Numerička matematika
13. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Rješavanje nelinearnih jednadžbi (nastavak):
  - Regula falsi — metoda pogrešnog položaja.
  - Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka.
  - Metoda tangente — Newtonova metoda.
  - Metoda sekante.
  - Metoda jednostavne iteracije.
  - Newtonova metoda za višestruke nultočke.
  - Primjeri.
  - Primjeri metoda višeg reda konvergencije.

Informacije

Konzultacije (službeno):

- samo za NM: ponedjeljak u 13 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, "žive" su i domaće zadaće na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

ili, izravno

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Dodatni bodovi "čekaju na vas".

Informacije — kolokviji, rok za zadaće

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu A2.

- Drugi kolokvij: ponedjeljak, 27. 5. 2013., u 12 sati.
- Popravni kolokvij: ponedjeljak, 10. 6. 2013., u 12 sati.

Uputa: "izbjegnite" popravni — obavite to ranije!

Rok za predaju zadaća je

- dan drugog kolokvija, do početka kolokvija.

Aplikacija se tada "zatvara za javnost" — bodovi su konačni.

Upis ocjene, odnosno, dogovor za usmeni (po želji) je

- odmah na "uvidu u kolokvije".

Nemojte odgađati upis ocjene, iako će biti još termina.

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja od prošlih 5 godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Informacije — demonstratori

Kolegij "Numerička matematika" ima dva demonstratora:

- Mario Berljafa
  - termini: utorak, 9–10 i petak, 12–13.
  - e–mail: `mberljaf@student.math.hr`
- Marin Bužančić
  - termin: utorak, 16–18.
  - e–mail: `buzancic@student.math.hr`

Demosi lijepo mole da im se najavite mailom bar dan ranije!

- Sastanak za demonstrature je pred oglasnom pločom (bar zasad).

Regula falsi
(metoda pogrešnog položaja)

Uvodno o metodi pogrešnog položaja

Znamo da metoda raspolavljanja ima

- sigurnu konvergenciju, ali je vrlo spora.

Regula falsi ili metoda pogrešnog položaja je prirodan pokušaj ubrzavanja metode raspolavljanja. I ova metoda ima

- sigurnu konvergenciju,

uz iste pretpostavke kao u metodi raspolavljanja.

Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- neprekidna na intervalu $[a, b]$
- i da u rubovima intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Ideja i skica algoritma

Ideja metode: Aproksimirajmo funkciju f pravcem koji prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Traženu nultočku α tada možemo aproksimirati

- nultočkom tog pravca — označimo ju s x_0.

Uočite da pravac sigurno siječe os x, zbog $f(a) \cdot f(b) < 0$.

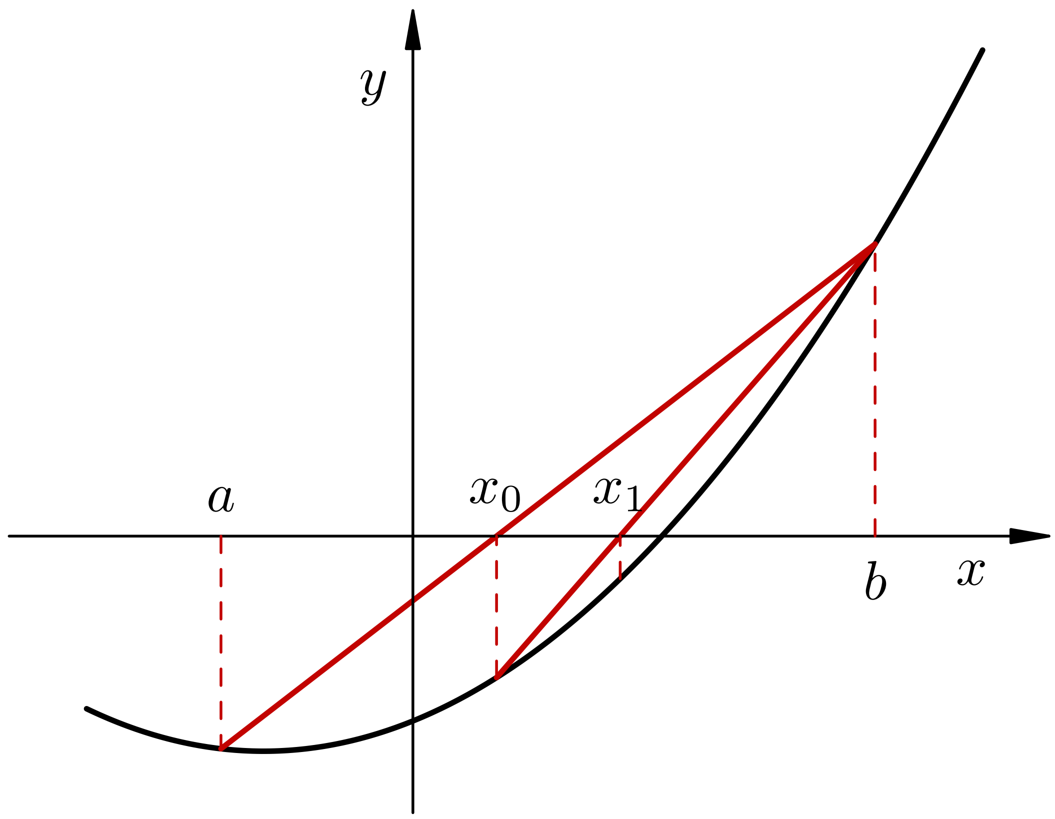
Nakon toga,

- pomaknemo ili točku a, ili točku b — u točku x_0,
- ali tako da je nultočka ostala unutar novodobivenog intervala (test predznaka, kao kod raspolavljanja).

Postupak ponavljamo sve dok nismo postigli željenu točnost.

Metoda pogrešnog položaja — grafički

Grafički, regula falsi ili metoda pogrešnog položaja izgleda ovako



Regula falsi — osnovne ideje

Točka x_0 dobiva se jednostavno iz jednadžbe pravca, pa je

$$x_0 = b - f(b)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Dakle, osnovne ideje metode su:

- aproksimacija pravcem
- i "zatvaranje" nultočke u određeni — sve manji interval.

Iz slike zaključujemo da je to sasvim dobra ideja,

- za monotone i konveksne (ili konkavne) funkcije.

Nažalost, postoje ozbiljni problemi i s ovom metodom.

- Konvergencija je i dalje linearna, kao kod raspolavljanja.
- Može biti vrlo spora — sporija nego kod raspolavljanja.

Regula falsi — red konvergencije

Izvedimo red konvergencije metode pogrešnog položaja.

Uz oznaku za prvu podijeljenu razliku

$$f[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

formula za prvu aproksimaciju x_0 glasi

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f[a,b]}.$$

Treba naći izraz za grešku $\alpha - x_0$.

Prethodnu relaciju pomnožimo s s -1 i dodamo α na obje strane, tako da lijeva strana postane upravo $\alpha - x_0$.

Regula falsi — red konvergencije

Dobivamo redom

$$\begin{aligned}
\alpha - x_0 &= \alpha - b + \frac{f(b)}{f[a,b]} = (\text{izlučimo } \alpha - b) \\
&= (\alpha - b)\left(1 + \frac{f(b)}{(\alpha - b) f[a,b]}\right) = (\text{uvalimo } f(\alpha) = 0) \\
&= (\alpha - b)\left(1 + \frac{f(b) - f(\alpha)}{(\alpha - b) f[a,b]}\right) = (\text{sredimo u } f[b,\alpha]) \\
&= (\alpha - b)\left(1 - \frac{f[b,\alpha]}{f[a,b]}\right) = (\alpha - b)\,\frac{f[a,b] - f[b,\alpha]}{f[a,b]} \\
&= -(\alpha - b)\,(\alpha - a)\,\frac{f[a,b,\alpha]}{f[a,b]}.
\end{aligned}$$

Regula falsi — red konvergencije

Ako je funkcija f dovoljno glatka, onda

- podijeljene razlike $f[a,b,\alpha]$ i $f[a,b]$ možemo napisati preko derivacija funkcije f.

Ako je f klase $C^1[a,b]$, onda po Teoremu srednje vrijednosti imamo

$$f[a,b] = f'(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

Na sličan način, ako je f klase $C^2[a,b]$, onda vrijedi

$$f[a,b,\alpha] = \frac{1}{2} f''(\zeta),$$

gdje se ζ nalazi između minimuma i maksimuma vrijednosti a, b i α. Zbog $\alpha \in [a,b]$ to opet daje $\zeta \in [a,b]$.

Sad ove dvije relacije uvrstimo u izraz za grešku.

Regula falsi — red konvergencije

Za funkciju $f \in C^2[a,b]$, dobivamo sljedeći izraz za grešku

$$\alpha - x_0 = -(\alpha - b)\,(\alpha - a)\,\frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)}.$$

Uočimo još da, zbog $\alpha \in [a,b]$, vrijedi

$$-(\alpha - b)\,(\alpha - a) = (b - \alpha)\,(\alpha - a) > 0.$$

Da bismo pojednostavnili analizu, pretpostavimo da

- prva derivacija f' i druga derivacija f'' imaju konstantan predznak na $[a,b]$ (pozitivne ili negativne).

Onda je α jedina nultočka funkcije f u intervalu $[a,b]$, jer je f monotona.

Regula falsi — red konvergencije

U nastavku gledamo samo jedan od četiri moguća slučaja za predznake f' i f''.

Pretpostavimo da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

- f monotono rastuća i konveksna na $[a, b]$.

U tom slučaju,

- spojnica točaka $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ uvijek se nalazi iznad grafa funkcije f, kao na prethodnoj slici.

Uvrštavanjem podataka o predznaku prve i druge derivacije u

$$\alpha - x_0 = (b - \alpha)\,(\alpha - a)\,\frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)},$$

dobivamo da je desna strana veća od 0, pa je i $\alpha > x_0$.

Regula falsi — red konvergencije

Što sve slijedi iz $\alpha > x_0$?

Po pretpostavci, funkcija f monotono raste na $[a, b]$, pa je

$$f(a) < f(x_0) < f(\alpha) = 0 < f(b).$$

To znači da treba "pomaknuti" a za sljedeći korak metode, jer $f(a)$ i $f(x_0)$ imaju isti predznak, tj. $\alpha \in [x_0, b]$. Dakle, imamo

- $a_1 := x_0$, a b ostaje fiksan, $b_1 := b$.

Potpuno isto će se dogoditi i u svim narednim koracima. Drugim riječima,

- aproksimacije x_n neprestano ostaju lijevo od nultočke α,
- tj. pomiče se lijevi rub intervala, $a_n := x_{n-1}$,
- a desni rub b ostaje fiksan, $b_n := b_{n-1} = \cdots = b$.

Regula falsi — red konvergencije

U proizvoljnoj iteraciji — kad računamo x_n, uz $\alpha \in [a_n, b_n]$, relacija za grešku ima oblik

$$\alpha - x_n = (b_n - \alpha)\,(\alpha - a_n)\,\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}.$$

Kad uvrstimo prethodne zaključke $a_n = x_{n-1}$ i $b_n = b$, izlazi

$$\alpha - x_n = \left((b - \alpha)\,\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)} \right) (\alpha - x_{n-1}).$$

Uzimanjem apsolutnih vrijednosti slijeva i zdesna, slijedi da

- u ovom slučaju, regula falsi konvergira linearno.

Zadatak. Dokažite da je faktor u prvoj zagradi na desnoj strani po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ($\Rightarrow$ konvergencija).

Regula falsi — red konvergencije

Za metodu bisekcije dobili smo sličnu relaciju za grešku, samo je faktor bio $1/2$. Usporedbom izraza za greške vidimo da

- nije teško konstruirati primjere kad je metoda bisekcije brža no regula falsi.

Probajte naći takav primjer!

Napomena. Sasvim analogno se analiziraju i ostala tri slučaja za predznake f' i f'' na $[a, b]$. Na primjer, ako je f konveksna, ali monotono pada, tj. $f'' > 0$ i $f' < 0$,

- aproksimacija x_n je uvijek desno od α,
- a uvijek se pomiče desni rub b.

U svim slučajevima izlazi da regula falsi konvergira linearno.

Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka

Konstrukcija iterativnih metoda

Kod konstrukcije metode bisekcije i regule falsi, koristili smo dvije startne pretpostavke o funkciji f i intervalu $[a, b]$ na kojem radimo. Te pretpostavke su:

- "glatkoća" — funkcija f je neprekidna na intervalu $[a, b]$,
- "lokacija nultočke" — u rubovima intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

  tj. funkcijske vrijednosti u rubovima intervala imaju različit predznak.

Uz prvu, druga pretpostavka osigurava da f ima bar jednu nultočku u $[a, b]$

- i ove rubne točke a, b su bitne za start iteracija.

Obje metode sigurno konvergiraju, ali sporo — linearno.

Konstrukcija iterativnih metoda

U nastavku, krećemo od drugačijih pretpostavki za konstrukciju iterativnih metoda.

Ako funkcija f ima veću glatkoću na nekoj domeni,

- smijemo koristiti vrijednosti prve derivacije f' u točkama,
- može i vrijednosti viših derivacija, ako postoje.

Do sada smo veću glatkoću koristili samo kod ocjene greške.

Što se lokacije tiče, krećemo od slabijih pretpostavki.

- Za konstrukciju iterativne metode — ne pretpostavljamo ništa, tj. lokacija nultočke nije bitna.

Kod analize konvergencije metode — lokacija nultočke, naravno, ima ključnu ulogu.

Konstrukcija iterativnih metoda

Opće ideje za konstrukciju iterativnih metoda za nalaženje nultočaka funkcije su sljedeće.

- Jednu ili više startnih točaka možemo, bar u principu, izabrati bilo gdje.

Zatim, počevši od tih startnih točaka,

- iterativno generiramo neki niz aproksimacija (= metoda).

U svakoj iteraciji, novu aproksimaciju generiramo tako da je

aproksimacija nultočke = nultočka aproksimacije,

s tim da se aproksimacija određuje na osnovu jedne ili više prethodnih točaka — tzv. iteracijskom funkcijom.

Ideja iteracije je slična onoj kod integracijskih formula.

Konstrukcija iterativnih metoda

Na primjer, kod Newtonove metode, funkciju aproksimiramo

- tangentom u jednoj (zadnjoj) točki,

a kod metode sekante,

- sekantom kroz dvije (zadnje) točke.

Kod ovakvog pristupa, gubimo sigurnu konvergenciju, tj.

- može se dogoditi da metode ne konvergiraju, ovisno o startu iteracija.

Međutim, ako konvergiraju,

- konvergencija je brža — kad smo dovoljno blizu nultočke.

Za pojedine metode, navest ćemo i neke uvjete koji osiguravaju konvergenciju (slično kao kod regule falsi).

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Pretpostavimo da je funkcija f barem

- neprekidno derivabilna na nekoj domeni,
- idealno — na cijelom $\mathbb{R}$.

Nadalje, neka je zadana, ili nekako izabrana,

- početna točka x_0.

Ideja metode tangente je

- povući tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,

i definirati novu aproksimaciju x_1

- u točki gdje ta tangenta siječe os x.

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Drugim riječima, funkciju f

- aproksimiramo pravcem — tangentom u točki $(x_0, f(x_0))$ (to je najbolja linearna aproksimacija funkcije f u okolini točke x_0),

a nepoznatu nultočku funkcije f

- aproksimiramo nultočkom x_1 tog pravca — te tangente na graf funkcije f u zadanoj točki.

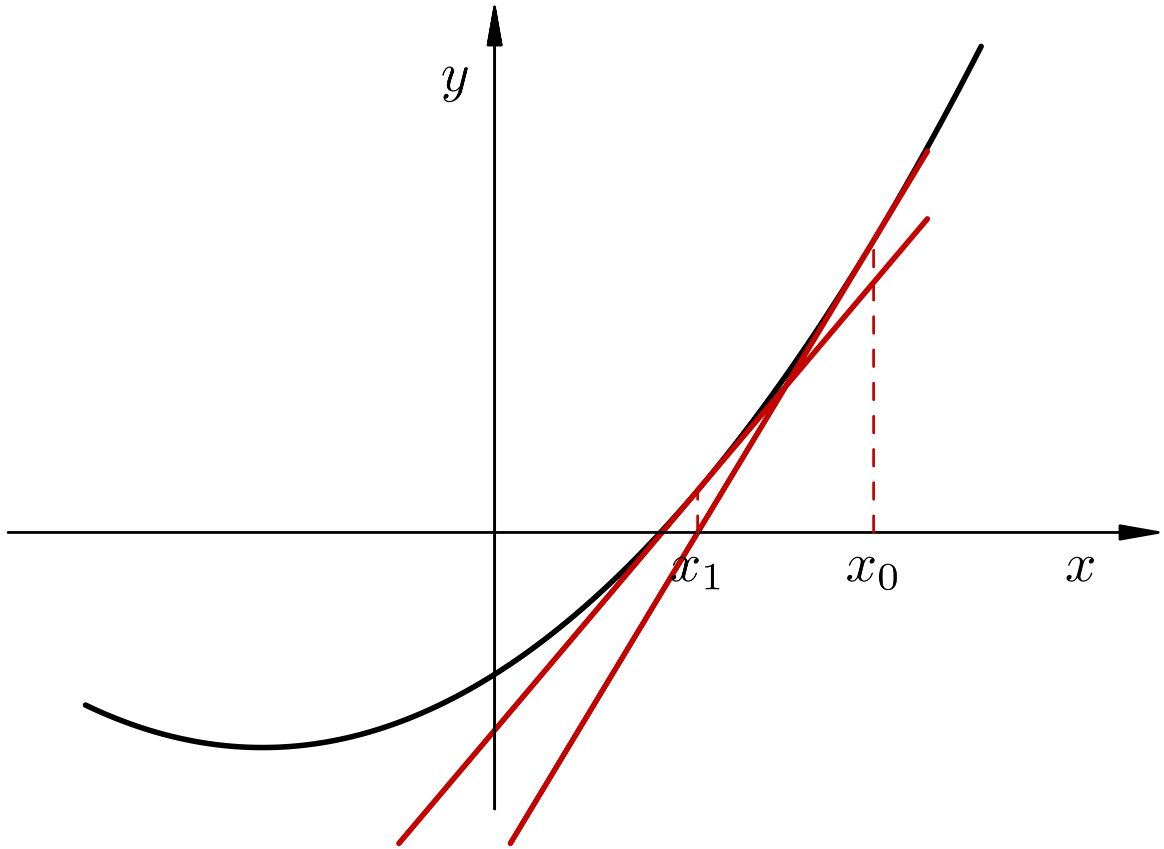
Isti postupak možemo ponoviti u točki x_1 i dobiti sljedeću točku x_2. Kad ovaj postupak iteriramo — induktivno ponovimo u svakoj sljedećoj točki x_n, za $n \geq 0$, dobivamo

- metodu tangente ili Newtonovu metodu

za nalaženje nultočke funkcije f.

Newtonova metoda — grafički

Grafički, Newtonova metoda za nalaženje nultočke izgleda ovako



Geometrijski izvod Newtonove metode

Geometrijski izvod metode je jednostavan.

- U točki x_n napišemo jednadžbu tangente i pogledamo gdje tangenta siječe os x.

Jednadžba tangente je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Iz zahtjeva $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je nova aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ postoji (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u svim točkama x_n.

Analitički izvod Newtonove metode

Do Newtonove metode može se doći i analitički,

- ali uz malo jače pretpostavke,
- iz kojih onda slijedi i izraz za grešku.

Neka je α neka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je

- f dva puta neprekidno derivabilna na nekom intervalu oko α.

Tj. pretpostavljamo da je $f \in C^2(I)$, gdje je I segment takav da je $\alpha \in I$.

Neka je $x_n \in I$ bilo koja točka — neka aproksimacija za α.

Onda funkciju f možemo razviti u Taylorov red oko x_n, do uključivo prvog člana.

Analitički izvod Newtonove metode

Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}\,(x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n, tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem nultočke $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}\,(\alpha - x_n)^2.$$

Uz pretpostavku $f'(x_n) \neq 0$, dijeljenjem i premještanjem izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2\,\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Analitički izvod Newtonove metode

Ako pretpostavimo da je aproksimacija x_n dovoljno blizu α,

- tj. da je $|\alpha - x_n|$ mali,
- onda očekujemo da je $(\alpha - x_n)^2$ još puno manji.

Zato možemo "zanemariti" zadnji član u relaciji

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

i definirati novu aproksimaciju x_{n+1}

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

s idejom da je $x_{n+1} \approx \alpha$ još bolja aproksimacija.

Relacija za grešku Newtonove metode

Oduzimanjem odmah dobivamo i izraz koji veže greške dviju susjednih iteracija

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Iz ovog "izvoda" samo očekujemo da se greška "smanjuje", ali to tek treba dokazati, uz odgovarajuće pretpostavke!

Sasvim općenito, to ne mora vrijediti!

Čak i kad startamo u nekom intervalu $I = [a, b]$ koji sadrži nultočku α, bez dodatnih pretpostavki — nema garancije

- da aproksimacije ostaju u tom intervalu I,
- a kamo li da konvergiraju (v. primjere kasnije).

Napomene o konvergenciji Newtonove metode

Dakle, Newtonova metoda ne mora konvergirati prema nultočki!

S druge strane, dokazat ćemo da ovaj zaključak vrijedi

- kad je x_n, odnosno, startna točka x_0 — dovoljno blizu α.

Takva konvergencija se obično naziva

- lokalna konvergencija metode.

Zaključke o konvergenciji metode (uz dovoljno jake pretpostavke) možemo podijeliti u tri grupe:

- brzina (lokalne) konvergencije — ako niz konvergira,
- lokalna konvergencija metode — uz start dovoljno blizu,
- globalna konvergencija metode na nekom intervalu I.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Brzina lokalne konvergencije izlazi direktno iz izraza za grešku u susjednim iteracijama.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α.

Ako niz aproksimacija x_n generiran Newtonovom metodom konvergira prema α,

- onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna,

i na limesu vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Brzina konvergencije Newtonove metode

Dokaz. Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α.

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α. Onda mora vrijediti i $\xi_n \to \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I, pa dobivamo

$$f'(x_n) \to f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \to f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Zato smijemo prijeći na limes $x_n \to \alpha$ u relaciji za grešku.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Prijelazom na limes $x_n \to \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Odavde čitamo da je Newtonova metoda, kad konvergira,

- (barem) kvadratno konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i brža od kvadratne!

Ipak, treba biti oprezan, jer prethodni zaključci vrijede

- samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. ako je α jednostruka nultočka.

Za višestruke nultočke ovo ne vrijedi, jer

- konvergencija može biti i samo linearna (v. malo kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Sljedeći rezultat o konvergenciji Newtonove metode je

- lokalna konvergencija za jednostruke nultočke α,

uz pretpostavku da je funkcija $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α.

Neformalno rečeno, tvrdnja kaže sljedeće:

- ako je početna točka x_0 dovoljno blizu nultočke α,
- onda je Newtonova metoda

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

dobro definirana — tj. vrijedi $f'(x_n) \neq 0$ za sve $n \geq 0$,

- i ovaj niz konvergira prema α, i to (barem) kvadratno.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Prava formulacija je malo složenija, jer precizno opisuje što znači "dovoljno blizu".

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \le \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α.

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$. Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Onda postoji $\varepsilon > 0$, toliko mali da vrijedi

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Nadalje, za svaki takav ε, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda je dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Dokaz. Zato što je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$. To znači da na limesu $\varepsilon \to 0$ dobivamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty,$$

pa postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$, takav da je $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Po definiciji I_ε, za svaku točku $x \in I_\varepsilon$ vrijedi $|x - \alpha| \leq \varepsilon$. To ćemo iskoristiti nekoliko puta!

1. korak. Pokažimo da je $f'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Iz Taylorovog razvoja prve derivacije f' oko α (ili teorema srednje vrijednosti za f'), dobivamo

$$f'(x) = f'(\alpha) + f''(\zeta)(x - \alpha),$$

za neki ζ između α i x, pa je i $\zeta \in I_\varepsilon$.

Zbog $f'(\alpha) \neq 0$, u ovoj relaciji možemo izlučiti $f'(\alpha)$, pa je

$$f'(x) = f'(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)}\,(x - \alpha)\right).$$

Prvi faktor je, očito, različit od nule.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi član u drugom faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} (x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} \varepsilon = 2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za cijeli drugi faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} (x - \alpha) > 0.$$

Zbog toga je i $f'(x) \neq 0$. Osim toga, vidimo da

- $f'(x)$ ima isti predznak kao i $f'(\alpha)$, za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Ovo je jedini dio dokaza u kojem koristimo $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

U nastavku dokaza, bit će dovoljno samo $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

2. korak. Pokažimo da je α jedina nultočka funkcije f u I_ε.

Upravo smo pokazali da je $f'(x) \neq 0$ na I_ε, pa je funkcija f monotona na I_ε, tj. može imati najviše jednu nultočku.
Dakle, α je jedina nultočka od f u I_ε.

Isti zaključak se može dobiti i direktno, kao u prošlom koraku.

Iz Taylorovog razvoja f oko α, za bilo koji $x \in I_\varepsilon$, imamo

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - \alpha)^2,$$

za neki ξ između α i x, pa je i $\xi \in I_\varepsilon$.

Znamo da je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, pa opet izlučimo $f'(\alpha)$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dobivamo

$$f(x) = f'(\alpha)(x-\alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}\,(x-\alpha)\right).$$

Prvi faktor je, očito, različit od nule. Za drugi član u trećem faktoru imamo ocjenu

$$\left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}\,(x-\alpha)\right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}\,\varepsilon = \varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za treći faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}\,(x-\alpha) > 0.$$

Dakle, $f(x) = 0$ za neki $x \in I_\varepsilon$, ako i samo ako je drugi faktor jednak nuli, tj. za $x = \alpha$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

3. korak. Neka je $x_0 \in I_\varepsilon$ bilo koja startna točka. Onda je $f'(x_0) \neq 0$, pa je prvi korak Newtonove metode dobro definiran

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Kad je $n = 0$, relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_1 = -(\alpha - x_0)^2 \, \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)},$$

gdje je ξ_0 između x_0 i α, pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Zatim, imamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_1| &\leq |\alpha - x_0|^2 \, M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_0| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_0| \, \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pa je $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$, što dokazuje da je $x_1 \in I_\varepsilon$.

Dakle, ako startamo u bilo kojoj točki $x_0 \in I_\varepsilon$, onda

- sljedeća aproksimacija x_1 po Newtonovoj metodi, ostaje unutar segmenta I_ε.

Induktivnom primjenom ovog argumenta (x_0 je proizvoljan), dobivamo da isto vrijedi i za svaku sljedeću aproksimaciju x_n.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dakle, za svaki $n \geq 0$, u točki x_n vrijedi $f'(x_n) \neq 0$, pa je sljedeća aproksimacija dobro definirana relacijom

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0,$$

i ostaje unutar polaznog segmenta, tj. vrijedi $x_{n+1} \in I_\varepsilon$.

4. korak. Preostaje još samo dokazati konvergenciju niza x_n prema nultočki α.

Relacija koja veže greške dviju susjednih iteracija x_n i x_{n+1} je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Slično kao u prethodnom koraku, dobivamo redom

$$\begin{aligned}|\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 \, M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) \, |\alpha - x_n| \\ &\leq \ldots (\text{induktivno spuštamo } n \text{ do nule}) \\ &\leq \big(\varepsilon M(\varepsilon)\big)^{n+1} \, |\alpha - x_0|.\end{aligned}$$

Zbog $\varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1$, odavde odmah slijedi da $x_n \to \alpha$ kad $n \to \infty$ (= "geometrijska" konvergencija s faktorom $\varepsilon M(\varepsilon)$). ■

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Ovaj rezultat o lokalnoj konvergenciji teško možemo iskoristiti u praksi — za osiguranje konvergencije Newtonove metode

- bar iz neke startne točke x_0, koju znamo naći (što bi bilo sasvim dovoljno za nalaženje nultočke).

Problem = traženi ε iz tvrdnje ne znamo i nije ga lako naći!

Pretpostavimo da smo locirali nultočku funkcije f u segmentu $[a, b]$ i znamo da je $f \in C^2[a, b]$. Neka je “globalno” na $[a, b]$

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Pretpostavimo još da je

- f strogo monotona na $[a, b]$, što je ekvivalentno s $m_1 > 0$.

Tada f ima jedinstvenu jednostruku nultočku α u $[a, b]$.

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

To znači da imamo sve osnovne pretpostavke prethodnog teorema o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode

- i još znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$.

Umjesto "lokalnog" $M(\varepsilon)$, izračunamo "globalnu" veličinu

$$M := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Sad možemo pokušati izabrati ε tako da vrijedi

- $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ — pa mora biti $M \geq M(\varepsilon)$, jer $M(\varepsilon)$ raste s ε,
- i da je $\varepsilon M < 1$ — to onda osigurava i $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Ne treba zahtijevati jači uvjet $2\varepsilon M < 1$, jer već znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$ (ostatak dokaza koristi samo slabiji uvjet).

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Primjer. Uzmemo ε tako "globalno" vrijedi

$$\varepsilon M < 1.$$

Nažalost, bez dodatnih uvjeta, još uvijek se može dogoditi da

- pripadni interval I_ε nije sadržan u $[a, b]$, već "viri" preko ruba intervala $[a, b]$.

To se sigurno događa ako je $\varepsilon > (b - a)/2$. Inače, dovoljno je da nultočka α leži blizu jednog ruba intervala — bliže od ε.

- Tada ne mora vrijediti $M \geq M(\varepsilon)$, pa ni $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Onda više nemamo garanciju lokalne konvergencije, tj.

- čak i da uzmemo početnu iteraciju $x_0 \in I_\varepsilon \cap [a, b]$,
- već prva sljedeća iteracija x_1 može izaći izvan $[a, b]$, čak izvan I_ε (taj interval ne znamo, jer ne znamo α).

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Naime, 3. korak je ključni dio teorema o lokalnoj konvergenciji!

Poanta. Treba uzeti još manji ε tako da bude $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$, tj. tako da vrijedi još i

$$a + \varepsilon \leq \alpha \leq b - \varepsilon.$$

No, baš to je problem — jer ne znamo gdje je α.

Kad ima neke koristi? Ako nađemo ε takav da je

$$\varepsilon M < 1 \quad \text{i} \quad \varepsilon < \frac{b-a}{2},$$

i još pokažemo da je $\alpha \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ — na primjer,

- provjerom da $f(a)$ i $f(a + \varepsilon)$ imaju isti znak, te $f(b)$ i $f(b - \varepsilon)$ imaju isti znak,

onda znamo da je $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ i da vrijedi $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Problem — “lokalnost” lokalne konvergencije

Tada imamo sigurnu lokalnu konvergenciju Newtonove metode

- za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$.

Međutim, još uvijek ne znamo gdje treba startati, jer ne znamo gdje se nalazi “pravi” I_ε unutar $[a, b]$. Što sad?

Možemo napraviti pretragu intervala $[a, b]$ s korakom $h \leq 2\varepsilon$, tj. “testirati” startne točke oblika

$$x_0 = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots\ ,$$

Bar jedna takva startna točka x_0 daje sigurnu konvergenciju Newtonove metode. Oprez: za svaku takvu točku x_0 treba

- pažljivo provjeravati sve sljedeće iteracije x_n — ostaju li unutar $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, ili, barem, unutar $[a, b]$.

Finale: ova pretraga je spora — bisekcija je, vjerojatno, brža!

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da sve iteracije x_n leže unutar intervala $[a, b]$. Onda možemo dobiti i ocjenu

- lokalne greške susjednih iteracija u Newtonovoj metodi,

u terminima veličina M_2 i m_1 (na tom intervalu).

Iz ranije relacije za grešku

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \, \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} između nultočke α i x_{n-1}, odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} \, (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer nultočku α ne znamo. Tražimo ocjenu preko veličina koje znamo izračunati.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Za dvije susjedne iteracije x_{n-1} i x_n u Newtonovoj metodi, također, vrijedi veza preko Taylorove formule

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned}$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n.

Po definiciji iteracija u Newtonovoj metodi, vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Sad iskoristimo pretpostavku da je x_{n-1}, $x_n \in [a, b]$, pa onda mora biti i $\xi_{n-1} \in [a, b]$. Dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode bisekcije, ako je $m_1 > 0$, onda vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo ocjenu greške za svaku iteraciju x_n u Newtonovoj metodi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Ova ocjena se može iskoristiti. Ako je ε tražena točnost, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \le \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \le \varepsilon$, do na greške zaokruživanja.

Pripadni test zaustavljanja iteracija u Newtonovoj metodi je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Naravno, uz ovaj, možemo koristiti i raniji test zaustavljanja

$$|f(x_n)| \le m_1\varepsilon.$$

Veznik između ova dva testa je ili, tj. pitamo je li ispunjen jedan ili drugi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
- uz odgovarajući izbor startne točke x_0,

slično kao kod regule falsi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je $f \in C^2[a, b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako prva i druga derivacija f' i f'' nemaju nultočku u $[a, b]$, tj.

- ako f' i f'' imaju konstantan predznak na $[a, b]$,

onda Newtonova metoda konvergira prema

- jedinstvenoj jednostrukoj nultočki α funkcije f u $[a, b]$,

i to za svaku startnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo jedan od četiri moguća slučaja za predznake f' i f''.

U ostalim slučajevima, dokaz ide potpuno analogno.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Uzmimo, na primjer, da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

- f monotono rastuća i konveksna na $[a, b]$.

U tom slučaju, jer f raste, mora biti $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$.

Zbog $f'' > 0$, startna aproksimacija x_0

- mora zadovoljavati $f(x_0) > 0$, tj. $\alpha < x_0$, jer f raste.

U praksi možemo uzeti $x_0 = b$, jer je to jedina točka za koju sigurno znamo da vrijedi $f(x_0) > 0$.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz bilo koje startne točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Globalna konvergencija Newtonove metode

Za početak, znamo da je $x_0 > \alpha$. Tvrdimo da je

- $\alpha < x_n \leq x_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz ide indukcijom, a bazu već imamo.

Za korak indukcije, pretpostavimo da je $\alpha < x_n \leq x_0$. Onda je

$$f(x_n) > f(\alpha) = 0.$$

Osim toga, jer f raste, znamo da je $f'(x_n) > 0$, pa dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n \leq x_0,$$

što pokazuje da niz (x_n) monotono pada.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Iz Taylorove formule je

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je $\xi_n \in (\alpha, x_n) \subset [a, b]$. Zbog toga je $f''(\xi_n) > 0$, pa je

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Dakle, niz (x_n) je odozdo ograničen s α i monotono pada, pa postoji limes

$$\alpha' := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Odmah znamo i da je $\alpha \leq \alpha' \leq x_0$, tj. $\alpha' \in [a, b]$.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Prijelazom na limes u formuli za Newtonove iteracije dobivamo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

Zbog $f'(\alpha') \neq 0$, odavde odmah slijedi $f(\alpha') = 0$.

No, znamo da f ima

- jedinstvenu nultočku α u intervalu $[a, b]$,

pa mora biti $\alpha = \alpha'$.

Preostala tri slučaja za predznake prve i druge derivacije dokazuju se potpuno analogno. ∎

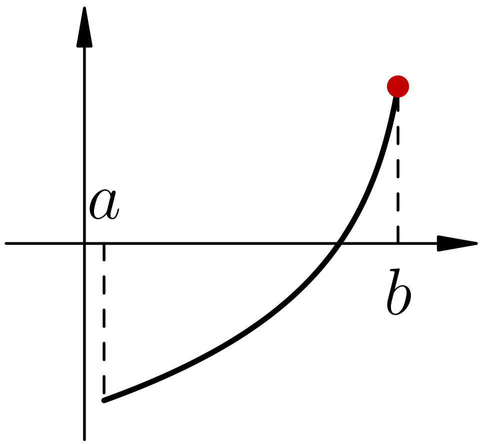
Uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ na izbor startne točke u prethodnom teoremu ima vrlo jednostavnu geometrijsku interpretaciju.

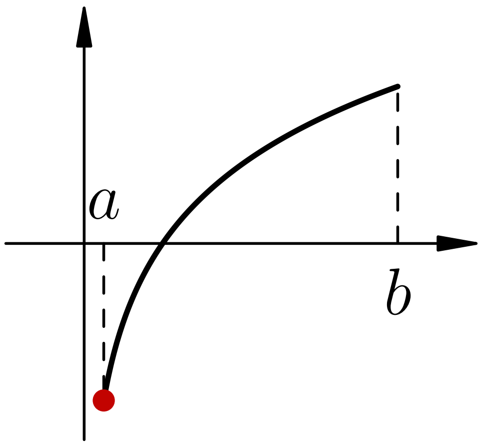
Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

- treba odabrati na “strmijoj” strani grafa funkcije.

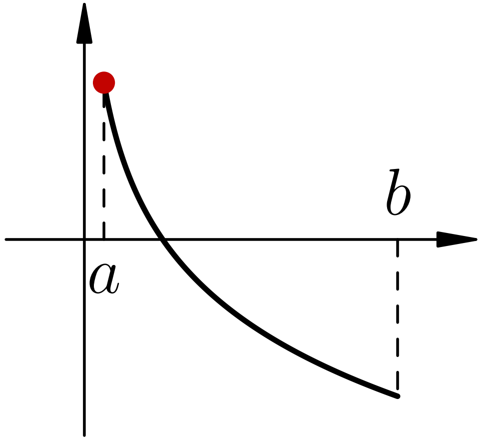
Izbor startne točke x_0 — ako je $f' > 0$, tj. f raste.

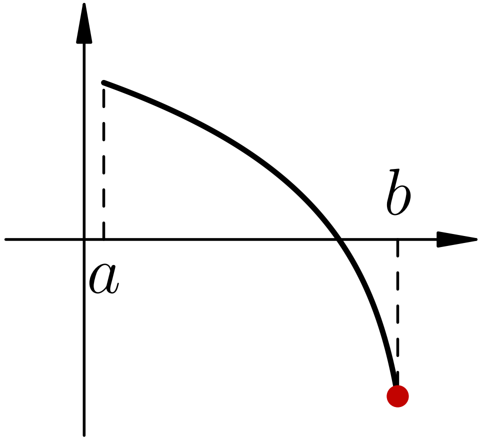




Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Izbor startne točke x_0 — ako je $f' < 0$, tj. f pada





Newtonova metoda — komentari

Prednosti:

- brza = kvadratna konvergencija.

Potencijalna mana: osim vrijednosti funkcije,

- trebamo i vrijednost prve derivacije u svakoj točki.

Ako se f' komplicirano računa,

- Newtonova metoda može biti sporija od metode sekante,
- iako ima veći red konvergencije (v. malo dalje).

Metoda sekante

Uvodno o metodi sekante

U Newtonovoj metodi koristimo

- tangentu u točki x_0 kao aproksimaciju funkcije f.

Ako ne znamo derivaciju f' funkcije f, ili se ona teško računa, onda možemo

- tangentu u točki x_0 aproksimirati sekantom kroz dvije startne točke x_0 i x_1,

što odgovara aproksimaciji derivacije $f'(x_0)$ podijeljenom razlikom

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Tako dobivamo metodu sekante.

Ideja metode sekante

Počinjemo s dvije početne točke x_0 i x_1.

Ideja metode sekante je

- povući sekantu grafa funkcije f kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$,

i definirati novu aproksimaciju x_2

- u točki gdje ta sekanta siječe os x.

Postupak nastavljamo povlačenjem sekante

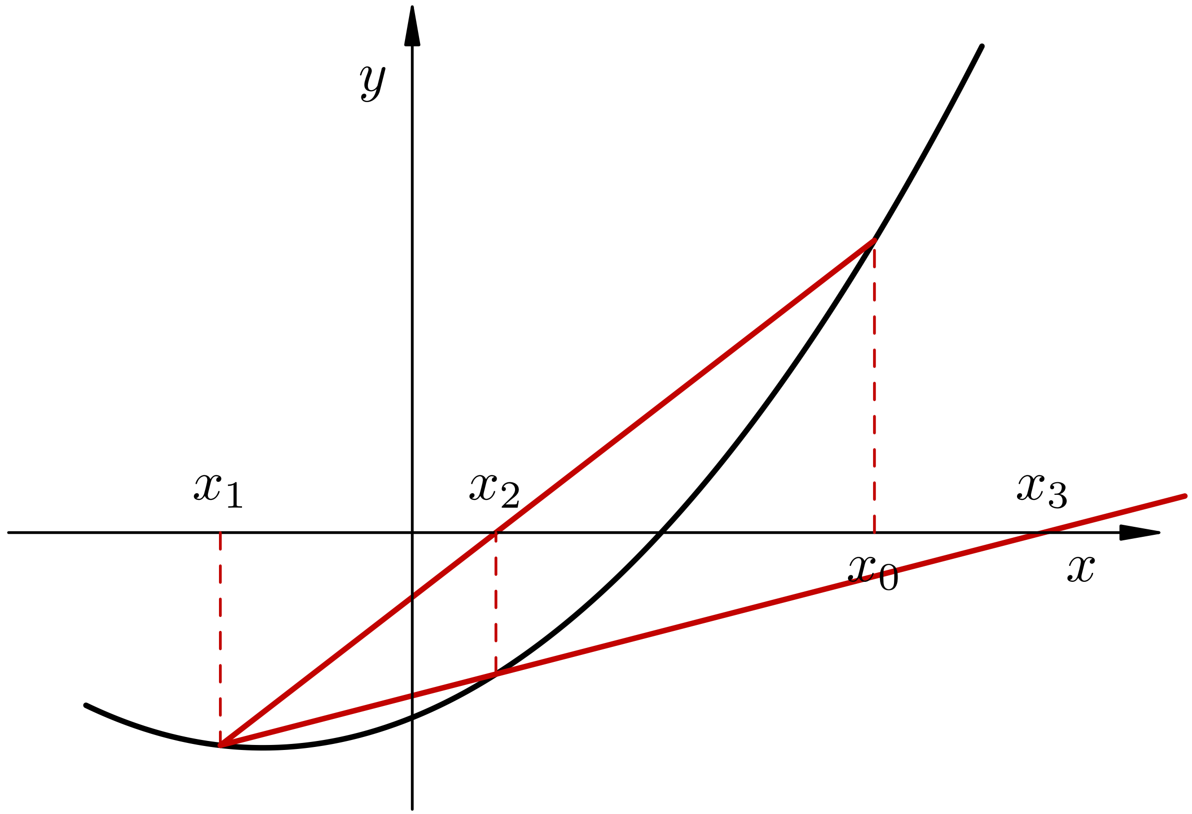
- kroz posljednje dvije točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$,

i tako redom.

Napomena. Tu je ključna razlika od regule falsi — tamo se jedna početna točka drži fiksnom.

Metoda sekante — grafički

Grafički, metoda sekante za nalaženje nultočke izgleda ovako



Primijetite da je treća iteracija izašla izvan početnog intervala, pa metoda sekante ne mora konvergirati.

Geometrijski izvod metode sekante

Geometrijski izvod metode je jednostavan.

- Napišemo jednadžbu sekante u točkama x_{n-1} i x_n i pogledamo gdje taj pravac siječe os x.

Jednadžba sekante je (linearna interpolacija za f u x_{n-1} i x_n)

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n).$$

Iz zahtjeva $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je nova aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da je $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ u svim "susjednim" točkama x_{n-1} i x_n.

Formula za iteracije u metodi sekanti

Formulu za metodu sekante možemo dobiti i iteriranjem početne formule za regulu falsi.

Izraz za novu aproksimaciju možemo napisati i ovako

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]},$$

za $n \geq 1$.

Relacija koja “veže” greške susjednih aproksimacija izvodi se na isti način kao kod regule falsi i ima oblik

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)\,(\alpha - x_{n-1})\,\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

gdje je ζ_n između x_{n-1}, x_n i α, a ξ_n između x_{n-1} i x_n.

Red konvergencije metode sekante

Iz ove relacije može se izračunati red konvergencije metode sekante, uz odgovarajuće pretpostavke. Dobivamo da je

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Dokaz je dosta kompliciran (i ima veze s Fibonaccijevim brojevima, a p je veće rješenje jednadžbe $p^2 = p + 1$).

Napomena. Metoda sekante se još naziva i

- metoda (inverzne) linearne interpolacije,

jer sljedeću aproksimaciju x_{n+1} dobivamo kao

- nultočku linearne interpolacije za f u prethodne dvije iteracije x_{n-1} i x_n.

Metoda jednostavne iteracije

Uvodno o metodi jednostavne iteracije

Problem. Pretpostavimo da tražimo rješenje jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Točke α za koje je $\alpha = \varphi(\alpha)$ zovu se fiksne točke funkcije φ.

Ideja. Definiramo jednostavnu iteracijsku funkciju (iteracijsku funkciju koja "pamti" samo jednu prethodnu točku), s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

uz x_0 kao neku početnu aproksimaciju za α.

Primjer. Newtonovu metodu možemo interpretirati i kao jednostavnu iteraciju, uz

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Reformulacija problema $f(x) = 0$

Uobičajeno, rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$, pa taj problem treba reformulirati na problem jednostavne iteracije. Za to postoji mnogo načina.

Primjer. Reformulirajmo problem "kvadratnog korijena" iz a

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad \text{za} \quad a > 0,$$

u oblik jednostavne iteracije.

Na primjer, to možemo napraviti na sljedeće načine:

1. $x = x^2 + x - a$ (dodamo x na obje strane) ili, općenitije, $x = x + c(x^2 - a)$, za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$, što izlazi iz $x = x + \frac{1}{2}(a/x - x)$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Prirodno je pitanje kako se različite jednostavne iteracije ponašaju. Odgovor dobivamo sljedećim nizom tvrdnji.

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b],$$

u oznaci $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Tada jednostavna iteracija $x = \varphi(x)$ ima bar jedno rješenje — fiksnu točku α na $[a, b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $g(x) = \varphi(x) - x$ na $[a, b]$ vrijedi

$$g(a) = \varphi(a) - a \geq 0, \qquad g(b) = \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $g(x) = \varphi(x) - x$ mijenja predznak na $[a, b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku α (neprekidna je!). ■

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Lema (Kontrakcija). Neka je funkcija φ neprekidna na $[a,b]$ i neka je

$$\varphi([a,b]) \subseteq [a,b].$$

Pretpostavimo da postoji konstanta q, takva da je $0 < q < 1$, i da vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Ovo svojstvo kaže da je φ kontrakcija na $[a,b]$.

Onda funkcija φ ima jedinstvenu fiksnu točku α unutar $[a,b]$.

Nadalje, za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a,b]$, niz iteracija

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

konvergira prema α.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, postoji bar jedna fiksna točka $\alpha \in [a, b]$. Pokažimo da ne može postojati više od jedne.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje barem dvije fiksne točke. Uzmimo bilo koje dvije od njih, nazovimo ih α i β. Budući da su to fiksne točke za φ, vrijedi

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta.$$

Po pretpostavci, funkcija φ je kontrakcija na $[a, b]$, pa je

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

odakle slijedi

$$(1 - q)\,|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Zbog $1 - q > 0$, mora biti $\alpha = \beta$, što dokazuje i jedinstvenost.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokažimo još konvergenciju niza jednostavnih iteracija za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$.

Uočimo da $x_{n-1} \in [a, b]$ povlači da je $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a, b]$. Nadalje, jer je φ kontrakcija, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}|.$$

Odavde, indukcijom po n, dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Ako pustimo $n \to \infty$, onda $q^n \to 0$, pa vrijedi $x_n \to \alpha$. ■

Primijetimo da posljednja formula znači da metoda jednostavne iteracije konvergira linearno, s faktorom q.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Uz pretpostavke prethodne leme, da je

- φ neprekidna kontrakcija s faktorom $q < 1$ na $[a, b]$,

lako se izvodi ocjena greške za metodu jednostavne iteracije.

Za dvije susjedne iteracije $x_n = \varphi(x_{n-1})$ i $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$ vrijedi

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

Prethodnu relaciju, induktivno po n, možemo raspisati kao

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Za ocjenu prave greške trebamo ocjenu vrijednosti $|\alpha - x_n|$, za bilo koji $n \geq 0$.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Zato, za fiksni n, gledamo ponašanje niza $|x_{n+p} - x_n|$, uz $p > 0$, s idejom da napravimo limes $p \to \infty$. Izlazi

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\le q^p |x_n - x_{n-1}| + \cdots + q|x_n - x_{n-1}| \\
&= q(q^{p-1} + \cdots + 1)\,|x_n - x_{n-1}| \\
&= q\,\frac{1 - q^p}{1 - q}\,|x_n - x_{n-1}| \le (\text{vrijedi } 1 - q^p \le 1) \\
&\le \frac{q}{1 - q}\,|x_n - x_{n-1}|.
\end{aligned}
$$

Na limesu kad $p \to \infty$, vrijedi $x_{n+p} \to \alpha$.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Lijeva strana postaje $|\alpha - x_n|$ i izlazi sljedeća ocjena pogreške

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \\ &\leq (\text{iskoristimo ocjenu } |x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da je desna strana neke od prethodnih nejednakosti manja ili jednaka ε.

Za desnu stranu možemo uzeti i prvi red, koji ovisi o x_n i x_{n-1},

$$\frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

pa ćemo dobiti . . .

Kriteriji zaustavljanja

... dinamički kriterij za zaustavljanje procesa iteracija

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q}.$$

Ako želimo "rano" znati potreban broj iteracija n, onda treba zahtijevati (donji red ovisi samo o prve dvije iteracije x_0 i x_1)

$$\frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| \le \varepsilon,$$

pa dobivamo

$$n \ge \frac{\log \dfrac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon + \log(1-q) - \log|x_1 - x_0|}{\log q}.$$

Kriteriji zaustavljanja

Kriterij zaustavljanja možemo napisati i tako da ovisi samo o rubovima intervala a i b, neovisno o iteracijama.

U drugoj lemi, kod dokaza konvergencije, pokazali smo da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|.$$

Budući da je $|\alpha - x_0| \leq b - a$, dobivamo $|\alpha - x_n| \leq q^n (b - a)$. Iz zahtjeva

$$q^n (b - a) \leq \varepsilon,$$

dobivamo ocjenu "unaprijed" za broj iteracija n

$$n \geq \frac{\log \dfrac{\varepsilon}{b - a}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon - \log(b - a)}{\log q}.$$

Opći slučaj — kontrakcija i Banachov teorem

Napomena. U općem slučaju metode jednostavnih iteracija (ili sukcesivnih aproksimacija), iteracijska funkcija φ ne mora biti neprekidna — što smo koristili u prvoj lemi (egzistencija α).

Dovoljno je pretpostaviti da je

- φ kontrakcija, ali na potpunom metričkom prostoru X.

To je tzv. Banachov teorem o fiksnoj točki.

Skica dokaza. Prvo se dokaže da je niz iteracija Cauchyjev niz (kao u ocjeni greške, uz zamjenu $|x-y|$ s $d(x,y)$ = udaljenost)

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|.$$

Zatim, potpunost prostora $X \Longrightarrow$ konvergencija niza $x_n \to \alpha$. Na kraju se pokaže da je α fiksna točka za φ i jedinstvenost. ■

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Pretpostavimo sad da je φ neprekidno derivabilna na $[a, b]$.

Po teoremu srednje vrijednosti, za bilo koje $x, y \in [a, b]$, vrijedi

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y),$$

gdje je ξ između x i y, tj. vrijedi $\xi \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|.$$

Onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Primijetite da q, općenito, može biti i veći od 1. No, ako je $q < 1$ i još vrijedi $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$, onda je φ kontrakcija.

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a, b]$ takva da je $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Ako je

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| < 1,$$

onda jednadžba $x = \varphi(x)$ ima točno jedno rješenje $\alpha \in [a, b]$.

- Za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$ i niz jednostavnih iteracija definiran s $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, za $n \geq 0$, vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha,$$

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \varphi'(\alpha).$$

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Dokaz. Sve tvrdnje teorema su dokazane u prethodne dvije leme, osim zadnje tvrdnje o linearnoj brzini konvergencije.

Po teoremu srednje vrijednosti, imamo

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \geq 0,$$

gdje je ξ_n neki broj između α i x_n.

Budući da $x_n \to \alpha$, onda i $\xi_n \to \alpha$. Zbog neprekidnosti derivacije φ' u fiksnoj točki α, onda vrijedi i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(\alpha). \qquad \blacksquare$$

Bitna pretpostavka $q < 1$

Pretpostavka $q < 1$ u prethodnom teoremu je ključna.

Kontraprimjer. Pretpostavimo "samo" da je $|\varphi'(\alpha)| > 1$, u fiksnoj točki α funkcije φ.

Za neku startnu točku $x_0 \in [a, b]$, generiramo niz jednostavnih iteracija $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Zbog $\alpha = \varphi(\alpha)$, onda vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n).$$

Za bilo koji x_n dovoljno blizu α, mora biti $|\varphi'(\xi_n)| > 1$. Ako je $x_n \neq \alpha$, onda je

$$|\alpha - x_{n+1}| > |\alpha - x_n|.$$

Dakle, konvergencija metode nije moguća! Upravo suprotno, imamo divergenciju.

Pojednostavljeni — "lokalni" teorem

Prethodni teorem možemo izreći i u "lokalnoj" formi — oko α.

Teorem. Neka je α rješenje jednostavne iteracije $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α. Ako je $|\varphi'(\alpha)| < 1$, onda vrijede svi rezultati prethodnog teorema — uz pretpostavku da je start x_0 dovoljno blizu α.

Dokaz. Postoji $\varepsilon > 0$ takav da za interval $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ vrijedi

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$ (dovoljno je $q \leq 1$), jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)||\alpha - x| \leq q|\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. ■

Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, gdje je $a > 0$, definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije, $x = x + c(x^2 - a)$, za $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$.

Ispitajte konvergenciju ovih iteracijskih funkcija oko $\alpha = \sqrt{a}$.

1. Za $\varphi(x) = x^2 + x - a$, izlazi $\varphi'(x) = 2x + 1$. U $x = \sqrt{a}$ je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

pa ta iteracijska funkcija neće konvergirati. Baš suprotno, za bilo koji start x_0, ove iteracije divergiraju!

Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

1. Općenito, $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je $\varphi'(x) = 1 + 2cx$ i
$$\varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$
Da bismo osigurali lokalnu konvergenciju, mora biti
$$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1,$$
odnosno,
$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

2. Za $\varphi(x) = a/x$, dobivamo $\varphi'(x) = -a/x^2$, pa je
$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$
što znači da iteracijska funkcija neće konvergirati. Niz iteracija je $x_0,\ a/x_0,\ x_0,\ a/x_0,\ \ldots$ (periodički niz).

Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

3. Za $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + a/x\right)$, izlazi $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - a/x^2\right)$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0.$$

   Zato ova iteracijska funkcija konvergira u okolini $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je Newtonova metoda za jednadžbu $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još Babilonci. ■

Vidimo da metoda jednostavne iteracije može imati

- lokalnu konvergenciju koja je brža od linearne.

Stvarni "krivac" za kvadratnu konvergenciju je $\varphi'(\alpha) = 0$.

Slično tome, jednostavne iteracijske funkcije mogu poslužiti za konstrukciju iterativnih metoda proizvoljno visokog reda p.

Iterativne metode višeg reda konvergencije

Teorem. Neka je α rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$ i neka je φ

- p puta neprekidno diferencijabilna za sve x u okolini α, za neki $p \geq 2$.

Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna točka x_0 dovoljno blizu α, onda niz iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

konvergira prema α s redom konvergencije (barem) p i vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Iterativne metode višeg reda konvergencije

Dokaz. Funkciju φ razvijemo u okolini od α u Taylorov polinom stupnja p, s tim da najviši član predstavlja ostatak. Zatim uvrstimo $x = x_n$, pa dobijemo

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots \\ &\qquad + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,\end{aligned}$$

za neki ξ_n između x_n i α.

Sad iskoristimo da je $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ i pretpostavku da za derivacije vrijedi $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$, za $k = 1, \ldots, p-1$. Izlazi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,$$

Iterativne metode višeg reda konvergencije

odnosno,

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}\,(x_n - \alpha)^p.$$

Zbog $\varphi'(\alpha) = 0 < 1$, iz "lokalnog" teorema slijedi da

- niz iteracija x_n konvergira prema α, za svaku startnu točku x_0 koja je dovoljno blizu α (lokalna konvergencija).

Iz $x_n \to \alpha$ slijedi i $\xi_n \to \alpha$. Na kraju, iz gornje relacije, na limesu $n \to \infty$, koristeći neprekidnost $\varphi^{(p)}$ u α, izlazi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}. \quad \blacksquare$$

Za $p = 1$, ovaj rezultat odgovara ranijem "lokalnom" teoremu!

Primjer — analiza Newtonove metode

Primjer. Primjenom prethodnog teorema, analizirajmo red konvergencije Newtonove metode u okolini jednostruke nultočke α funkcije f. Pripadna iteracijska funkcija φ je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem dobivamo da je

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Nultočka α je jednostruka, pa je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$. Onda je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

tj. Newtonova metoda konvergira (barem) kvadratno oko α.

Primjer — analiza Newtonove metode

Za detaljniju analizu, pogledajmo drugu derivaciju $\varphi''(\alpha)$. Deriviranjem $\varphi'(x)$ u produktnom obliku, dobivamo

$$\varphi''(x) = \left(f(x)\,\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)' = f'(x)\,\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} + f(x) \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)'$$

$$= \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x) \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)'.$$

Zbog $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, odmah izlazi

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je $f''(\alpha) \neq 0$, red konvergencije Newtonove metode je 2.
Ako je $f''(\alpha) = 0$, red konvergencije je barem 3.

Newtonova metoda za višestruke nultočke

Multiplicitet nultočke funkcije

Definicija (Multiplicitet nultočke). Neka je $f(\alpha) = 0$. Ako postoji prirodni broj m, takav da je

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0,$$

gdje je g neprekidna funkcija u okolini od α, onda nultočka α ima multiplicitet (višestrukost, kratnost ili red) m. ■

Pretpostavimo da je funkcija f dovoljno glatka, tj. da f ima neprekidnu m-tu derivaciju u okolini od α, za neki m. Onda je

- α nultočka od f multipliciteta m, ako i samo ako vrijedi

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Dokaz ovog ide direktno iz Taylorovog razvoja do stupnja m (slično kao malo prije — u teoremu za φ).

Veza nultočke funkcije i derivacije

Umjesto toga, pokažimo da

- ako funkcija f ima nultočku multipliciteta m u α,
- onda derivacija f' ima nultočku multipliciteta $m-1$ u α.

Prethodna tvrdnja onda izlazi indukcijom po redu derivacije (sve dok su derivacije neprekidne).

Dokaz. Napišimo f u obliku

$$f(x) = (x-\alpha)^m \, g(x), \quad g(\alpha) \neq 0.$$

Onda je

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-\alpha)^{m-1} \, g(x) + (x-\alpha)^m \, g'(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1} \Big(m g(x) + (x-\alpha) \, g'(x) \Big). \end{aligned}$$

Veza nultočke funkcije i derivacije

Zatim, definiramo funkciju g_1 na okolini od α, kao drugi faktor iz prethodnog produkta

$$g_1(x) := mg(x) + (x-\alpha)\, g'(x),$$

tako da je

$$f'(x) = (x-\alpha)^{m-1}\, g_1(x).$$

Ako je f' neprekidna u okolini od α, onda to vrijedi i za g' (tu se iskoristi neprekidnost funkcije g iz rastava za f).

Iz definicije slijedi da je i g_1 neprekidna oko α. U točki α je

$$g_1(\alpha) = mg(\alpha) + (\alpha-\alpha)\, g'(\alpha) = mg(\alpha) \neq 0,$$

što pokazuje da f' ima $(m-1)$-struku nultočku u α. ■

Ovu formulu za $g_1(\alpha)$ koristimo više puta u nastavku.

Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Analizirajmo što će se dogoditi s konvergencijom Newtonove metode, ako funkcija f ima višestruku nultočku u α.

Newtonovu metodu promatramo kao jednostavnu iteraciju,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Pretpostavimo da

- f ima m-struku nultočku u α, za neki $m \geq 2$, i da je
- f dovoljno glatka na okolini od α — barem klase C^{m+1}, tako da je iteracijska funkcija φ barem klase C^m.

Onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^m \, g(x), & g(\alpha) &\neq 0, \\ f'(x) &= (x-\alpha)^{m-1} \, g_1(x), & g_1(\alpha) &\neq 0. \end{aligned}$$

Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Kad uvrstimo ove relacije za f i f', dobivamo

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-\alpha)^m \, g(x)}{(x-\alpha)^{m-1} \, g_1(x)} = x - (x-\alpha) \, \frac{g(x)}{g_1(x)}.$$

Deriviranjem izlazi

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{g(x)}{g_1(x)} - (x-\alpha) \left(\frac{g(x)}{g_1(x)} \right)'.$$

U nultočki α je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - \frac{g(\alpha)}{m g(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Za $m \geq 2$, vrijedi $\varphi'(\alpha) \neq 0$. Prema ranijem teoremu, to znači

- da Newtonova metoda onda konvergira samo linearno!

Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Dodatno, faktor linearne konvergencije je $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/m$, što je vrlo sporo. U prosjeku, to je

- podjednako brzo kao bisekcija, za $m = 2$,
- ili čak lošije od bisekcije, za $m \geq 3$.

Newtonovu metodu možemo popraviti na dva načina:

- ako unaprijed točno znamo red m nultočke,
- ako ne znamo red (višestruke) nultočke.

Ako znamo m, onda u okolini m-struke nultočke definiramo iteracijsku funkciju

$$\varphi(x) = x - m \, \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Na isti način kao malo prije, redom, dobivamo

$$\varphi(x) = x - m(x-\alpha)\,\frac{g(x)}{g_1(x)},$$

$$\varphi'(x) = 1 - m\,\frac{g(x)}{g_1(x)} - m(x-\alpha)\left(\frac{g(x)}{g_1(x)}\right)',$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - m\,\frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - m\,\frac{g(\alpha)}{m g(\alpha)} = 1 - m\,\frac{1}{m} = 0.$$

To pokazuje da ova modifikacija Newtonove metode,

- s m-strukom korekcijom,
- osigurava barem kvadratnu konvergenciju, za bilo koji m.

Newtonova metoda kad ne znamo red nultočke

Što ćemo napraviti ako unaprijed ne znamo m? Primijetimo da funkcija u — to je korekcija u običnoj Newtonovoj metodi,

$$u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\alpha)^m\, g(x)}{(x-\alpha)^{m-1}\, g_1(x)} = (x-\alpha)\,\frac{g(x)}{g_1(x)},$$

uvijek ima jednostruku nultočku u α, jer je $g(\alpha)/g_1(\alpha) \neq 0$.

Dakle, obična Newtonova metoda, primijenjena na u (ne na f)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)}\,u(x),$$

konvergira barem kvadratno, iako ne znamo red nultočke!

Ostale metode kad ne znamo red nultočke

Sasvim isto vrijedi i za sve ostale metode, koje imaju

- red konvergencije $p > 1$, u okolini jednostruke nultočke α.

Ako se metoda "uspori" u okolini višestruke nultočke,

- treba metodu primijeniti na $u = f/f'$, umjesto na f.

Na primjer, za višestruke nultočke, metodu sekante treba primijeniti na funkciju u,

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

Dodatna "cijena" = računanje još jedne derivacije više.

Na primjer, u Newtonovoj metodi, za u' treba računati i f'', a u metodi sekante, za u treba računati i f'.

Primjeri za nultočke

Numerički red konvergencije

U praksi se može sasvim dobro numerički procijeniti red konvergencije iterativne metode.

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ koji konvergira prema nultočki α je najveći eksponent p, uz $p \geq 1$, za koji vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0,$$

gdje je x_n niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke (ranije su indeksi bili n i $n-1$).

Ovako dobiveni p i c su "teorijske" vrijednosti koje vrijede asimptotski — na limesu $n \to \infty$.

Numerički red konvergencije

Definicijsku relaciju ne možemo direktno iskoristiti za računanje p i c, jer ne znamo α.

Ako smo dovoljno blizu nultočke α, onda limes možemo "zaboraviti", pa je

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

za dovoljno velike k.

Nadalje, ako smo dovoljno blizu nultočke, onda možemo uzeti da je $\alpha \approx x_n$, a $k = n - 1, n - 2$, pa vrijedi i

$$|x_n - x_{n-1}| = c_n|x_n - x_{n-2}|^{p_n},$$

$$|x_n - x_{n-2}| = c_n|x_n - x_{n-3}|^{p_n},$$

s tim da očekujemo da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$ za dovoljno velike n.

Numerički red konvergencije

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|}\right)^{p_n},$$

pa logaritmiranjem izlazi tzv. numerički red konvergencije

$$p_n = \frac{\log|x_n - x_{n-1}| - \log|x_n - x_{n-2}|}{\log|x_n - x_{n-2}| - \log|x_n - x_{n-3}|}.$$

Nakon toga, c_n možemo dobiti iz prve relacije kao

$$c_n = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|^{p_n}}.$$

Ovaj račun možemo provesti tek za $n \geq 3$, a vrijednosti p_n i c_n ovise o n — pa treba pratiti njihovo ponašanje kroz iteracije.

Jednostavni primjer

Primjer. Za uspoređivanje metoda za nalaženje nultočaka, izračunajmo $\sqrt[3]{1.5}$. Problem možemo interpretirati kao traženje realne, pozitivne nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Nije teško locirati nultočku $\alpha \in [1, 2]$. Iz neprekidnosti funkcije f i

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0,$$

znamo da sigurno postoji nultočka $\alpha \in [1, 2]$. To je i jedina realna nultočka funkcije f, jer f strogo raste na $\langle -\infty, 0\rangle$ (gdje je svagdje manja od 0) i na $\langle 0, \infty\rangle$.

Svo računanje je provedeno u preciznosti `extended`.

Metoda bisekcije

Pokažimo kako se ponaša metoda bisekcije ako je $[a, b] = [1, 2]$, a tražena točnost je

- $\varepsilon = 10^{-8}$,
- $\varepsilon = 10^{-18}$.

Na sljedeće dvije folije, sa z_n je označena veličina

$$z_n := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

Primijetite da pogrešno očitan predznak od z_n (umjesto < 0, očitamo > 0, ili obratno)

- možemo detektirati samo gledanjem $f(x_n)$ — uglavnom, tada $f(x_n) \not\to 0$,
- ali i dalje ne znamo točno mjesto gdje smo pogriješili.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	−0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	−0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	−0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	−0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	−0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	−0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	−0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	−0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	−0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	−0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	−0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	−0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	−0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	−0.000000010	

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-18}$

Izračunata rješenja su (ispisane sve znamenke):

- za točnost 10^{-8}, rješenje je $x_{27} = 1.1447142399847507$5,
- za točnost 10^{-18}, rješenje je $x_{50} = 1.1447142425533321$0.

Na prethodne dvije folije:

- vidi se spora konvergencija metode (broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, linearno povećava),
- ponegdje, kao u x_{13}, dolazi do čudnog povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$.

  Objašnjenje: slučajno smo u raspolavljanju stigli blizu nultočke, iako je duljina intervala još uvijek prevelika za zaustavljanje iteracija.

Uočite broj iteracija potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Nije teško pokazati da će Newtonova metoda na $[1, 2]$ sigurno konvergirati, ako krenemo sa strmijeg ruba (to je $x_0 = 2$), jer su f' i f'' fiksnog znaka na $[1, 2]$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Nultočka ispisana na sve izračunate znamenke je
$x_7 = 1.1447142425533318$.

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li korekcije napisane u znanstvenoj notaciji, vidimo područje kvadratne konvergencije — gdje se broj točnih znamenki u x_n, u svakom koraku, udvostručava.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.2073242630385487	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.1479049782665624	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.1447231033577387	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.1447142426219193	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i bez znanstvene notacije — pogledajte kako se povećava broj vodećih nula u korekciji.

Newtonova m., numerički red konvergencije

Prema formuli s početka ovog dijela folija, možemo izračunati i numerički red konvergencije za Newtonovu metodu.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.4583333333333333	—	—
2	1.2073242630385488	—	—
3	1.1479049782665624	1.63738	4.03440E−01
4	1.1447231033577387	1.84894	5.34225E−01
5	1.1447142426219193	1.97750	7.64767E−01
6	1.1447142425533319	1.99937	8.67206E−01
7	1.1447142425533319	—	—

Završne vrijednosti p_5 i p_6 su vrlo blizu očekivanog teorijskog reda konvergencije $p = 2$!

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu sekante potrebne su dvije startne točke — to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$. Izračunata nultočka x_{10} ima sve znamenke jednake aproksimaciji x_7 izračunatoj Newtonovom metodom.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	
1	1.500000000000000	1.875000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

Metoda sekante, numerički red konvergencije

Red konvergencije metode sekante je $p = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.6180$, a numerički red konvergencije ga dobro aproksimira.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.5000000000000000	—	—
2	1.2972972972972973	—	—
3	1.1810642065045196	1.07039	3.94966E−01
4	1.1490731618947491	1.77904	9.54986E−01
5	1.1448494396862039	1.49493	6.02649E−01
6	1.1447147560212947	1.63923	9.97717E−01
7	1.1447142426139705	1.60467	8.29830E−01
8	1.1447142425533319	1.62274	9.74858E−01
9	1.1447142425533318	1.61618	8.86501E−01
10	1.1447142425533318	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer. Jedina nultočka funkcije

$$f(x) = \mathrm{arctg}(x)$$

je $x = 0$, ali Newtonova metoda neće konvergirati iz svake startne točke x_0.

- Sigurnu konvergenciju ne možemo osigurati, jer f'' mijenja znak baš u nultočki (infleksija).

Naći ćemo točku β za koju vrijedi

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \ \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira}, \\ |x_0| > |\beta| \ \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira}, \\ |x_0| = |\beta| \ \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ “ciklira”}. \end{cases}$$

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Kako ćemo naći točku "cikliranja" β?

Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je neparna, pa je dovoljno da

- tangenta na graf funkcije f u točki $(\beta, f(\beta))$ presiječe os x u točki $-\beta$.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \operatorname{arctg}\beta = \frac{1}{1+\beta^2}\,(x-\beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$ (tada je $y = 0$), ako je

$$\operatorname{arctg}\beta = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

čime smo dobili nelinearnu jednadžbu za β.

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka. Možemo ih izračunati, na primjer, metodom bisekcije

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako je startna točka jednaka, redom,

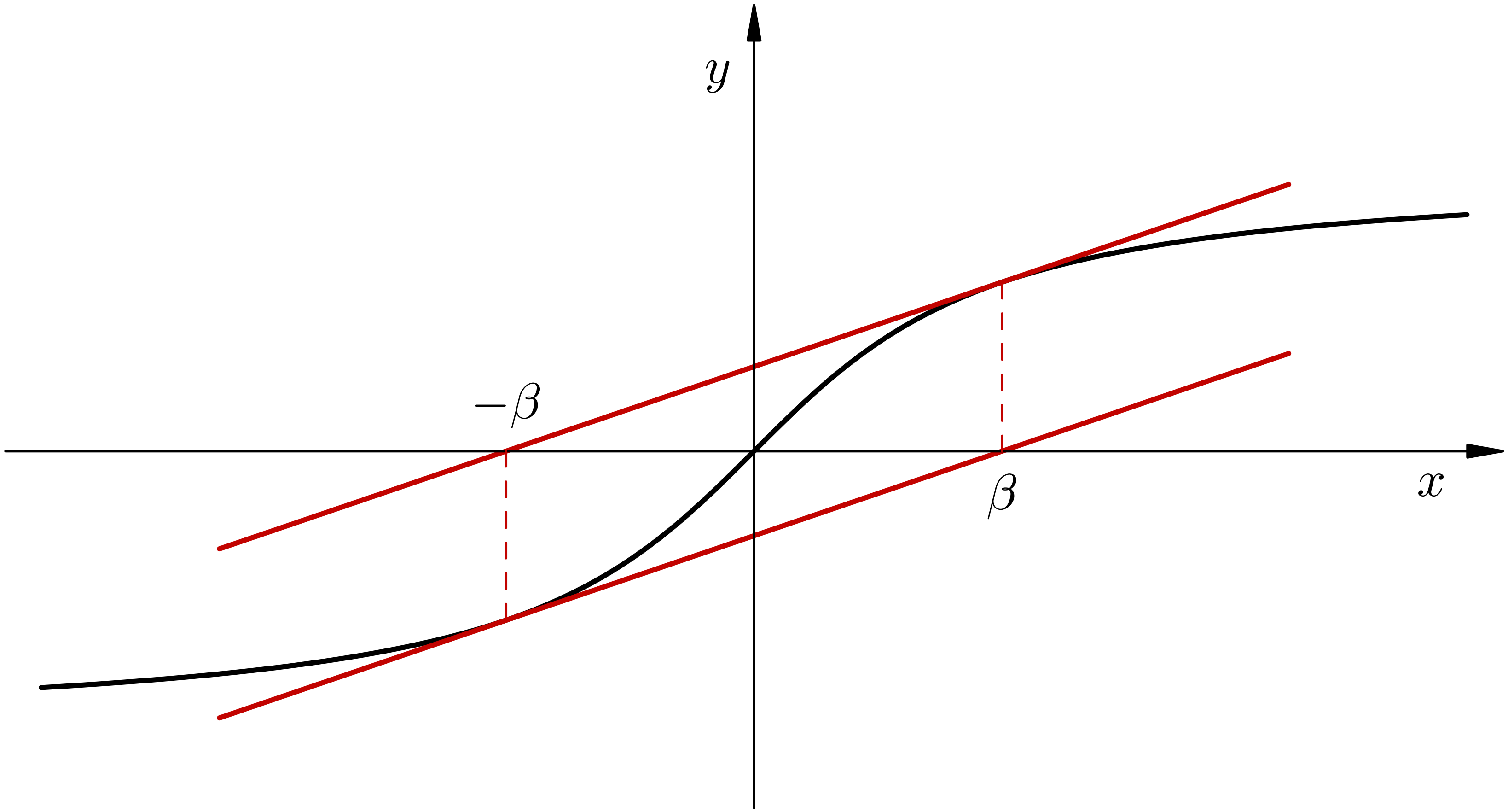
$$x_0 = \beta, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 1.5,$$

a zaustavljamo se,

- ili ako postignemo točnost 10^{-10} za "nultočku",
- ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode

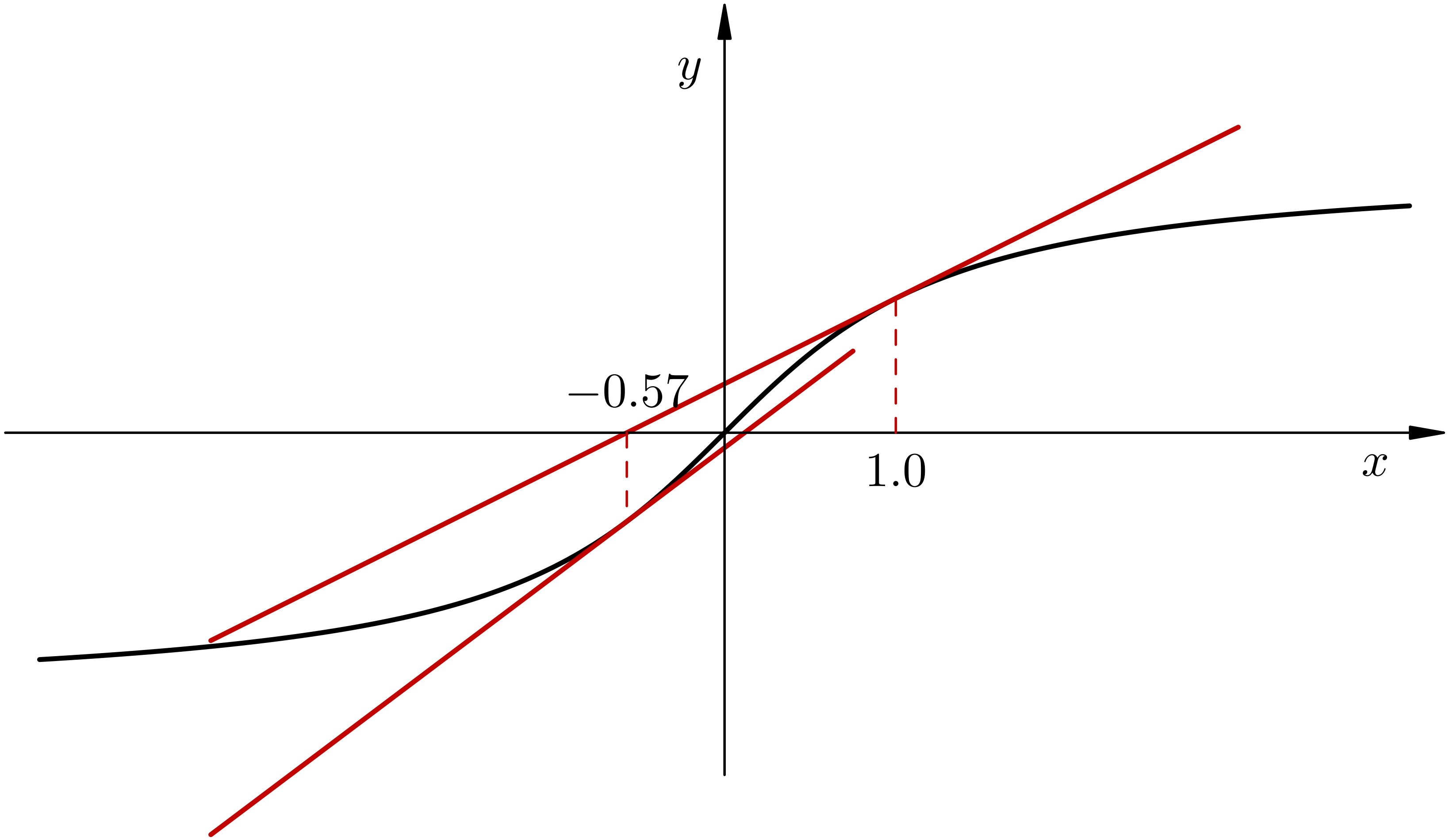
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	−1.391745200270735	−0.947747133516990	−2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	−1.391745200270734	−0.947747133516990	−2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	−1.391745200270732	−0.947747133516989	−2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	−1.391745200270713	−0.947747133516983	−2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	−1.391745200270584	−0.947747133516939	−2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



Primjer konvergencije Newtonove metode

Točnost se postiže nakon 6 iteracija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	−0.570796326794897	−0.518669369255017	−0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	−0.001061022117045	−0.001061021718890	−0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	−0.000000000000000	−0.000000000000000	−0.000000000000000
6	0.000000000000000	−0.000000000000000	

Metoda kubno konvergira (zbog $f''(0) = 0$), ali ne konvergira monotono prema nultočki $\alpha = 0$.

Newton kvg., numerički red konvergencije

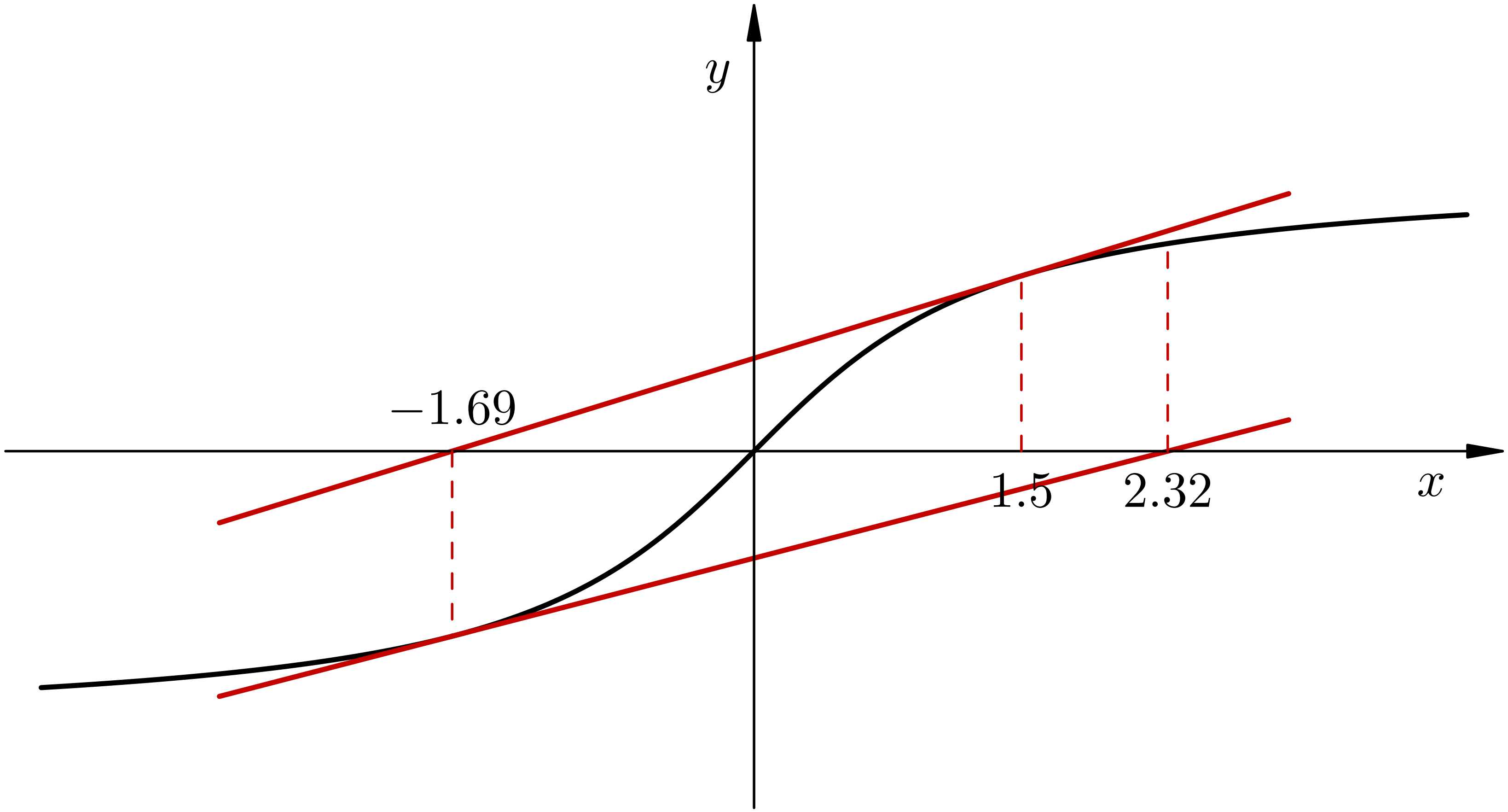
Numerički red konvergencije pokazuje da metoda zaista kubno konvergira prema $\alpha = 0$.

n	x_n	p_n	c_n
0	1.0000000000000000	—	—
1	−0.5707963267948966	—	—
2	0.1168599039989130 5	—	—
3	−0.0010610221170447 2	4.02288	1.13367E+00
4	0.0000000007963096 0	2.97361	6.28237E−01
5	−0.0000000000000000	2.99942	6.64032E−01
6	0.0000000000000000	2.99655	6.51104E−01

Na kraju iteracija dolazi do kraćenja, zbog nemonotonosti.

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Primjer divergencije Newtonove metode

Metoda kvadratno divergira, ali $f(x)$ "konvergira" prema $\pm\frac{\pi}{2}$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	−1.6940796006E+000	−1.0375463591379	−4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	−5.1140878368E+000	−1.3776945287028	−3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	−1.5753169508E+003	−1.5701615339901	−3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	−2.3830288974E+013	−1.5707963267949	−8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	−1.2499045994E+054	−1.5707963267949	−2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u $x = 1.23$ (treća nultočka je 3.1).

Pokažimo, redom, ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku, stavljeno $m = 2$ kao faktor za korekciju,
- obične Newtonove metode, za funkciju $u = f/f'$.

Startna točka je $x_0 = 1.5$, a tražena točnost je $\varepsilon = 10^{-15}$.

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

Pažljivo promatrajte kako se ponaša korekcija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	−0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	−0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	−0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	−0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	−0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	−0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	−0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	−0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	−0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	−0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	−0.000000023314476	0.000055832614098

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
12	1.230055829280006	−0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	−0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	−0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	−0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	−0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	−0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	−0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	−0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	−0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	−0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	−0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	−0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	−0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	−0.000000000000000	0.000000003389306

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
26	1.230000003419030	−0.000000000000000	0.000000001729681
27	1.230000001689349	−0.000000000000000	0.000000000823684
28	1.230000000865665	−0.000000000000000	0.000000000401855
29	1.230000000463810	0.000000000000000	−0.000000000000000
30	1.230000000463810	0.000000000000000	

Korekcija sporije teži u nulu nego $f(x)$. Razlog:

- funkcijska vrijednost za višestruke nultočke je relativno mala, čak i kad smo relativno daleko od nultočke, tj.
- graf funkcije s višestrukom nultočkom se, u okolini nultočke α, bolje "priljubi" uz os x, nego graf funkcije koja ima jednostruku nultočku.

U ovom primjeru, $f(x)$ ide kvadratno s korekcijom.

Modificirana Newtonova metoda, $m = 2$

Modificirana metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	−0.001173009833879	−0.024718265674538
2	1.229837719599453	−0.000000049250590	−0.000162273360038
3	1.229999992959491	−0.000000000000000	−0.000000007049176
4	1.230000000008667	0.000000000000000	−0.000000026758865
5	1.230000026767532	−0.000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.229999999995655	0.000000000000000	

Da smo pogriješili m — dobili bismo linearnu konvergenciju!

- Isto se događa ako pogriješite derivaciju, a tražite jednostruku nultočku.

Newtonova metoda za funkciju $u = f/f'$

Obična metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju prema jednostrukoj nultočki funkcije $u = f/f'$.

Cijena:

- računanje vrijednosti druge derivacije funkcije f — za u'.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.500000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	

Primjeri metoda višeg reda konvergencije

Uvodno o primjerima

Dosad smo promatrali samo metode do reda konvergencije 2 za jednostruke nultočke.

- Mogu li se napisati i koristiti metode višeg reda?

Navest ćemo (samo kao ilustraciju) neke primjere metoda višeg reda i pokazati kako one rade za jednostavni primjer nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5,$$

na intervalu $[1, 2]$, uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-18}$.

Korigirane Newtonove metode

Neka je f funkcija koja je, u okolini izolirane nultočke α,

- monotona, tj. f' je različita od nula (α je jednostruka), i
- njezina derivacija $f^{(p)}$ je neprekidna na toj okolini, $p \geq 2$.

Tada postoji inverzna funkcija $\mathcal{F} := f^{-1}$ funkcije f, i njezina p-ta derivacija $\mathcal{F}^{(p)}$ je, također, neprekidna u okolini nule.

Razvijemo funkciju $\mathcal{F}$ u Taylorov polinom do člana s $(p-1)$-om derivacijom u okolini $y = f(x)$,

$$E_p(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(y)}{n!} (t-y)^n.$$

Tražimo $\alpha = \mathcal{F}(0) = f^{-1}(0)$. Kad stavimo $t = 0$, dobivamo metodu p-tog reda konvergencije. Oznaka je $E_p := E_p(0)$.

Korigirane Newtonove metode

Uz malo truda oko deriviranja inverznih funkcija,

$$E_p = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}\big(f(x)\big)}{n!} \big(-f(x)\big)^n$$

definira metodu $x_{n+1} = E_p(x_n)$. Za male p, dobivamo sljedeće iteracijske funkcije $\varphi := E_p$

$$\begin{aligned}
&E_2(x) = x - u, && \text{(obična Newtonova m.)}\\
&E_3(x) = E_2 - A_2 u^2, && \text{(korigirana Newtonova m. } E_3\text{)}\\
&E_4(x) = E_3 - (2A_2^2 - A_3)u^3, && \text{(korigirana Newtonova m. } E_4\text{)}
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$u = \frac{f}{f'}, \qquad A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n)}}{f'}, \qquad n \geq 2.$$

E_3 ***metoda, točnost*** $\varepsilon = 10^{-18}$

Startna točka je $x_0 = 2$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.688368055555556
1	1.311631944444444	0.756503210473290	0.162957102798705
2	1.148674841645739	0.015623490256523	0.003960520886559
3	1.144714320759180	0.000000307435976	0.000000078205848
4	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na sve znamenke, je
$x_5 = 1.1447142425533317$.

E_3 metoda, kubna konvergencija

Ispišemo li rezultat u znanstvenoj notaciji, vidimo da se broj točnih znamenki u x_n približno utrostručuje.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	6.88368055556E−01
1	1.3116319444444444	7.56503210473E−01	1.62957102799E−01
2	1.1486748416457390	1.56234902565E−02	3.96052088656E−03
3	1.1447143207591800	3.07435976264E−07	7.82058481467E−08
4	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
5	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

E_3 metoda, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije pokazuje da je metoda E_3 zaista kubno konvergentna.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.3116319444444444	—	—
2	1.14867484164573903	—	—
3	1.14471432075918001	2.28964	2.38750E−01
4	1.14471424255333187	2.89555	7.06390E−01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz Taylorovih polinoma

Funkciju f možemo aproksimirati njezinim Taylorovim polinomom stupnja s u okolini točke x i naći njegove nultočke.

Ako polinom stupnja 1 izjednačimo s nulom, dobijemo običnu Newtonovu metodu. Kad to napravimo za polinom stupnja 2,

$$0 = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)(t-x)^2$$

i riješimo po t, dobivamo iteracijsku funkciju φ za Laguerreovu metodu, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, pri čemu je

$$\varphi(x) = x - \frac{2u}{1 \pm (1 - 4A_2 u)^{1/2}}, \quad (\text{kraćenje} \Longrightarrow + \text{ znak})$$

Za metode viših redova moraju se rješavati polinomne jednadžbe sve viših stupnjeva (preko 4 ne ide egzaktno).

Laguerreova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za početnu točku uzimamo $x_0 = 1$, jer za $x_0 = 2$, drugi korijen koji javlja u metodi ne daje realan broj.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.000000000000000	−0.500000000000000	−0.145497224367903
1	1.145497224367903	0.003080095095887	0.000782981936678
2	1.144714242431225	−0.000000000480015	−0.000000000122107
3	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
4	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na sve znamenke, je $x_4 = 1.1447142425533318\overline{7}$.

Laguerreova metoda, kubna konvergencija

Ponovno, korekcija pokazuje da se broj točnih znamenki u x_n približno utrostručava.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.0000000000000000	−5.00000000000E−01	−1.45497224368E−01
1	1.1454972243679028	3.08009509589E−03	7.82981936678E−04
2	1.1447142424312250	−4.80015464226E−10	−1.22106786356E−10
3	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
4	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Laguerreova m., numerički red konvergencije

Kao što i očekujeno, numerički red konvergencije je 3.

n	x_n	p_n	c_n
0	1.0000000000000000	—	—
1	1.1454972243679028	—	—
2	1.1447142424312250	—	—
3	1.1447142425533318	3.00297	2.59843E−01
4	1.1447142425533318	—	—

Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Razvijemo li funkciju $1/f$ u Taylorov polinom, iz koeficijenata tog razvoja, također, možemo dobiti metode za nalaženje nultočaka funkcija (traže se polovi = nultočke nazivnika).

Na primjer, iteracijska funkcija za Halleyevu metodu je

$$\varphi(x) = x - \frac{u}{1 - A_2 u},$$

i to je metoda s kubnom konvergencijom.

Halleyeva metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Ponovno startamo iz $x_0 = 2$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.742857142857143
1	1.257142857142857	0.486798833819242	0.111805016364194
2	1.145337840778664	0.002452770217608	0.000623598102057
3	1.144714242676607	0.000000000484607	0.000000000123275
4	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na sve znamenke, je
$x_5 = 1.1447142425533319$.

Halleyeva metoda, kubna konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa, vidi se kubna konvergencija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E−00	7.42857142857E−01
1	1.25714285714285714	4.86798833819E−01	1.11805016364E−01
2	1.14533784077866351	2.45277021761E−03	6.23598102057E−04
3	1.14471424267660666	4.84607030069E−10	1.23274793178E−10
4	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.75800370811E−20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Halleyeva metoda, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije Halleyeve metode je blizu 3.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.2571428571428571	—	—
2	1.1453378407786635	—	—
3	1.1447142426766066	2.56001	1.67754E−01
4	1.1447142425533318	2.97168	4.12474E−01
5	1.1447142425533318	—	—

Metode s pamćenjem

Metode s pamćenjem imaju barem dvije startne točke. Takva je, na primjer, metoda sekante.

I za metode s pamćenjem možemo konstruirati metode višeg reda od 2. Na primjer, metoda ${}^*E_{1,2}$ definirana iteracijskom funkcijom

$$ {}^*E_{1,2} = x_n - u_n - \frac{u_n^2}{f_n'} \cdot \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \big(2f_n' + f_{n-1}' - 3f[x_n, x_{n-1}] \big) \right] $$

ima svojstvo da treba jednako izvrednjavanja funkcije kao i Newtonova metoda (pamte se vrijednosti funkcije i derivacije).

Indeksi u formuli znače izvrednjavanje u odgovarajućoj točki!

Njezin red konvergencije je $p = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$.

Metoda $^*E_{1,2}$, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Metodu startamo iz $x_0 = 2$, tako da x_1 dobijemo po Newtonovoj metodi, pa imamo dvije startne točke.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.294212878320100
2	1.164120455013233	0.077588606715436	0.019397373047930
3	1.144723081965303	0.000034748987607	0.000008839411970
4	1.144714242553333	0.000000000000003	0.000000000000001
5	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
6	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na sve znamenke, je
$x_6 = 1.1447142425533187$.

Metoda $^*E_{1,2}$, konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa, uočavamo brzu konvergenciju metode.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.41666666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.94212878320E−01
2	1.1641204550132330	7.75886067154E−02	1.93973730479E−02
3	1.1447230819653027	3.47489876068E−05	8.83941196996E−06
4	1.1447142425533327	3.45318391937E−15	8.78424181034E−16
5	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	2.75800369996E−20
6	1.1447142425533318	1.08420217249E−19	

Metoda ${}^*E_{1,2}$, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije metode ${}^*E_{1,2}$ ovdje ide prema 3!

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.4583333333333333	—	—
2	1.16412045501323302	—	—
3	1.14472308196530270	2.77393	4.83862E−01
4	1.14471424255333275	2.76510	4.79113E−01
5	1.14471424255333187	2.99347	1.17873E+00
6	1.14471424255333187	—	—

Napomena. Za kubni polinom $f(x) = x^3 - 1.5$, stvarni red konvergencije metode je zaista jednak 3.

Međutim, za polinom višeg stupnja ($x^4 - 2$), ili neku drugu funkciju ($e^x - 3$), numerički red konvergencije je blizu $1 + \sqrt{3}$.