

Numerička matematika

11. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Numerička integracija (nastavak):
 - Produljena trapezna formula za trigonometrijske polinome.
 - Ekstrapolacija i Rombergov algoritam.
 - Primjeri za Rombergov algoritam.
 - Integracijske formule visokog stupnja egzaktnosti.
 - Gauss–Christoffel formule.
 - Gauss–Radau formule.
 - Gauss–Lobatto formule.
 - Primjer za težinske Newton–Cotesove i Gaussove formule.

Informacije — dodatna nastava (predavanja)

Dvije teme **ne stignemo** obraditi na redovitim predavanjima:

- Rombergov algoritam,
- Računanje Gaussovih integracijskih formula.

Napomena. Obje teme **nisu bitne** za drugi kolokvij!

Svaka treba oko **jedan** sat predavanja. Imamo slobodan termin

- ovdje u (101), točno **ispred** predavanja,
- na pr., od **9:15** do **10** sati, sljedeća **dva** puta (**13.** i **20. 5.**).

Ako **ima zainteresiranih** da to čuju u **ovim** terminima,

- drage volje to ispričam kao “dodatak”.

Da vidimo ... **Tko je spreman doći sat ranije?**

Informacije

Konzultacije (službeno):

- 🕒 samo za **NM**: **ponedjeljak u 13 sati** (iza predavanja),
- 🕒 **petak, 12–14 sati**, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “**žive**” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije — kolokviji, rok za zadaće

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu **A2**.

● **Drugi** kolokvij: **ponedjeljak**, **27. 5. 2013.**, u **12** sati.

● **Popravni** kolokvij: **ponedjeljak**, **10. 6. 2013.**, u **12** sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

Rok za predaju zadaća je

● dan **drugog** kolokvija, do **početka** kolokvija.

Aplikacija se tada “zatvara za javnost” — bodovi su **konačni**.

Informacije

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna **predavanja** od prošlih **5** godina, a stizat će i **nova** (kako nastaju).

Skraćena verzija **skripte** — **1. dio** (prvih **7** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija **skripte** — **2. dio** (drugih **6** tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima dva demonstratora:

- Mario Berljafa

- termini: utorak, 9–10 i petak, 12–13.

- e-mail: mberljaf@student.math.hr

- Marin Bužančić

- termin: utorak, 16–18.

- e-mail: buzancic@student.math.hr

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom bar dan ranije!

- Sastanak za demonstrature je pred oglasnom pločom (bar zasad).

Produljena trapezna formula za periodičke funkcije

Prednosti produljene trapezne metode

Iako produljena **trapezna** metoda **egzaktno** integrira samo polinome stupnja 1 (odnosno, linearne splajnove), ona “puno bolje” integrira **trigonometrijske**, odnosno, **periodičke funkcije**.

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je $[a, b]$ interval $[0, 2\pi]$ i neka je \mathcal{T}_N familija trigonometrijskih funkcija (“polinoma”)

$$\mathcal{T}_N[0, 2\pi] = \left\{ f \mid f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\}.$$

Tvrdnja. Neka je $E_n^T(f)$ greška **produljene** trapezne formule s n podintervala za funkciju f . Tada vrijedi

$$E_n^T(f) = 0 \quad \text{za svaki} \quad f \in \mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi],$$

tj. imamo **egzaktnu** integraciju na prostoru $\mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi]$.

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Dokaz. Provjeru je najlakše napraviti korištenjem kompleksne eksponencijalne funkcije

$$e_k(x) := e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Greška **produljene trapezne formule** za funkciju e_k je prava vrijednost integrala **minus** aproksimacija po trapeznoj formuli

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e_k(x) dx - \frac{\pi}{n} \left(e_k(0) + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} e_k\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + e_k(2\pi) \right) \\ &= (\text{periodičnost}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n}. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Kad je $k = 0$, onda je

$$E_n^T(e_0) = \int_0^{2\pi} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = x \Big|_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Kad je $k > 0$, imamo

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n} \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} = 0 \right\} = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (e^{2\pi ki/n})^\ell. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Ako $n|k$, tj. ako je $k = 0 \pmod{n}$, onda je $e^{2\pi ki/n} = 1$, pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = -2\pi.$$

Ako $n \nmid k$, tj. ako je $k \neq 0 \pmod{n}$, onda je $e^{2\pi ki/n} \neq 1$, pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (e^{2\pi ki/n})^\ell = (\text{geometrijski red})$$

$$= -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - e^{2\pi kin/n}}{1 - e^{2\pi ki/n}} = -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi ki/n}} = 0.$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Zaključujemo da je

$$E_n^T(e_k) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Uzimanjem **realnog** i **imaginarnog** dijela dobivamo

$$E_n^T(\cos(kx)) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}, \end{cases}$$

$$E_n^T(\sin(kx)) = 0.$$

Posebno, iz prve relacije odmah **slijedi** da je

$$E_n^T(e_k) = 0 \quad \text{za } k = 0, \dots, n-1. \quad \blacksquare$$

Integral Fourierovog reda

Neka je f periodička funkcija s periodom 2π , koja ima **uniformno konvergentan** Fourierov razvoj (smijemo integrirati član po član!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

pri čemu su a_k i b_k **Fourierovi koeficijenti** za funkciju f .

Greška aproksimacije za integral funkcije f korištenjem **produljene trapezne** formule je

$$E_n^T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k E_n^T(\cos(kx)) + b_k E_n^T(\sin(kx))) = -2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell \cdot n}.$$

Što je funkcija f **glada**, to Fourierovi koeficijenti **brže** teže u 0.

Integral Fourierovog reda

Preciznije, neka je $f \in C^r(\mathbb{R})$, tj. f ima r neprekidnih derivacija na cijelom \mathbb{R} . Onda je

$$a_k = O(k^{-r}) \quad \text{za } k \rightarrow \infty.$$

Slično vrijedi i za b_k . To znači da je greška u $E_n^T(f)$ približno jednaka prvom članu greške za $\ell = 1$, tj.

$$E_n^T(f) \approx -2\pi a_n,$$

odakle slijedi

$$E_n^T(f) = O(n^{-r}) \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Budući da je općenito $h = (b - a)/n$ (ovdje je $h = 2\pi/n$), onda ovu ocjenu možemo zapisati kao

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za } h \rightarrow 0.$$

Integral Fourierovog reda

Ako je $r > 2$, onda je ova ocjena za **periodičke** funkcije

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za } h \rightarrow 0,$$

bitno **bolja** od relacije

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = O(h^2), \quad \text{za } h \rightarrow 0,$$

koja vrijedi za **neperiodičke** funkcije f .

Zadnju “standardnu” asimptotsku ocjenu možemo napisati i kao $E_n^T(f) = O(n^{-2})$, za $n \rightarrow \infty$.

Posebno, ako je $r = \infty$, onda **produljena trapezna** formula za **periodičke** funkcije konvergira brže od **bilo koje** potencije od h .

Još jedno dobro svojstvo produljene trapezne f .

Neka je f definirana na \mathbb{R} i za neki $r \geq 1$ ima sljedeća svojstva:

$$f \in C^{2r+1}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2r+1)}(x)| dx < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(2\rho-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(2\rho-1)}(x) = 0, \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Tada se može pokazati da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) + E(f; h),$$

pri čemu greška zadovoljava $E(f; h) = O(h^{2r+1})$, kad $h \rightarrow 0$.

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Primjer. Korištenjem produljene trapezne formule izračunajte

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

za razne vrijednosti h .

Funkcija e^{-x^2} zadovoljava sva **svojstva** s prethodne folije, i to za **svaki** $r \in \mathbb{N}$. Onda možemo upotrijebiti formulu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh),$$

s tim da za grešku vrijedi $E(f; h) = O(h^{2r+1})$, kad $h \rightarrow 0$.

Primjenom za $r = 1, 2, 3, \dots$, vidimo da **greška** teži u nulu **brže** od bilo koje potencije od h .

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Prethodnu formulu upotrebljavamo tako da u sumi, umjesto ∞ , uzmemo **dovoljno velik** realni (cijeli) broj M , pa dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-M}^M f(kh).$$

Budući da e^{-x^2} **brzo trne** za $x \rightarrow \infty$, odredimo M tako da je $Mh = 10$, što odgovara granicama integracije od -10 do 10 .

Prava vrijednost integrala je 1 , a za razne h dobivamo

h	n	Aproksimacija $I_n(f)$	Greška $I(f) - I_n(f)$
1	20	1.000103446372407640	-0.000103446372407639
0.5	40	1.00000000000000000010	-0.00000000000000000015
0.25	80	1.00000000000000000000	-0.00000000000000000000

Integracija singularne funkcije

Pretpostavimo sada da integriramo funkciju f na **konačnoj** domeni, s tim da f ima **singularitet** u **jednoj** ili **obje** granice.

Ideja. Napraviti takvu transformaciju (supstituciju) da

- **granice** integracije postanu $\pm\infty$, a
- funkcija zadovoljava “**lijepa svojstva**” za **brzu** integraciju **produljenom** trapeznom formulom.

Treba izračunati “**singularni**” integral

$$I := \int_a^b f(x) dx,$$

u kojem su **obje** granice a i b **konačne**.

Integracija singularne funkcije

Konstruiramo preslikavanje

$$z = z(x) \quad (\text{ili ekvivalentno}) \quad x = x(z),$$

takvo da je

$$z(a) = -\infty, \quad z(b) = \infty.$$

Tada se zamijeni varijabla u integralu I , pa imamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x(z)) \left(\frac{dx}{dz} \right) dz.$$

Točnost numeričke integracije ovisi o izabranoj transformaciji.

Integracija singularne funkcije

Primjeri takvih transformacija:

● eksponencijalna transformacija

$$x = \frac{1}{2}(a + b + (b - a) \operatorname{th}(z)),$$

odnosno

$$z = \operatorname{Arth} \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right),$$

● dvostruka eksponencijalna transformacija (jako dobra)

$$x = \frac{1}{2} \left[a + b + (b - a) \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right) \right],$$

pri čemu je

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\pi}{4}(b - a) \operatorname{ch}(z)}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right)}.$$

Rombergov algoritam

Općenito o Rombergovom algoritmu

Pri izvodu Rombergovog algoritma koristimo se sljedećim principima:

- udvostručavanjem broja podintervala u produljenoj trapeznoj metodi,
- eliminacijom vodećeg člana u asimptotskom razvoju greške, iz dvije susjedne produljene formule.

Ponovljena primjena ovog principa zove se Richardsonova ekstrapolacija.

Za početak, treba objasniti

- što je to asimptotski razvoj.

Asimptotski razvoj

Da bismo mogli približno izračunati sumu **konvergentnog** reda neke funkcije f u točki x , oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

red smo aproksimirali **konačnom** parcijalnom sumom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n p_n(x).$$

Time smo podrazumijevali da **ostatak** reda teži prema **nuli**, i to **po** N , za **fiksni** x

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f(x) - f_N(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n p_n(x) = 0.$$

Precizna definicija asimptotskog niza

Ako zamijenimo ulogu N i x u konvergenciji razvoja, dobivamo novi pojam **asimptotskog** razvoja. Pritom red uopće **ne mora** konvergirati.

Precizna definicija **asimptotskog razvoja** u **okolini** neke točke bazirana je na definiciji asimptotskog **niza** u okolini te točke.

Definicija. (Asimptotski niz) Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ neka domena i $c \in \text{Cl } D$ neka **točka** iz zatvarača skupa D , s tim da c može biti i $+\infty$ ili $-\infty$. Nadalje, neka je $\varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, niz funkcija za kojeg vrijedi

$$\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x)) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

za **svaki** $n \in \mathbb{N}$. Tada kažemo da je (φ_n) **asimptotski niz** kad $x \rightarrow c$ u skupu D . ■

Precizna definicija asimptotskog razvoja

Podsjetnik. Oznaka $\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x))$ znači da svaka funkcija φ_n raste **bitno sporije** od prethodne funkcije φ_{n-1} u okolini neke točke (kod nas c), u smislu da vrijedi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in D}} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = 0,$$

što uključuje i pretpostavku da je $\varphi_{n-1}(x) \neq 0$ na nekoj okolini točke c gledano u skupu D , osim eventualno u samoj točki c .

Definicija. (Asimptotski razvoj) Neka je (φ_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, **asimptotski niz** kad $x \rightarrow c$ u skupu D . **Formalni red** funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

Precizna definicija asimptotskog razvoja

je **asimptotski razvoj** funkcije f za $x \rightarrow c$ u skupu D , oznaka

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

ako za **svaki** $N \in \mathbb{N}$ vrijedi relacija asimptotskog ponašanja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_N(x)) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

tj. **apsolutna greška** između f i $(N - 1)$ -e parcijalne sume reda **raste najviše jednako brzo** kao i N -ti član asimptotskog niza, u okolini točke c . ■

Euler–MacLaurinova formula

Asimptotski razvoj pogreške za produljenu trapeznu metodu integracije daje Euler–MacLaurinova formula.

Teorem. (Euler–MacLaurinova formula) Neka su m i n cijeli brojevi takvi da je $m \geq 0$ i $n \geq 1$. Definiramo ekvidistantnu mrežu s n podintervala na $[a, b]$, tj.

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Pretpostavimo da je $f \in C^{(2m+2)}[a, b]$. Za pogrešku produljene trapezne metode vrijedi

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^m \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

Euler–MacLaurinova formula

gdje su koeficijenti

$$d_{2i} = -\frac{B_{2i}}{(2i)!} (b-a)^{2i} (f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)),$$

a ostatak je

$$F_{n,m} = \frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)! n^{2m+2}} \cdot \int_a^b \bar{B}_{2m+2} \left(\frac{x-a}{h} \right) f^{(2m+2)}(x) dx.$$

Ovdje su B_{2i} Bernoullijevi brojevi,

$$B_i = -\int_0^1 B_i(x) dx, \quad i \geq 1,$$

Euler–MacLaurinova formula

a \overline{B}_i je periodičko proširenje običnih Bernoullijevih polinoma

$$\overline{B}_i(x) = \begin{cases} B_i(x), & \text{za } 0 \leq x < 1, \\ \overline{B}_i(x-1), & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz je u klasičnim udžebnicima numeričke analize. ■

U koeficijentima d_{2i} javljaju se Bernoullijevi brojevi. Osim $B_1 = -\frac{1}{2}$, svi ostali neparni Bernoullijevi brojevi su 0, a prvih nekoliko parnih je:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Nadalje, brojevi B_{2i} vrlo brzo rastu po apsolutnoj vrijednosti, tako da je $B_{60} \approx -2.139994926 \cdot 10^{34}$.

Eliminacija člana greške

“Red” u n^{-2} , koji se javlja u **asimptotskoj** ocjeni pogreške za produljenu trapeznu metodu

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^m \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

- ne konvergira — kad “glatkoća” m raste u ∞ , jer koeficijenti d_{2i} ne teže prema nuli.

Naravno, znamo da $E_n(f) \rightarrow 0$, kad broj podintervala $n \rightarrow \infty$.

Ideja: Ako je funkcija f dovoljno glatka,

- eliminirati član po član u sumi za grešku,
- na osnovu izračunatih vrijednosti integrala s $n/2$ i n podintervala, odnosno, s duljinama koraka $2h$ i h .

Izvod Rombergovog algoritma

Neka je $I_n^{(0)}$ trapezna formula n podintervala.

Iz Euler–MacLaurinove formule, (ako je funkcija f dovoljno glatka i n paran), za **asimptotski razvoj** greške imamo

$$I - I_n^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{d_4^{(0)}}{n^4} + \dots + \frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n,m}$$

$$I - I_{n/2}^{(0)} = \frac{4d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{16d_4^{(0)}}{n^4} + \dots + \frac{2^{2m}d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n/2,m}.$$

Želimo **eliminirati** prvi član greške s n^{-2} , pa **prvi** razvoj pomnožimo s 4 i oduzmemo mu **drugi** razvoj. Dobivamo

$$4(I - I_n^{(0)}) - (I - I_{n/2}^{(0)}) = -\frac{12d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{60d_6^{(0)}}{n^6} + \dots$$

Izvod Rombergovog algoritma

Premješanjem članova koji imaju I na lijevu stranu, a zatim dijeljenjem, dobivamo

$$I = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} - \frac{4d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{20d_6^{(0)}}{n^6} + \dots$$

Prvi član zdesna uzimamo kao bolju, popraavljenju aproksimaciju integrala. Označimo tu aproksimaciju s

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3}, \quad n \text{ paran}, n \geq 2.$$

Sada u formuli za grešku, da bismo lakše računali, definiramo

$$d_4^{(1)} = -4d_4^{(0)}, \quad d_6^{(1)} = -20d_6^{(0)}, \dots$$

Izvod Rombergovog algoritma

Time smo dobili **novi** integracijski niz $I_2^{(1)}, I_4^{(1)}, I_8^{(1)}, \dots$

Njegova je greška

$$I - I_n^{(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{d_6^{(1)}}{n^6} + \dots$$

Sličan argument kao i prije možemo upotrijebiti i dalje.

Eliminirajmo **prvi** član pogreške iz $I_n^{(1)}$ i $I_{n/2}^{(1)}$,

$$I - I_{n/2}^{(1)} = \frac{16d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{64d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

uz uvjet da je funkcija dovoljno glatka i da je n djeljiv s 4.

Tada je

$$16(I - I_n^{(1)}) - (I - I_{n/2}^{(1)}) = \frac{-48d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

Izvod Rombergovog algoritma

odnosno

$$I = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15} - \frac{-48d_6^{(1)}}{15n^6} + \dots$$

Ponovno, prvi član s desne strane proglasimo za novu aproksimaciju integrala

$$I_n^{(2)} = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15}, \quad n \text{ djeljiv s } 4, \quad n \geq 4.$$

Induktivno, nastavljanjem postupka, dobivamo Richardsonovu ekstrapolaciju

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad n \geq 2^k.$$

Izvod Rombergovog algoritma

Pritom je greška jednaka

$$\begin{aligned} E_n^{(k)} &= I - I_n^{(k)} = \frac{d_{2k+2}^{(k)}}{n^{2k+2}} + \dots \\ &= \beta_k (b - a) h^{2k+2} f^{(2k+2)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \end{aligned}$$

Sada možemo složiti Rombergovu tablicu

$$\begin{array}{cccc} I_1^{(0)} & & & \\ I_2^{(0)} & I_2^{(1)} & & \\ I_4^{(0)} & I_4^{(1)} & I_4^{(2)} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Poredak računanja

Poredak računanja u tablici je sljedeći:

1				
2	3			
4	5	6		.
7	8	9	...	

Iz ocjene greške možemo izvesti **omjere grešaka** u **stupcu** Rombergove tablice, uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije f . Dobivamo

$$\frac{E_n^{(k)}}{E_{2n}^{(k)}} \approx 2^{2k+2},$$

Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

tj. omjeri pogrešaka u stupcu se moraju ponašati kao

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 4 & 1 & & & & & \\ 4 & 16 & 1 & & & & \\ 4 & 16 & 64 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Puno ilustrativnije od omjera grešaka $E_n^{(k)} / E_{2n}^{(k)} \approx 2^{2k+2}$ je promatranje eksponenta omjera grešaka $2k + 2$,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 2 & 4 & 1 & & & & \\ 2 & 4 & 6 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Primjeri za Rombergov algoritam

Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

Pokažimo na primjeru da prethodni **omjeri** pogrešaka u **stupcu** vrijede **samo** ako je funkcija **dovoljno glatka**.

Primjer. Rombergovim algoritmom s točnošću 10^{-12} nađite vrijednosti integrala

$$\int_0^1 e^x dx, \quad \int_0^1 x^{3/2} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

i pokažite kako se ponašaju **omjeri** pogrešaka i **eksponenti** omjera pogrešaka u stupcima.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija ima **beskonačno** mnogo **neprekidnih** derivacija na $[0, 1]$, pa bi se računanje integrala moralo ponašati po predviđanju.

Ako uspoređujemo vrijednosti samo “**po dijagonali**” tablice, nakon $2^5 = 32$ podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost integrala I_5 takvu da je

$$I_5 = 1.71828182845904524$$

$$I = e - 1 = 1.71828182845904524$$

$$I - I_5 = 0.$$

Eksponecijalna funkcija

Omjeri pogrešaka u stupcima su

0	1.0000					
1	3.9512	1.0000				
2	3.9875	15.6517	1.0000			
3	3.9969	15.9913	62.4639	1.0000		
4	3.9992	15.9777	63.6087	249.7197	1.0000	
5	3.9998	15.9944	63.9017	254.4010	1000.5738	1.0000

pa uz malo “kreativnog vida” vidimo da su omjeri prema predviđanju 4, 16, 64, 256, 1024, ...

Eksponencijalna funkcija

Eksponenti omjera pogrešaka su

0	1.0000					
1	1.9823	1.0000				
2	1.9955	3.9682	1.0000			
3	1.9989	3.9920	5.9650	1.0000		
4	1.9997	3.9980	5.9912	7.9642	1.0000	
5	1.9999	3.9995	5.9978	7.9910	9.9666	1.0000

pa ponovno čitamo da su eksponenti omjera pogrešaka
2, 4, 6, 8, 10, ...

Funkcija $x^{3/2}$

Funkcija $f(x) = x^{3/2}$ ima **neograničenu drugu** derivaciju u 0,

- pa bi “**zanimljivo ponašanje**” moralo početi već u **drugom** stupcu Rombergove tablice, jer
- za **trapez** je funkcija **dovoljno glatka** za ocjenu pogreške.

Nakon 2^{15} podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost

$$I_{15} = 0.400000000000004512$$

$$I = 2/5 = 0.400000000000000000$$

$$I - I_{15} = -0.000000000000004512.$$

Primijetite da je broj intervala poprilično **velik!**

Funkcija $x^{3/2}$

Što je s omjerima pogrešaka?

0	1.0000					
1	3.7346	1.0000				
2	3.8154	5.4847	1.0000			
3	3.8721	5.5912	5.6484	1.0000		
4	3.9112	5.6331	5.6559	5.6566	1.0000	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
15	3.9981	5.6569	5.6569	1.0000

Nakon prvog stupca omjeri pogrešaka su se **stabilizirali**.

Funkcija $x^{3/2}$

Bit će nam mnogo lakše provjeriti što se događa, ako napišemo samo **eksponente** omjera pogrešaka.

0	1.0000					
1	1.9010	1.0000				
2	1.9318	2.4554	1.0000			
3	1.9531	2.4832	2.4978	1.0000		
4	1.9676	2.4939	2.4998	2.4999	1.0000	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
15	1.9993	2.5000	2.5000	1.0000

Eksponenti omjera pogrešaka od **drugog** stupca nadalje su za točno **1** veći od eksponenta same funkcije (integriramo!).

Funkcija \sqrt{x}

Situacija s funkcijom $f(x) = \sqrt{x}$ mora biti još **gora**, jer ona ima **neograničenu** **prvu** derivaciju u 0.

Nakon 2^{15} podintervala u trapeznoj formuli, **ne dobivamo** željenu točnost

$$I_{15} = 0.66666665510837633$$

$$I = 2/3 = 0.66666666666666666667$$

$$I - I_{15} = 0.00000001155829033.$$

Funkcija \sqrt{x}

Omjeri pogrešaka u tablici su:

0	1.0000						
1	2.6408	1.0000					
2	2.6990	2.8200	1.0000				
3	2.7393	2.8267	2.8281	1.0000			
4	2.7667	2.8281	2.8284	2.8284	1.0000		
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	
15	2.8271	2.8284	2.8284	1.0000

Funkcija \sqrt{x}

Pripadni eksponenti su

0	1.0000						
1	1.4010	1.0000					
2	1.4324	1.4957	1.0000				
3	1.4538	1.4991	1.4998	1.0000			
4	1.4681	1.4998	1.5000	1.5000	1.0000		
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	
15	1.4993	1.5000	1.5000	1.0000

Produljena trapezna formula još uvijek konvergira, ali konvergencija više nije $O(h^2)$, već samo $O(h^{3/2})$.

Zadaci

U posljednja dva primjera, Rombergovom algoritmu može se “pomoći” tako da **supstitucijom** u integralu dobijemo **glatku** funkciju.

● U oba slučaja, supstitucija je $x = t^2$.

Provjerite što se događa u Rombergovom algoritmu **nakon** ove supstitucije.

Ako u posljednjem integralu promijenimo **granice** integracije

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx$$

što mislite kojoj će se funkciji iz prethodnih primjera **najsličnije** ponašati omjeri pogrešaka?

Druge oznake

U literaturi postoji i drugačija oznaka za aproksimacije integrala u Rombergovoj tablici

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}.$$

Sama tablica ima oblik

$$\begin{array}{cccc} T_0^{(0)} & & & \\ T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & \\ T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Još malo o Rombergovoj tablici

Tvrdnja. Drugi stupac Rombergove tablice odgovara produljenoj **Simpsonovoj** formuli — redom, s $2, 4, 8, 16, \dots$ podintervala.

Nadimo **eksplicitnu** formulu za $I_n^{(1)}$. Ako trapezna formula ima

- n podintervala, onda je pripadni $h = (b - a)/n$,
- $n/2$ podintervala, onda je pripadni $h_1 = 2(b - a)/n = 2h$.

Iz **trapezних formula** za n i $n/2$ podintervala,

$$I_n^{(0)} = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$I_{n/2}^{(0)} = \frac{h_1}{2}(f_0 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + f_n),$$

Još malo o Rombergovoj tablici

uvrštavanjem u $I_n^{(1)}$, dobivamo

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1}{2} (f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{2h}{3} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{h}{3} (f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n), \end{aligned}$$

što je **Simpsonova formula** s n podintervala.

Zadatak

Odgovaraju li ostali stupci u Rombergovoj tablici sljedećim **Newton–Cotesovim** formulama (Simpsonovoj formuli $3/8$, Booleovoj formuli, ...)?

Na sreću, odgovor je **ne!**

U protivnom, Rombergov algoritam **ne bi** konvergirao, recimo, za funkciju **Runge**. Za točnost 10^{-12} , ako uspoređujemo “**dijagonalni dio**” tablice, potrebno je $2^{10} = 1024$ podintervala, a dobiveni rezultat je

$$I_{10} = 2.74680153389003183$$

$$I = 2.74680153389003172$$

$$I - I_{10} = -0.000000000000000011.$$

Oprez s oscilirajućim funkcijama

Primjer. Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(17\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4} .

Podintegralna funkcija je **relativno brzo oscilirajuća** i ima **17** “grba”.

Tablicu ispisujemo **samo** na prvih par decimala (a računamo u punoj točnosti tipa **extended**).

Oprez s oscilirajućim funkcijama

Rombergova tablica:

0	0.0000								
1	0.5000	0.6667							
2	0.6036	0.6381	0.6362						
3	0.6284	0.6367	0.6366	0.6366					
4	-0.0063	-0.2177	-0.2746	-0.2891	-0.2927				
5	0.0283	0.0398	0.0598	0.0622	0.0636	0.0640			
6	0.0352	0.0376	0.0374	0.0371	0.0370	0.0370	0.0370		
7	0.0369	0.0375	0.0374	0.0374	0.0374	0.0375	0.0375	0.0375	

Rezultat (sa svim znamenkama):

$$I_7 = 0.03744821953512704$$

$$I = 0.03744822190397537$$

$$I - I_7 = 0.00000000236884834.$$

Oprez s oscilirajućim funkcijama

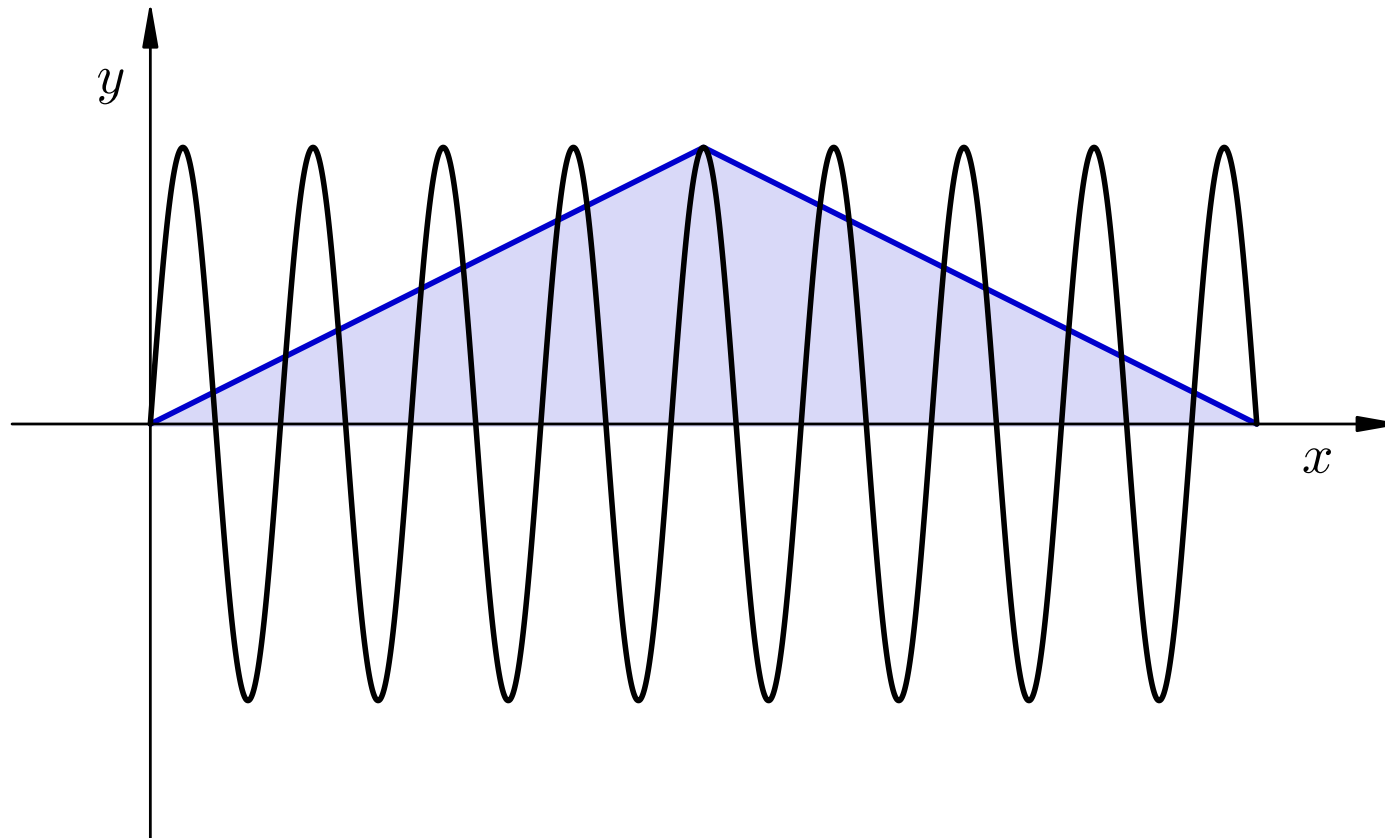
Što je razlog **stabilizacije** oko **jedne**, pa oko **druge** vrijednosti?

- **Nedovoljan** broj podintervala u trapeznoj formuli, koji **ne opisuje** dobro ponašanje funkcije.
- **Rješenje problema**: u svaku “**grbu**” treba staviti **barem nekoliko** točaka.

Sljedeće slike nam to zorno i pokazuju. Tek kad smo stavili **16** točaka u trapeznu formulu,

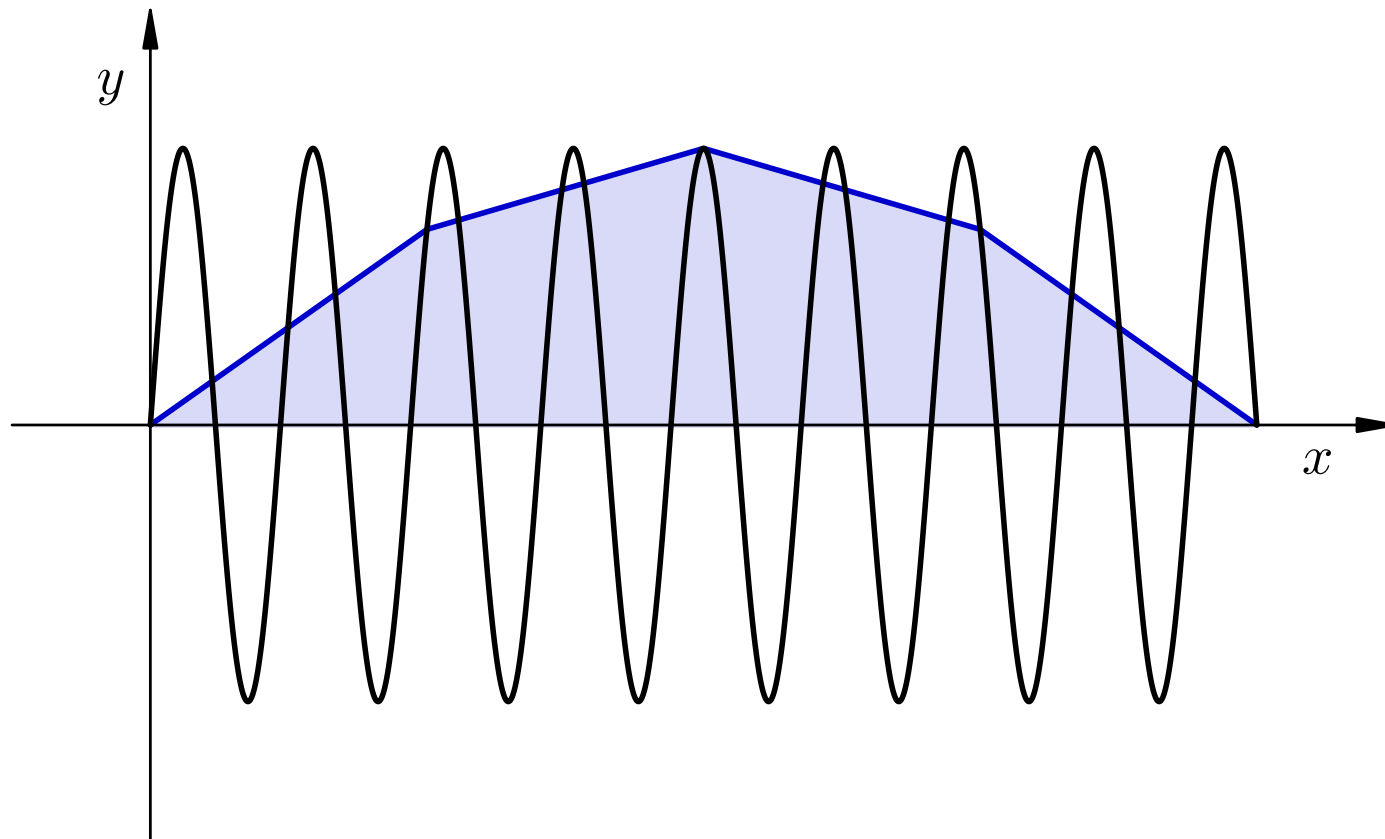
- stavili smo **skoro** jednu točku po grbi
- i trapezna formula je počela “**prepoznavati oblik**” podintegralne funkcije.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



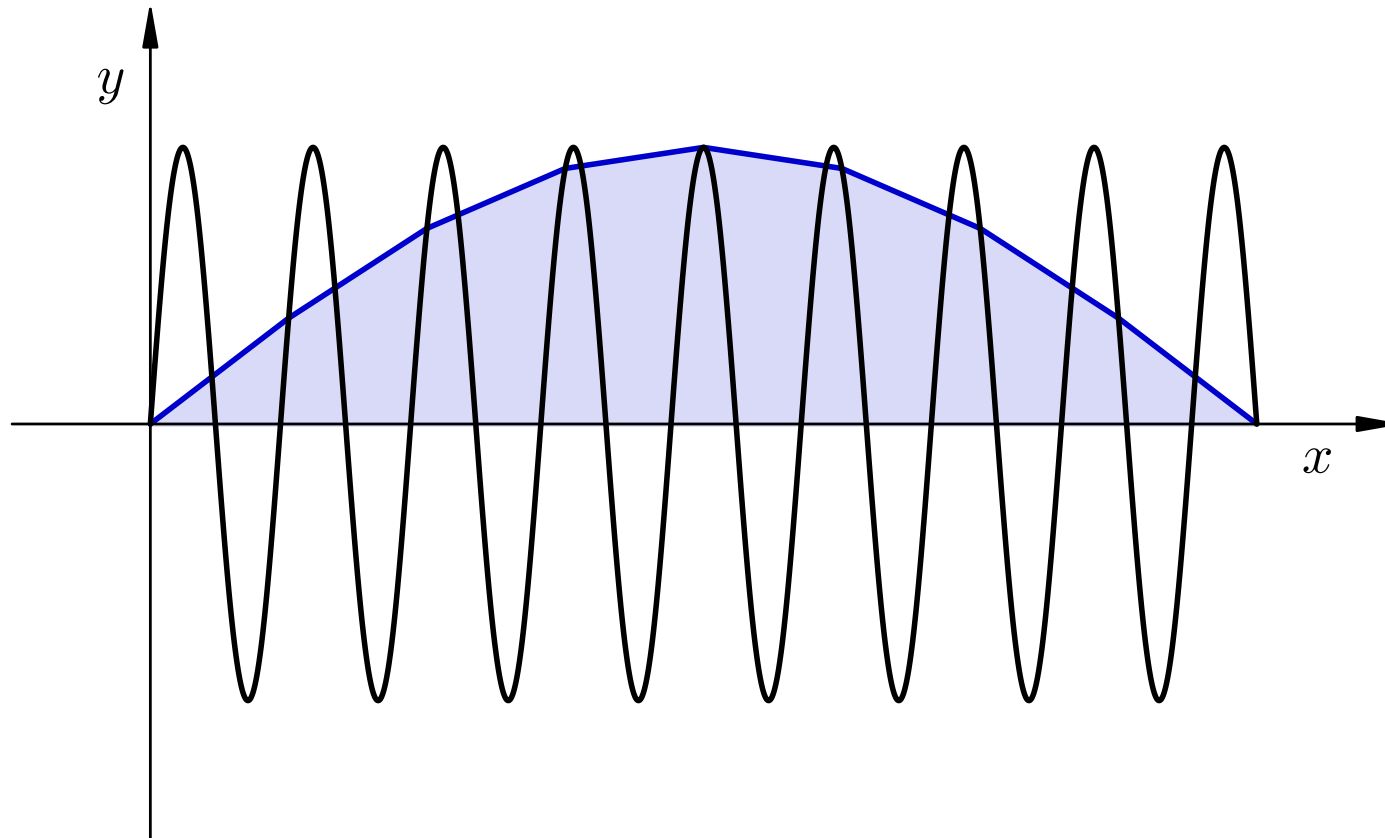
Produljena trapezna formula s 2 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



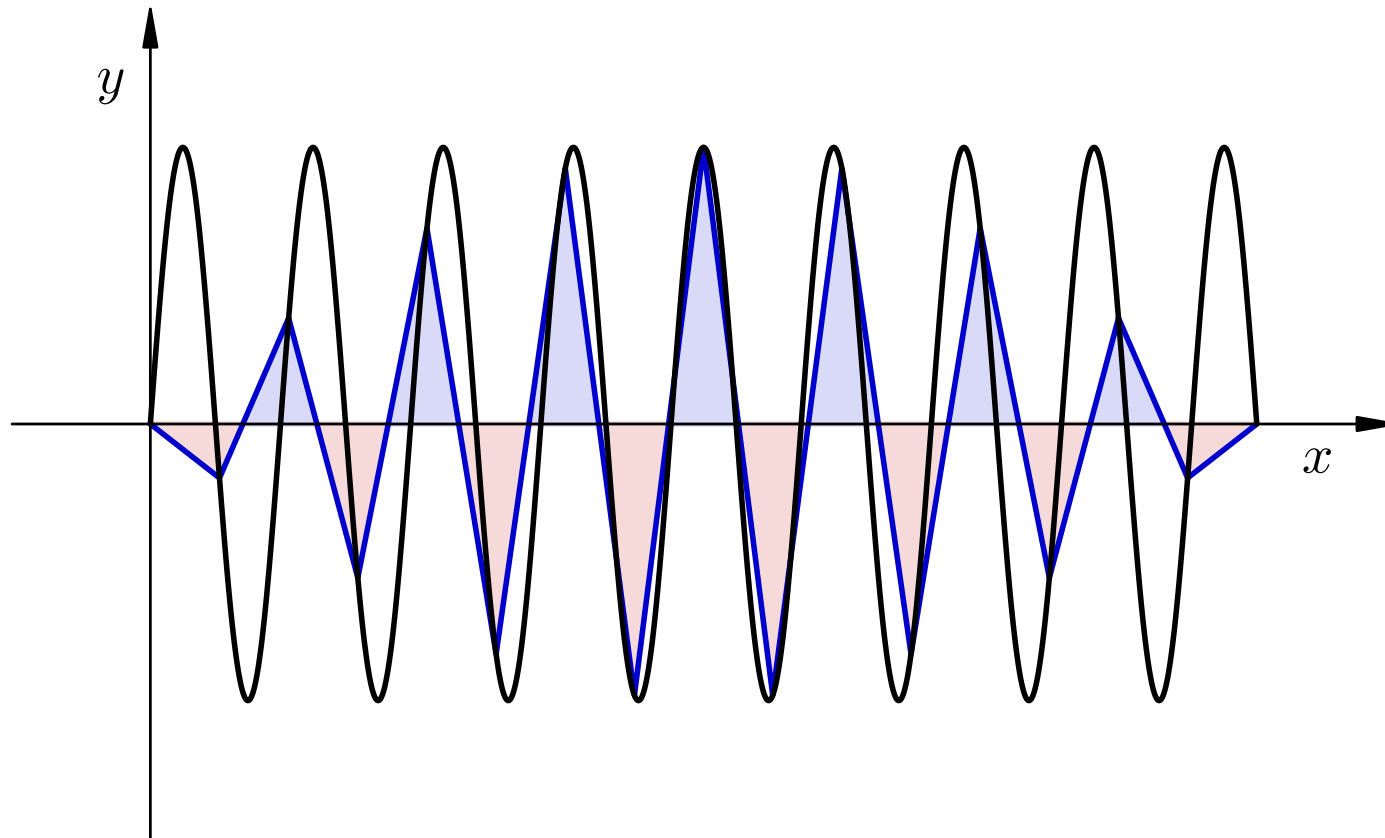
Produljena trapezna formula s 4 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula s 8 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula sa **16** podintervala.

Zadatak

Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(257\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-12} .

Opres, ako u Rombergovom algoritmu

🚫 ne zahtijevate stavljanje dovoljnog broja podintervala, dobiveni rezultat bit će pogrešan!

Trapez može biti brži od Romberga

Primjer. Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 e^{\cos(\pi x)} \cos(\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4} .

U ovom primjeru događa se zanimljiv fenomen:

- 🔴 produljena **trapezna** formula može **brže** izračunati **točan** rezultat nego **Rombergov** algoritam.

Razlog: “**Dobro**” ponašanje produljene **trapezne** formule za **periodičke** funkcije!

Trapez može biti brži od Romberga

Početni dio Rombergove tablice:

0	1.17520119364380146		
1	0.58760059682190073	0.39173373121460049	
2	0.56516070872910212	0.55768074603150258	0.56874388035262938
3	0.56515910399248505	0.56515856908027936	0.56565709061686448
4	0.56515910399248503	0.56515910399248502	0.56515913965329873
5	0.56515910399248503	0.56515910399248503	0.56515910399248503

Crveno označeni brojevi imaju sve znamenke točne.

Rombergov algoritam daje netočniju aproksimaciju

$$I_5 = 0.56515914375273593.$$

Trapez može biti brži od Romberga

Sporost Rombergovog algoritma posljedica je činjenice da

- trapezna formula s **jednim** podintervalom ima **veliku** grešku.
- Budući da ona ulazi u ekstrapolaciju rezultata na “**dijagonali**”, dijagonalni rezultati su **dosta** pogrešni.

Stvarno, za produljenu **trapeznu** formulu **ne vrijedi** isti razvoj pogreške (puno je **točnija** — zbog periodičnosti funkcije f , za koeficijente u **Euler–MacLaurin**ovoj formuli vrijedi $d_{2i} = 0$)!

Rješenje problema:

- usporedimo **susjedne** rezultate u **stupcima** tablice i ako se oni “**slože**” na odgovarajuću točnost, uzmemo ih kao aproksimaciju.

Teorija integracijskih formula — nastavak

Težinske integracijske formule — sažetak

Do sada smo radili **integracijske** formule oblika

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

(ispuštamo gornje indekse m) u kojima su

- **čvorovi** integracije x_0, \dots, x_m bili **fiksni** — unaprijed **zadani**,
- a **težinske** koeficijente w_0, \dots, w_m određivali smo iz uvjeta **egzaktnosti** na vektorskom prostoru **polinoma** \mathcal{P}_d što **većeg** stupnja d .

Iz teorema o “interpolacijskim” formulama znamo da za **polinomni** stupanj egzaktnosti d takvih formula vrijedi $d = m$.

Težinske integracijske formule — sažetak

Kod nekih formula (Simpson, srednja točka) dobili smo da je

- za **parne** m , stvarni stupanj egzaktnosti za **jedan veći**, tj. vrijedi $d = m + 1$,

iako se težine **određuju** iz uvjeta **egzaktnosti** na prostoru \mathcal{P}_m .

U nastavku tražimo **integracijske** formule još **višeg** stupnja egzaktnosti — za koje vrijedi $d > m$. To znači da

- neki ili **svi čvorovi** integracije moraju biti “**slobodni**”,
- tako da i **njih** određujemo iz uvjeta **egzaktne** integracije.

Iz tradicionalnih razloga, zbog veze s

- **ortogonalnim** polinomima i njihovim **nultočkama**,
- takve formule se malo **drugačije** označavaju!

Promjena oznaka za integracijske formule

Promjene u oznakama su:

- čvorovi se broje od 1, a ne od 0,
- broj čvorova označava se s n , umjesto $m + 1$.

Težinska integracijska ili kvadratura formula onda ima sljedeći oblik:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

- Broj $n \in \mathbb{N}$ zove se red formule.

Opet ispuštamo gornje indekse n , tj. ne pišemo $w_k^{(n)}$, $x_k^{(n)}$.

Težinska funkcija u integracijskoj formuli

Pretpostavljamo da je **težinska** funkcija w

- **pozitivna** (ili barem **nenegativna**) i **integrabilna** na $[a, b]$.

Ako je interval $[a, b]$ **beskonačan**, moramo osigurati da prethodni integral **postoji**, bar u slučaju kad je

- funkcija f **polinom**, neovisno o stupnju.

To postizemo **zahtjevom** da svi **momenti** težinske funkcije w

$$\mu_k := \int_a^b x^k w(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

postoje (kao integrali) i da su **konačni**.

Takve težinske funkcije w zovemo **polinomno** dopustivima.

Nadalje pretpostavljamo da je w takva!

Interpolacijske težinske kvadrature formule

Uz ove pretpostavke i oznake,

• za bilo kojih n različitih čvorova x_1, \dots, x_n ,
težinska integracijska ili kvadratura formula

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + E_n(f)$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) $d = n - 1$,

• ako i samo ako je interpolacijska,

tj. dobivena je kao

• egzaktni integral interpolacijskog polinoma funkcije f u čvorovima x_1, \dots, x_n .

Težine u interpolacijskim formulama

Ekvivalentno, **polinomni** stupanj egzaktnosti **integracijske** formule je (barem) $d = n - 1$, **ako i samo ako** za **težinske** koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$, polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n (stupanj tih polinoma je sada $n - 1$)

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Napomena: Ovo smo već **dokazali**, samo oznake su **nove!** ■

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Nameće se prirodno pitanje: može li se postići i bolje, tj.

- možemo li dobiti veći stupanj egzaktnosti, $d > n - 1$?

Uočite: Jedina šansa za to je

- “pažljiviji” izbor čvorova integracije x_k .

Naime, čim je $d \geq n - 1$,

težine w_k su nužno određene prethodnom formulom, pa njih više ne možemo “birati”.

Odgovor je potvrđan i relativno jednostavan!

Za formulaciju rezultata definiramo tzv. polinom čvorova

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Teorem. Neka je k zadani cijeli broj takav da je $0 \leq k \leq n$.

Težinska integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

ima **polinomni** stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + k$, **ako i samo ako** je formula **interpolacijska i**

- polinom **čvorova** ω_n je **ortogonalan** na **sve** polinome $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ s težinskom funkcijom w ,

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{k-1}.$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dokaz. Iz prošlog teorema znamo da za stupanj **egzaktnosti** vrijedi $d \geq n - 1$ ako i samo ako je formula **interpolacijska**.

● Preostaje pokazati da je $d = n - 1 + k$ **ekvivalentno** relaciji **ortogonalnosti** za polinom ω_n .

1. smjer (nužnost): $d = n - 1 + k \implies$ **ortogonalnost**.

Neka je $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ **bilo koji** polinom stupnja najviše $k - 1$.

Za **produkt** $f = \omega_n p$ onda vrijedi $\omega_n p \in \mathcal{P}_{n+k-1}$.

Zbog pretpostavke $d = n - 1 + k$, integracijska formula **egzaktno** integrira polinom $f = \omega_n p$, pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \omega_n(x_k) p(x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

No, **svi** čvorovi x_k su **nultočke** polinoma čvorova ω_n , tj. vrijedi

$$\omega_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Onda je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \omega_n(x_k) p(x_k) = 0,$$

za **svaki** $p \in \mathcal{P}_{k-1}$, što dokazuje prvi smjer.

2. smjer (dovoljnost): **ortogonalnost** $\implies d = n - 1 + k$.

Neka je $p \in \mathcal{P}_{n+k-1}$ **bilo koji** polinom. Treba pokazati da integracijska formula I_n **egzaktno** integrira polinom p .

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Prvo **podijelimo** p s polinomom čvorova ω_n — po **Euklidovom** teoremu o dijeljenju s ostatkom. Onda je

$$p = q\omega_n + r,$$

gdje je $q \in \mathcal{P}_{k-1}$ **kvocijent**, a $r \in \mathcal{P}_{n-1}$ **ostatak**.

Egzaktnom integracijom dobivamo

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)q(x)\omega_n(x) dx + \int_a^b w(x)r(x) dx.$$

Zbog $q \in \mathcal{P}_{k-1}$ i pretpostavke **ortogonalnosti**

🔴 **prvi** integral na **desnoj** strani je **nula**.

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dobivamo da je

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)r(x) dx.$$

No, zbog $r \in \mathcal{P}_{n-1}$ i pretpostavke da je formula **interpolacijska**,
• formula I_n **egzaktno** integrira polinom r .

Zato je

$$\int_a^b w(x)r(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k r(x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Sad uvrstimo $r = p - q\omega_n$. Dobivamo redom

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n w_k r(x_k) &= \sum_{k=1}^n w_k (p(x_k) - q(x_k)\omega_n(x_k)) \\ &= \{ \text{znamo } \omega_n(x_k) = 0, \text{ za } k = 1, \dots, n \} \\ &= \sum_{k=1}^n w_k p(x_k).\end{aligned}$$

Kad “**spojimo**” zadnje **tri** relacije, izlazi

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k p(x_k) = I_n(p),$$

pa formula I_n **egzaktno** integrira **sve** polinome $p \in \mathcal{P}_{n+k-1}$. ■

O granicama za stupanj egzaktnosti

Nekoliko komentara na prethodni rezultat.

Relacija ortogonalnosti

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{k-1},$$

omogućava povećanje stupnja egzaktnosti formule za k ,

• s $d = n - 1$,

• na $d = n - 1 + k$.

Ograničenje $0 \leq k \leq n$ u teoremu je prirodno i nužno!

Naime, relacija ortogonalnosti postavlja

• točno k dodatnih uvjeta na čvorove x_1, \dots, x_n .

O granicama za stupanj egzaktnosti

Za $k = 0$ — **nema** dodatnih ograničenja, jer za **bilo koji** izbor čvorova možemo dobiti $d = n - 1$ (interpolacijska formula).

S druge strane, zbog **nenegativnosti** težnske funkcije w , **mora** biti $k \leq n$. **Opravdanje:**

- Polinom čvorova ω_n mora biti **ortogonalan** na sve polinome iz \mathcal{P}_{k-1} , tj. na polinome stupnja najviše $k - 1$.
- Za $k > n$, polinom ω_n bi trebao biti **ortogonalan** na sve polinome iz \mathcal{P}_n , a to znači i na **samog sebe**, što je **nemoguće!**

Dakle, $k = n$ je **maksimalno** povećanje stupnja egzaktnosti koje se može postići, a

- **maksimalni** stupanj egzaktnosti je $d_{\max} = 2n - 1$.

Gaussove integracijske formule — $d = 2n - 1$

Integracijske ili kvadraturene formule **maksimalnog** stupnja egzaktnosti $d = 2n - 1$ zovu se

• Gaussove ili Gauss–Christofellove formule.

Relacija **ortogonalnosti** iz prethodnog teorema za $k = n$ glasi

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Drugim riječima, polinom čvorova ω_n (stupnja n)

• mora biti **ortogonalan** na **sve** polinome **nižeg** stupnja — do najviše $n - 1$.

No, to **isto** svojstvo zadovoljava i odgovarajući **ortogonalni** polinom p_n , stupnja n , s **težinskom** funkcijom w na $[a, b]$.

Čvorovi u Gaussovima formulama

Znamo da je p_n jednoznačno određen, do na multiplikativnu konstantu.

Ako za p_n uzmemo da ima vodeći koeficijent $A_n = 1$, onda je

$$\omega_n = p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zato se formule najvišeg stupnja egzaktnosti obično zovu

• Gaussove formule s težinskom funkcijom w na $[a, b]$.

U Gaussovima formulama, čvorovi x_k su potpuno određeni kao sve nultočke polinoma p_n ,

$$p_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sjetite se, te nultočke su realne, jednostruke i leže u otvorenom intervalu (a, b) .

Težine u Gaussovima formulama

Za težine w_k znamo da vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$, polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n (stupanj od ℓ_k je $n - 1$).

Kod Lagrangeove **interpolacije** pokazali smo da polinome ℓ_k možemo izraziti preko polinoma čvorova $\omega_n = p_n$ (ranije ω), u obliku

$$\ell_k(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p_n'(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Uočite da **multiplikativna** konstanta u p_n **nije** bitna — **skrati** se, pa možemo uzeti **bilo koju** normalizaciju za polinome p_n .

Težine u Gaussovima formulama

Dobivamo izraz za težine w_k preko ortogonalnih polinoma p_n

$$w_k = \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p'_n(x_k)} dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ova formula se rijetko koristi za stvarno računanje težina. Prema autoru formule, težine w_k u Gaussovima formulama ponekad se zovu i Christofellovi brojevi.

O ostalim svojstvima Gaussovih formula — malo kasnije.

Prvo, spomenimo još dva tipa integracijskih formula koje se koriste u praksi, a imaju

- visoki, ali ne i maksimalni stupanj egzaktnosti, tj. $k < n$.

Integracijske formule s fiksnim rubovima

Prethodni teorem ima praktične primjene i za $k < n$.

U **težinskoj** integracijskoj ili kvadraturnoj formuli

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

unaprijed **zadamo** $n - k$ čvorova integracije u $[a, b]$, a

- **preostalih** k čvorova određujemo tako da dobijemo **maksimalni** mogući stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + k$.

Ovaj pristup se najčešće koristi za $k = n - 1$ i $k = n - 2$, a **zadani** čvorovi su

- **jedan** ili **oba ruba** intervala integracije $[a, b]$, s tim da **zadani** rubni čvor mora biti **konačan**.

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Neka je **lijevi** rub intervala — točka a konačna

• i **zadana** kao čvor integracije $x_1 = a$.

Preostalih $k = n - 1$ čvorova određujemo tako da

• dobijemo **maksimalni** stupanj egzaktnosti $d = 2n - 2$.

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Radau** formule.

Prema prethodnom teoremu, pripadni polinom **čvorova**

$$\omega_n(x) = (x - a)(x - x_2) \cdots (x - x_n) =: (x - a) p_{n-1}(x)$$

mora zadovoljavati relaciju **ortogonalnosti** za $k = n - 1$

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

To možemo zapisati i ovako

$$\int_a^b w(x) (x - a) p_{n-1}(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Faktor $(x - a)$, koji odgovara fiksnom čvoru $x_1 = a$, ima **fiksni** predznak na $[a, b]$ — **nenegativan** je. Zato ga smijemo

- “izvaditi” iz polinoma čvorova ω_n
- i “dodati” težinskoj funkciji w .

Tako dobivamo “**novu**” težinsku funkciju

$$w_a(x) := (x - a) w(x),$$

koja je, također, **nenegativna** na $[a, b]$.

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Relacija **ortogonalnosti** sada ima oblik

$$\int_a^b w_a(x) p_{n-1}(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2},$$

gdje je p_{n-1} polinom stupnja $n - 1$.

Slično ranijem, odavde dobivamo sljedeći **zaključak**:

- **preostalih** $n - 1$ čvorova x_2, \dots, x_n moraju biti nultočke **ortogonalnog** polinoma p_{n-1} s **težinskom** funkcijom w_a .

Potpuno **isti** princip radi i za **desni** rub b , s faktorom $b - x$.

Ako **fiksiramo** $x_n = b$, **preostali** čvorovi x_1, \dots, x_{n-1} moraju biti nultočke **ortogonalnog** polinoma p_{n-1} s **težinskom** funkcijom $w_b(x) := (b - x) w(x)$.

Gauss–Lobatto formule — oba ruba, $d = 2n - 3$

Neka su **oba** ruba intervala — točke a i b konačne

• i **zadane** kao čvorovi integracije $x_1 = a$, $x_n = b$.

Preostala $k = n - 2$ čvora određujemo tako da

• dobijemo **maksimalni** stupanj egzaktnosti $d = 2n - 3$.

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Lobatto** formule.

Na potpuno isti način se dokazuje da

• **preostala** $n - 2$ čvora x_2, \dots, x_{n-1} moraju biti nultočke **ortogonalnog** polinoma p_{n-2} s **težinskom** funkcijom $w_{a,b}$,

$$w_{a,b}(x) := (x - a)(b - x) w(x).$$

Napomena: ovo “**transformiranje**” težinske funkcije radi **samo** za čvorove u **rubovima** intervala (**nenegativnost**).

Primjer za težinske formule

Težinska Newton–Cotesova vs. Gaussova f.

Primjer. Napravimo usporedbu

- zatvorene **Newton–Cotesove** formule i
- **Gaussove** formule

s 2 čvora, za **težinsku** funkciju $w(x) = x^{-1/2}$ na intervalu $[0, 1]$.

Tražene integracijske formule glase:

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx \approx \begin{cases} w_1^{NC} f(0) + w_2^{NC} f(1) & \text{(Newton–Cotes),} \\ w_1^G f(x_1) + w_2^G f(x_2) & \text{(Gauss).} \end{cases}$$

Težinska Newton–Cotesova formula

Za Newton–Cotesovu formulu, težine w_1^{NC} i w_2^{NC} možemo izračunati iz eksplicitne formule

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, 2.$$

Lagrangeova baza ℓ_1 i ℓ_2 za zadane čvorove 0 i 1 jednaka je

$$\ell_1(x) = \frac{x - 1}{0 - 1} = -x + 1,$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - 0}{1 - 0} = x,$$

Težinska Newton–Cotesova formula

pa imamo

$$\begin{aligned}w_1^{NC} &= \int_0^1 x^{-1/2} \ell_1(x) dx = \int_0^1 (x^{-1/2} - x^{1/2}) dx \\ &= \left(2x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3},\end{aligned}$$

$$w_2^{NC} = \int_0^1 x^{-1/2} \ell_2(x) dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ovaj pristup ima smisla **samo** kad se polinomi ℓ_1 i ℓ_2 **lako** računaju, tj. **samo** kad su čvorovi “**jednostavni**”, poput 0 i 1.

Težinska Newton–Cotesova formula

Obično je puno lakše iskoristiti da Newton–Cotesova formula egzaktno integrira bazu prostora polinoma \mathcal{P}_1 .

Uvrštavanjem $f(x) = 1$ dobivamo jednažbu

$$w_1^{NC} \cdot 1 + w_2^{NC} \cdot 1 = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2,$$

a uvrštavanjem $f(x) = x$ dobivamo jednažbu

$$w_1^{NC} \cdot 0 + w_2^{NC} \cdot 1 = \int_0^1 x^{-1/2} x dx = \frac{2}{3}.$$

Odmah izlazi

$$w_2^{NC} = \frac{2}{3}, \quad w_1^{NC} = 2 - w_2^{NC} = \frac{4}{3}.$$

Težinska Newton–Cotesova formula

Tražena zatvorena Newton–Cotesova formula glasi:

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx = \frac{4}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(1) + E_2^{NC}(f),$$

pri čemu je $E_2^{NC}(f)$ pripadna greška.

Uočite da **korijenski** singularitet u **nuli** uzrokuje da

- vrijednost $f(0)$ dobiva **dvostruko veću** težinu od vrijednosti $f(1)$.

Gaussova formula

Gaussovu formulu najlažše je odrediti preko **ortogonalnih** polinoma. Treba nam **normalizirani** ortogonalni polinom p_2 , stupnja 2, s težinom $x^{-1/2}$ na $[0, 1]$

$$p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0.$$

Taj polinom mora biti **ortogonalan** na polinome **nižeg** stupnja:

☛ za polinom 1 dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{-1/2} p_2(x) dx = \int_0^1 (x^{3/2} + a_1 x^{1/2} + a_0 x^{-1/2}) dx \\ &= \left(\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2a_1}{3} x^{3/2} + 2a_0 x^{1/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} a_1 + 2a_0, \end{aligned}$$

Gaussova formula

za polinom x izlazi:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{-1/2} x p_2(x) dx = \int_0^1 (x^{5/2} + a_1 x^{3/2} + a_0 x^{1/2}) dx \\ &= \left(\frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{2a_1}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} a_0 x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{2}{5} a_1 + \frac{2a_0}{3}. \end{aligned}$$

Sustav za koeficijente polinoma p_2 je:

$$\frac{2}{3} a_1 + 2a_0 = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} a_1 + \frac{2}{3} a_0 = -\frac{2}{7}.$$

Gaussova formula

Rješenje tog sustava je

$$a_1 = -\frac{6}{7}, \quad a_0 = \frac{3}{35},$$

pa je **ortogonalni** polinom p_2

$$p_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35}.$$

Čvorovi za **Gaussovu** integracijsku formulu su **nultočke** polinoma p_2 :

$$x_1 = \frac{1}{7} \left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}} \right) \approx 0.11558710999704793517,$$

$$x_2 = \frac{1}{7} \left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}} \right) \approx 0.74155574714580920769.$$

Gaussova formula

Za računanje težinskih koeficijenata w_1^G i w_2^G , mogli bismo iskoristiti formulu za w_k , kao kod Newton–Cotesove formule.

Međutim, kad imamo čvorove x_1 i x_2 , puno je lakše iskoristiti da Gaussova formula egzaktno integrira bazu polinoma

• stupnja 0, pa stavljamo $f(x) = 1$ i dobivamo jednadžbu

$$w_1^G + w_2^G = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2,$$

• i stupnja 1, pa stavljamo $f(x) = x$ i dobivamo jednadžbu

$$w_1^G x_1 + w_2^G x_2 = \int_0^1 x^{-1/2} x dx = \frac{2}{3}.$$

Gaussova formula

Rješenje prethodnog sustava od dvije jednačbe je

$$w_1^G = 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 1.30429030972509228525,$$

$$w_2^G = 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0.69570969027490771475.$$

Sada je težina

• w_1^G približno 1.87476 puta **veća** od težine w_2^G .

Gaussova formula

Tražena Gaussova formula glasi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx &= \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cdot f\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cdot f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &+ E_2^G(f), \end{aligned}$$

pri čemu je $E_2^G(f)$ pripadna greška.

