

# *Numerička matematika*

## *1. predavanje — dodatak*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja — dodatka

- Prikaz realnih brojeva u računalu — IEEE standard:
  - Osnovni oblik “floating-point” prikaza — mantisa i eksponent.
  - IEEE standard — tipovi: single, double, extended.
  - Greške zaokruživanja u prikazu.
  - Pojam “jedinične greške zaokruživanja”.
- Greške zaokruživanja u aritmetici realnih brojeva:
  - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
  - Opasno ili “katastrofalno” kraćenje.
  - “Širenje” grešaka zaokruživanja.
  - Stabilni i nestabilni algoritmi.

## Sadržaj predavanja — dodatka

- Primjeri širenja grešaka zaokruživanja i izbjegavanja nestabilnosti:
  - Parcijalne sume harmonijskog reda.
  - Korijeni kvadratne jednadžbe.
  - Transformacije nestabilnih formula.

# Prikaz “realnih” brojeva u računalu — IEEE standard

# Uvod u prikaz realnih brojeva

Kako pohraniti “jako velike” ili “jako male” brojeve?  
Recimo, dekadski pisano:

67800000000.0      0.000002078

Koristimo tzv. **znanstvenu** notaciju u kojoj

- prvo pišemo vodeće značajne znamenke broja,
- a zatim pišemo faktor koji ima oblik “baza na odgovarajući eksponent”, tj. potenciju baze.

U bazi 10, uz dogovor da vodeći dio bude **jednoznamenkast** ispred točke, tj. između 1 i 10 (strogo ispod), to izgleda ovako:

$6.78 \cdot 10^{10}$        $2.078 \cdot 10^{-6}$ .

# Prikaz realnih brojeva

U računalu se **binarni** zapis realnog broja pohranjuje u znanstvenom formatu:

$$\text{broj} = \text{predznak} \cdot \text{mantisa} \cdot 2^{\text{eksponent}}.$$

**Mantisa** se uobičajeno (postoje iznimke!) pohranjuje u tzv. **normaliziranom** obliku, tj. tako da vrijedi

$$1 \leq \text{mantisa} < (10)_2.$$

I za pohranu **mantise** i za pohranu **eksponenta** rezervirano je **konačno** mnogo binarnih znamenki. Posljedice:

- **prikaziv** je samo neki **raspon** realnih brojeva,
- neki brojevi **unutar** prikazivog raspona **nisu prikazivi**, jer im je mantisa **predugačka**  $\implies$  **zaokruživanje**.

# Prikaz realnih brojeva (nastavak)

Primjer. Znanstveni prikaz binarnih brojeva:

$$1010.11 = 1.01011 \cdot 2^3$$

$$0.0001011011 = 1.011011 \cdot 2^{-4}$$

Primijetite da se vodeća jedinica u normaliziranom obliku **ne mora** pamtiti, ako znamo da je broj  $\neq 0$ .

- Taj bit se može upotrijebiti za pamćenje dodatne znamenke mantise.

Tada se vodeća jedinica zove **skriveni bit** (engl. hidden bit) — jer se **ne pamti**.

Ipak, ovo je samo **pojednostavljeni** prikaz realnih brojeva. Stvarni prikaz je malo složeniji.

# Stvarni prikaz realnih brojeva

Najznačajnija promjena obzirom na pojednostavljeni prikaz:

- eksponent se prikazuje u “zamaskiranoj” ili “pomaknutoj” formi (engl. “biased form”).

To znači da se stvarnom eksponentu  $e$

- dodaje konstanta — takva da je “pomaknuti” eksponent uvijek pozitivan.

Ta konstanta ovisi o broju bitova za eksponent i bira se tako da je prikaziva

- recipročna vrijednost najmanjeg pozitivnog normaliziranog broja.

Takav “pomaknuti” eksponent naziva se karakteristika, a normalizirana mantisa obično se zove signifikand.



# Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE-754

Stvarni prikaz realnih brojeva ima **tri dijela** i svaki od njih ima svoju **duljinu** — broj bitova predviđenih za prikaz tog dijela.

- **predznak  $s$**  — uvijek zauzima **jedan** bit, i to **najviši**;
- **karakteristika  $k$**  — zauzima sljedećih  $w$  bitova ( $w$  = engl. “width”, širina pomaknutog eksponenta);
- **signifikand  $m$**  — zauzima sljedećih  $t$  bitova ( $t$  = engl. “trailing”, završni ili razlomljeni dio od  $m$ ).

Po starom standardu — ako se **pamti** vodeći (cjelobrojni) bit mantise, on je **prvi** (vodeći) u  $m$ , a duljina je  $t + 1$ .

Još se koristi i standardna oznaka

- **preciznost  $p := t + 1$**  — to je **ukupni broj vodećih značajnih** bitova cijele mantise.

# Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE–754

Karakteristika  $k$  se interpretira kao cijeli broj bez predznaka, tako da je  $k \in \{0, \dots, 2^w - 1\}$ . “Rubne” vrijednosti za  $k$  označavaju tzv. posebna stanja:

- $k = 0$  — nula i denormalizirani brojevi,
- $k = 2^w - 1$  — beskonačno i nije broj.

Sve ostale vrijednosti  $k \in \{1, \dots, 2^w - 2\}$  koriste se za prikaz normaliziranih brojeva različitih od nule.

Veza između karakteristike  $k$  i stvarnog eksponenta  $e$  je:

$$k = e + bias, \quad bias = 2^{w-1} - 1.$$

Dakle, dozvoljeni eksponenti  $e$  moraju biti između

$$e_{\min} = -(2^{w-1} - 2) \quad \text{i} \quad e_{\max} = 2^{w-1} - 1.$$

# Standardni tipovi realnih brojeva — IEEE-754

Novi standard IEEE-754 standard ima sljedeće tipove za prikaz realnih brojeva:

ime tipa	binary32	binary64	binary128
duljina u bitovima	32	64	128
$t =$	23	52	112
$w =$	8	11	15
$u = 2^{-p}$	$2^{-24}$	$2^{-53}$	$2^{-113}$
$u \approx$	$5.96 \cdot 10^{-8}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$9.63 \cdot 10^{-35}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 38}$	$10^{\pm 308}$	$10^{\pm 4932}$

Broj  $u$  je tzv. jedinična greška zaokruživanja (v. malo kasnije).

Najveći tip binary128 još uvijek ne postoji u većini procesora.

## Standardni tipovi realnih brojeva — extended

Većina **PC** procesora još uvijek ima posebni dio — tzv. **FPU** (engl. Floating-Point Unit). On **stvarno** koristi

- tip **extended** iz **starog** IEEE standarda, koji odgovara tipu **extended binary64** u **novom** **IEEE-754** standardu.

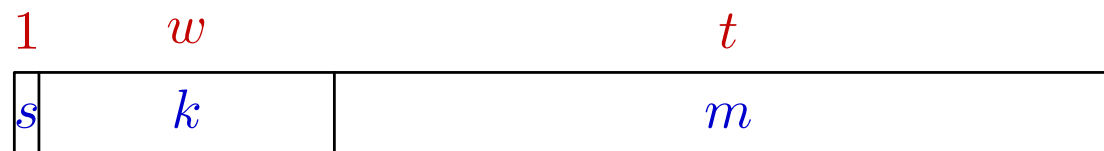
Dio primjera koje ćete vidjeti napravljen je baš u **tom tipu!**

ime tipa	extended
duljina u bitovima	80
$t + 1 =$	$63 + 1$
$w =$	15
$u = 2^{-p}$	$2^{-64}$
$u \approx$	$5.42 \cdot 10^{-20}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 4932}$

# Oznake

## Oznake:

- **Crveno** — duljina odgovarajućeg polja u **bitovima**, bitove brojimo od **0**, zdesna nalijevo (kao i obično),
- **$s$**  — predznak: **0** za pozitivan broj, **1** za negativan broj,
- **$k$**  — karakteristika,
- **$m$**  — mantisa (signifikand).



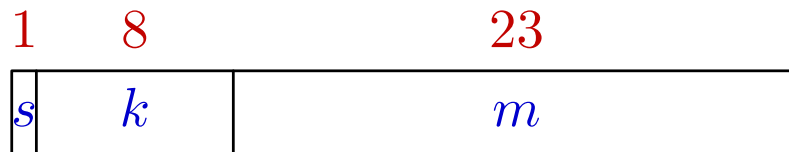
- Najznačajniji bit u odgovarajućem polju je **najljevi**, a najmanje značajan bit je **najdesni**.

# Stvarni prikaz tipa single (binary32)

“Najkraći” realni tip je tzv. realni broj **jednostruke** točnosti. U C-u se taj tip zove **float**. Savjet: **ne koristiti** u praksi!

On ima sljedeća svojstva:

- duljina: 4 byte-a (32 bita), podijeljen u tri polja.



- u mantisi se **ne pamti** vodeća jedinica ako je broj normaliziran,
- **stvarni eksponent**  $e$  broja,  $e \in \{-126, \dots, 127\}$ ,
- **karakteristika**  $k = e + 127$ , tako da je  $k \in \{1, \dots, 254\}$ ,
- **karakteristike**  $k = 0$  i  $k = 255$  koriste se za “posebna stanja”.

## Stvarni prikaz tipa single (nastavak)

**Primjer.** Broj  $(10.25)_{10}$  prikažite kao broj u jednostrukoj točnosti.

$$\begin{aligned}(10.25)_{10} &= \left(10 + \frac{1}{4}\right)_{10} = (10 + 2^{-2})_{10} \\ &= (1010.01)_2 = 1.01001 \cdot 2^3.\end{aligned}$$

Prema tome je:

$$s = 0$$

$$k = e + 127 = (130)_{10} = (2^7 + 2^1)_{10} = 1000\ 0010$$

$$m = 0100\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 000$$

## Prikazi nule: $k = 0, m = 0$

Realni broj **nula** ima **dva** prikaza:

● mantisa i karakteristika imaju **sve** bitove jednake **0**,  
a predznak može biti

● **0** — “pozitivna nula”, ili

● **1** — “negativna nula”.

Ta dva prikaza nule su:

$$+0 = 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

$$-0 = 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

Smatra se da su vrijednosti ta dva broja **jednake** (kad se uspoređuju).



## Denormalizirani brojevi: $k = 0, m \neq 0$

Ako je  $k = 0$ , a postoji **barem jedan** bit mantise koji **nije** nula, onda se kao eksponent uzima  $-126$  (najmanji dozvoljeni). Mantisa takvog broja **nije normalizirana** i počinje s  $0.m$ .

Takvi brojevi zovu se **denormalizirani** brojevi.

**Primjer.** Kako izgleda prikaz realnog broja

$$0.000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 1011 \cdot 2^{-126}?$$

Rješenje:

$$s = 0$$

$$k = 0000\ 0000$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 1011$$

## Plus i minus beskonačno: $k = 255, m = 0$

Ako je  $k = 255$ , a mantisa je **jednaka 0**, onda

- $s = 0$  — prikaz  $+\infty$ , skraćena oznaka **+Inf**,
- $s = 1$  — prikaz  $-\infty$ , skraćena oznaka **-Inf**.

Rezultat **Inf** (odnosno, **-Inf**) dobivamo ako

- pokušamo spremiti **preveliki** broj (tzv. “**overflow**”), ili
- ako nešto **različito** od nule podijelimo s **nulom**.

**Primjer.** Prikaz broja  $+\infty$  ( $-\infty$ ) je

$$s = 0 \quad (s = 1)$$

$$k = 1111 \ 1111$$

$$m = 000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000$$

## Nije broj: $k = 255, m \neq 0$

Ako je  $k = 255$  i postoji bar jedan bit mantise različit od nule, onda je to oznaka za

- tzv. “Not a Number” (“nije broj”) ili, skraćeno, NaN.

Rezultat NaN je uvijek signal da se radi o pogrešci. Na pr.,

- dijeljenje nule s nulom,
- vađenje drugog korijena iz negativnog broja i sl.

Primjer.

$$s = 0$$

$$k = 1111\ 1111$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0101\ 0000\ 0000$$

## Greške zaokruživanja

Postoje realni brojevi koje **ne možemo egzaktno** spremiti u računalo, čak i kad su **unutar** prikazivog raspona brojeva. Takvi brojevi imaju **predugačku mantisu**.

**Primjer.** Realni broj (u binarnom zapisu)

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

ima **25** znamenki mantise i **ne može** se egzaktno spremiti u realni broj jednostruke točnosti, odnosno, tip **float** u **C**-u, koji ima **23 + 1** znamenki za mantisu. Što se onda zbiva?

Tada se pronalaze **dva najbliža prikaziva** susjeda  $B_-$ ,  $B_+$ , broju  $B$ , takva da vrijedi

$$B_- < B < B_+.$$

# Greške zaokruživanja (nastavak)

U našem primjeru je:

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

$$B_- = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 011$$

$$B_+ = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 100$$

Nakon toga, **zaokružuje** se rezultat. Zaokruživanje može biti:

- prema **najbližem** broju (**standardno**, engl. “**default**”, za sve procesore) — ako su dva susjeda **jednako** udaljena od  $B$ , izabire “**parni**” od ta dva broja (**zadnji** bit je 0),
- prema **dolje**, tj. prema  $-\infty$ ,
- prema **gore**, tj. prema  $+\infty$ ,
- prema **nuli**, tj. odbacivanjem “viška” znamenki.

## Greške zaokruživanja (nastavak)

Standardno zaokruživanje u našem primjeru:

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

$$B_- = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 011$$

$$B_+ = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 100$$

Ovdje su  $B_-$  i  $B_+$  jednako udaljeni od  $B$ , pa je zaokruženi  $B$  jednak  $B_+$ , jer  $B_+$  ima **parni** zadnji bit (jednak je **0**).

## Jedinična greška zaokruživanja

Ako je  $x \in \mathbb{R}$  unutar raspona brojeva prikazivih u računalu, onda se, umjesto  $x$ , sprema zaokruženi prikazivi broj  $fl(x)$ .

Time smo napravili grešku zaokruživanja  $\leq \frac{1}{2}$  “zadnjeg bita” mantise (tj.  $\leq \frac{1}{2} 2^{-t} = 2^{-p}$ ), i taj broj se zove

● jedinična greška zaokruživanja (engl. “unit roundoff”).

Standardna oznaka je  $u$ . Za float je

$$u = 2^{-24} \approx 5.96 \cdot 10^{-8}.$$

Vrijedi

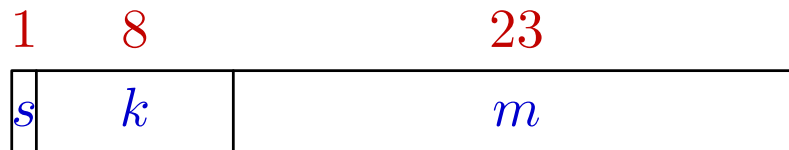
$$fl(x) = (1 + \varepsilon)x, \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je  $\varepsilon$  relativna greška napravljena tim zaokruživanjem.

Dakle, imamo vrlo malu relativnu grešku.

# Prikaz brojeva jednostruke točnosti — sažetak

IEEE tip `single` = `float` u C-u:



Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-127)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 255, \\ (-1)^s * 2^{(-126)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \text{Inf} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m = 0, \\ \text{NaN} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$



# Raspon tipa float

Najveći prikazivi pozitivni broj je

$$\text{FLT\_MAX} = (1 - 2^{-24}) \cdot 2^{128} \approx 3.402823466 \cdot 10^{38},$$

s prikazom

$$s = 0$$

$$k = 1111\ 1110$$

$$m = 111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111$$

Najmanji prikazivi normalizirani pozitivni broj je

$$\text{FLT\_MIN} = 2^{-126} \approx 1.175494351 \cdot 10^{-38},$$

s prikazom

$$s = 0$$

$$k = 0000\ 0001$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

## Raspon tipa float

Simboličke konstante `FLT_MAX`, `FLT_MIN` i još poneke vezane uz tip `float`, definirane su u datoteci zaglavlja `float.h` i mogu se koristiti u C programima.

Uočite:

- $1/\text{FLT\_MIN}$  je **egzaktno** prikaziv (nađite prikaz),
- $1/\text{FLT\_MAX}$  **nije egzaktno** prikaziv i zalazi u denormalizirane brojeve (tzv. “gradual **underflow**”).

**Najmanji prikazivi denormalizirani** pozitivni broj je  $2^{-126} \cdot 2^{-23} = 2^{-149} \approx 1.4013 \cdot 10^{-45}$ , s prikazom

$$s = 0$$

$$k = 0000\ 0000$$

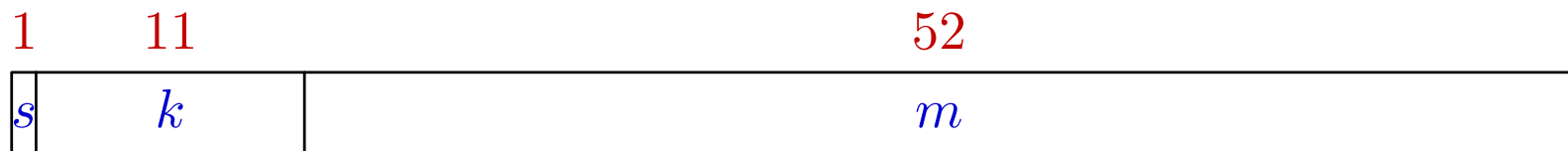
$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0001$$

# Stvarni prikaz tipa double (binary64)

“Srednji” realni tip je tzv. realni broj **dvostruke** točnosti. U C-u se taj tip zove **double**. Savjet: njega **treba koristiti!**

On ima sljedeća svojstva:

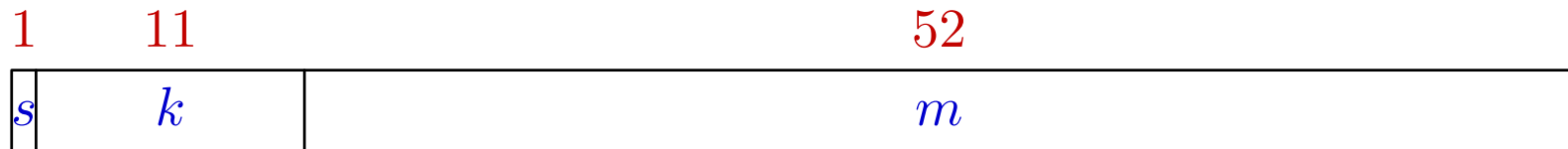
- Duljina: 8 byte-a (64 bita), podijeljen u **tri** polja.



- u mantisi se **ne pamti** vodeća jedinica ako je broj normaliziran,
- **stvarni eksponent**  $e$  broja,  $e \in \{-1022, \dots, 1023\}$ ,
- **karakteristika**  $k = e + 1023$ , tako da je  $k \in \{1, \dots, 2046\}$ ,
- **karakteristike**  $k = 0$  i  $k = 2047$  — “posebna stanja”.

# Prikaz brojeva dvostruke točnosti — sažetak

IEEE tip `double` = `double` u C-u:



Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-1023)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 2047, \\ (-1)^s * 2^{(-1022)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \text{Inf} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m = 0, \\ \text{NaN} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

## Jedinična greška i raspon tipa double

Jedinična greška zaokruživanja za `double` je

$$u = 2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}.$$

Broj  $1 + 2u$  je najmanji prikazivi broj strogo veći od 1. Postoji

$$\text{DBL\_EPSILON} = 2u \approx 2.2204460492503131 \cdot 10^{-16}.$$

Najveći prikazivi pozitivni broj je

$$\text{DBL\_MAX} = (1 - 2^{-53}) \cdot 2^{1024} \approx 1.7976931348623158 \cdot 10^{308}.$$

Najmanji prikazivi normalizirani pozitivni broj je

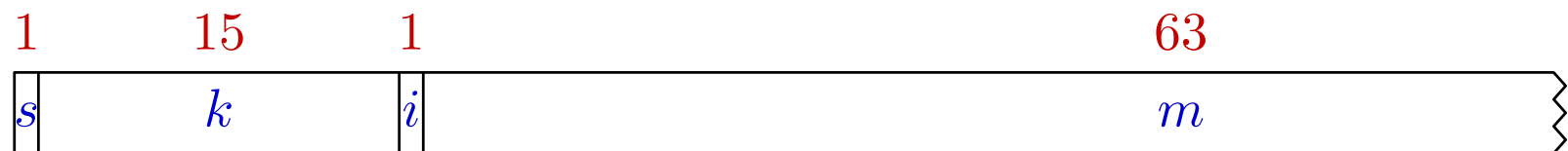
$$\text{DBL\_MIN} = 2^{-1022} \approx 2.2250738585072014 \cdot 10^{-308}.$$

## Tip extended

Stvarno računanje (na IA-32) se obično radi u “proširenoj” točnosti. U C-u je taj tip možda dohvatljiv kao `long double`.

On ima sljedeća svojstva:

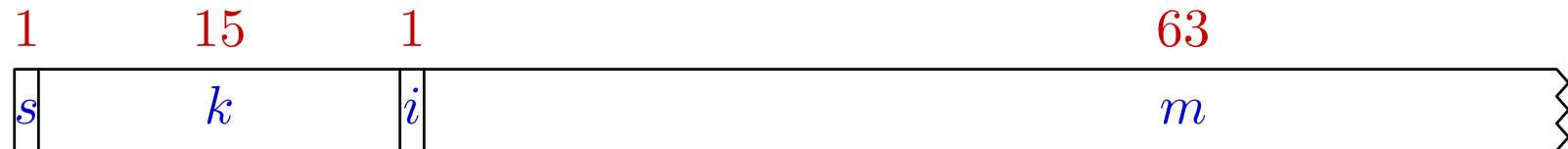
- Duljina: 10 byte-a (80 bita), podijeljen u četiri polja.



- u mantisi se pamti vodeći bit *i* mantise,
- stvarni eksponent *e* broja,  $e \in \{-16382, \dots, 16383\}$ ,
- karakteristika  $k = e + 16383$ , tako da je  $k \in \{1, \dots, 32766\}$ ,
- karakteristike  $k = 0$  i  $k = 32767$  — “posebna stanja”.

# Prikaz brojeva proširene točnosti — sažetak

IEEE tip *extended*:



Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-16383)} * (i.m) & \text{ako je } 0 \leq k < 32767, \\ (-1)^s * \text{Inf} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m = 0, \\ \text{NaN} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Uočite da **prva** mogućnost uključuje:

•  $+0$ ,  $-0$  i **denormalizirane** brojeve (za  $k = 0$ ),

jer se **pamti** vodeći “cjelobrojni” bit  $i$  mantise.

# Realna aritmetika računala (IEEE standard)



# Oznake

**Oznaka.** Neka je  $\mathcal{F}$  skup svih **realnih** brojeva koji se nalaze u **dozvoljenom rasponu** za **normalizirani** prikaz (u danom tipu).

Što to znači? Broj  $x \in \mathcal{F}$  **ne mora** biti prikaziv, ali njegova

**zaokružena** aproksimacija  $fl(x)$  **ima** **normalizirani** prikaz, pa onda i **malu** relativnu grešku.

**Najmanji** **normalizirani** prikazivi broj u danom tipu je

$$v_{\min} = [1.000 \dots 0] \cdot 2^{e_{\min}} = 2^{e_{\min}},$$

a **najveći** **normalizirani** prikazivi broj je

$$\begin{aligned} v_{\max} &= [1.111 \dots 1] \cdot 2^{e_{\max}} = (1 + (1 - 2^{-t})) \cdot 2^{e_{\max}} \\ &= 2(1 - 2^{-t-1}) \cdot 2^{e_{\max}} = (1 - 2^{-p}) \cdot 2^{e_{\max}+1}. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi  $x \in \mathcal{F} \iff |fl(x)| \in [v_{\min}, v_{\max}]$ .

# Zaokruživanje u aritmetici

Osnovna pretpostavka za realnu aritmetiku u računalu:

- za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput  $\sqrt{\quad}$ , ali ne vrijedi za sve funkcije (na pr. za  $\cos$  i  $\sin$  u okolini nule).

Preciznije: Neka  $\circ$  označava bilo koju operaciju  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ . Za prikazive brojeve u dozvoljenom rasponu  $x, y \in \mathcal{F}$ , takve da je i egzaktni rezultat  $x \circ y$  u dozvoljenom rasponu (tj. u  $\mathcal{F}$ ), vrijedi ocjena relativne greške

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u.$$

Broj  $\varepsilon$  ovisi o  $x$ ,  $y$ , operaciji  $\circ$  i aritmetici računala.

# Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Ova ocjena je **ekvivalentna** idealnom izvođenju aritmetičkih operacija:

- **egzaktno** izračunaj rezultat operacije  $x \circ y$ ,
- **zaokruži** ga, pri spremanju rezultata u memoriju.

To **ne znači** da računalo **zaista** tako i računa. Naime,

- za  $+$ ,  $-$ ,  $*$  to bi se još i moglo napraviti (egzaktne rezultati imaju konačan binarni prikaz),
- ali kod **dijeljenja** to sigurno **ne ide** (egzaktan kvocijent može imati beskonačan binarni prikaz).

Dakle, **važno** je samo da dobijemo istu **ocjenu greške** kao u “idealnom” računanju, a **nije važno** kako se stvarno računa!

# Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

U principu, to **dozvoljava** da se rezultati **ponešto razlikuju** na raznim računalima (ovisno o stvarnoj realizaciji aritmetike), ali

- **ocjena relativne greške mora** biti ista.

Uočite da “mjesto za razlike” nema puno, tj. razlike su zaista **rijetke**.

**Napomena.** Oznaka  $fl(\text{izraz})$ , općenito, označava **izračunatu** vrijednost izraza, tj. ona mora biti **prikaziva**.

- Ali, to **ne znači**: “izračunaj egzaktno”, pa “zaokruži”,
- nego: **izračunaj sve** operacije i funkcije **u aritmetici računala** (tj. i svaki **međurezultat** mora biti **prikaziv**).

# Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Još nekoliko napomena o točnosti aritmetike. Relacija

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

kaže da **izračunati rezultat**  $fl(x \circ y)$  ima **malu relativnu grešku** obzirom na egzakti rezultat  $x \circ y$ .

Obratite pažnju na **uvjete** uz koje vrijedi taj zaključak:

- **ulazne vrijednosti** moraju biti **prikazive** (što je jasno), ali i **u dozvoljenom rasponu**, tj. **normalizirane**,
- **egzakti rezultat** mora, također, biti **u dozvoljenom rasponu**.

Bez **oba** uvjeta, zaključak **ne vrijedi**.

# Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Prvi uvjet — na ulaz, “zvuči razumno” i s njim nije teško izaći na kraj.

Ako je (barem jedna) ulazna vrijednost nula, onda su operacije

- ili egzaktne, tj. nema greške

(operacije  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $0/y$ , uz  $y \neq 0$ , i funkcija  $\sqrt{\quad}$ ),

- ili dijelimo s nulom, pa dobivamo Inf ili NaN ili grešku.

Za sve ostale moguće nenormalizirane operande i ne očekujemo neki “točan” rezultat.

U svakom slučaju, ulazne vrijednosti uvijek možemo testirati (tj. provjeriti) u programu i tako kontrolirati što se događa.

# Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Drugi uvjet — na rezultat, je mnogo teže kontrolirati:

● izračunati rezultat “vidimo” tek kad ga izračunamo, i tad je sve gotovo, a egzakti rezultat ionako ne znamo.

Općenito, može nam se dogoditi da je egzakti rezultat izvan prikazivog raspona (kao i kod prikaza brojeva):

- “blizu nula” po apsolutnoj vrijednosti — tzv. **underflow**, i
  - računalo tada “šutke” vraća nulu ili nenormalizirani broj “blizu” nule (bez poruke o grešci),
- “prevelik” po apsolutnoj vrijednosti — tzv. **overflow**, i
  - računalo tada vraća **Inf** ili javlja grešku (i prekida izvršavanje programa).

## Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Naravno, **treća** mogućnost je da radimo **nedozvoljenu** operaciju, pa je rezultat **NaN** ili **greška**, ali to se može spriječiti kontrolom unaprijed.

Ni u jednom od ova **tri** slučaja **ne dobivamo malu relativnu grešku** — dakle, ranija ocjena **ne vrijedi**.

**Oprez:** čisto statistički gledano, po svim dozvoljenim operandima, **množenje** i **dijeljenje** relativno **često** daju (**egzaktne**) rezultat **izvan prikazivog raspona** (na pr.  $x^2$ ).

Iako **egzaktne** rezultat operacije **ne znamo** unaprijed, to **ne znači** da

- nema mogućnosti kontrole pojave rezultata **izvan prikazivog raspona** (i pripadnog **gubitka točnosti**).



# Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Naprotiv, gomila nepotrebnih pojava **underflowa** i, posebno, **overflowa**

- može se izbjeći pažljivim projektiranjem algoritama.

**Overflow** je, općenito, **opasniji**, jer

- nema “gradiranog” prijelaza (kao kod underflowa),
- najčešće (još uvijek) završava greškom, tj. prekidom izvršavanja programa.

Zato se računanje obično “**skalira**” tako da se izbjegne overflow. U većini slučajeva, to se postiže

- jednostavnim transformacijama standardnih formula.**

Primjeri malo kasnije.

# Širenje grešaka zaokruživanja

# Širenje grešaka zaokruživanja

Vidimo da gotovo **svaki** izračunati rezultat ima neku **grešku**.  
Osim toga,

- zaokruživanje se vrši nakon **svake pojedine operacije**.

Najlakše je stvar zamišljati kao da zaokruživanje ide “na kraju” operacije, iako je ono “dio operacije”.

Kad imamo **puno** aritmetičkih operacija (inače nam računalo ne treba), dolazi do tzv.

- akumulacije** ili **širenja** grešaka zaokruživanja.

Malo pogrešni rezultati (možda već od čitanja), ulaze u operacije, koje opet malo griješe, i tako redom ...

- greške** se “**šire**” kroz **sve što računamo!**

# Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Očekujemo da greške “rastu”, ali koliko?

● “Pomalo”, ili “brzo”?

**Ključno pitanje:** Možemo li nešto reći o tom “rasprostiranju” grešaka zaokruživanja?

Možemo!

Ali, (uvijek ima neki “ali”),

● put do odgovora nije nimalo jednostavan,

● i treba ga provesti za svaki pojedini proračun posebno.

Gdje je problem?

# Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Nažalost,

- aritmetika računala nije egzaktna
- i u njoj ne vrijede uobičajeni zakoni za operacije na  $\mathbb{R}$ .

Na primjer, za aritmetičke operacije u računalu

- nema asocijativnosti zbrajanja i množenja,
- nema distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Dakle, poredak izvršavanja operacija je bitan!

Zapravo, jedino standardno pravilo koje vrijedi je

- komutativnost za zbrajanje i za množenje.

(Relativno nedavno je postojalo računalo na kojem ni to nije vrijedilo — prva Cray računala).

# Primjer: Neasocijativnost zbrajanja

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja

Primjer. **Asocijativnost** zbrajanja u računalu **ne vrijedi**.

Znamo (odn. uskoro ćete znati) da je tzv. **harmonijski** red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

**divergentan**, tj. suma mu je “**beskonačna**”.

No, nitko nas ne spriječava da računamo **konačne** početne komade ovog reda, tj. **njegove parcijalne sume**

$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

A kojim **redom** zbrajamo? (Zbrajanje je **binarna** operacija!)

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

U **realnim** brojevima je **potpuno svejedno** kojim poretkom zbrajanja računamo ovu sumu, jer vrijedi **asocijativnost**.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Uostalom, sam zapis izraza **bez zagrada**

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

već “podrazumijeva” **asocijativnost**. U suprotnom, morali bismo **zagradama** naglasiti **poredak** operacija.

Ovdje imamo točno  $n - 1$  **binarnih operacija zbrajanja**, i možemo ih napraviti **kojim redom hoćemo**.



## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Drugim riječima, u prethodni izraz za  $S_n$

- možemo rasporediti zagrade na **bilo koji način**, samo da svi plusevi budu “**binarni**”, tj. zbrajaju **dva** objekta, a objekt je **broj** ili (podizraz u zagradama).

Na pr., zbrajanju “**unaprijed**” odgovara raspored zagrada

$$S_{n,1} := \left( \cdots \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n},$$

a zbrajanju “**unatrag**” odgovara raspored zagrada

$$S_{n,2} := 1 + \left( \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \cdots + \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \cdots \right) \right).$$

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Koliko takvih rasporeda zagrada ima — bit će napravljeno u **Diskretnoj matematici** (tzv. **Catalanovi brojevi**). Bitno nam je samo da svi ti rasporedi, matematički, daju **isti rezultat**.

**Komutativnost** nam uopće **ne treba**. Ako i nju iskoristimo, dobivamo još puno **više** načina za računanje ove sume, i svi, naravno, opet daju **isti rezultat**.

Izračunajmo **aritmetikom računala** navedene **dvije** sume

•  $S_{n,1}$  — unaprijed, i

•  $S_{n,2}$  — unatrag,

za  $n = 1\,000\,000$ , u **tri** standardne **IEEE** točnosti: **single**, **double** i **extended**. Preciznije, koristimo ova tri tipa za prikaz brojeva, uz pripadne aritmetike za računanje.

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Uz skraćene oznake  $S_1$  i  $S_2$  za **varijable** u kojima zbrajamo pripadne sume, odgovarajući **algoritmi** za zbrajanje su

● **unaprijed:**

$$S_1 := 1,$$

$$S_1 := S_1 + \frac{1}{i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

● **unatrag:**

$$S_2 := \frac{1}{n},$$

$$S_2 := \frac{1}{i} + S_2, \quad i = n - 1, \dots, 1.$$

Dakle, zaista **ne koristimo** komutativnost zbrajanja.

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Dobiveni rezultati za sume  $S_1$ ,  $S_2$  i pripadne relativne greške su:

tip i suma	vrijednost	rel. greška
single $S_1$	14.3573579788208008	2.45740E-0003
single $S_2$	14.3926515579223633	5.22243E-0006
double $S_1$	14.3927267228647810	6.54899E-0014
double $S_2$	14.3927267228657545	-2.14449E-0015
extended $S_1$	14.3927267228657234	1.91639E-0017
extended $S_2$	14.3927267228657236	-1.08475E-0018

Slovo E u brojevima zadnjeg stupca znači “puta 10 na”, pa je, na primjer,  $-1.08475E-0018 = -1.08475 \times 10^{-18}$ .

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Izračunate vrijednosti  $S_1$  i  $S_2$  su različite (u sve tri točnosti). Dakle, zbrajanje brojeva u aritmetici računala, očito, nije asocijativno.

Primijetite da, u sve tri točnosti, zbrajanje unatrag  $S_2$  daje nešto točniji rezultat. To nije slučajno.

Svi brojevi koje zbrajamo su istog predznaka pa zbroj stalno raste, bez obzira na poredak zbrajanja.

- Kad zbrajamo unatrag — od manjih brojeva prema većim, zbroj se pomalo “nakuplja”.
- Obratno, kad zbrajamo unaprijed — od velikih brojeva prema manjim, zbroj puno brže naraste. Pred kraj, mali dodani član jedva utječe na rezultat (tj. dobar dio znamenki pribrojnika nema utjecaj na sumu).

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Drugim riječima, uz isti broj pribrojnika, kod zbrajanja unaprijed

- dodajemo manji broj, ali na veću (dotadašnju) sumu, pa je utjecaj tog pribrojnika bitno manji, a greška veća.

Ovo se izrazito vidi u single  $S_1$ . U usporedbi sa single  $S_2$

- pripadna relativna greška je preko 400 puta veća i dobivamo samo 3 točne znamenke u rezultatu.

Cijeli ovaj eksperiment je napravljen u “prastarom” Turbo Pascalu 7.0 (za DOS) — jer jednostavno podržava sva tri standardna IEEE tipa. Probajte to napraviti u C-u, FORTRAN-u ili nekom drugom programskom jeziku.

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (zadatak)

**Zadatak.** U aritmetici računala, za dovoljno velike  $n$ , parcijalne sume  $S_{n,1}$  i  $S_{n,2}$  postaju **konstantne**, tj. više **ne ovise** o  $n$ .

- Zašto? Precizno objasnite!
- Za koji  $n$  se to prvi puta događa, ovisno o **točnosti** i **smjeru** zbrajanja?
  - Probajte u **single**, pa zaključite što će se dogoditi u **double** i **extended** (bez eksperimentiranja).
- Koji smjer zbrajanja je **bolji**?

Na kraju ovog primjera, možda je zgodno reći odakle mi “**točan**” rezultat — tj. onaj koji služi za računanje relativnih grešaka u prethodnoj tablici.

## Primjer neasocijativnosti zbrajanja (kraj)

Postoji algoritam zbrajanja, tzv. dvostruko kompenzirano zbrajanje (engl. doubly compensated summation), koji uvijek daje zbroj s vrlo malom relativnom greškom (oko  $2u$ , ako broj pribrojnika nije prevelik). Taj algoritam daje

$$\text{extended } S_{DC} = 14.3927267228657236.$$

Na 18 dekadskih znamenki, rezultat je isti kao i  $S_2$ .

Koga zanima taj i slični algoritmi, može pogledati knjigu:

- Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms (2. ed.), SIAM, Philadelphia, 2002.

Naravno, može se javiti i meni! ■



# Širenje grešaka u aritmetici

# Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Za analizu grešaka zaokruživanja ne možemo koristiti nikakva “normalna” pravila za aritmetičke operacije u računalu, jer ti zakoni naprosto ne vrijede.

Stvarna algebarska struktura je izrazito komplicirana i postoje debele knjige na tu temu.

- Vrijede neka “zamjenska” pravila, ali su neupotrebljiva za analizu iole većih proračuna.

Međutim, analiza pojedinih operacija postaje bitno lakša, ako uočimo da:

- greške zaokruživanja u aritmetici računala možemo interpretirati i kao egzaktne operacije, ali na “malo” pogrešnim podacima!

# Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Kako? Dovoljno je faktor  $(1 + \varepsilon)$  u ocjeni greške

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

“zalijepiti” na  $x$  i/ili  $y$ . To je isto kao da operand(i) ima(ju) neku relativnu grešku na ulazu u operaciju, a operacija  $\circ$  je egzaktna. Dakle,

- izračunati (ili “zaokruženi”) rezultat jednak je egzaktном rezultatu, ali za malo promijenjene (tj. perturbirane) podatke (u relativnom smislu).

Što dobivamo ovom interpretacijom?

- Onda možemo koristiti “normalna” pravila egzaktne aritmetike za analizu grešaka.

# Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Ne zaboravimo još da  $\varepsilon$  ovdje ovisi o  $x$ ,  $y$ , i operaciji  $\circ$ . Kad takvih operacija ima više, pripadne greške obično označavamo nekim indeksom u  $\varepsilon$ .

Na primjer, ako je  $\circ$  zbrajanje (+), onda je

$$\begin{aligned} fl(x + y) &= (1 + \varepsilon_{x+y}) (x + y) \\ &= [(1 + \varepsilon_{x+y}) x] + [(1 + \varepsilon_{x+y}) y], \end{aligned}$$

uz  $|\varepsilon_{x+y}| \leq u$ , ako su  $x$ ,  $y$  i  $x + y$  u prikazivom rasponu.

Potpuno ista stvar vrijedi i za oduzimanje.

Kod množenja i dijeljenja možemo birati kojem ulaznom podatku ćemo “zalijepiti” faktor  $(1 + \varepsilon)$ .

# Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Za **množenje** možemo pisati

$$\begin{aligned} fl(x * y) &= (1 + \varepsilon_{x*y}) (x * y) \\ &= [(1 + \varepsilon_{x*y}) x] * y = x * [(1 + \varepsilon_{x*y}) y], \end{aligned}$$

a za **dijeljenje**

$$\begin{aligned} fl(x / y) &= (1 + \varepsilon_{x/y}) (x / y) \\ &= [(1 + \varepsilon_{x/y}) x] / y = x / [y / (1 + \varepsilon_{x/y})]. \end{aligned}$$

Postoje i druge varijante. Na primjer, da svakom operandu “zalijepimo”  $\sqrt{1 + \varepsilon}$  (odnosno  $1/\sqrt{1 + \varepsilon}$ ), ali to **nije** naročito važno. **Bitno** je samo da je **izračunati** rezultat **egzaktan** za malo perturbirane podatke.

## Širenje grešaka (bilo kojih)

Zasad **nije vidljivo** koja je točno **korist** od ove interpretacije. Stvar se **bolje** vidi tek kad imamo **više operacija zaredom**.

Međutim, ova ideja s “**malo pogrešnim podacima**” je

- baš ono što nam **treba** za **analizu širenja grešaka**,
- i to bez obzira na uzrok grešaka, čim se sjetimo da
- rezultati **ranijih** operacija
- s nekom **greškom** **ulaze** u **nove** operacije.

Naime, **uzroka** grešaka može biti mnogo, ovisno o tome što računamo. Od grešaka **modela** i **metode**, preko grešaka **mjerenja** (u ulaznim podacima), do grešaka **zaokruživanja** (ali to je tema za **Numeričku matematiku**).

# Širenje grešaka u aritmetici

Za analizu širenja grešaka u aritmetici, treba pogledati

- što se događa s greškama u rezultatu,
- kad imamo greške u operandima.

Prvo u egzaktnoj aritmetici, a onda i u aritmetici računala.

Pretpostavimo onda da su polazni podaci (ili operandi)  $x$  i  $y$  malo perturbirani, s pripadnim relativnim greškama  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$ .

Koje su operacije opasne (ako takvih ima), ako nam je aritmetika egzaktna, a operandi su  $x(1 + \varepsilon_x)$  i  $y(1 + \varepsilon_y)$ ?

Treba ocijeniti relativnu grešku  $\varepsilon_o$  rezultata operacije  $\circ$

$$(x \circ y)(1 + \varepsilon_o) := [x(1 + \varepsilon_x)] \circ [y(1 + \varepsilon_y)].$$

# Širenje grešaka u aritmetici (nastavak)

Naravno, za početak, moramo nešto **pretpostaviti** o  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$ .

Što smatramo **malom** relativnom perturbacijom?

- Svakako **mora** biti  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| < 1$ , inače perturbacijom **gubimo predznak** operanda.

Međutim, to nije dovoljno za neki razuman rezultat.

- Stvarno **očekujemo**  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq c \ll 1$ , tako da imamo barem **nekoliko točnih znamenki** u perturbiranim operandima. Na pr.,  $c = 10^{-1}$  (jedna točna znamenka).
- **Idealno**, u računalu je  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$ , tj. kao da smo oba operanda **samo spremili u memoriju** računala (jedna greška zaokruživanja).



# Širenje grešaka kod množenja

Množenje je bezopasno (benigno), jer vrijedi

$$\begin{aligned}(x * y) (1 + \varepsilon_*) &:= [x (1 + \varepsilon_x)] * [y (1 + \varepsilon_y)] \\ &= xy (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_y),\end{aligned}$$

kad stvar napišemo bez nepotrebnih zagrada i \*. Onda je

$$\varepsilon_* = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_y \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y,$$

ako su  $|\varepsilon_x|$  i  $|\varepsilon_y|$  dovoljno mali da  $\varepsilon_x \varepsilon_y$  možemo zanemariti.

Dakle, relativna greška se samo zbraja.

U idealnom slučaju  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$ , dobivamo približnu ocjenu relativne greške  $|\varepsilon_*| \leq 2u$  (do na  $u^2$ ), ili, na pr.,  $|\varepsilon_*| \leq 2.01u$ .

# Širenje grešaka kod dijeljenja

Dijeljenje je, također, bezopasno (benigno), samo je zaključak malo dulji. Na početku je

$$(x / y) (1 + \varepsilon_{/}) := [x (1 + \varepsilon_x)] / [y (1 + \varepsilon_y)] = \frac{x (1 + \varepsilon_x)}{y (1 + \varepsilon_y)}.$$

Ako su  $|\varepsilon_x|$  i  $|\varepsilon_y|$  dovoljno mali da sve možemo linearizirati (tj. zanemariti “kvadratne” i više potencije epsilon), onda je

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_y} = 1 - \varepsilon_y + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_y^n \approx 1 - \varepsilon_y$$

i

$$(1 + \varepsilon_x) (1 - \varepsilon_y) = 1 + \varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_x \varepsilon_y \approx 1 + \varepsilon_x - \varepsilon_y.$$

## Širenje grešaka kod dijeljenja (nastavak)

Kad to uvrstimo u prvi izraz, dobivamo

$$(x / y) (1 + \varepsilon_{/}) \approx \frac{x}{y} (1 + \varepsilon_x) (1 - \varepsilon_y) \approx \frac{x}{y} (1 + \varepsilon_x - \varepsilon_y).$$

Za relativnu grešku (približno) vrijedi

$$\varepsilon_{/} \approx \varepsilon_x - \varepsilon_y, \quad |\varepsilon_{/}| \approx |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|.$$

Dakle, relativne greške se oduzimaju, a ocjene zbrajaju.

U idealnom slučaju  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$ , opet dobivamo približnu ocjenu relativne greške  $|\varepsilon_{/}| \leq 2u$ .

Vidimo da su i množenje i dijeljenje bezopasne operacije za širenje grešaka zaokruživanja.

# Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

**Zbrajanje i oduzimanje.** Ovdje rezultat ključno ovisi o predznacima od  $x$  i  $y$ .

Sasvim općenito, neka su  $x$  i  $y$  proizvoljnih predznaka. Za zbrajanje i oduzimanje (oznaka  $\pm$ ) vrijedi

$$(x \pm y) (1 + \varepsilon_{\pm}) := [x (1 + \varepsilon_x)] \pm [y (1 + \varepsilon_y)].$$

Pogledajmo prvo trivijalne slučajeve. Ako je egzaktan rezultat  $x \pm y = 0$ , onda imamo dvije mogućnosti.

- Ako je  $x (1 + \varepsilon_x) \pm y (1 + \varepsilon_y) = 0$ , relativna greška  $\varepsilon_{\pm}$  može biti koji broj (nije određena), a prirodno je uzeti  $\varepsilon_{\pm} = 0$ .
- U protivnom, za  $x (1 + \varepsilon_x) \pm y (1 + \varepsilon_y) \neq 0$ , gornja jednakost je nemoguća, pa stavljamo  $\varepsilon_{\pm} = \pm\infty$ .

# Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Pretpostavimo nadalje da je  $x \pm y \neq 0$ . Onda je

$$\begin{aligned}(x \pm y)(1 + \varepsilon_{\pm}) &= x(1 + \varepsilon_x) \pm y(1 + \varepsilon_y) \\ &= (x \pm y) + (x\varepsilon_x \pm y\varepsilon_y) \\ &= (x \pm y) \left( 1 + \frac{x\varepsilon_x \pm y\varepsilon_y}{x \pm y} \right).\end{aligned}$$

Relativnu grešku  $\varepsilon_{\pm}$  možemo napisati u obliku **linearne kombinacije** polaznih grešaka  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{x\varepsilon_x \pm y\varepsilon_y}{x \pm y} = \frac{x}{x \pm y} \varepsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y} \varepsilon_y.$$

# Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Naravno, za nastavak rasprave **ključno** je pitanje

- koliko su **veliki faktori** uz polazne greške, tj. da li “**prigušuju**” ili “**napuhavaju**” greške.

Da ne bismo stalno pisali hrpu oznaka  $\pm$  (nepregledno), pogledajmo što se zbiva kad

- $x$  i  $y$  imaju **isti** predznak, a
- **posebno** gledamo operacije  $+$  i  $-$ .

Ako su  $x$  i  $y$  **različitih** predznaka, zamijenimo operaciju u suprotnu ( $+$   $\mapsto$   $-$ ,  $-$   $\mapsto$   $+$ ), pa će vrijediti isti zaključci.

Nadalje, zbrajamo i oduzimamo brojeve **istih** predznaka.

# Širenje grešaka kod zbrajanja

Zbrajanje brojeva **istog** predznaka je **bezopasno** (benigno). To izlazi ovako.

Zbog **istih** predznaka od  $x$  i  $y$ , vrijedi  $|x|, |y| \leq |x + y|$ , pa je

$$\left| \frac{x}{x + y} \right|, \left| \frac{y}{x + y} \right| \leq 1.$$

To vrijedi i kad je  $x = 0$  ili  $y = 0$ . Odavde odmah slijedi

$$|\varepsilon_+| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|.$$

Dakle, relativna greška se, u najgorem slučaju, **zbraja**.

U idealnom slučaju  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$ , opet dobivamo ocjenu relativne greške  $|\varepsilon_+| \leq 2u$ .

## Širenje grešaka kod zbrajanja (nastavak)

Uz malo truda, dobivamo i **bolju** ocjenu. Prvo uočimo da za faktore vrijedi

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| + \left| \frac{y}{x+y} \right| = 1,$$

i još iskoristimo  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$ . Onda je

$$\begin{aligned} |\varepsilon_+| &\leq \left| \frac{x}{x+y} \right| |\varepsilon_x| + \left| \frac{y}{x+y} \right| |\varepsilon_y| \\ &\leq \left( \left| \frac{x}{x+y} \right| + \left| \frac{y}{x+y} \right| \right) \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\} \\ &= \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}. \end{aligned}$$



## Širenje grešaka kod zbrajanja (nastavak)

Dakle, relativna greška zbrajanja je, u najgorem slučaju,

• **maksimum** polaznih grešaka (ne treba ih zbrajati).

U idealnom slučaju  $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$ , sada dobivamo ocjenu relativne greške  $|\varepsilon_+| \leq u$ . Bolje ne može!

Naravno, isto vrijedi i za **oduzimanje** brojeva **različitih** predznaka. I to je **bezopasno**.

# Širenje grešaka kod oduzimanja

Oduzimanje brojeva istog predznaka može biti opasno, čak katastrofalno loše.

🔴 Točnije, ne mora uvijek biti opasno, ali može!

Zašto i kada je opasno?

Zbog različitih predznaka od  $x$  i  $y$ , uz  $x \neq 0$  i  $y \neq 0$ , sigurno vrijedi

$$|x - y| < \max\{|x|, |y|\},$$

pa je barem jedan od faktora veći od 1, tj.

$$\max\left\{\left|\frac{x}{x-y}\right|, \left|\frac{y}{x-y}\right|\right\} > 1.$$

## Širenje grešaka kod oduzimanja (nastavak)

Odavde odmah slijedi da u ocjeni relativne greške

$$|\varepsilon_-| \leq \left| \frac{x}{x-y} \right| |\varepsilon_x| + \left| \frac{y}{x-y} \right| |\varepsilon_y|$$

na barem **jednom** mjestu imamo **rast** greške, a to se može dogoditi i na **oba** mjesta.

Kad je to **zaista opasno**? Ako je  $|x-y| \ll |x|, |y|$ , ovi faktori

$$\left| \frac{x}{x-y} \right|, \quad \left| \frac{y}{x-y} \right|,$$

mogu biti **proizvoljno veliki**, pa i relativna greška  $|\varepsilon_-|$  rezultata može biti **proizvoljno velika**!

# Opasno oduzimanje ili kraćenje

Opasna situacija  $|x - y| \ll |x|, |y|$  znači da je

- rezultat oduzimanja brojeva istog predznaka =
- broj koji je po apsolutnoj vrijednosti mnogo manji od polaznih podataka (oba operanda),

a to znači da operandi  $x$  i  $y$  moraju biti bliski, tako da dolazi do kraćenja. Zato se ovaj fenomen obično zove

Opasno ili katastrofalno kraćenje.

Dosad smo govorili da relativna greška u tom slučaju može biti velika, ali da li se to zaista događa?

- Naime, ovdje je ipak riječ o ocjeni greške, pa se možda događa da je ocjena vrlo loša, a prava greška ipak mala!

Nažalost, nije tako! To se itekako događa u praksi!

# Primjer: “Katastrofalno” kraćenje

# Primjer katastrofalnog kraćenja

Zakruživanjem ulaznih podataka dolazi do male relativne greške. Kako ona može utjecati na konačan rezultat?

**Primjer.** Uzmimo realnu aritmetiku “računala” u bazi 10. Za mantisu (značajni dio broja) imamo  $p = 4$  dekadске znamenke, a za eksponent 2 znamenke (što nije bitno). Neka je

$$\begin{aligned}x &= 8.8866 = 8.8866 \times 10^0, \\y &= 8.8844 = 8.8844 \times 10^0.\end{aligned}$$

Umjesto brojeva  $x$  i  $y$ , koji nisu prikazivi, u “memoriju” spremamo brojeve  $fl(x)$  i  $fl(y)$ , pravilno zaokružene na  $p = 4$  znamenke

$$\begin{aligned}fl(x) &= 8.887 \times 10^0, \\fl(y) &= 8.884 \times 10^0.\end{aligned}$$

## Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Ovim zaokruživanjima napravili smo **malu** relativnu grešku u  $x$  i  $y$  (ovdje je  $u = \frac{1}{2} b^{-p} = 5 \times 10^{-5}$ ).

Razliku  $fl(x) - fl(y)$  računamo tako da **izjednačimo eksponente** (što već jesu), **oduzmemo** značajne dijelove (mantise), pa **normaliziramo**

$$\begin{aligned} fl(x) - fl(y) &= 8.887 \times 10^0 - 8.884 \times 10^0 \\ &= 0.003 \times 10^0 = 3.??? \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Kod normalizacije, zbog pomaka “**ulijevo**”, pojavljuju se

● **?** = znamenke koje više **ne možemo** restaurirati (ta informacija se **izgubila**).

Što sad?

## Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Računalo radi **isto** što bismo i mi napravili:

na ta mjesta ? upisuje 0.

**Razlog:** da rezultat bude **točan**, ako su **polazni** brojevi **točni**. Dakle, ovo oduzimanje je **egzaktno** i u aritmetici računala.

Konačni **izračunati** rezultat je  $fl(x) - fl(y) = 3.000 \times 10^{-3}$ .

**Pravi** rezultat je

$$\begin{aligned}x - y &= 8.8866 \times 10^0 - 8.8844 \times 10^0 \\ &= 0.0022 \times 10^0 = 2.2 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

Već **prva** značajna znamenka u  $fl(x) - fl(y)$  je **pogrešna**, a relativna greška je **ogromna**! Uočite da je ta znamenka (**3**), ujedno, i **jedina** koja nam je ostala — sve ostalo se **skratilo**!



## Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Prava **katastrofa** se događa ako  $3.??? \times 10^{-3}$  uđe u naredna zbrajanja (oduzimanja), a onda se **skrati** i ta **trojka!**

Uočite da je **oduzimanje**  $fl(x) - fl(y)$  bilo **egzaktno** i u aritmetici našeg “**računala**”, ali **rezultat je**, svejedno, **pogrešan**.

Krivac, očito, **nije oduzimanje** (kad je egzaktno).

- Uzrok su **polazne greške** u operandima.

Ako njih **nema**, tj. ako su polazni operandi **egzaktni**,

- i dalje, naravno, dolazi do **kraćenja**,

- ali je **rezultat** (uglavnom, a po IEEE standardu **sigurno**) **egzaktan**,

pa se ovo kraćenje onda zove **benigno kraćenje**.

# Širenje grešaka u aritmetici računala

Dosad smo gledali širenje grešaka u egzaktnoj aritmetici.

U aritmetici računala postupamo na potpuno isti način. Samo treba zgodno iskoristiti onu raniju interpretaciju da je

- izračunati (ili “zaokruženi”) rezultat jednak egzaktnom, ali za malo perturbirane podatke (u relativnom smislu).

A širenje grešaka u egzaktnoj aritmetici znamo.

Ukratko, bez dokaza:

Svaka pojedina aritmetička operacija u računalu samo

- povećava perturbaciju svojih ulaznih podataka za jedan faktor oblika  $(1 + \varepsilon)$ , uz ocjenu  $|\varepsilon| \leq u$ ,

ovisno o tome kojim operandima “zalijepimo” taj faktor.

# Širenje grešaka u aritmetici računala — primjer

**Primjer.** Računamo zbroj  $\hat{x} + \hat{y}$ , gdje su  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$  spremljeni u računalu i već **imaju** neku **grešku**, nastalu spremanjem pravih vrijednosti  $x$  i  $y$  u memoriju računala i eventualnim ranijim računom. Znamo da za izračunati rezultat vrijedi

$$fl(\hat{x} + \hat{y}) = (1 + \varepsilon_+) (\hat{x} + \hat{y}) = (1 + \varepsilon_+) \hat{x} + (1 + \varepsilon_+) \hat{y},$$

uz  $|\varepsilon_+| \leq u$ , ako su  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  i  $\hat{x} + \hat{y}$  u **prikazivom** rasponu.

No,  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$  već imaju neke **relativne** greške obzirom na prave egzaktno vrijednosti  $x$  i  $y$

$$\hat{x} = (1 + \varepsilon_x)x, \quad \hat{y} = (1 + \varepsilon_y)y,$$

i to treba uvrstiti u gornju formulu.

# Širenje grešaka u aritmetici računala — primjer

Dobivamo da je

$$\begin{aligned} fl(\hat{x} + \hat{y}) &= (1 + \varepsilon_+) (\hat{x} + \hat{y}) \\ &= (1 + \varepsilon_+)(1 + \varepsilon_x) x + (1 + \varepsilon_+)(1 + \varepsilon_y) y. \end{aligned}$$

Drugim riječima, **izračunati** rezultat  $fl(\hat{x} + \hat{y})$  se opet može interpretirati kao **egzaktni** rezultat,

• ali na “**malo više**” perturbiranim polaznim podacima

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (1 + \eta_x)x = (1 + \varepsilon_+)(1 + \varepsilon_x)x, \\ \tilde{y} &= (1 + \eta_y)y = (1 + \varepsilon_+)(1 + \varepsilon_y)y. \end{aligned}$$

Relativne greške  $\eta_x$  i  $\eta_y$  su tzv. “greške **unatrag**” ili “**obratne greške**” — jer se odnose na perturbaciju **ulaza** (uz **egzaktno** računanje).

# Širenje grešaka u aritmetici računala — primjer

Nažalost, prethodne formule **ne daju** neku informaciju o tome

• koliko je **izračunati** rezultat “daleko” od **pravog** rezultata, a upravo to je ono što nas **stvarno zanima**.

• Ovo je tzv. “greška **unaprijed**”, jer mjeri “perturbaciju” rezultata, tj. **izlaza** (uz **približno** računanje).

**Zadatak.** Nađite relativnu grešku **unaprijed**  $\eta_+$  u izračunatom rezultatu

$$fl(\hat{x} + \hat{y}) = (1 + \eta_+) (x + y),$$

u terminima **ulaznih** podataka  $x$  i  $y$ , te grešaka  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\varepsilon_+$ .

**Zaključak.** Greška **unaprijed** se **puno teže** računa od grešaka **unatrag**! Zato se obično nalazi “zaobilaznim” putem.

# Natuknice o analizi grešaka

Bilo koji **algoritam** gledamo kao **preslikavanje**:

ulaz (domena)  $\rightarrow$  izlaz (kodomena).

Naravno, zanima nas

- **greška** u izračunatom **rezultatu** — u kodomeni,
- uz **približno** računanje aritmetikom računala.

Ova greška zove se greška **unaprijed** (engl. forward error).

Nažalost, postupak “**direktne**” analize grešaka je **težak**,

- relativno **rijetko** “ide” i često daje **loše** ocjene greške.

**Primjer.** Obična **norma** vektora u  $\mathbb{R}^2$  (i još dodaj “scaling”).  
(v. **Z. Drmač**, članak u **MFL-u**).

# Natuknice o analizi grešaka (nastavak)

U praksi se puno češće koristi tzv. “**obratna**” analiza grešaka. Osnovna ideja je **ista** kao i za **pojedine** operacije:

- izračunati **rezultati** algoritma mogu se dobiti **egzaktnim** računanjem,
- ali na **perturbiranim ulaznim** podacima — u domeni.

Ova greška u domeni zove se greška **unatrag** ili **obratna** greška (engl. backward error).

**Prednost:** ocjena tih perturbacija u **domeni** je bitno **lakša**,

- jer se **akumulacija** onih faktora oblika  $(1 + \varepsilon)$  **prirodno** radi **unatrag** — od **rezultata** prema **polaznim podacima**.

U protivnom, moramo **znati** grešku za **operande**, a to je greška **unaprijed** za prethodni dio algoritma.

# Natuknice o analizi grešaka (nastavak)

Postupak “unatrag” za nalaženje grešaka u izračunatim rezultatima ide u dva koraka.

- Prvo se obratnom analizom naprave ocjene perturbacija polaznih podataka u domeni,
- a zatim se koristi matematička teorija perturbacije, koja daje ocjene grešaka rezultata u kodomeni. Ovaj izvod ide za egzaktni račun, pa vrijede sva normalna pravila.

Tako stižemo do pojmova:

- stabilno i nestabilno računanje ili algoritam = “prigušivač” ili “pojačalo” grešaka.

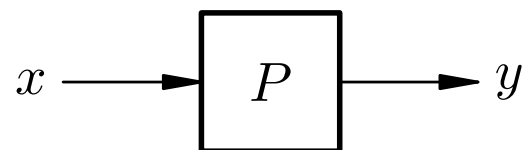
Slikice (skripta NA, Higham) — su na sljedećoj stranici.

- Primjeri nestabilnosti — uklonjivi i NEuklonjivi.

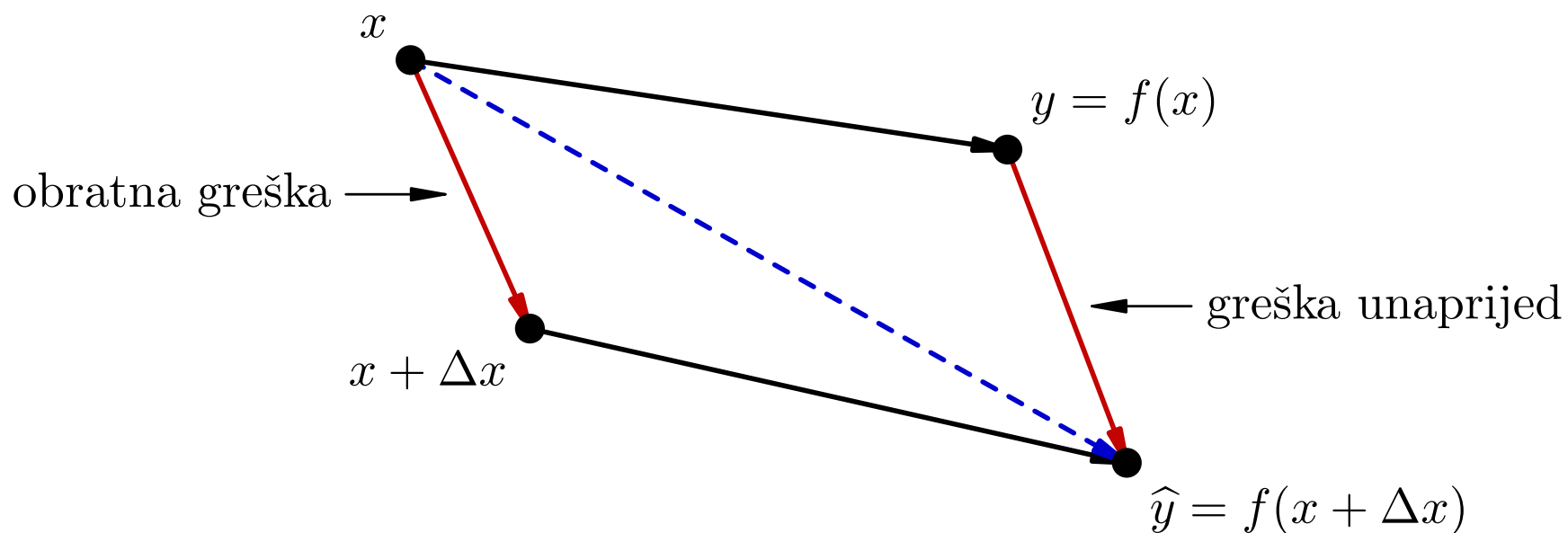


# Greška unaprijed i obratna greška

Uzmimo da **algoritam** “rješava” problem  $P$ .



Ako problem  $P$  intepretiramo kao **računanje** funkcije  $f$ , onda grešku **unaprijed** i **obratnu** grešku možemo prikazati ovako:



## *Dodatna literatura za floating point aritmetiku*

Ako želite saznati još ponešto o **floating-point prikazu** brojeva i **aritmetici**, pogledajte/potražite članke:

- **David Goldberg**, **What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic**, ACM Computing Surveys, Vol. 23, No. 1, March 1991, pp. 5–48.
- **Zlatko Drmač**, **Numerička matematika i računala**, MFL 4/196, Zagreb, 1999., str. 212–219.

i već spomenutu **Highamovu** knjigu.

Zbog “copyrighta”, ovo **nije** na mom webu, ali možete **dobiti**, ako želite.

# Primjer: Kvadratna jednadžba

# Kvadratna jednadžba

Uzmimo da treba riješiti (realnu) kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  zadani, i vrijedi  $a \neq 0$ .

Matematički gledano, problem je lagan: imamo 2 rješenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Numerički gledano, problem je mnogo izazovniji:

- ni uspješno računanje po ovoj formuli,
- ni točnost izračunatih korijena,

ne možemo uzeti “zdravo za gotovo”.

# Kvadratna jednadžba — standardni oblik

Za početak, jer znamo da je  $a \neq 0$ , onda jednadžbu možemo **podijeliti** s  $a$ , tako da dobijemo tzv. “**normalizirani**” oblik

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Po standardnim formulama, rješenja ove jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Međutim, u praksi, stvarno **računanje** se radi po formuli

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

s tim da na početku izračunamo i **zapamtimo**  $p/2$  ili  $-p/2$ .  
Ovim postupkom **štedimo** jedno množenje (ono s 4).

# Kvadratna jednadžba — problem

**Primjer.** Rješavamo kvadratnu jednadžbu  $x^2 - 56x + 1 = 0$ .

U dekadskoj aritmetici s  $p = 5$  značajnih znamenki dobijemo

$$x_1 = 28 - \sqrt{783} = 28 - 27.982 = 0.018000,$$

$$x_2 = 28 + \sqrt{783} = 28 + 27.982 = 55.982.$$

Točna rješenja su

$$x_1 = 0.0178628\dots \quad \text{i} \quad x_2 = 55.982137\dots$$

Apsolutno **manji** od ova dva korijena —  $x_1$ , ima **samo dvije** točne znamenke (**kraćenje**), relativna greška je  $7.7 \cdot 10^{-3}$ !

Apsolutno veći korijen  $x_2$  je “savršeno” **točan**.

# Kvadratna jednadžba — popravak

Prvo izračunamo **većeg** po apsolutnoj vrijednosti, po formuli

$$x_2 = \frac{-(b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = -\frac{p}{2} - \text{sign}(p)\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

a **manjeg** po apsolutnoj vrijednosti, izračunamo iz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q$$

(Vieta), tj. formula za  $x_1$  je

$$x_1 = \frac{c}{x_2 a} = \frac{q}{x_2}.$$

Opasnog **kraćenja** za  $x_1$  više **nema!**

## Kvadratna jednadžba (nastavak)

Ovo je bila samo **jedna**, od (barem) **tri** “opasne” točke za računanje. Preostale **dvije** su:

- “kvadriranje” pod korijenom — mogućnost za **overflow**.  
Rješenje — “skaliranjem”.
- **oduzimanje** u diskriminanti (**kraćenje**) — **nema** jednostavnog rješenja. Naime, “krivac” **nije** aritmetika.
  - To je samo odraz tzv. **nestabilnosti** problema, jer tad imamo **dva bliska korijena** koji su **vrlo osjetljivi** na male **perturbacije** koeficijenata jednadžbe.
  - Na primjer, pomak  $c$  = pomak grafa “**gore–dolje**”. **Mali** pomak rezultira **velikom** promjenom korijena!



# Primjeri izbjegavanja kraćenja

# Neki primjeri izbjegavanja kraćenja

Primjer. Treba izračunati

$$y = \sqrt{x + \delta} - \sqrt{x},$$

gdje su  $x$  i  $\delta$  zadani ulazni podaci, s tim da je  $x > 0$ ,

• a  $|\delta|$  vrlo mali broj.

U ovoj formuli, očito, dolazi do velike greške zbog kraćenja — zaokruživanje korijena prije oduzimanja.

Ako formulu “deracionaliziramo” u oblik

$$y = \frac{\delta}{\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}},$$

problema više nema!

# Neki primjeri izbjegavanja kraćenja

Primjer. Treba izračunati

$$y = \cos(x + \delta) - \cos x,$$

gdje su  $x$  i  $\delta$  zadani **ulazni** podaci, s tim da je  $|\cos x|$  razumno velik,

• a  $|\delta|$  **vrlo mali** broj.

Opet, dolazi do **velike greške** zbog **kraćenja**.

Ako formulu napišmo u “**produktnom**” obliku

$$y = -2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \left( x + \frac{\delta}{2} \right),$$

problema više **nema!**

# Šírenje greška — zakučak

# Opasne i bezopasne operacije — sažetak

Jedina opasna operacija — kad rezultat može imati veliku relativnu grešku, je

- oduzimanje bliskih brojeva,
- i to samo kad polazni operandi već imaju neku grešku (samo oduzimanje je tada, najčešće, egzaktno).

Ovaj fenomen zove se opasno ili katastrofalno kraćenje.

Sve ostale operacije su bezopasne — relativna greška rezultata ne raste pretjerano. Posebno,

- dijeljenje malim brojem nije opasno,
- osim kad je mali broj nastao (ranijim) kraćenjem.

Nažalost, u nekim knjigama piše suprotno — i pogrešno.