Numerička matematika
2. predavanje — dodatak

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja — dodatka

- Širenje grešaka kod računanja:
  - Uvjetovanost osnovnih operacija — sažetak.
  - Primjer uvjetovanosti višedimenzionalnog problema.
  - Primjer grešaka zaokruživanja — računanje $(x-n)^{10}$.

Relativna uvjetovanost osnovnih operacija — sažetak

Oznake i pretpostavke na ulaz

Egzaktne ulazne vrijednosti:

- Neka su x, y skalari (realni ili kompleksni brojevi) takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

Približne ulazne vrijednosti:

- Neka su $\hat{x}$, $\hat{y}$ njihove aproksimacije s relativnim greškama

$$\varepsilon_x := \frac{\hat{x} - x}{x}, \qquad \varepsilon_y := \frac{\hat{y} - y}{y}.$$

Dodatno, neka je

$$\varepsilon := \max\{\, |\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \,\}$$

maksimum relativnih grešaka aproksimacija na ulazu u aritmetičku operaciju.

Oznake i pretpostavke na izlaz

Egzaktni rezultat operacije $\circ$ je $x \circ y$. Uz pretpostavku da je $x \circ y \neq 0$, relativna greška približnog izlaza $\hat{x} \circ \hat{y}$ je

$$\varepsilon_\circ := \frac{(\hat{x} \circ \hat{y}) - (x \circ y)}{x \circ y}.$$

Ovu grešku $\varepsilon_\circ$ želimo ocijeniti u obliku

$$\left\{ \begin{matrix} \text{relativna greška} \\ \text{na izlazu} \end{matrix} \right\} \leq \text{uvjetovanost} \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{relativna greška} \\ \text{na ulazu} \end{matrix} \right\},$$

uz neke razumne pretpostavke na ulazne veličine i grešku ε. Skraćeni zapis je

$$|\varepsilon_\circ| \leq \kappa_\circ \cdot \varepsilon,$$

gdje je

- $\kappa_\circ$ = relativni broj uvjetovanosti za operaciju $\circ$.

Relativna uvjetovanost zbrajanja i oduzimanja

Pretpostavimo za egzaktni rezultat vrijedi $x \pm y \neq 0$. Onda je

$$|\varepsilon_{\pm}| \leq \kappa_{\pm} \cdot \varepsilon, \qquad \kappa_{\pm} = \frac{|x| + |y|}{|x \pm y|}.$$

Za zbrajanje brojeva istog predznaka (oznaka $+$) vrijedi

$$\kappa_{+} = \frac{|x| + |y|}{|x + y|} = 1.$$

Za zbrajanje brojeva različitog predznaka (oznaka $-$) vrijedi

$$\kappa_{-} = \frac{|x| + |y|}{|x - y|} > 1.$$

Ako je $\kappa_{-} \gg 1$, oduzimanje je loše uvjetovano — katastrofalno kraćenje!

Relativna uvjetovanost množenja

Pretpostavimo da je $\hat{x} \neq 0$ i $\hat{y} \neq 0$, što osigurava i $\hat{x} * \hat{y} \neq 0$. Onda je

$$|\varepsilon_*| \leq \kappa_* \cdot \varepsilon, \qquad \kappa_* = 2 + \varepsilon.$$

Dodatno, ako još pretpostavimo da je $\varepsilon \leq 1$, onda je

$$\kappa_* \leq 3.$$

Dakle, ako približne vrijednosti imaju malu relativnu grešku, onda je množenje dobro uvjetovano u relativnom smislu.

Pretpostavka $\varepsilon \leq 1$ osigurava da približne vrijednosti nemaju suprotan predznak od pravih (što je razumno).

Relativna uvjetovanost dijeljenja

Pretpostavimo da je $\hat{x} \neq 0$ i $\hat{y} \neq 0$, što osigurava i $\hat{x}/\hat{y} \neq 0$.

Za iole razumnu ocjenu, ovdje još moramo pretpostaviti

- da približni nazivnik $\hat{y}$ nije pretjerano pogrešan, tako da ima korektan predznak, tj. da je $\varepsilon_y > -1$.

Uz malo jaču pretpostavku $\varepsilon < 1$, izlazi

$$|\varepsilon_/| \leq \kappa_/ \cdot \varepsilon, \qquad \kappa_/ = \frac{2}{1 - \varepsilon}.$$

Dodatno, ako još pretpostavimo da je $\varepsilon \leq 1/2$, onda je

$$\kappa_/ \leq 4.$$

Dakle, ako približne vrijednosti imaju malu relativnu grešku, onda je dijeljenje dobro uvjetovano u relativnom smislu.

Primjer uvjetovanosti višedimenzionalnog problema

Primjer — uvjetovanost i uvjetovanost po normi

Primjer. Ispitajmo relativnu uvjetovanost problema računanja vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gdje je

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \qquad y_2 = f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

U finijoj analizi, matrica uvjetovanosti $\Gamma(x)$ ima elemente

$$\gamma_{11} = \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right|, \qquad \gamma_{12} = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right|,$$

$$\gamma_{21} = \left| \frac{x_2}{x_2 - x_1} \right|, \qquad \gamma_{22} = \left| \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right|,$$

što ukazuje na lošu uvjetovanost (engl. ill–conditioning) za $x_1 \approx \pm x_2$, uz uvjet da $|x_1|$ (a onda i $|x_2|$) nisu mali.

Primjer (nastavak)

Za "globalni" broj uvjetovanosti $\|\Gamma(x)\|_F$ dobivamo

$$\|\Gamma(x)\|_F = \sqrt{2}\, \frac{x_1^2 + x_2^2}{\left|x_1^2 - x_2^2\right|},$$

što ponovno pokazuje istu lošu uvjetovanost za $x_1 \approx \pm x_2$.

Ako uzmemo relativnu uvjetovanost po ∞-normi, onda je

$$(\operatorname{cond} f)(x) = \frac{\max\{\,|x_1|, |x_2|\,\} \cdot (x_1^2 + x_2^2)}{\max\{\,|x_1 + x_2|, |x_2 - x_1|\,\} \cdot |x_1 x_2|}.$$

Uvrstimo li $x_1 \approx \pm x_2$, dobivamo da je $(\operatorname{cond} f)(x) \approx 1$, što vodi na pogrešan zaključak da je problem dobro uvjetovan i neosjetljiv na perturbacije za $x_1 \approx \pm x_2$.

Primjer širenja grešaka zaokruživanja

Primjer širenja grešaka

Primjer. Vrijednost

$$f_n(x) = (x-n)^{10}, \quad n = 0, \ldots, 10,$$

računamo u aritmetici računala (`extended`) u okolini točke n.

- Točka n je deseterostruka nultočka polinoma f_n.

Egzaktno gledano, graf funkcije $(x-n)^{10}$ = translatirani graf funkcije x^{10} za n jedinica udesno.

Funkcijske vrijednosti $f_n(x)$ možemo izračunati na više načina.

- Oni su matematički ekvivalentni,
- ali nisu numerički jednaki i ne daju iste rezultate.

Primjer širenja grešaka (nastavak)

Vrijednosti $f_n(x)$ računat ćemo na dva načina:

- binarnim potenciranjem vrijednosti $(x - n)$ na desetu potenciju — savršeno stabilno (ovo oduzimanje je dobro),
- razvojem po potencijama od x, korištenjem binomne formule
$$(x-n)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-n)^{10-k} \cdot x^k,$$
s tim da polinom na desnoj strani računamo Hornerovom shemom.

Problem: U okolini točke n, $(x - n)^{10}$ je vrlo mali broj.

Članovi u sumi na desnoj strani su alternirajući po predznaku i rastu s porastom n $\Longrightarrow$ mora doći do sve većeg kraćenja.

Primjer širenja grešaka (nastavak)

Kako izgledaju izračunati grafovi funkcije f_n?

- zeleno — graf dobiven binarnim potenciranjem,
- crveno — graf dobiven Hornerom iz binomne formule.

Za svaki n crtamo dvije slike izračunatih grafova:

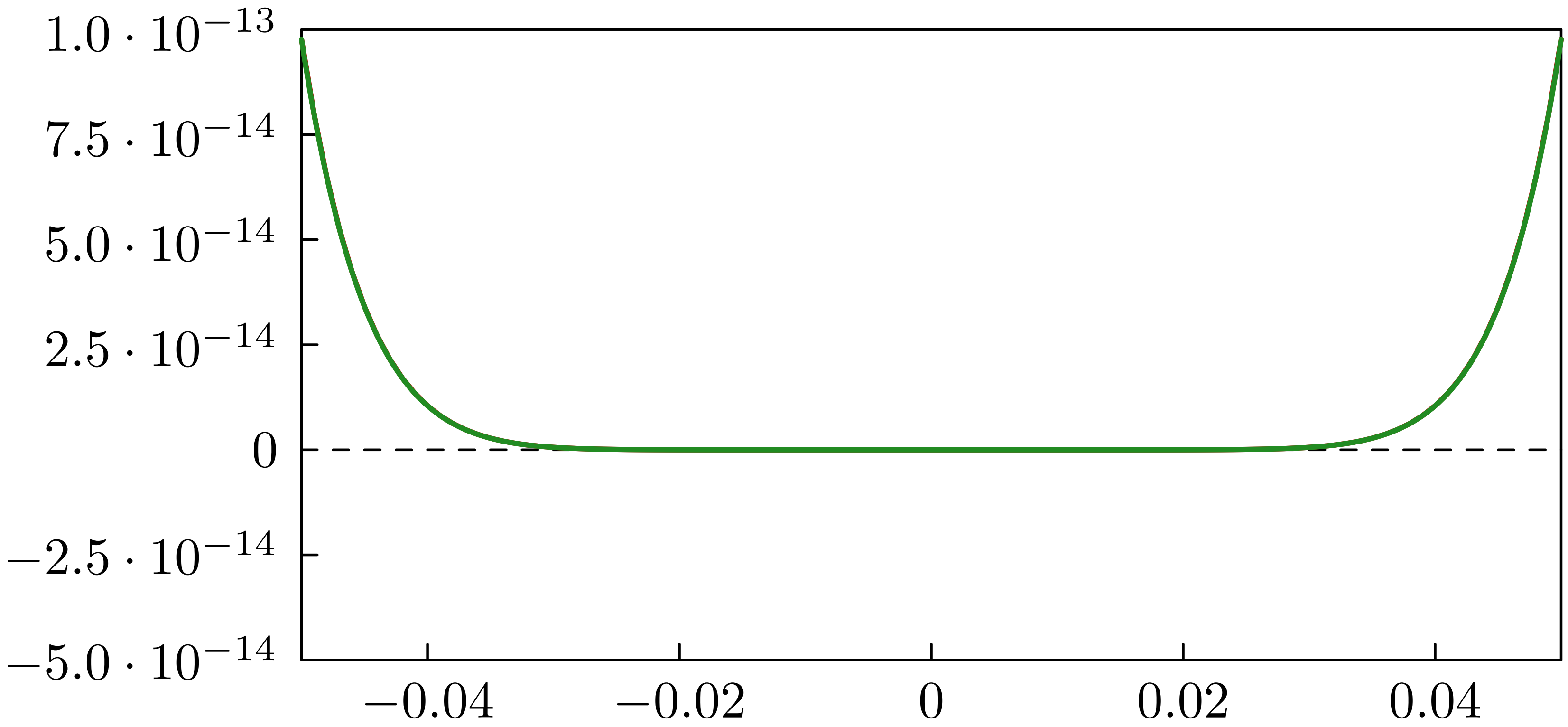
- na intervalu $[n - 0.05, n + 0.05]$,
- na intervalu $[n - r_n, n + r_n]$, gdje je r_n odabran tako da ovaj interval sadrži numeričke nultočke od f_n.

Obratite pažnju na skale po x i y!

- Kako n raste, interval za nultočke se širi — r_n raste,
- a funkcijske vrijednosti u tom intervalu postaju sve udaljenije od nule — veće po apsolutnoj vrijednosti.

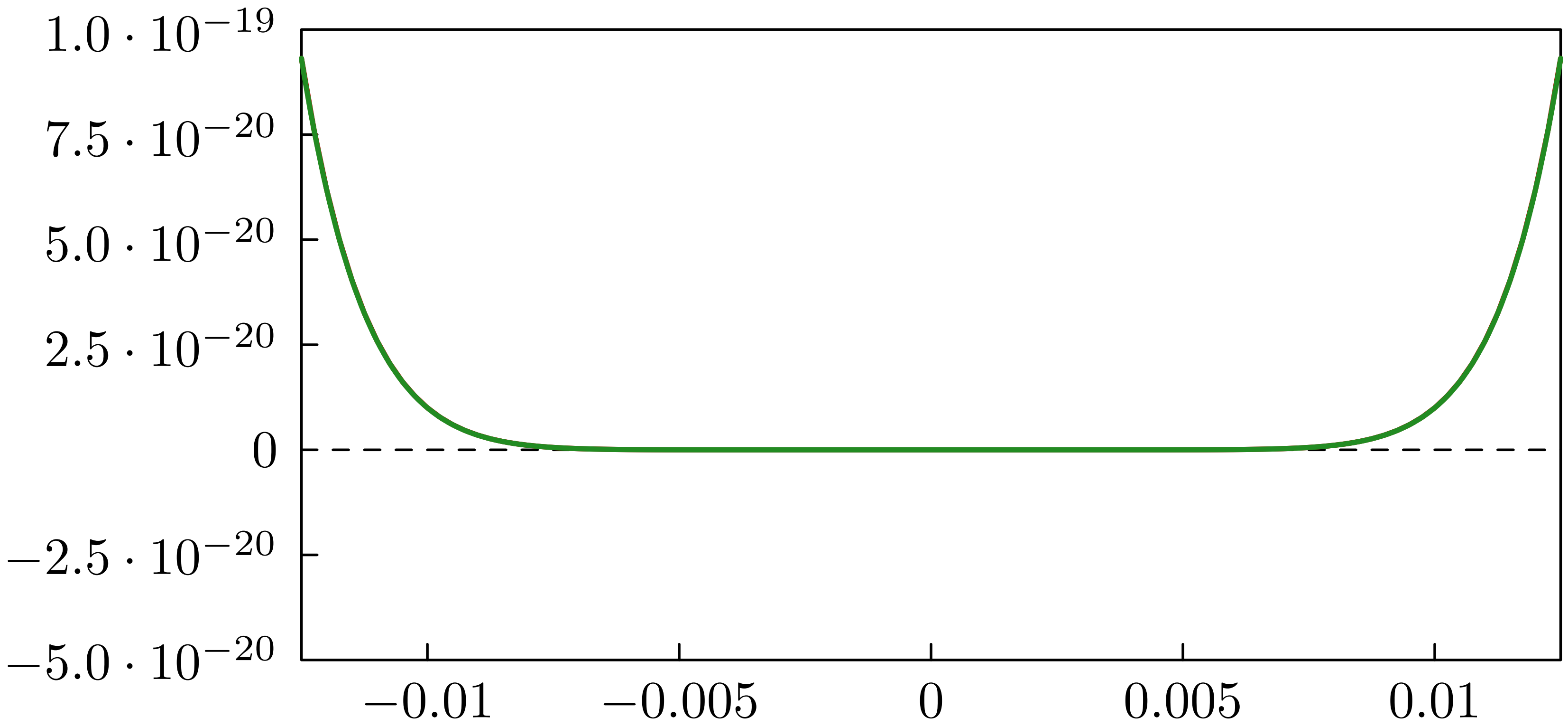
Primjer širenja grešaka — $n = 0$, $r = 0.05$

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



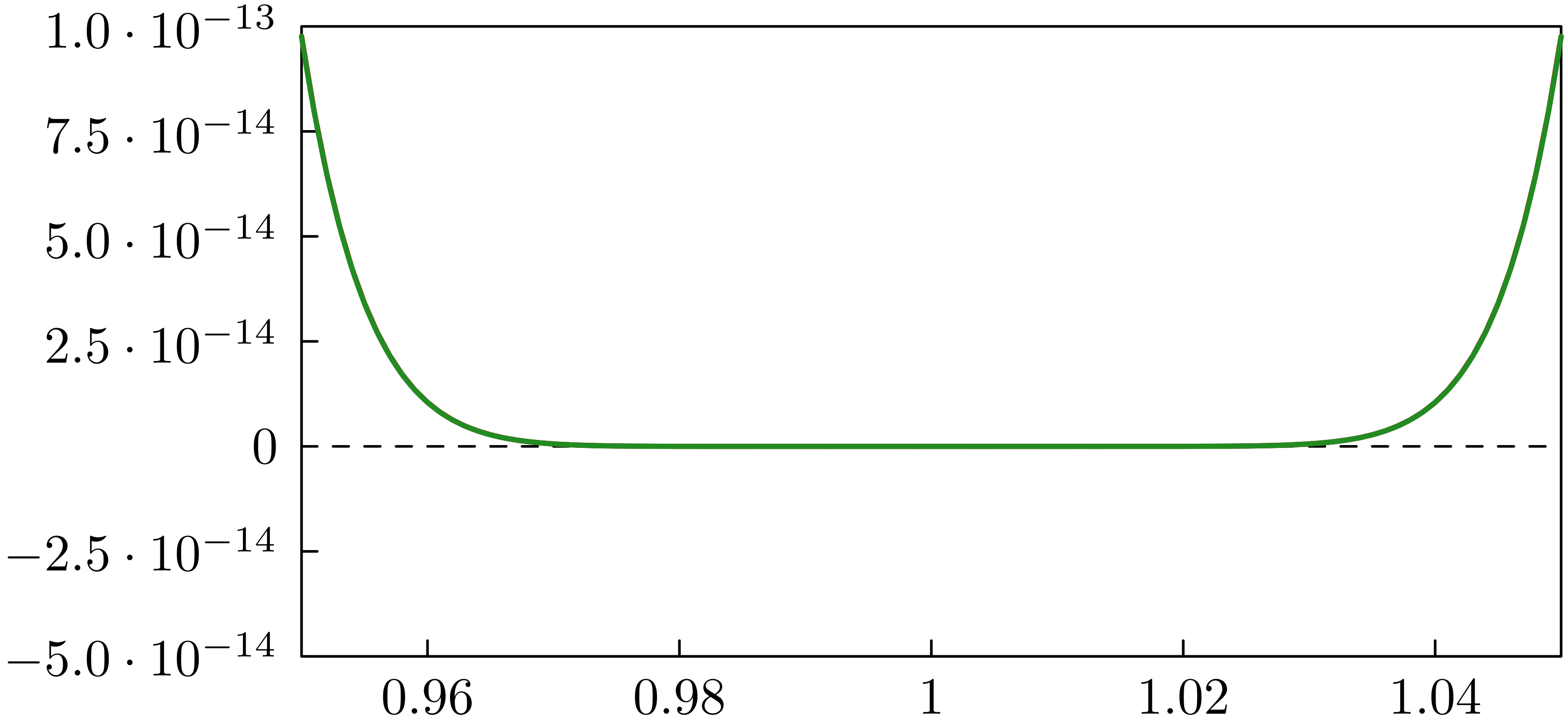
Primjer širenja grešaka — $n = 0$, $r_0 = 0.0125$

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



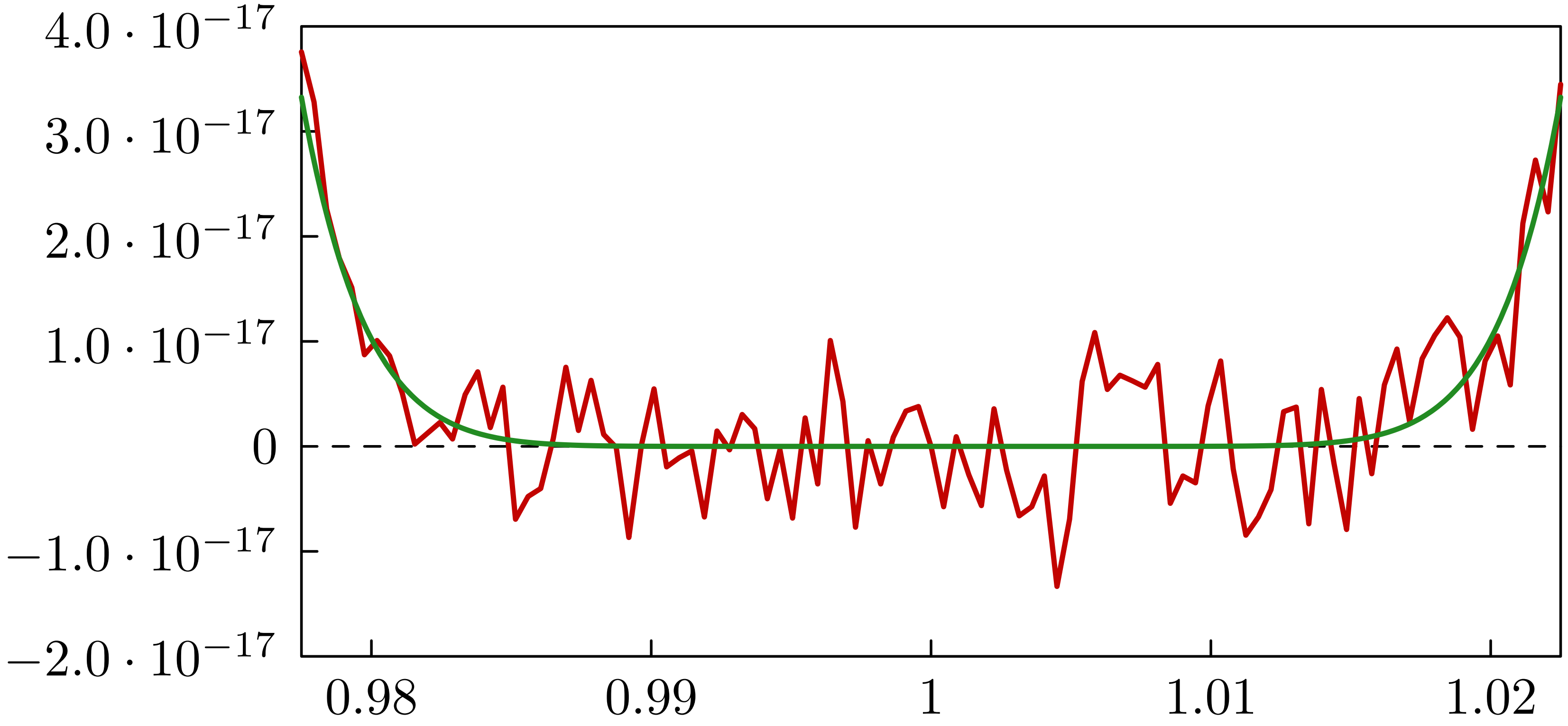
Primjer širenja grešaka — $n = 1$, $r = 0.05$

$$
\begin{aligned}
(x-1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 \\
- 252x^5 + 210x^4 - 120x^3 \\
+ 45x^2 - 10x + 1
\end{aligned}
$$



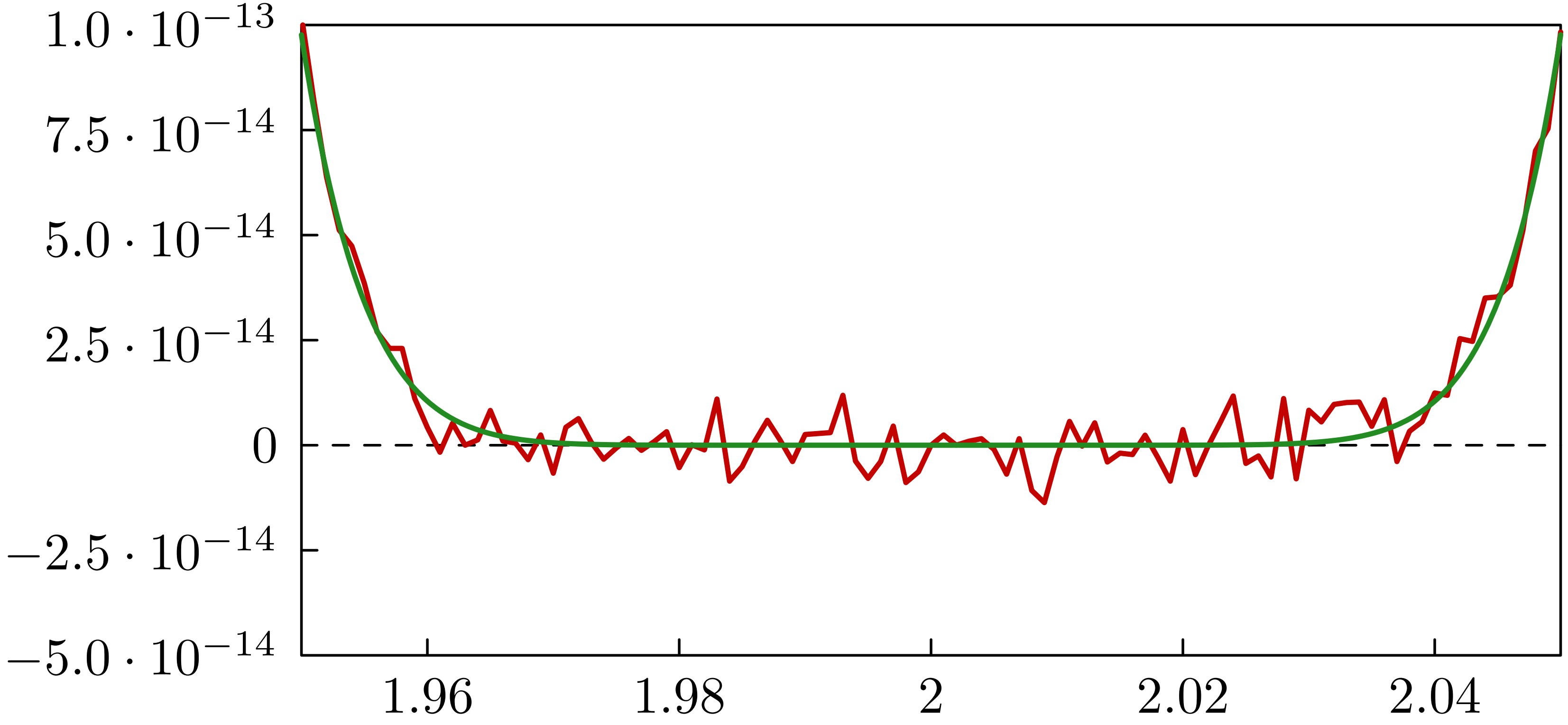
Primjer širenja grešaka — $n = 1$, $r_1 = 0.0225$

$$
\begin{aligned}
(x-1)^{10} = x^{10} &- 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 \\
&- 252x^5 + 210x^4 - 120x^3 \\
&+ 45x^2 - 10x + 1
\end{aligned}
$$



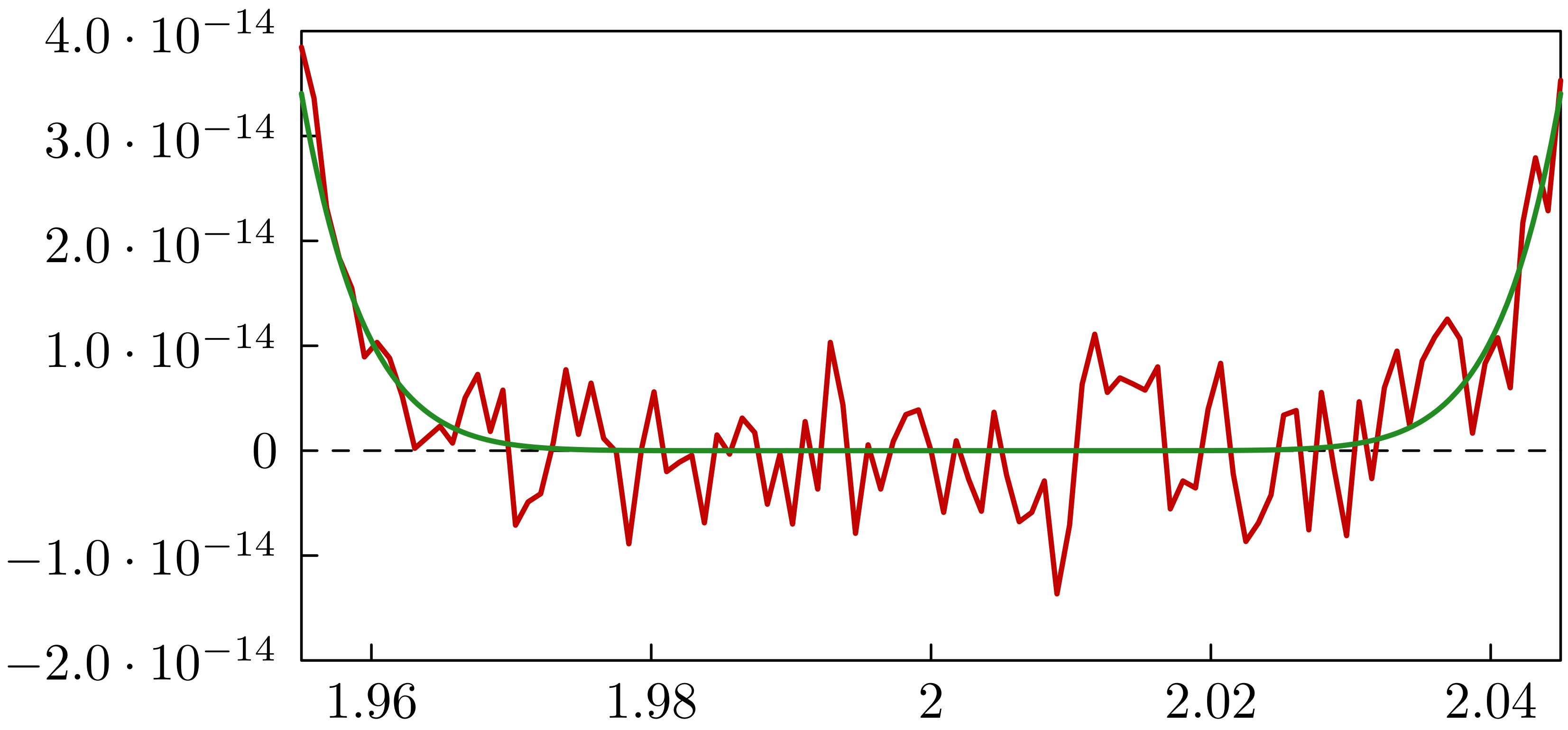
Primjer širenja grešaka — $n = 2$, $r = 0.05$

$$
\begin{aligned}
(x-2)^{10} = x^{10} &- 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 \\
&- 8064x^5 + 13440x^4 - 15360x^3 \\
&+ 11520x^2 - 5120x + 1024
\end{aligned}
$$



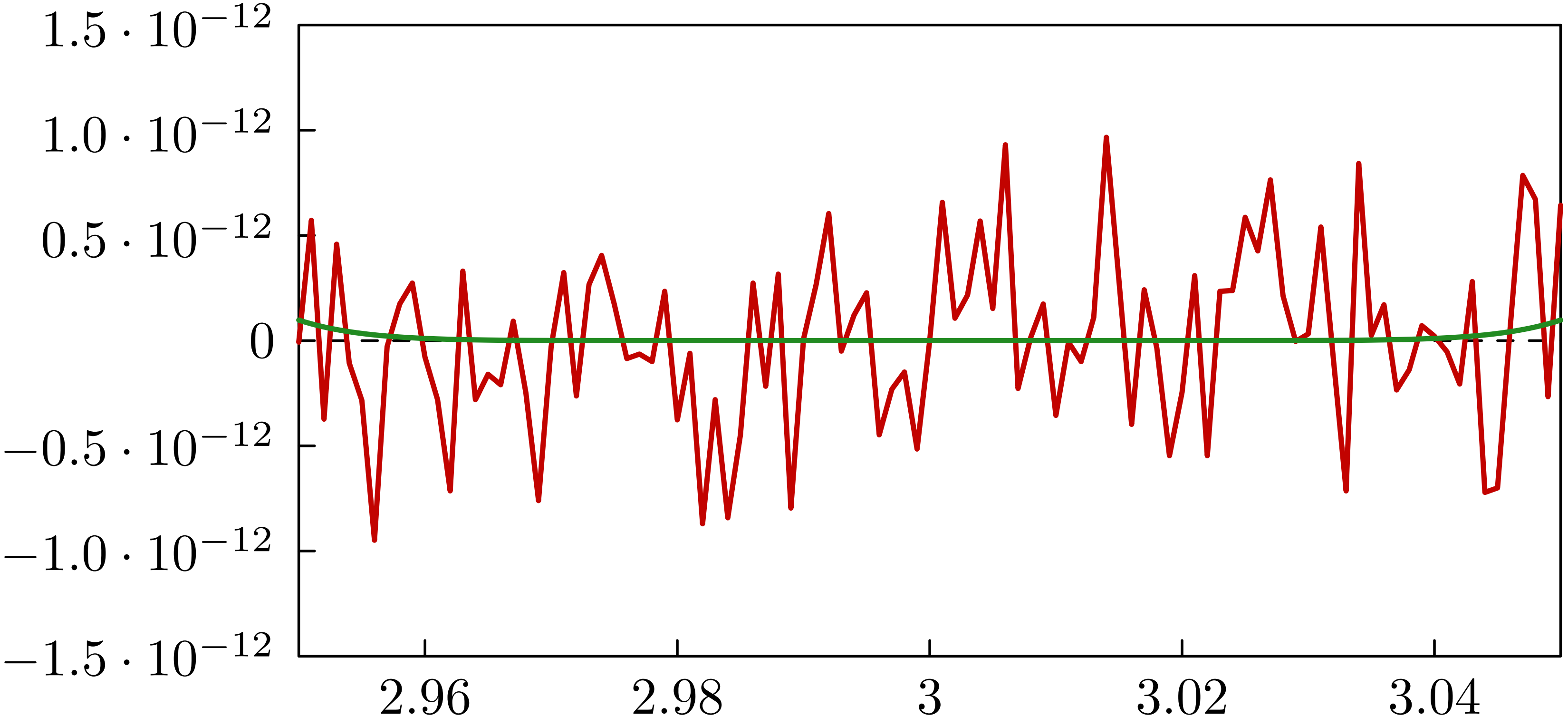
Primjer širenja grešaka — $n = 2$, $r_2 = 0.045$

$$
\begin{aligned}
(x-2)^{10} = x^{10} &- 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 \\
&- 8064x^5 + 13440x^4 - 15360x^3 \\
&+ 11520x^2 - 5120x + 1024
\end{aligned}
$$



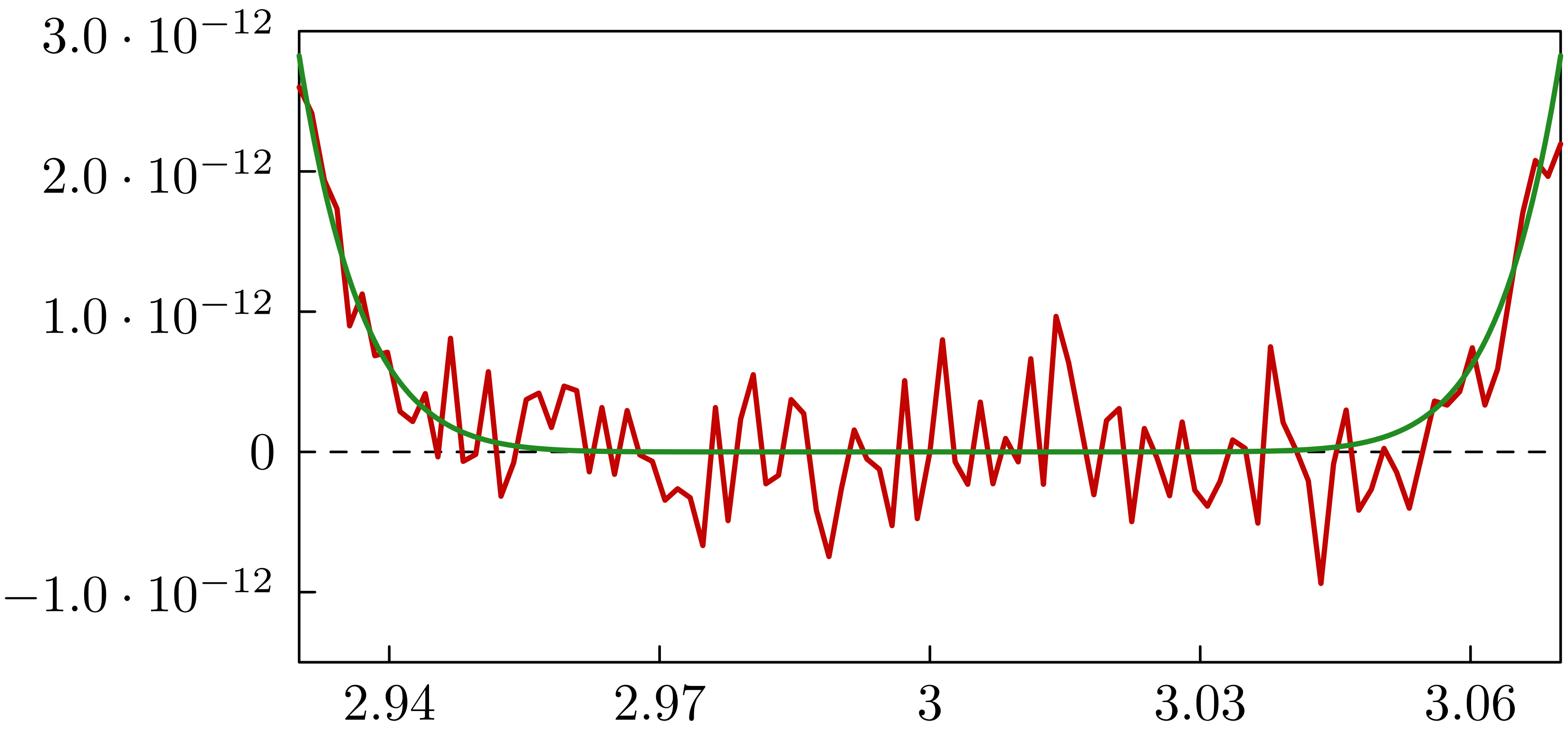
Primjer širenja grešaka — $n = 3$, $r = 0.05$

$$\begin{aligned}(x-3)^{10} = x^{10} &- 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 \\ &- 61236x^5 + 153090x^4 - 262440x^3 \\ &+ 295245x^2 - 196830x + 59049\end{aligned}$$



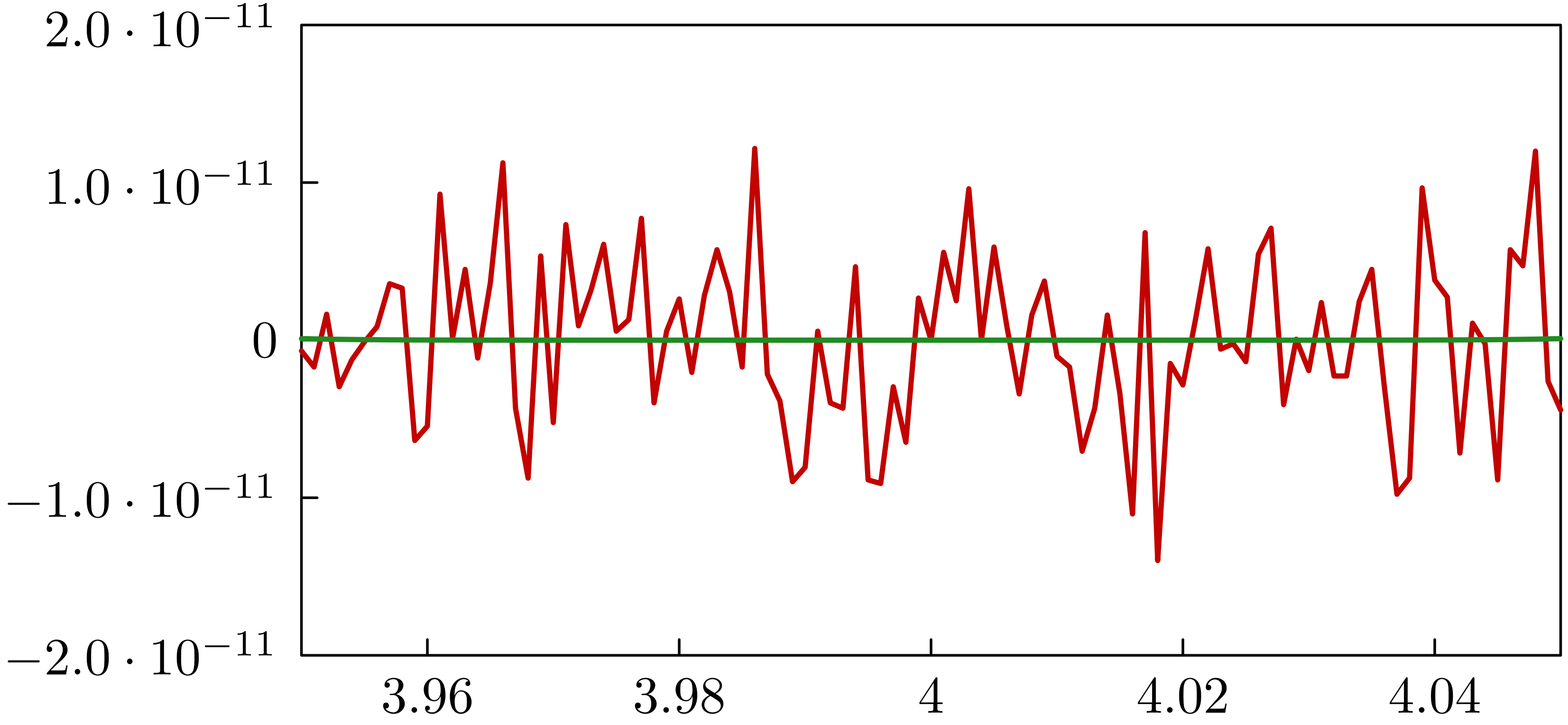
Primjer širenja grešaka — $n = 3$, $r_3 = 0.07$

$$
\begin{aligned}
(x-3)^{10} = x^{10} &- 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 \\
&- 61236x^5 + 153090x^4 - 262440x^3 \\
&+ 295245x^2 - 196830x + 59049
\end{aligned}
$$



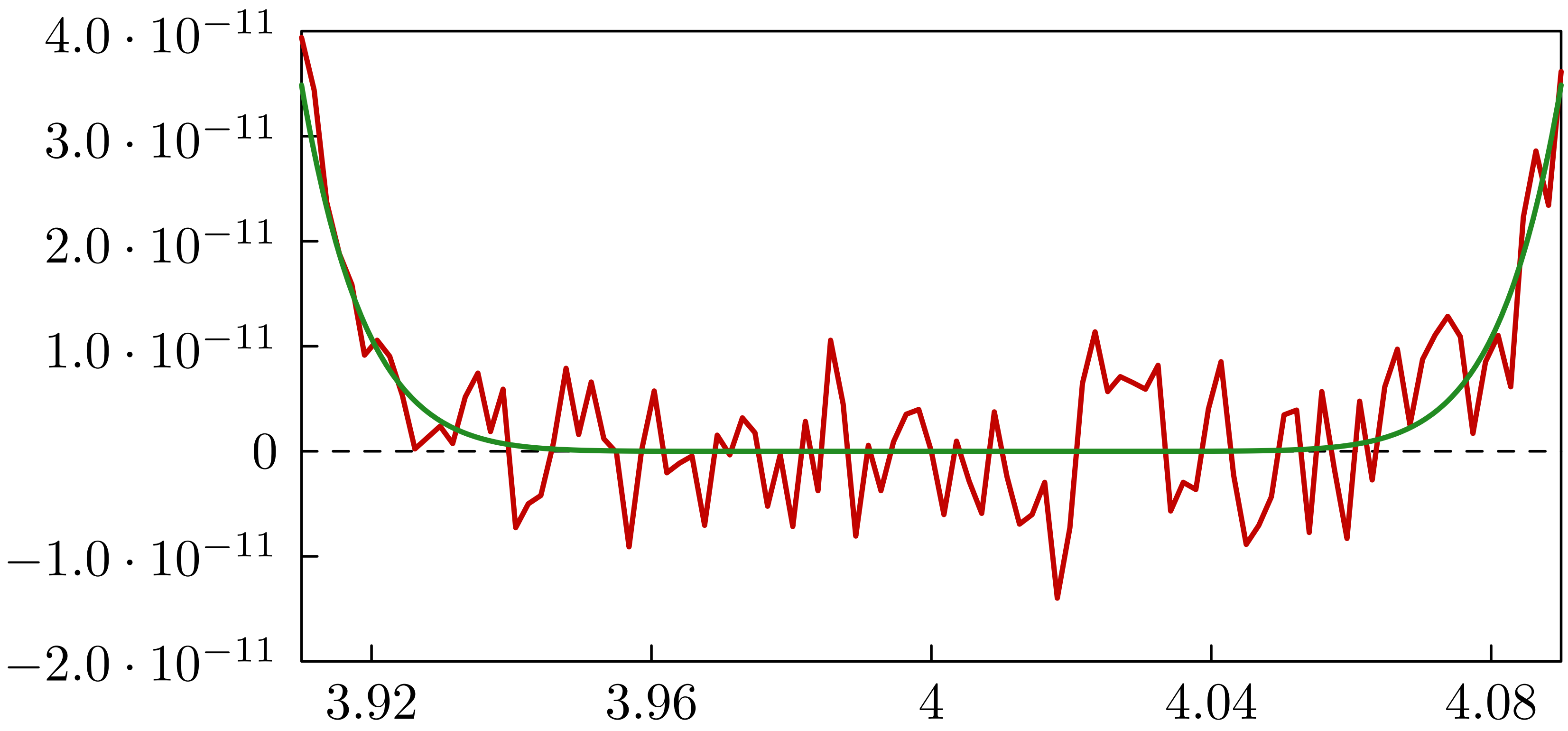
Primjer širenja grešaka — $n = 4$, $r = 0.05$

$$(x-4)^{10} = x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6$$
$$- 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3$$
$$+ 2949120x^2 - 2621440x + 1048576$$



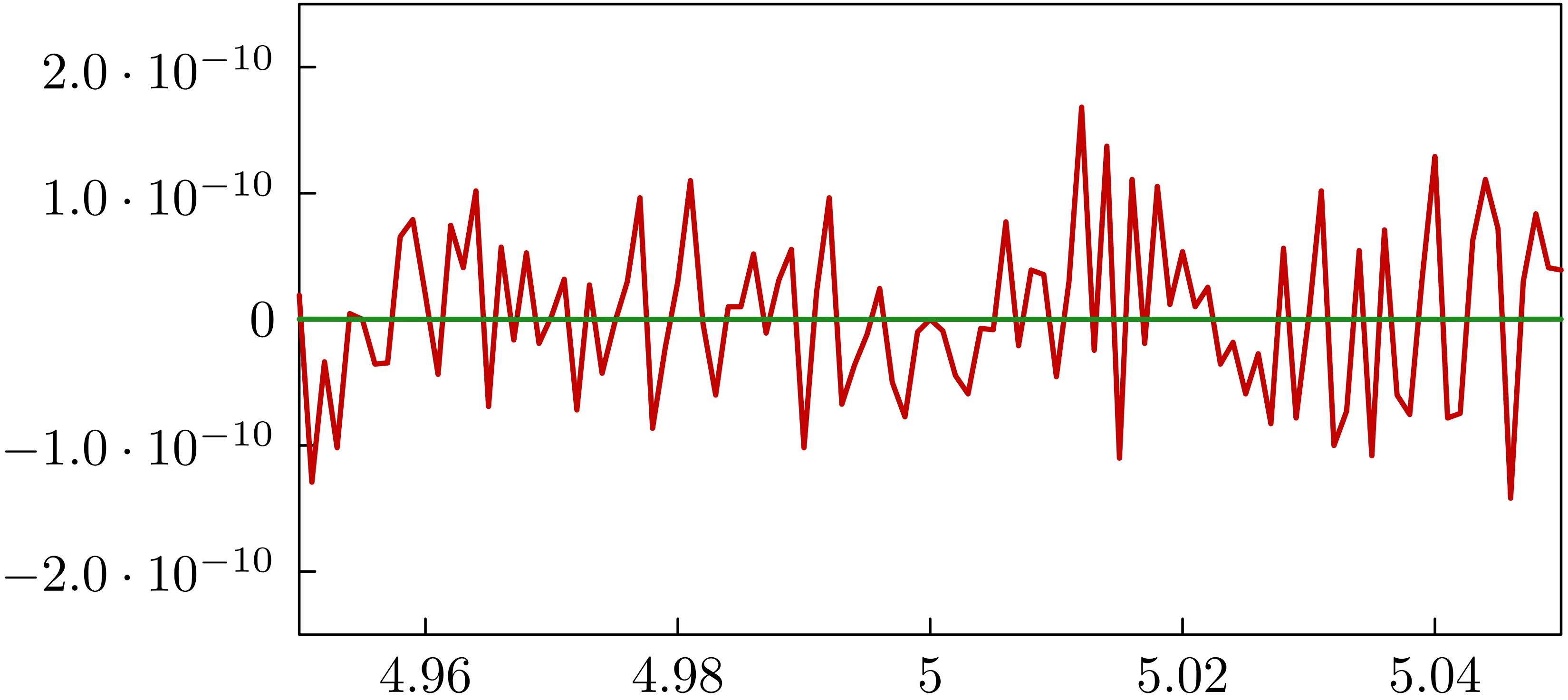
Primjer širenja grešaka — $n = 4$, $r_4 = 0.09$

$$(x-4)^{10} = x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6 \\ - 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3 \\ + 2949120x^2 - 2621440x + 1048576$$



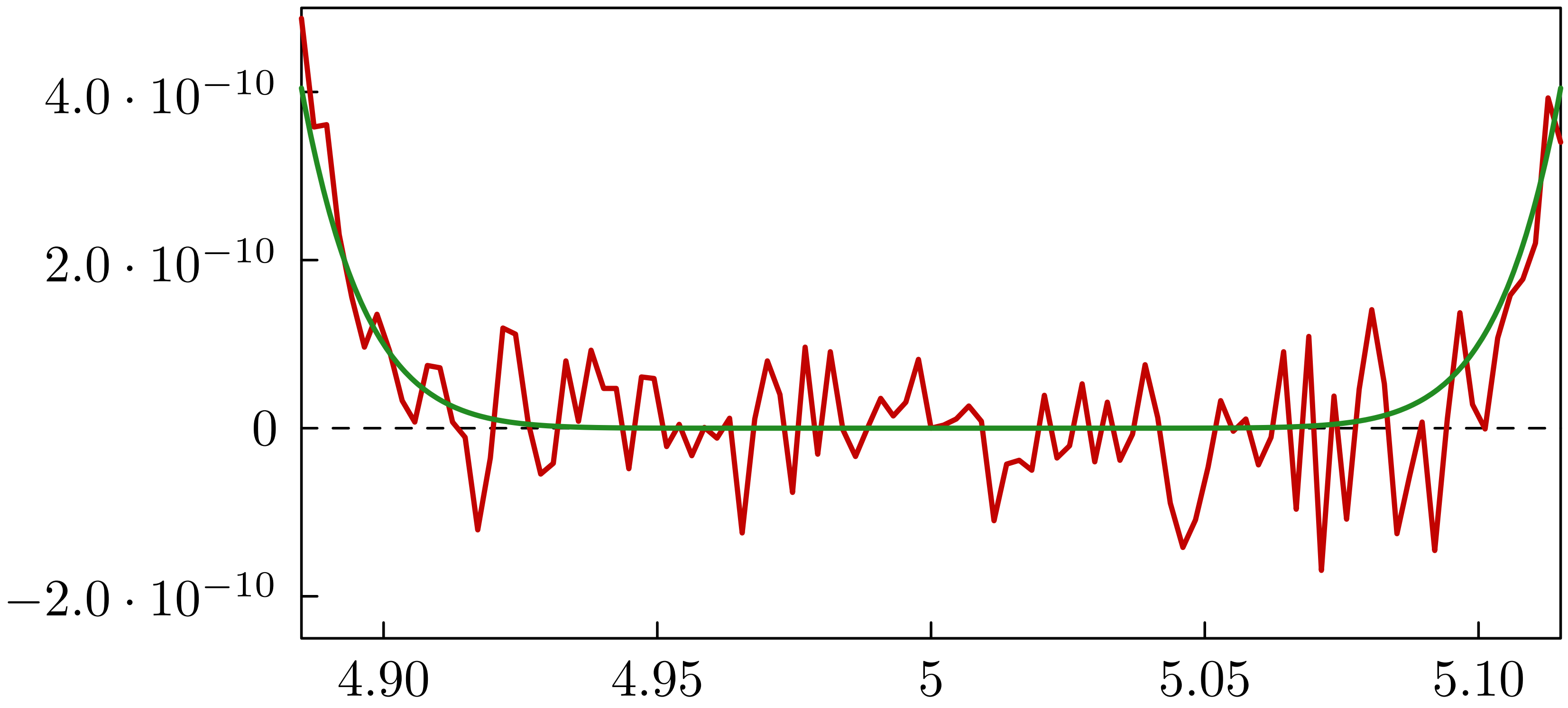
Primjer širenja grešaka — $n = 5$, $r = 0.05$

$$
\begin{aligned}
(x-5)^{10} = x^{10} &- 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\
&- 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\
&+ 17578125x^2 - 19531250x + 9765625
\end{aligned}
$$



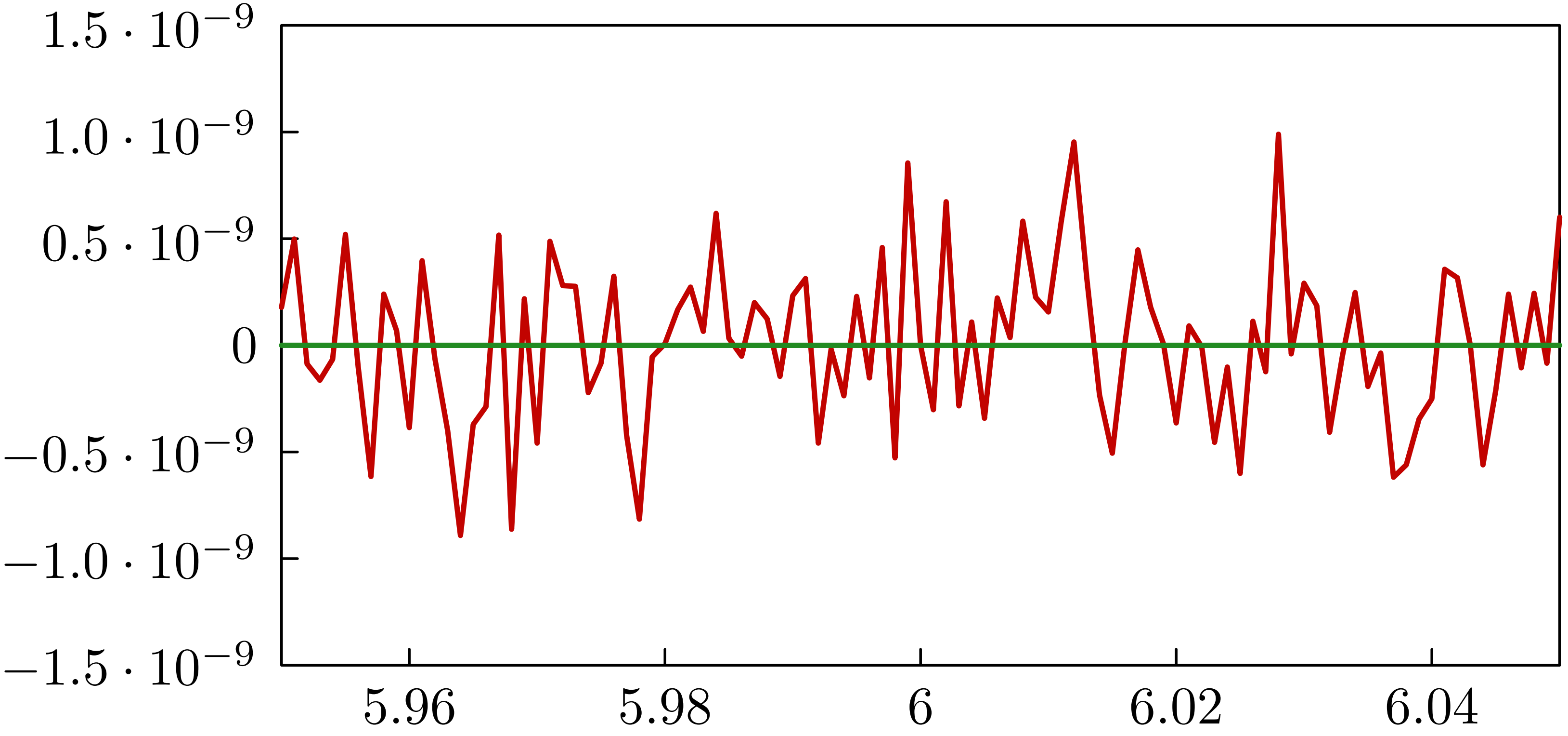
Primjer širenja grešaka — $n = 5$, $r_5 = 0.115$

$$(x-5)^{10} = x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6 \\ - 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3 \\ + 17578125x^2 - 19531250x + 9765625$$



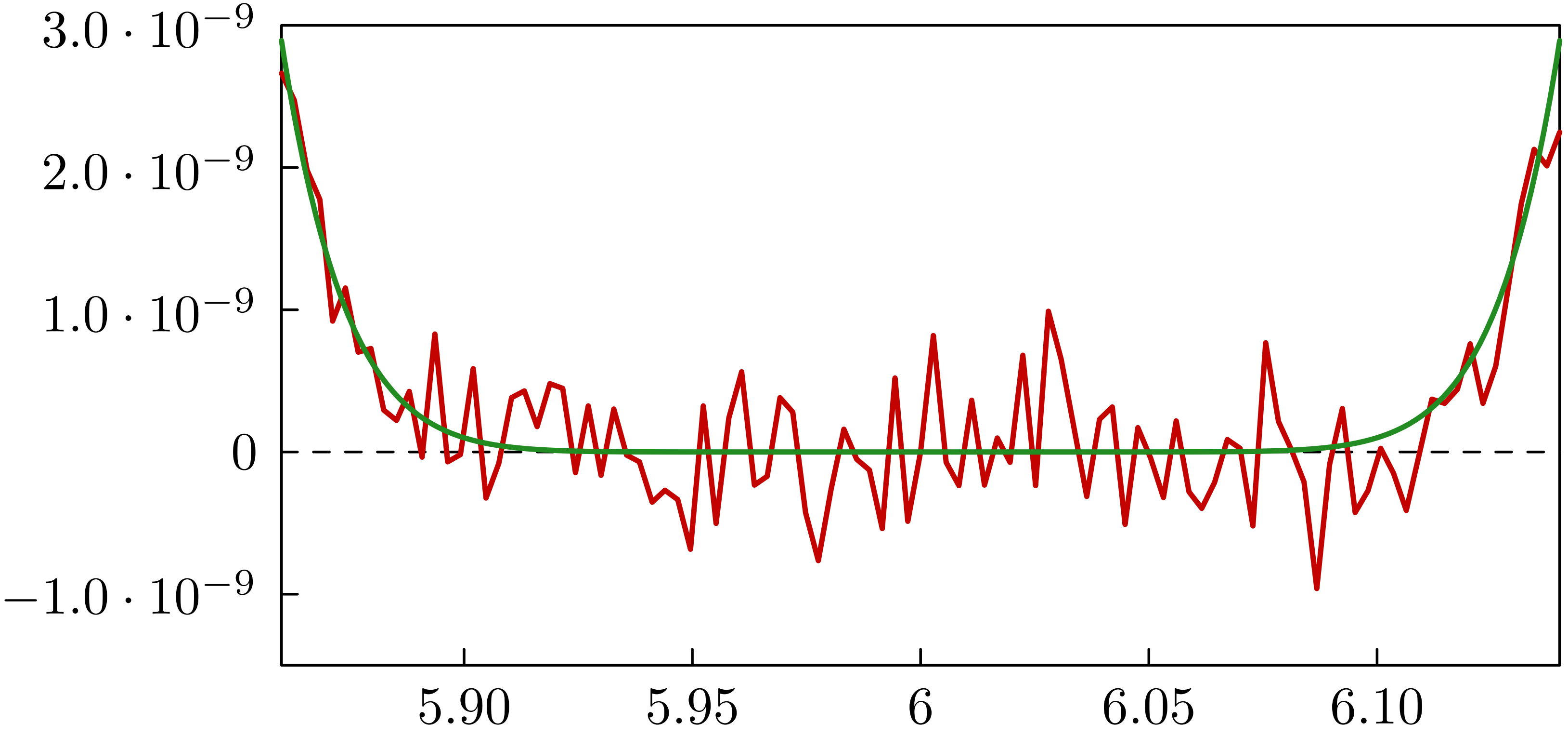
Primjer širenja grešaka — $n = 6$, $r = 0.05$

$$
\begin{aligned}
(x-6)^{10} = x^{10} &- 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\
&- 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\
&+ 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176
\end{aligned}
$$



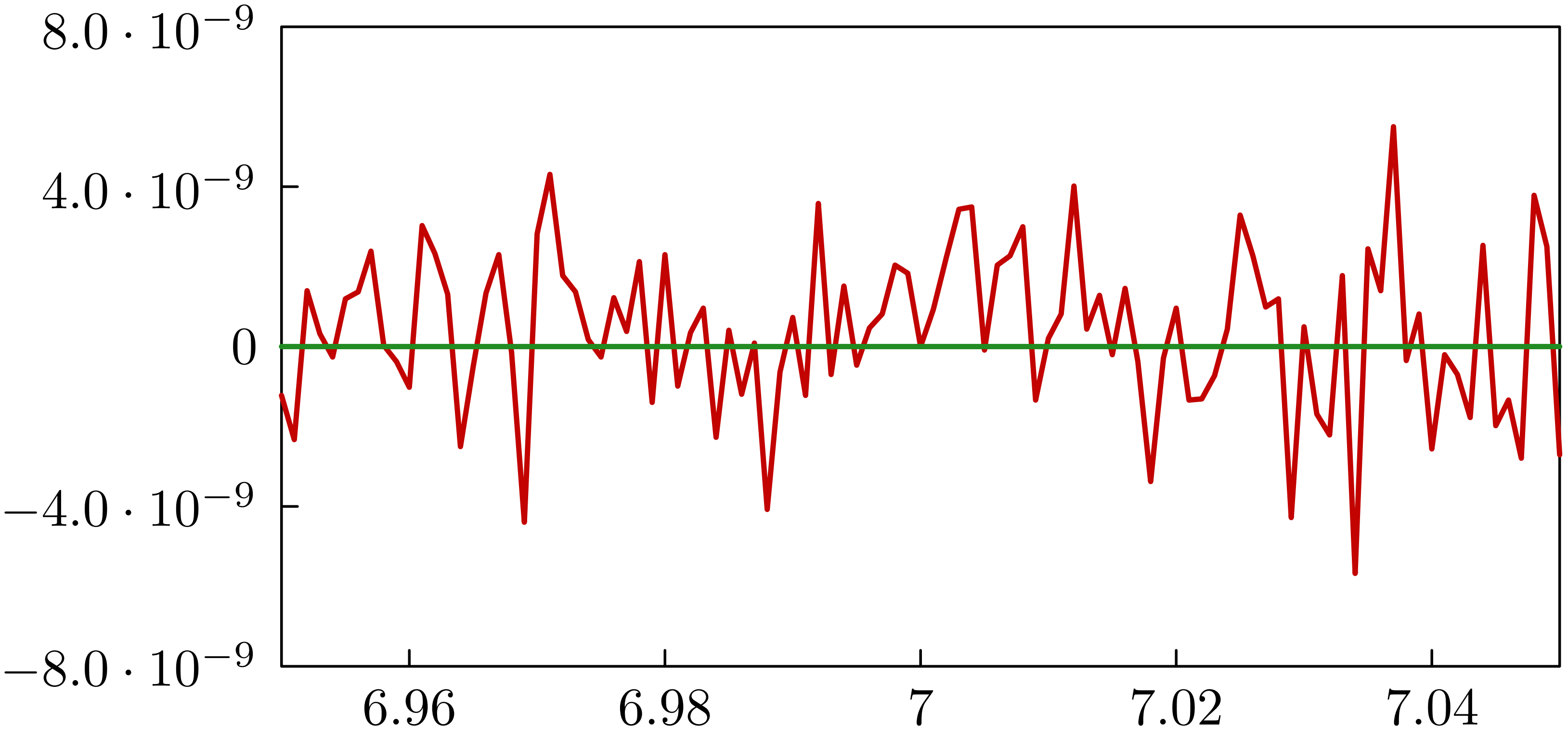
Primjer širenja grešaka — $n = 6$, $r_6 = 0.14$

$$
\begin{aligned}
(x-6)^{10} = x^{10} &- 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6 \\
&- 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3 \\
&+ 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176
\end{aligned}
$$



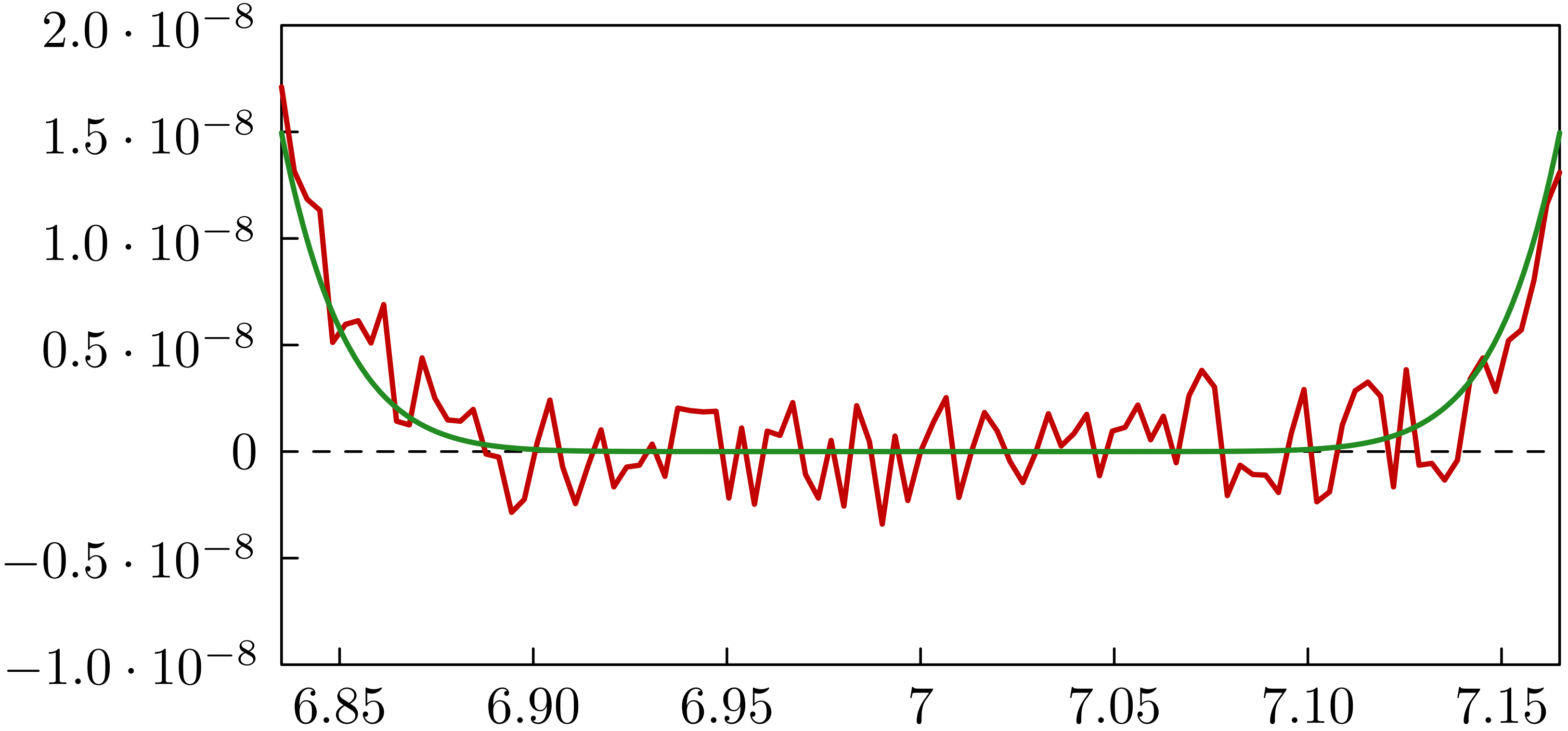
Primjer širenja grešaka — $n = 7$, $r = 0.05$

$$
\begin{aligned}
(x-7)^{10} = x^{10} &- 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\
&- 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\
&+ 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249
\end{aligned}
$$



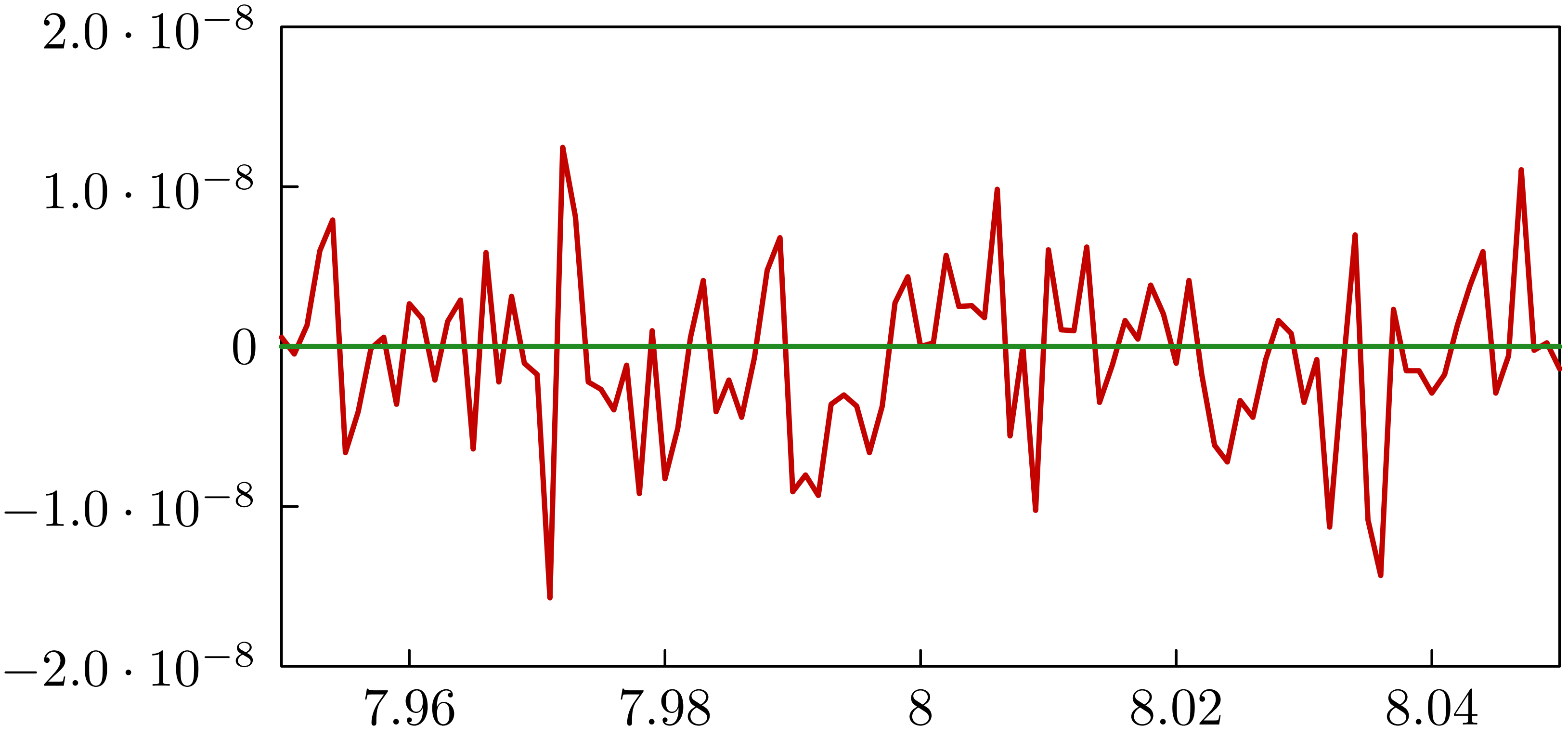
Primjer širenja grešaka — $n = 7$, $r_7 = 0.165$

$$\begin{aligned}(x-7)^{10} = x^{10} &- 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6 \\ &- 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3 \\ &+ 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249\end{aligned}$$



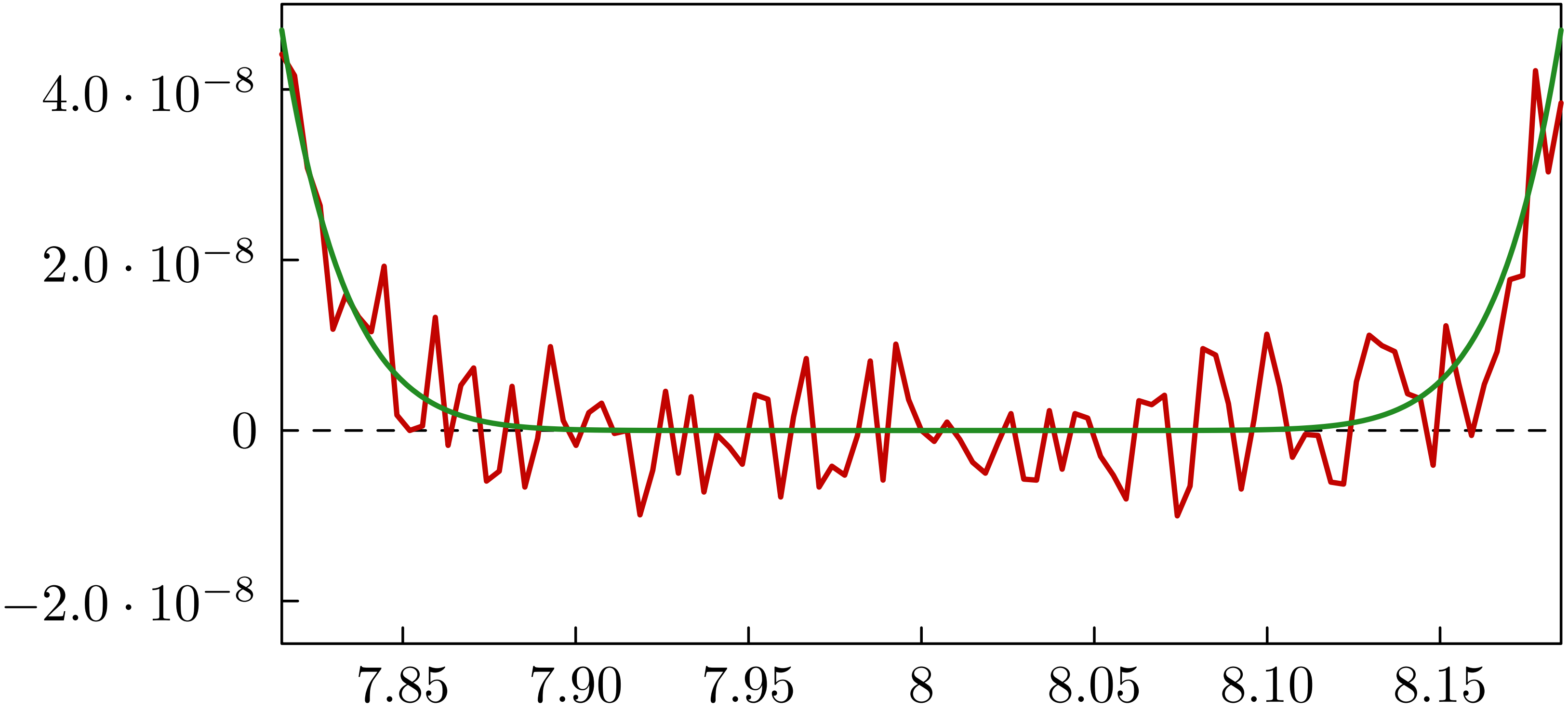
Primjer širenja grešaka — $n = 8$, $r = 0.05$

$$
\begin{aligned}
(x-8)^{10} = x^{10} &- 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\
&- 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\
&+ 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824
\end{aligned}
$$



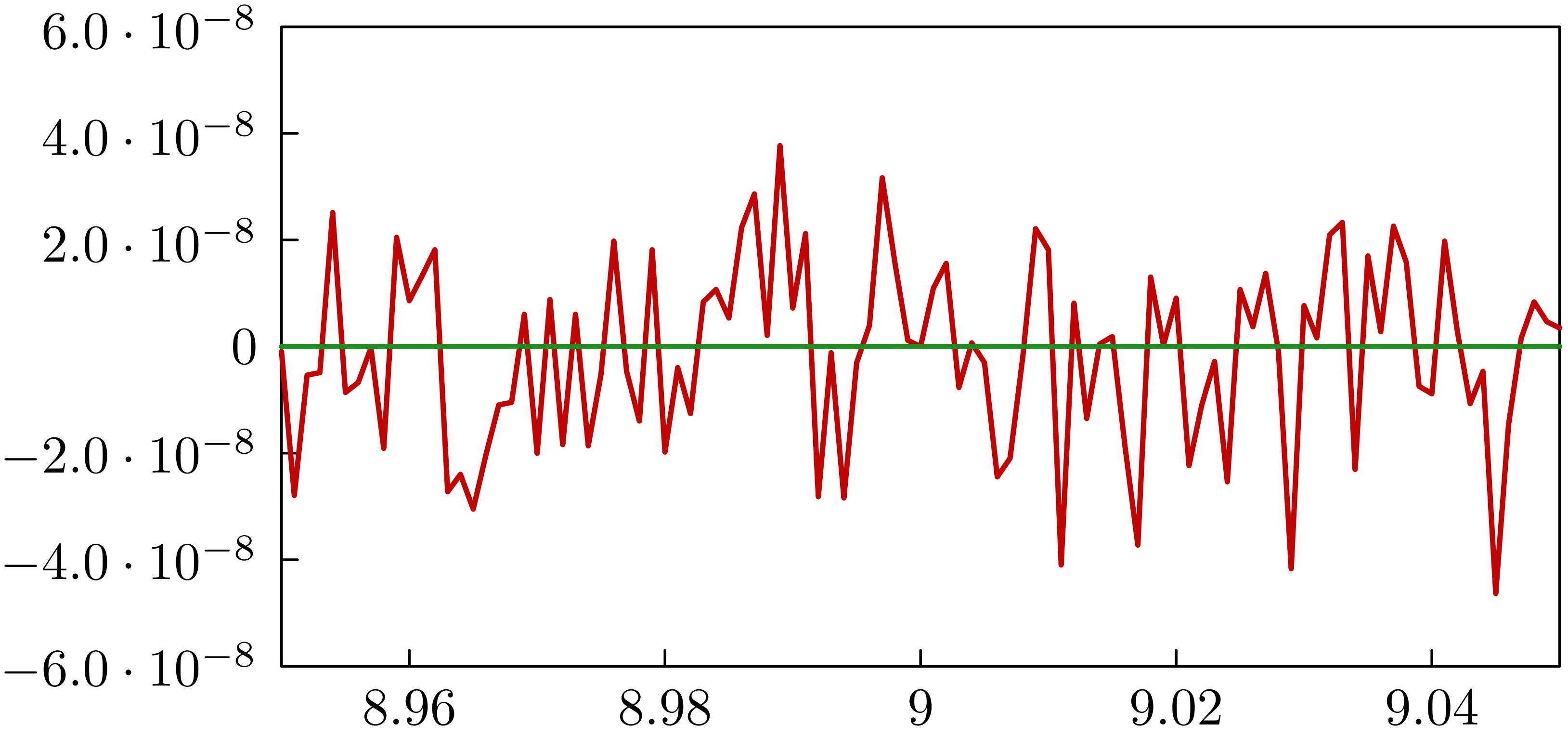
Primjer širenja grešaka — $n = 8$, $r_8 = 0.185$

$$
\begin{aligned}
(x-8)^{10} = x^{10} &- 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6 \\
&- 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3 \\
&+ 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824
\end{aligned}
$$



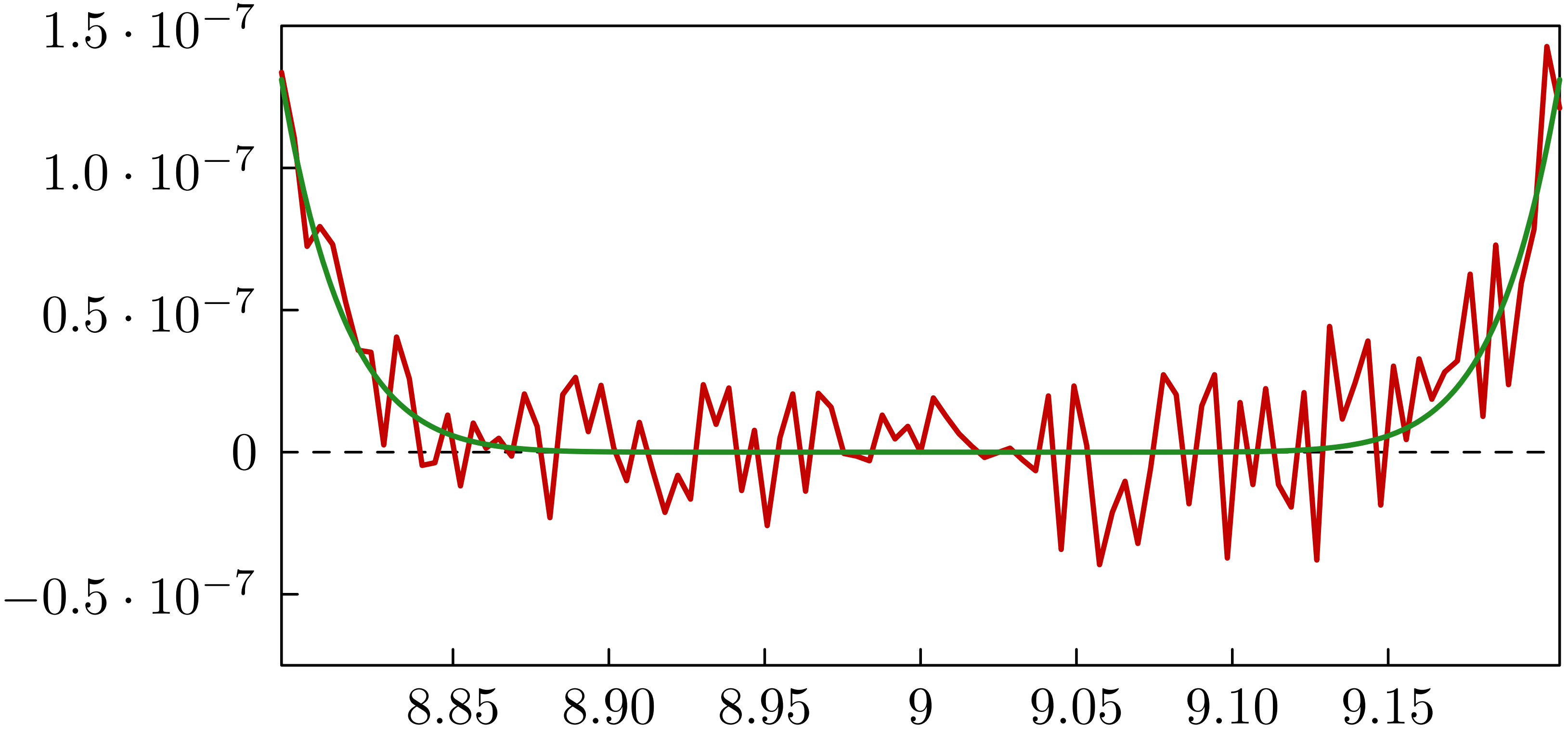
Primjer širenja grešaka — $n = 9$, $r = 0.05$

$$(x-9)^{10} = x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 - 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 + 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401$$



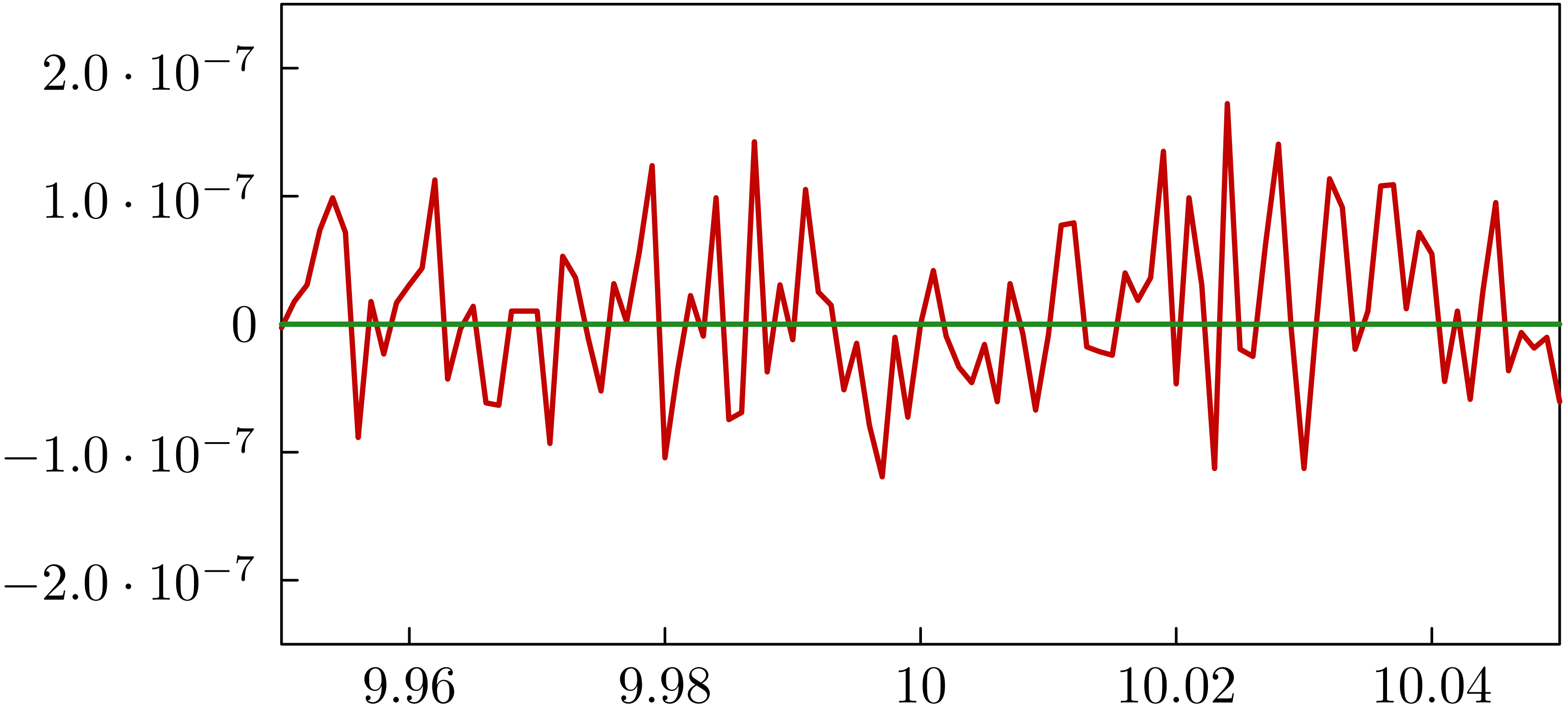
Primjer širenja grešaka — $n = 9$, $r_9 = 0.205$

$$
\begin{aligned}
(x-9)^{10} = x^{10} &- 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6 \\
&- 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3 \\
&+ 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401
\end{aligned}
$$



Primjer širenja grešaka — $n = 10$, $r = 0.05$

$$(x-10)^{10} = x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 - 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 + 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000$$



Primjer širenja grešaka — $n = 10$, $r_{10} = 0.23$

$$
\begin{aligned}
(x-10)^{10} = x^{10} &- 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6 \\
&- 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3 \\
&+ 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000
\end{aligned}
$$