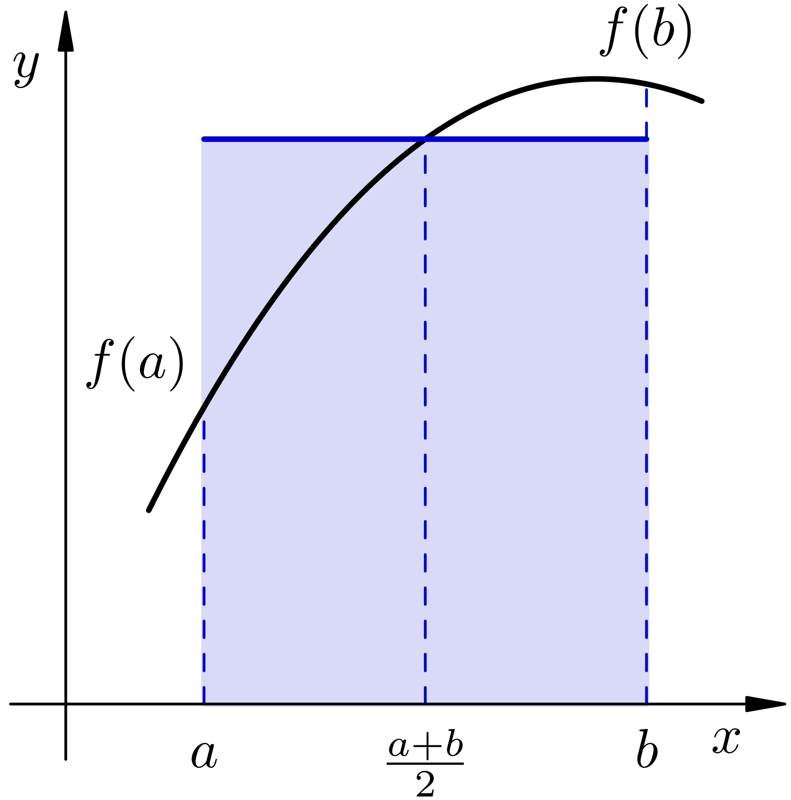
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I ova formula je interpolacijska, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f interpoliramo polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u srednjoj točki $(a+b)/2$,
- a onda egzaktno integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

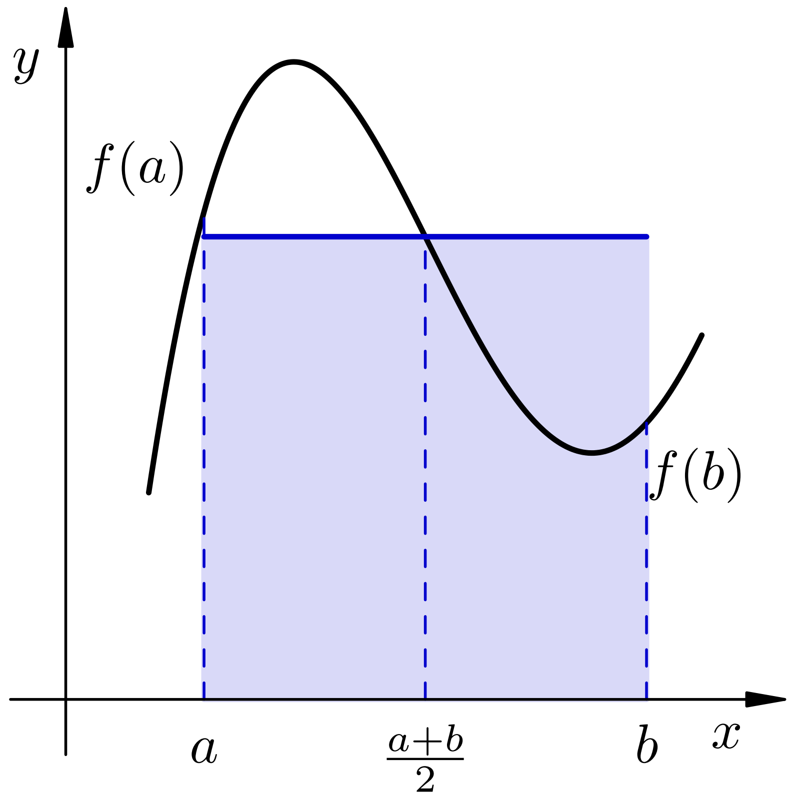
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija integrala funkcije f površinom pravokutnika.



Pravokutna formula u srednjoj točki

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke egzaktno integrira i polinome stupnja za jedan većeg — sljedećeg neparnog stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke egzaktno integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b - a)\,\frac{a+b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška te integracijske formule je integral greške interpolacijskog polinoma stupnja 0 (konstante), koji f interpolira u srednjoj točki $c := (a + b)/2$.

Ako definiramo $w(x)$ kao integral polinoma čvorova $\omega(t)$

$$w(x) = \int_a^x \omega(t)\,dt = \int_a^x (t - c)\,dt,$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je greška formule srednje točke

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x)\,dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\zeta).$$

Formula srednje točke i trapezna formula

Napomena. Za istu duljinu intervala $b - a$,

- formula srednje točke, iako ima samo jednu točku,
- približno je dva puta točnija
- od trapezne formule, koja ima dvije točke.

Greška prve formule ima 24 u nazivniku, a greška druge 12.

Trapeznu formulu možemo dobiti iz formule srednje točke

- linearnom interpolacijom funkcije u srednjoj točki, preko funkcijskih vrijednosti u rubovima intervala

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big).$$

To unosi dodatnu pogrešku — istog reda veličine kao i u originalnoj formuli (zato dodatni faktor 2). Dokažite to!

Teorija integracijskih formula

Interpolacijske formule

Nije teško pokazati da su sve Newton–Cotesove formule integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Ovaj rezultat vrijedi i općenitije — za bilo kakvu težinsku integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

na bilo kojoj (zadanoj) mreži čvorova $x_0^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}$.

Napomena. Zbog jednostavnosti pisanja, ponovno ispuštamo gornje indekse m.

Interpolacijske formule

Definicija. Za integracijsku formulu reći ćemo da ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) d ako je

$$E_m(f) = 0 \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je $\mathcal{P}_d$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d. (Uočiti da d nije jednoznačno definiran kao najveći stupanj egzaktnosti!)

Za formulu ćemo reći da je interpolacijska ako je $d = m$. ■

Preciznije, trebalo bi reći $d \geq m$, tj. stupanj egzaktnosti je barem m, a može biti i veći. Bitno je samo da je

$$E_m(f) = 0 \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_m.$$

Interpolacijske formule

Teorem. Integracijska formula

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \qquad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

ima stupanj egzaktnosti (barem) m, ako i samo ako je to

- integral interpolacijskog polinoma za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$,

odnosno, ako i samo ako za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx, \qquad k = 0, \ldots, m,$$

gdje je ℓ_k k-ti polinom Lagrangeove baze, za $k = 0, \ldots, m$.

Interpolacijske formule

Dokaz.

1. smjer — pretpostavimo da vrijedi formula za w_k.

Onda je $I_m(\ell_k) = w_k = I(\ell_k)$, tj. formula I_m egzaktno integrira bazu $\{\ell_k\}$ vektorskog prostora $\mathcal{P}_m$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog m, pa onda i sve polinome iz $\mathcal{P}_m$. Nadalje,

$$\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx$$

$$= \int_a^b w(x)\left(\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\ell_k(x)\right) dx = \int_a^b w(x)p_m(x)\,dx,$$

pa je integracijska formula integral interpolacijskog polinoma p_m za funkciju f.

Interpolacijske formule

2. smjer

Ako integracijska formula ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) m, onda za funkciju f možemo staviti polinome Lagrangeove baze ℓ_r, za $r = 0, \ldots, m$, pa mora vrijediti

$$\int_a^b w(x)\ell_r(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k \ell_r(x_k) = w_r, \quad r = 0, \ldots, m.$$

Korolar. Newton–Cotesove formule su integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži na $[a, b]$.

Prethodni korolar kaže još i ovo: ako interpolacijski polinomi loše aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule neće biti ništa bolje!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Primjer. Pokažimo na primjeru Runge kako se ponašaju aproksimacije integrala $I_m(f)$ ako dižemo red formule m. Prava vrijednost integrala je

$$\int_{-5}^{5} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 5 \approx 2.7468015338900317 2.$$

Tablice na sljedećim stranicama su aproksimacije integrala izračunate Newton–Cotesovim formulama raznih redova i pripadne greške.

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.38461538461538462	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	−4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	−1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	−0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	−1.92649902176346704

Zelene znamenke u aproksimaciji su točne, ostale nisu!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.2447729402785852\u0035	−0.49797140638855353
12	−0.3129365157534388\u0039	3.0597380496434706\u0031
13	1.9197972168323889\u0031	0.8270043170576428\u0032
14	7.8995446408519308\u0032	−5.1527431069618990\u0039
15	4.1555589927065571\u0033	−1.4087574588165254\u0031
16	−6.2414373147730832\u0039	8.9882388486631150\u0031
17	0.2605094414376037\u0032	2.4862920924524280\u0030
18	18.8766212901092067\u0030	−16.1298197562191749\u0030
19	7.2460260858819693\u0036	−4.4992245519919376\u0033
20	−26.8495520888244796\u0030	29.5963536227145114\u0030

Očito je da aproksimacije ne konvergiraju prema pravoj vrijednosti integrala.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red m zatvorene Newton–Cotesove formule, za $m \geq 1$.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k:

- dovoljno je napisati samo w_k, za $0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil$,
- a za $\lceil m/2 \rceil < k \leq m$ vrijedi $w_k = w_{m-k}$.

Radi preglednosti tablice, težinski koeficijenti w_k zapisani su kao zajednički faktor A, pomnožen s W_k, tj. u obliku

$$w_k = A\, W_k\, h, \quad h = (b-a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k\, h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m+1, & \text{za } m \text{ neparan}, \\ k = m+2, & \text{za } m \text{ paran}. \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_k	$k+1$
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$	2
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$	4
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$	4
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$	6
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$	6
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$	8
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$	8
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$	10

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red m otvorene Newton–Cotesove formule, za $m \geq 0$.

Slično kao kod zatvorenih formula, zbog simetrije, u tablici je naveden samo dio težinskih koeficijenata w_k.

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k\, h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m+2, & \text{za } m \text{ paran}, \\ k = m+1, & \text{za } m \text{ neparan}. \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	C_k	$k+1$
0	2	1			$\frac{1}{3}$	2
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$	2
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$	4
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$	4
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$	4

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama za veće m

- poprimaju i pozitivne i negativne znakove,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog kraćenja može doći do velike greške u rezultatu.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Zadatak. Pokažite da težinski koeficijenti Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m, onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \le k \le \lceil m/2 \rceil \quad (\text{može i do } m).$$

Uputa. Uzeti "simetričnu" (par–nepar) bazu potencija oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k, \quad k = 0, \ldots, m,$$

i napisati jednadžbe egzaktne integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Alternativa: Zbog ekvidistantnosti i simetrije čvorova, Lagrangeova baza ℓ_k, za $k = 0, \ldots, m$, mora biti "simetrična" oko polovišta intervala, pa zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x)\, dx, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Isti zaključak vrijedi i za težinske Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

uz pretpostavku da je težinska funkcija w parna oko polovišta intervala.

Produljene Newton–Cotesove formule

Produljene formule

Umjesto dizanja reda m formule, bolje je

- interval $[a, b]$ podijeliti na n podintervala,
- na svakom podintervalu primijeniti osnovnu formulu,
- a rezultate zbrojiti.

Tako dobivene formule zovemo produljene formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se osnovna formula izvodi za odgovarajući broj podintervala.

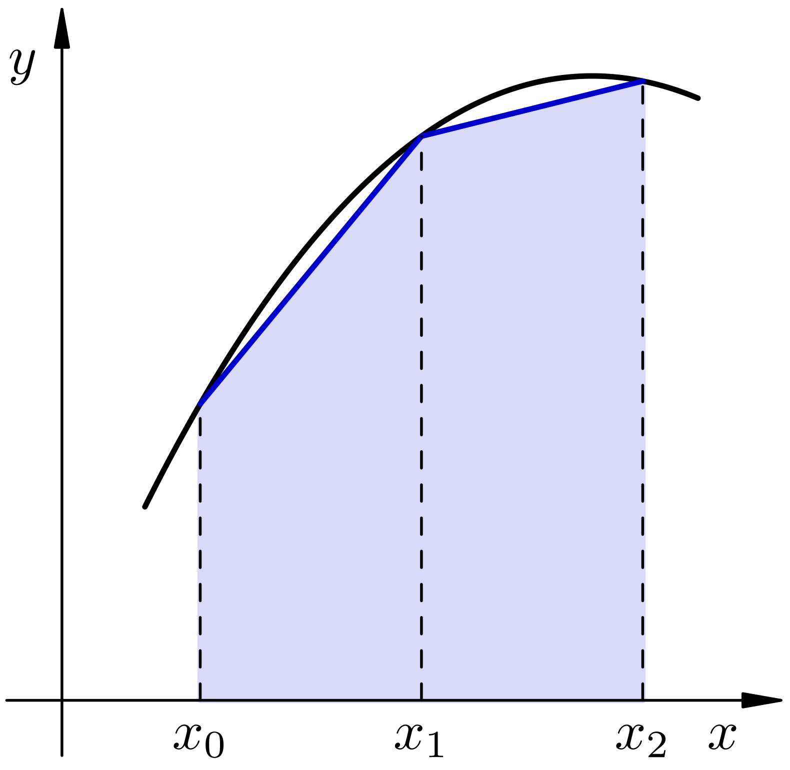
- Na primjer, osnovna Simpsonova formula zahtijeva 2 podintervala, pa n mora biti paran.

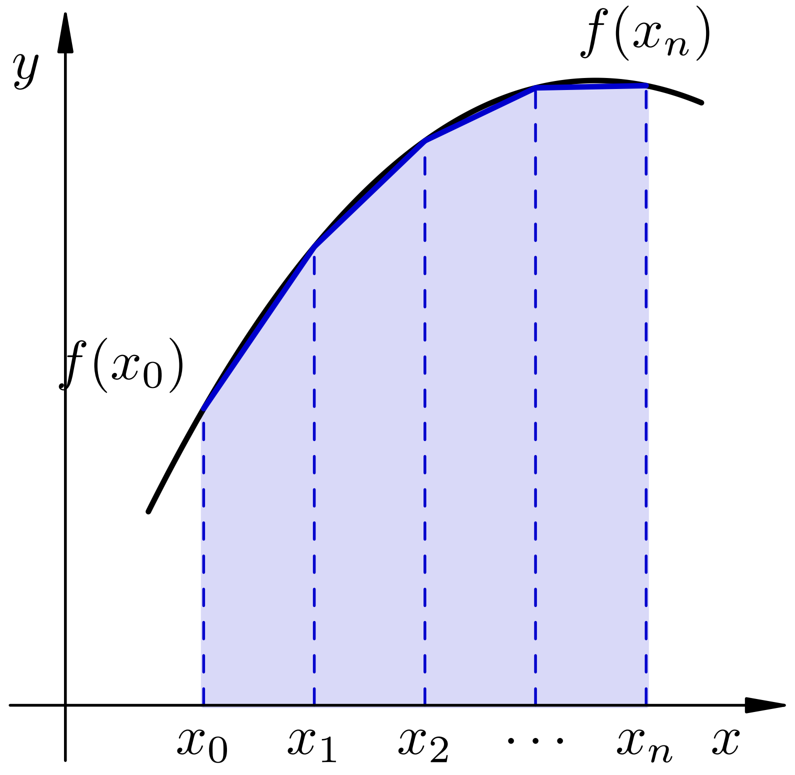
Produljenu formulu možemo interpretirati i kao integral

- odgovarajućeg interpolacijskog splajna za funkciju f.

Produljene formule

Na primjer, produljene trapezne formule s 2 i $n = 4$ podintervala izgledaju ovako.





Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,

- iskoristimo "običnu" trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije zbrojimo u produljenu trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h. To znači da je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_{k-1} + f_k\big) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula

Znamo da za greške vrijedi

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{2} \big(f_{k-1} + f_k\big) + E_{1,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{2} \big((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n)\big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena trapezna formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\big) + E_n^T(f),$$

U ovoj formuli

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapeznih formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška ovako napisana nije naročito korisna, pa je treba napisati u drugačijem obliku

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k.
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Budući da je f'' neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule

Dakle, postoji točka $\xi \in [a,b]$ takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k).$$

Stoga formulu za grešku možemo pisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n potreban da se postigne neka zadana točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

odnosno,

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula, koja mora imati paran broj podintervala. Ograničimo se samo na ekvidistantni slučaj. Imamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula

Obična Simpsonova formula na svakom pojedinom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Produljena Simpsonova formula

Zbrajanjem dobivamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3} \big(f_{2k-2} + 4 f_{2k-1} + f_{2k} \big) + E_{2,k}(f) \right)$$

$$= \frac{h}{3} \big((f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots$$

$$+ (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \big)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).$$

Produljena Simpsonova formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots \\ + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Ponovno, grešku je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Sličnim zaključivanjem kao kod trapezne formule, izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \qquad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

odnosno, da je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli produljenu formulu srednje točke, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n paran broj.

U ekvidistantnom slučaju

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n,$$

aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = 2h\,f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$I_n(f) = 2h\big(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}\big) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right)$$

$$= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a, b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \qquad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti paran.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se produljena formula srednje točke piše s "polovičnim" indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom obične formule srednje točke

- na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,
- s tim da n više ne mora biti paran,

tj., isto kao kod produljene trapezne formule.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovaj h odgovara ranijem $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \ldots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = h f_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h\bigl(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}\bigr) + E_n^M(f),$$

a greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right)$$

$$= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a,b]$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako.