Numerička matematika
1. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Dobar dan, dobro došli

Sadržaj predavanja (početak)

- Uvod u kolegij:
  - Tko sam, što sam i kako do mene.
  - Pravila lijepog ponašanja.
  - Cilj kolegija "Numerička matematika".
  - Pregled sadržaja kolegija.
  - Kolegiji prethodnici — Ponovite!
  - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
    - "Pravila igre" ili način polaganja ispita.
    - Literatura.
    - Moja web–stranica.
    - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.
    - Demonstratori.
  - Malo prodike, s najboljim namjerama :-).

Sadržaj predavanja (nastavak)

- Uvodna priča o greškama:
  - Problemi numeričke matematike (zašto ona postoji).
  - Pojam greške, apsolutna i relativna greška.
  - Izvori grešaka — model, ulazni podaci (mjerenje), metoda, zaokruživanje.
    - Ilustracija grešaka na modelnim primjerima.
  - Prikaz brojeva u računalu i greške zaokruživanja (ponavljanje).
  - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
  - "Širenje" grešaka u aritmetici, stabilne i nestabilne operacije.
    - Opasno ili "katastrofalno" kraćenje.
  - Primjeri iz prakse — posljedice grešaka.

Informacije — kolokviji

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu A2.

Službeni termini svih kolokvija su:

- Prvi kolokvij: ponedjeljak, 18. 4. 2016., u 12 sati.
- Drugi kolokvij: ponedjeljak, 20. 6. 2016., u 12 sati.
- Popravni kolokvij: četvrtak, 1. 9. 2016., u 12 sati.

Uputa: "izbjegnite" popravni — obavite to ranije!

Informacije

Bitno: Sljedeći tjedan, od 6.–11. 3., sam na putu.

Odrada 2. predavanja je u

- petak, 4. 3., od 14–17 u (A001) — to je ovaj petak!

U utorak, 8. 3., nema predavanja u redovitom terminu.

Dodatno, u rasporedu po smjerovima fali gdje su vježbe:

- srijeda, od 8–10 u (004).

I, tek toliko da ste svjesni:

- do 1. kolokvija imamo "standardnih" 7 tjedana nastave,
- a ne samo 6 ili punih 8.

Zato predavanja i vježbe idu normalnim ritmom.

Uvod u kolegij

Sadržaj

- Uvod u kolegij:
  - Tko sam, što sam i kako do mene.
  - Pravila lijepog ponašanja.
  - Cilj kolegija “Numerička matematika”.
  - Pregled sadržaja kolegija.
  - Kolegiji prethodnici — Ponovite!
  - Ostale važne informacije o kolegiju. Posebno:
    - “Pravila igre” ili način polaganja ispita.
    - Literatura.
    - Moja web–stranica.
    - Korisni linkovi — službena web stranica kolegija.
    - Demonstratori.
  - Malo prodike, s najboljim namjerama :-).

Na samom početku

- Moja malenkost (u punom "sjaju"):

  izv. prof. dr. sc. Saša Singer

- Službeni osobni podaci:
  - ured (soba, kabinet): 227, drugi kat,
  - e–mail: singer@math.hr (Molim plain text poruke.)
  - web stranica: `http://web.math.hr/~singer/`

    odn. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/`

- Konzultacije:
  - samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
  - službeno: petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Osnovna pravila "lijepog" ponašanja

Imam nekoliko lijepih zamolbi u rubrici "kultura".

- Prva i osnovna je

  razumna tišina,

  tj. da pričanjem ne ometate izvođenje nastave.
- Zatim, ne kasnite na predavanje.
- Održavajte razuman red u predavaonici.
- Mobilne telefone, molim, utišajte.

Cilj kolegija Numerička matematika

Većina ostalih kolegija na studiju (do sada) bavi se

- tzv. "egzaktnom" ili "pravom" matematikom,

koja izgleda, otprilike, ovako:

- definicija, teorem, dokaz,

uz tek pokoji primjer.

Numerička matematika se ponešto razlikuje od toga:

- orijentirana je prema rješavanju konkretnih praktičnih problema,
- bazirana je na pojmu greške, odnosno, aproksimacije, tj. nije baš "egzaktna".

Cilj kolegija Numerička matematika (nastavak)

Zato kolegij ima nekoliko dosta različitih osnovnih ciljeva:

- spoznavanje neminovnosti pojave grešaka u praktičnom svijetu (izvori i vrste grešaka, važnost ocjene pogreške),
- pregled osnovnih numeričkih metoda za rješavanje nekih "standardnih" problema,
- samostalna primjena tih metoda,
- razvijanje kritičnosti u interpretaciji dobivenih rezultata ("brojevi imaju jedinice").

Ovo zadnje je najvažnije — "da ne bi bilo..." (primjeri dolaze na kraju).

Izvedba: više primjera, a manje dokaza!

Pregled sadržaja kolegija

Cijeli kolegij ima 7 "većih" cjelina (poglavlja):

- Uvod u kolegij — greške, uvjetovanost problema, stabilnost algoritama.
- Rješavanje linearnih sustava — tzv. direktne metode (Gaussove eliminacije, LR faktorizacija, faktorizacija Choleskog).
- Aproksimacija i interpolacija — općenito o problemu aproksimacije funkcija, interpolacija polinomom i splineom (splajnom).
- Metoda najmanjih kvadrata — opći diskretni problem, linearizacija, matrična formulacija, QR faktorizacija. Neprekidni problem i ortogonalni polinomi.

Pregled sadržaja kolegija (nastavak)

- Ortogonalni polinomi i generalizirana Hornerova shema.
- Numeričko integriranje — Newton–Cotesove i Gaussove formule.
- Rješavanje nelinearnih jednadžbi — bisekcija, Newton, sekanta, jednostavna iteracija, konstrukcija metoda višeg reda konvergencije.

U nastavnom planu piše još i osma cjelina:

- Uvod u optimizaciju bez ograničenja (1 tjedan).

Međutim, to možda nećemo stići — imamo samo 13 tjedana nastave, umjesto ranijih 14, ili čak 15.

Kolegiji prethodnici — Ponovite!

Numerička matematika ima prethodnike — to su:

- LA1 = Linearna algebra 1,
- MA2 = Matematička analiza 2.

Stvarno — matematički, trebamo i više od toga:

- LA2 = Linearna algebra 2,
- DRFVV = Diferencijalni račun funkcija više varijabli (parcijalne derivacije, ekstremi).

Dodatno — računarski, trebamo još i Programiranje 1, za:

- prikaz brojeva u računalu, aritmetika računala, greške zaokruživanja,
- pisanje i testiranje osnovnih algoritama.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (1)

Elementi ocjenjivanja su:

- domaće zadaće — 10%,
- redoviti kolokviji — 90%, od čega
  - 1. kolokvij — oko 45%,
  - 2. kolokvij — oko 55%,
- eventualna završna provjera znanja (ispit) — 25%.

Napomena: Ovo su približni omjeri, a zbrajaju se bodovi!

Zbroj je 125% — nije greška, v. objašnjenje malo niže.

Idemo redom . . .

Pravila polaganja i ocjenjivanja (2)

Domaće zadaće iz NM:

- Realizacija ide "automatski" — preko web aplikacije, slično/isto kao na Prog1, 2 (nužna prijava za početak).

Pogledajte — već su "žive", na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

Trenutno ima 7 zadataka iz raznih područja. Bodovi idu prema broju točno riješenih zadataka,

- uzlaznim redom: 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10.

Rok za predaju zadaća je

- dan drugog kolokvija, do početka kolokvija.

Aplikacija se tada "zatvara za javnost" — bodovi su konačni.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (3)

Kolokviji. Tijekom semestra pišu se dva kolokvija:

- 1. kolokvij — ima (najmanje) 45 bodova,
- 2. kolokvij — ima (najmanje) 55 bodova,

tj. oba kolokvija mogu imati "bonus" bodove.

- Na kolokvijima se postavljaju i teorijska pitanja.

Studenti koji ne pristupe nekom od kolokvija tijekom semestra, a svoj nedolazak

- pravovremeno opravdaju na odgovarajući način
  - na pr. medicinskom dokumentacijom,
- kolokvij će polagati u dogovoru s nastavnicima.

Realizacija: Predati molbu s dokumentacijom u urudžbeni.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (4)

Za prolaznu ocjenu potrebno je:

- zaraditi ukupno najmanje barem 45 bodova iz kolokvija (prvi i drugi zajedno, ili popravni),
- tj. bodovi iz zadaća ne ulaze u granicu za prolaz.

"Prva" ocjena se formira na temelju

- zbroja bodova iz kolokvija i zadaća.

Zato prva 3 elementa ocjenjivanja zbrojeno daju 100%. No,

- možete zaraditi i više od 100 bodova.

Ako ste zadovoljni ocjenom, to je (uglavnom) to!

Pravila polaganja i ocjenjivanja (5)

Završni ispit (tzv. "završna provjera znanja"):

- U načelu — završnog usmenog ispita NEMA.

Mogući izuzeci su:

- po želji — ako niste zadovoljni "prvom" ocjenom,
- po kazni — nastavnik IMA PRAVO pozvati studenta na usmeni ispit (na pr. zbog prepisivanja na kolokviju).

Na završnom ispitu moguće je ostvariti najviše još 25 bodova (v. skalu za ocjene).

Oprez:

- Student može svojim neznanjem na završnoj provjeri znanja dobiti i negativnu ocjenu — tj. pasti.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (6)

Popravni ispit.

- Studenti koji su tijekom semestra na kolokvijima skupili barem 10 bodova,
- a nisu položili kolegij,

mogu pristupiti popravnom kolokviju.

Popravni kolokvij obuhvaća gradivo cijelog kolegija.

- Na njemu je moguće ostvariti (barem) 100 bodova, tj., opet može biti “bonus” bodova.
- Bodovi s prva dva kolokvija se ne broje, a bodovi iz zadaća se zbrajaju u (već prolaznu) ocjenu.

Na popravni kolokvij primjenjuje se isto pravilo o završnoj provjeri znanja kao i za redovite kolokvije.

Pravila polaganja i ocjenjivanja (7)

Tablica ocjenjivanja:

Bodovi	Ocjena
0 – 44	1
45 – 59	2
60 – 74	3
75 – 89	4
90 i više	5

Onih ≤ 25 bodova na završnom usmenom ispitu znači da

- jako dobrim znanjem možete zaraditi i dvije ocjene više!

Literatura (1)

Osnovna literatura su, naravno,

- predavanja i vježbe,

s popratnim materijalima (predavanja su dostupna na webu).

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/`

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Napomena: to nije zamjena za "živu" nastavu (v. kasnije)!

Literatura (2)

Postoji i “stvarna” literatura — u “pisanom” obliku:

- tzv. “skripta” iz Numeričke matematike (ili analize).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf`

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

`http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf`

Da se ne uplašite veličine: i tu ima “previše” materijala.
Jednom će se (možda) dovesti u red.

Literatura (3)

Ako nekog zanima, originalna "velika" skripta je:

- Z. Drmač i ostali,
  Numerička analiza (skripta),
  PMF–MO, 2003.

Izravni "link" na "veliku" skriptu je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf

Za totalno zbunjivanje, postoji i tzv. "srednja" skripta

http://web.math.hr/~singer/num_anal/num_alg.pdf

Zbunjivanje se riješava usporedbom sadržaja (ima dosta presjeka, ali i značajne simetrične razlike).

Literatura (4)

Dodatna literatura (piše u "službenom" popisu):

- Kendall E. Atkinson,
  An Introduction to Numerical Analysis (second edition),
  John Wiley and Sons, 1989.

Pošteno, "nisam sretan" s njom — ima dosta grešaka.

Ako već treba neka preporuka, onda ovo:

- Ward Cheney, David Kincaid,
  Numerical Mathematics and Computing (4. edition),
  Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Groove, 1999.

Ja imam 4. izdanje (ima i novije 6. izdanje iz 2008. g.).

Knjiga je matematički vrlo korektna, ima algoritme i hrpu zadataka. Fali mali dio numeričke linearne algebre.

Literatura (5)

Sljedeće preporuke, posebno za numeričku linearnu algebru:

- Gilbert W. Stewart,
  - Afternotes on Numerical Analysis,
    SIAM, Philadelphia, 1996.
  - Afternotes goes to Graduate School — Lectures on Advanced Numerical Analysis,
    SIAM, Philadelphia, 1996.

Fale zadaci i dio dokaza, ali je prezentacija vrlo dobra.

- Ilse C. F. Ipsen,
  Numerical Matrix Analysis — Linear Systems and Least Squares Problems,
  SIAM, Philadelphia, 2009.

Kratka i vrlo pregledna knjiga, ima sve osnovne dokaze.

Literatura (6)

Za "čitače" njemačkog, možete potražiti i knjigu:

- Wolfgang Dahmen i ostali,
  Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,

Pripadni nastavni materijali su na stranici

`http://www.igpm.rwth-aachen.de/node/161/`

Može i hrpa

- malo starijih knjiga iz numeričke analize (matematike).

Samo da naglasak nije na nekom programskom jeziku ili alatu!

Literatura (7) — naprednije, baza za predavanja

Iskreno, veći dio predavanja napravljen je po dijelovima sljedećih (mnogo naprednijih) knjiga:

- Walter Gautschi,
  - Numerical Analysis, Second Edition, Springer (Birkhäuser), New York, 2012.
  - Numerical Analysis, An Introduction (prvo izdanje), Birkhäuser, Boston, 1997.

Tu fali ozbiljna numerička linearna algebra, a to ima ovdje:

- Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2002. — skraćeno, ASNA2.

  (Prvo izdanje ASNA: SIAM, Philadelphia, 1996.)

Korisni linkovi

Službena web stranica kolegija je:

http://web.math.hr/nastava/unm/

"User's guide for everything" — Wikipedia:

http://en.wikipedia.org/

Korisni linkovi — nastavak

Na molbu Sanje Singer i Vedrana Novakovića, za goste je otvorena i web stranica kolegija Matematika 3 i 4 na FSB-u.

Tamo možete naći dodatne materijale za neke dijelove NM,

- posebno — vježbe i riješene zadatke.

Predavanja su "malo nježnija" od naših. Početna stranica je

`http://e-ucenje.fsb.hr/`

Zatim potražite "Katedra za matematiku" i onda:

- odete (kliknete) na kolegije Matematika 3 i 4,
- kliknete na gumb "Prijava kao gost",
- na stranici potražite blok 3 "Numerička matematika".

Iskoristite! Naravno, smijete pogledati i ostalo!

Demonstratori

Za kolegij "Numerička matematika" predložena su dva demonstratora (demonstratorice):

- Gayatri Čaklović
- Iva Manojlović

Kroz neko vrijeme (desetak dana), ako nam odobre demose i kad se raspored ustabili, njihove

- termine nađete na službenoj web-stranici kolegija, a
- e-mail adrese će pisati na slajdovima s predavanja.

Ako trebate demose, (na)javite im se mailom koji dan ranije,

- da ne dežuraju bez veze, a nikog nema.

Osim toga, možda vam mailom sve objasne!

Napomena uz kolokvije

Kolokviji iz prošlih godina "vise" na webu kolegija, na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/kolokviji.php`

Pogledajte ih unaprijed, isplati se!

Napomena: Očekujte da će

- "teorija" nositi još više bodova.

Nekoliko dobrih razloga za to:

- Relativno efikasna zamjena za obavezni "usmeni" ispit (zamislite da ga ima. . .).
- Smanjuje se negativni efekt "glupih" grešaka u računanju (kuckanje po kalkusu),
- a stimulira razumijevanje teorije s predavanja.

Napomena uz vježbe i predavanja

Na kraju, zaboravite na “famu” da se

- NM polaže isključivo vježbama,
- pa na predavanja ne treba ni dolaziti.

Da bi to “prošlo”, na kolokvijima morate

- izračunati sve što treba — i to bez grešaka.

Možda je lakše znati ponešto “teorije”.

Usput, predavanja sadrže i hrpu riješenih zadataka.
Hm,... znam što sad slijedi:

- predavanja su na webu — to je dodatni razlog da na njih ne treba dolaziti!

Kako hoćete... neću popisivati “za bodove”!

Materijali na webu i “živa” nastava

Međutim, najkorisnija stvar na predavanjima je

- ono što onako “usput” ispričam,
- a ne piše na folijama (slajdovima).

Naravno, i to da me se može prekinuti i ponešto pitati!

Materijali na webu imaju sasvim drugu svrhu.

- Ne trebate bjesomučno pisati sve što kažem,
- najveći dio već piše!

Savjet = “uputstvo za uporabu” tih materijala:

- prije predavanja, pogledajte i isprintajte ih — zgodno je 4 ili 6 slajdova po stranici, kako vam paše,
- a dodatne bilješke pišite na tim papirima.

Programski paketi, biblioteke i sl.

A programska podrška? Ima svega:

- Mathematica, Matlab, BLAS, LAPACK, ...

Moderni software "zna" svašta

- računanje — numeričko i simboličko, vizualizacija, itd.

Međutim, to namjerno nisam spominjao! Da se razumijemo,

- dozvoljeno je koristiti, ako znate, ali...

Numerička matematika nije mjesto za "kurs" iz korištenja raznih programskih paketa, biblioteka i sl.

- Prvo treba naučiti matematiku
- i vidjeti ponešto primjera (nije bitno kako su nastali).

Onda ste "zreli" za dalje.

Programski paketi, biblioteke i sl. — nastavak

Ako vam numerika ikad zatreba u životu,

- na vama će biti odgovornost za primjenu stvari.

Morate prvo znati

- što radite, i što se može dogoditi s rezultatima,

pa tek onda kako to realizirati

- koji paket/biblioteku koristiti, koju metodu/rutinu koristiti (obično ih je nekoliko, za istu ili sličnu stvar), itd.

Čuvajte se "crnih kutija" koje "znaju sve".

- Nekritička primjena bilo čega — i može biti BUUUUM!

Rijetko ćete baš pisati neki numerički kôd. Ali, da znate,

- to je posao za dobro školovane matematičare!

Ima li pitanja?

Slušam ...

Numerička matematika

Problemi numeričke matematike

U matematici postoji niz problema koje

- ne znamo ili ne možemo egzaktno riješiti,

tj. prisiljeni smo tražiti približno rješenje.

Neki klasični “zadaci” u numeričkom računanju su:

- rješavanje sustava linearnih i nelinearnih jednadžbi,
- računanje integrala,
- računanje aproksimacije neke zadane funkcije (zamjena podataka nekom funkcijom),
- minimizacija (maksimizacija) zadane funkcije, uz eventualna ograničenja (obično, u domeni),
- rješavanje diferencijalnih i integralnih jednadžbi . . .

Problemi numeričke matematike (nastavak)

Neke probleme čak znamo egzaktno riješiti (bar u principu),

- poput sustava linearnih jednadžbi (ponoviti LA1),

no to predugo traje, pa koristimo računala.

Međutim, tada imamo dodatni problem, jer

- računala ne računaju egzaktno, već približno!

Oprez, tada ni osnovne aritmetičke operacije nisu egzaktne.

Dakle, ključni pojam u numerici je

- približna vrijednost, odnosno, greška.

Ciljevi numeričke matematike

U skladu s tim, osnovni zadatak numeričke matematike je naći (dati) odgovore na sljedeća pitanja:

- kako riješiti neki problem — metoda,
- koliko je "dobro" izračunato rješenje — točnost, ocjena greške.

Malo preciznije, za svaku od navedenih klasa problema, treba proučiti sljedeće "teme" — potprobleme:

1. Uvjetovanost problema — osjetljivost problema na greške, prvenstveno u početnim podacima (tzv. teorija pertubacije ili smetnje — vezana uz sam problem).
2. Konstrukcija standardnih numeričkih metoda za rješavanje danog problema.

Ciljevi numeričke matematike (nastavak)

Kad jednom “stignemo” do numeričkih metoda, treba još proučiti sljedeće “teme” — potprobleme:

3. Stabilnost numeričkih metoda — njihova osjetljivost na “smetnje” problema.
4. Efikasnost pojedine numeričke metode — orijentirano prema implementaciji na računalu:
   - broj računskih operacija i potreban memorijski prostor za rješavanje problema (= Složenost).
5. Točnost numeričkih metoda, u smislu neke “garancije” točnosti izračunatog rješenja.

Ilustracija ovih “potproblema” na primjerima — malo kasnije.

Greške

Greške

Pri numeričkom rješavanju nekog problema javljaju se različiti tipovi grešaka:

- greške modela — svođenje realnog problema na neki "matematički" problem,
- greške u ulaznim podacima (mjerenja i sl.),
- greške numeričkih metoda za rješavanje "matematičkog" problema,
- greške "približnog" računanja — obično su to
  - greške zaokruživanja u aritmetici računala.

Greške modela su "izvan" dosega numeričke matematike.

- Spadaju u fiziku, kemiju, biologiju, tehniku, ekonomiju, ...

Mjere za grešku

Oznake:

- prava vrijednost — x,
- izračunata ili približna vrijednost — $\hat{x}$.

Standardni naziv: $\hat{x}$ je aproksimacija za x.

Trenutno, nije bitno odakle (iz kojeg skupa) su x i $\hat{x}$.

- Zamislite da su to "obični" realni brojevi — $x, \hat{x} \in \mathbb{R}$.

Mjere za grešku (nastavak)

Apsolutna greška:

- mjeri udaljenost izračunate vrijednosti $\hat{x}$ obzirom na pravu vrijednost x.

Ako imamo vektorski prostor i normu, onda je

- udaljenost = norma razlike.

Dakle, apsolutna greška je definirana ovako:

$$E_{\text{abs}}(x, \hat{x}) := |\hat{x} - x|.$$

Često se koristi i oznaka $\Delta x = \hat{x} - x$ (na pr. u analizi), pa je $E_{\text{abs}}(x, \hat{x}) = |\Delta x|$.

Katkad se $\Delta x = \hat{x} - x$ zove "prava" greška (predznak bitan).

Mjere za grešku (nastavak)

Primjer. Dojam o "veličini" greške:

- ako smo umjesto 1 izračunali 2, to nam se čini lošije nego
- ako smo umjesto 100 izračunali 101.

Relativna greška:

- mjeri relativnu točnost aproksimacije $\hat{x}$ obzirom na veličinu broja x,
- na pr. koliko se vodećih znamenki brojeva x i $\hat{x}$ podudara.

Relativna greška definirana je za $x \neq 0$,

$$E_{\text{rel}}(x, \hat{x}) := \frac{|\hat{x} - x|}{|x|}.$$

Često se koristi i oznaka δ_x. Katkad se u nazivniku javlja $|\hat{x}|$.

Mjere za grešku (nastavak)

Ideja relativne greške: ako $\hat{x}$ napišemo kao $\hat{x} = x(1+\rho)$, onda je njegova relativna greška

$$E_{\text{rel}}(x, \hat{x}) := |\rho|.$$

Dakle, relativna greška mjeri

- koliko se faktor $(1+\rho)$ apsolutno razlikuje od 1.

Sad možemo detaljnije opisati one četiri vrste grešaka:

- greške modela,
- greške u ulaznim podacima (mjerenjima),
- greške metoda za rješavanje modela,
- greške aritmetike računala.

Greške modela

Greške modela mogu nastati:

- zbog zanemarivanja utjecaja nekih sila,
  - na primjer, zanemarivanje utjecaja otpora zraka ili trenja (v. primjer),
- zbog zamjene kompliciranog modela jednostavnijim,
  - na primjer, sustavi nelinearnih običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se lineariziraju, da bi se dobilo barem približno rješenje,
- zbog upotrebe modela u graničnim slučajevima,
  - na primjer, kod matematičkog njihala se $\sin x$ aproksimira s x, što vrijedi samo za male kutove.

Modelni primjer — Problem gađanja

Primjer. Imamo top (ili haubicu) u nekoj točki — recimo, ishodištu.

- Treba pogoditi cilj koji se nalazi u nekoj drugoj točki.

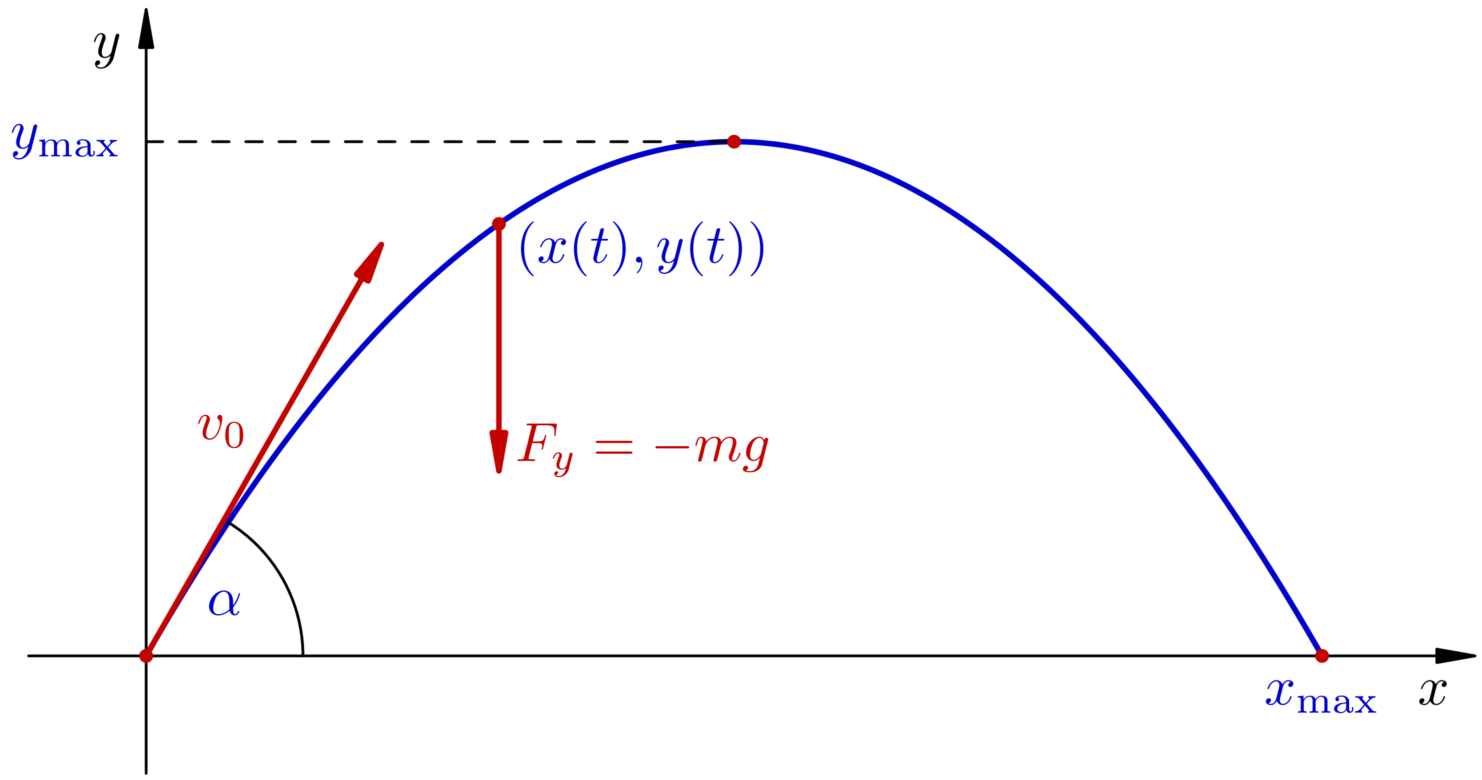
Najjednostavniji model za ovaj problem je poznati kosi hitac. Projektil ispaljujemo prema cilju,

- nekom početnom brzinom v_0 (vektor),
- pod nekim kutem α, obzirom na horizontalnu ravninu.

Slikica (v. sljedeću stranicu)!

Cijela stvar se odvija pod utjecajem gravitacije (prema dolje). Ako zanemarimo otpor zraka, dobijemo "obični" kosi hitac.

Modelni primjer — Slika za kosi hitac



Uzmimo da se cilj nalazi na "istoj visini" — u točki $(x_{\max}, 0)$.

- Udaljenost $x_{\max}$ znamo, a traži se početni kut α.

Modelni primjer — Jednadžba

Osnovna jednadžba je

$$F = ma,$$

gdje je m masa projektila (neće nam trebati na početku), a

- a je akceleracija — vektor u okomitoj (x, y)-ravnini,
- F je sila gravitacije, prema dolje, tj. $F_x = 0$ i $F_y = -mg$.

Gornja jednadžba je diferencijalna jednadžba drugog reda u vremenu. Ako je $(x(t), y(t))$ položaj projektila u danom trenutku, jednadžba ima oblik po komponentama:

$$m \, \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \, \frac{d^2y}{dt^2} = F_y.$$

Akceleracija je druga derivacija položaja.

Modelni primjer — Rješenje jednadžbe

Neka je projektil ispaljen u trenutku $t_0 = 0$.

Nakon integracije, za brzinu v = prva derivacija položaja, imamo jednadžbu

$$mv = F \cdot t + mv_0,$$

ili, po komponentama (masa se skrati)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Još jednom integriramo (početni položaj je $x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Za položaj projektila u trenutku t dobivamo:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Reklo bi se — znamo sve!

Modelni primjer — Još neke relacije

Jednadžba "putanje" projektila u (x, y)-ravnini je

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \, x^2.$$

To je parabola, s otvorom nadolje, koja prolazi kroz ishodište.

Najveća visina projektila je

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g},$$

a maksimalni domet na horizontalnoj x-osi je

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Modelni primjer — Stvarnost

Nažalost, s ovim modelom nećemo ništa pogoditi.

- Fali otpor zraka, tlak pada s visinom, vjetrovi i sl.

Praksa:

- Koeficijent za otpor ovisi o obliku projektila — mjeri se.
- Izračunate tablice se eksperimentalno "upucavaju" i korigiraju.
- Primjena u praksi ide obratno — znam daljinu, tražim kut.

Na primjer, za obični kosi hitac, traženi kut je

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x_{\max} g}{v_0^2}.$$

Modelni primjer — Stvarni podaci

Primjer. Za ilustraciju, uzmimo podatke za pravu haubicu kalibra $155\,\mathrm{mm}$, model H155 M65, uz najjače 7. punjenje (maksimalna količina baruta u čahuri).

Početna brzina ispaljene granate je $v_0 = 564\,\mathrm{m/s}$.

Bez otpora zraka, maksimalni domet se postiže za kut $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ i iznosi

$$d_{\max} = \frac{564^2 \sin(\pi/2)}{9.81} \approx 32\,425.69\,\mathrm{m}.$$

Stvarni maksimalni domet postiže se za kut $\alpha = 45^\circ 10'$ i iznosi "samo"

$$d_{\max} = 14\,854\,\mathrm{m}.$$

Greške modela (nastavak)

Primjer. Među prvim primjenama jednog od prvih brzih paralelnih računala na svijetu (ASCI Blue Pacific) bilo je

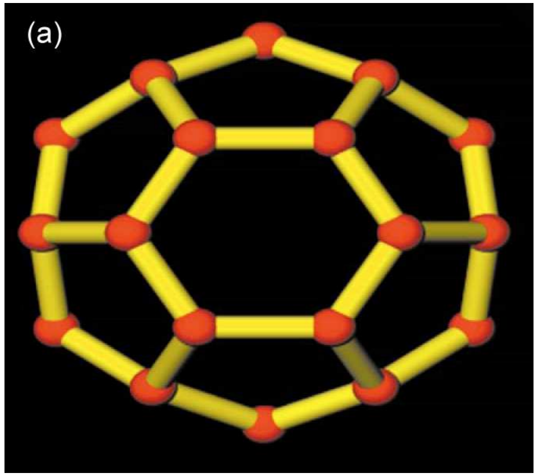
- određivanje trodimenzionalne strukture i elektronskog stanja ugljik-36 fulerena.

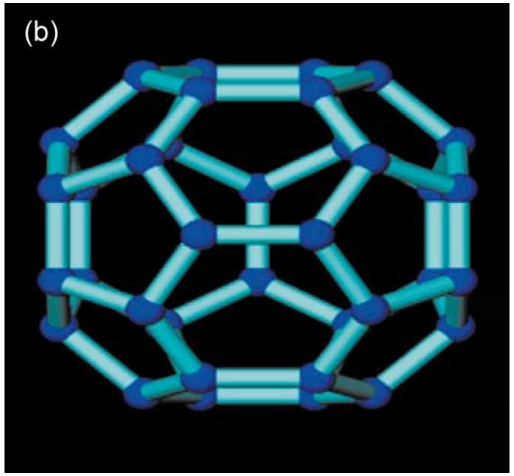
Primjena spoja je višestruka:

- supravodljivost na visokim temperaturama,
- precizno doziranje lijekova u stanice raka.

Greške modela (nastavak)

Prijašnja istraživanja kvantnih kemičara dala su dvije moguće strukture tog spoja, (a) i (b):





Te dvije strukture imaju različita kemijska svojstva.

Polazno stanje stvari:

- eksperimentalna mjerenja pokazivala su da je struktura (a) stabilnija,
- teoretičari su tvrdili da je stabilnija struktura (b).

Greške modela (nastavak)

Prijašnja računanja,

- zbog pojednostavljivanja i interpolacije,

kao odgovor, davala su prednost "teoretskoj" strukturi (b).

Definitivan odgovor,

- proveden računanjem bez pojednostavljivanja,

pokazao je da je struktura (a) stabilnija.

Poanta: pretjerano pojednostavljenje bilo čega (modela, metode ili algoritma) može dovesti

- do pogrešnih rezultata!

Dobivene rezultate je zdravo provjeriti — eksperimentom ili točnijim računom!

Greške u ulaznim podacima

Greške u ulaznim podacima javljaju se zbog

- nemogućnosti ili besmislenosti točnog mjerenja (Heisenbergove relacije neodređenosti).
- Na primjer, tjelesna temperatura se obično mjeri na desetinku stupnja Celziusa točno. Pacijent je podjednako loše ako ima temperaturu $39.5°\mathrm{C}$ ili $39.513462°\mathrm{C}$.

Bitno praktično pitanje:

- Mogu li male greške u ulaznim podacima bitno povećati grešku rezultata?

Nažalost MOGU!

- Takvi problemi zovu se loše uvjetovani problemi.

Greške u ulaznim podacima (nastavak)

Primjer. Zadana su dva sustava linearnih jednadžbi — recimo, umjesto ispravnih (prvih) koeficijanata, izmjerili smo druge:

$$\begin{aligned} 2x &+ 6y &= 8 \\ 2x &+ 6.0001y &= 8.0001, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 2x &+ 6y &= 8 \\ 2x &+ 5.99999y &= 8.00002. \end{aligned}$$

Samo druga jednadžba se “malo” promijenila.

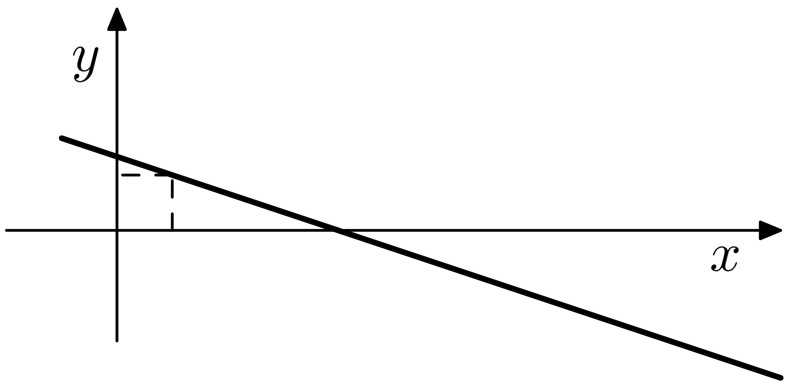
Perturbacije koeficijenata su reda veličine 10^{-4}.

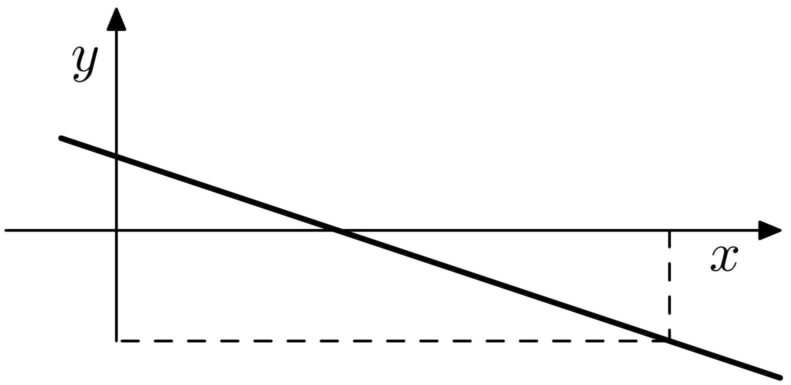
Je li se rezultat, također, promijenio za red veličine 10^{-4}?

Greške u ulaznim podacima (nastavak)

- Rješenje prvog problema: $x = 1$, $y = 1$.
- Rješenje drugog problema: $x = 10$, $y = -2$.

Grafovi presjecišta dva pravca za prvi i drugi sustav:





Koja dva pravca???

- U oba sustava, pravci su "skoro" paralelni, pa se njihovi grafovi ne razlikuju na slikama — i baš tu je problem!

Greške metoda za rješavanje problema

Najčešće nastaju kad se nešto beskonačno zamjenjuje nečim konačnim. Razlikujemo dvije kategorije:

- greške diskretizacije koje nastaju
  - zamjenom kontinuuma (neprebrojiv skup) konačnim diskretnim skupom točaka,
  - ili "beskonačno" malu veličinu h ili $\varepsilon \to 0$ zamijenjujemo nekim "konačno" malim brojem;
- greške odbacivanja koje nastaju
  - "rezanjem" beskonačnog niza ili reda na konačni niz ili sumu,

  tj. odbacujemo ostatak niza ili reda.

Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške diskretizacije:

- aproksimacija funkcije f na $[a,b]$, vrijednostima te funkcije na konačnom skupu točaka (tzv. mreži) $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset [a,b]$,
- aproksimacija derivacije funkcije f u nekoj točki x. Po definiciji je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

a za približnu vrijednost uzmemo dovoljno mali $h \neq 0$ i

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Greške metoda za rješavanje problema (nast.)

Tipični primjeri greške odbacivanja:

- zaustavljanje iterativnih procesa nakon dovoljno velikog broja n iteracija (recimo, kod računanja nultočaka funkcije);
- zamjena beskonačne sume konačnom — kad greška postane dovoljno mala (recimo, kod sumiranja Taylorovih redova — v. sljedeći primjer).

Taylorov red, Taylorov polinom, . . .

Za dovoljno glatku funkciju f, Taylorov red oko točke x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

možemo aproksimirati Taylorovim polinomom p

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

pri čemu je

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

greška odbacivanja, a ξ neki broj između x_0 i x. Grešku $R_{n+1}(x)$ obično ocjenjujemo po apsolutnoj vrijednosti.

Taylorov red, Taylorov polinom, . . . (nastavak)

Primjer.

- Funkcije e^x i $\sin x$ imaju Taylorove redove oko točke $x_0 = 0$, koji konvergiraju za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$.
- Zbrajanjem dovoljno mnogo članova tih redova, možemo, barem u principu, po volji dobro aproksimirati vrijednosti funkcija e^x i $\sin x$.
- Traženi Taylorovi polinomi s istim brojem članova (ali ne istog stupnja) su

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Taylorov red, Taylorov polinom, . . . (nastavak)

Za grešku odbacivanja trebaju nam derivacije:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \qquad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

pa su pripadne greške odbacivanja

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad R_{2n+3}(x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{2n+3}{2}\,\pi\right) x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

Pretpostavimo sada da je $x > 0$. Iz $\xi \leq x$ slijedi $e^\xi \leq e^x$, pa dobivamo

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad |R_{2n+3}(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Taylorov red, Taylorov polinom, . . . (nastavak)

Zbrojimo li članove reda sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti $\varepsilon > 0$, napravili smo grešku odbacivanja manju ili jednaku

$$\begin{cases} e^x \varepsilon, & \text{za } e^x, \\ \varepsilon, & \text{za } \sin x. \end{cases}$$

U prvom slučaju očekujemo

- malu relativnu grešku,

a u drugom slučaju očekujemo

- malu apsolutnu grešku.

Provjerimo to eksperimentalno — u aritmetici računala! Cijelo računanje provedeno je u standardnom tipu `double`.

Kako se računaju članovi reda?

Članove reda računamo rekurzivno — novi iz prethodnog.

Za exp:

$$\text{član}_0 = \frac{x^0}{0!} = 1,$$

$$\text{član}_k = \frac{x^k}{k!} = \frac{x \cdot x^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} = \frac{x}{k} \cdot \text{član}_{k-1}, \qquad k \geq 1.$$

Za sin:

$$\text{član}_0 = \frac{(-1)^0 x^1}{1!} = x,$$

$$\text{član}_k = \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{-x^2 \cdot (-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1)!}$$

$$= \frac{-x^2}{2k(2k+1)} \cdot \text{član}_{k-1}, \qquad k \geq 1.$$

Red za eksponencijalnu funkciju, $x = 12\pi$

Za $x = 12\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 132 člana reda $(n = 131)$

$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 2.5101 \cdot 10^{0}$$

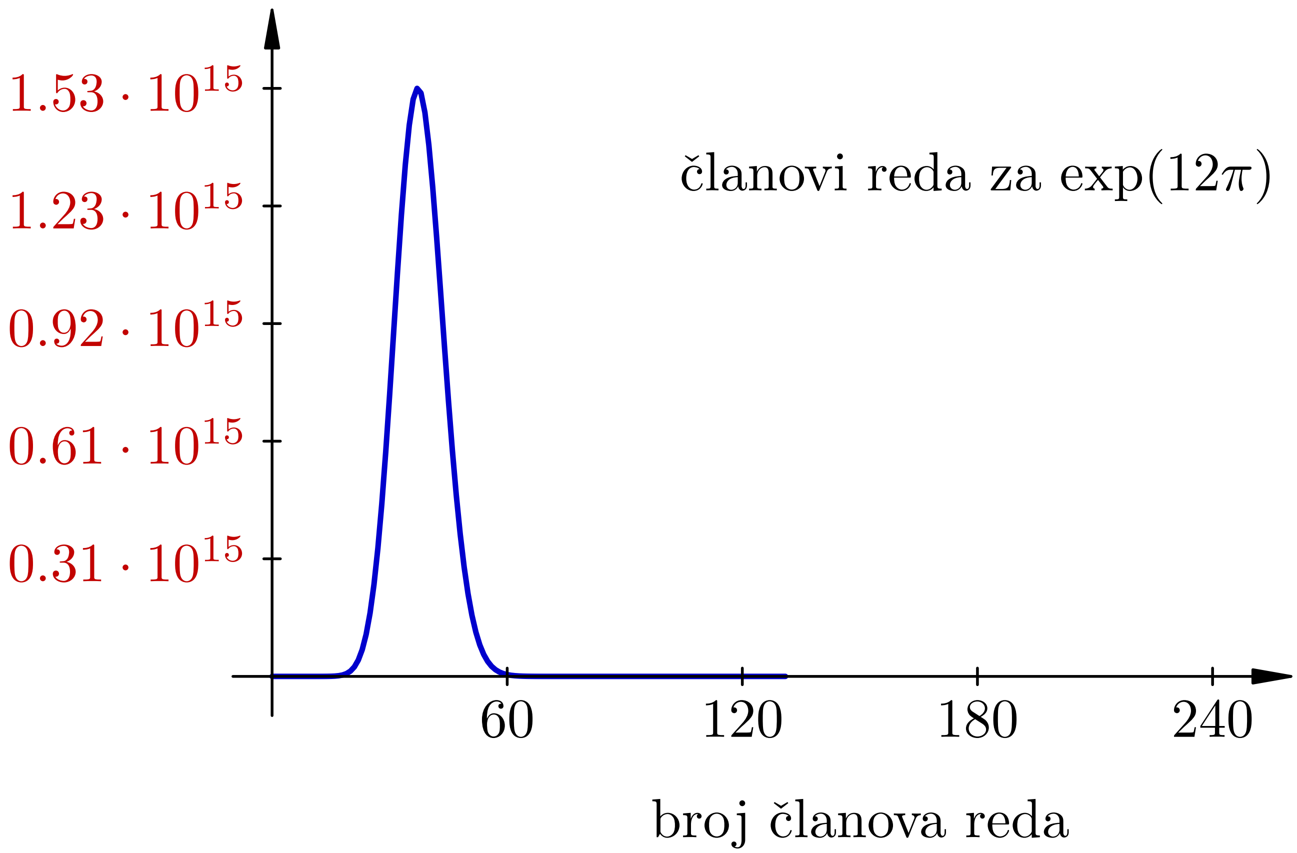
$$|\text{maksimalni član}| = 1.5329 \cdot 10^{15} \quad (n = 37).$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\exp(12\pi)_{\text{funkcija}} &= 2.357850396855819\,2 \cdot 10^{16} \\
\exp(12\pi)_{\text{Taylor}} &= 2.357850396855819\,6 \cdot 10^{16}
\end{aligned}$$

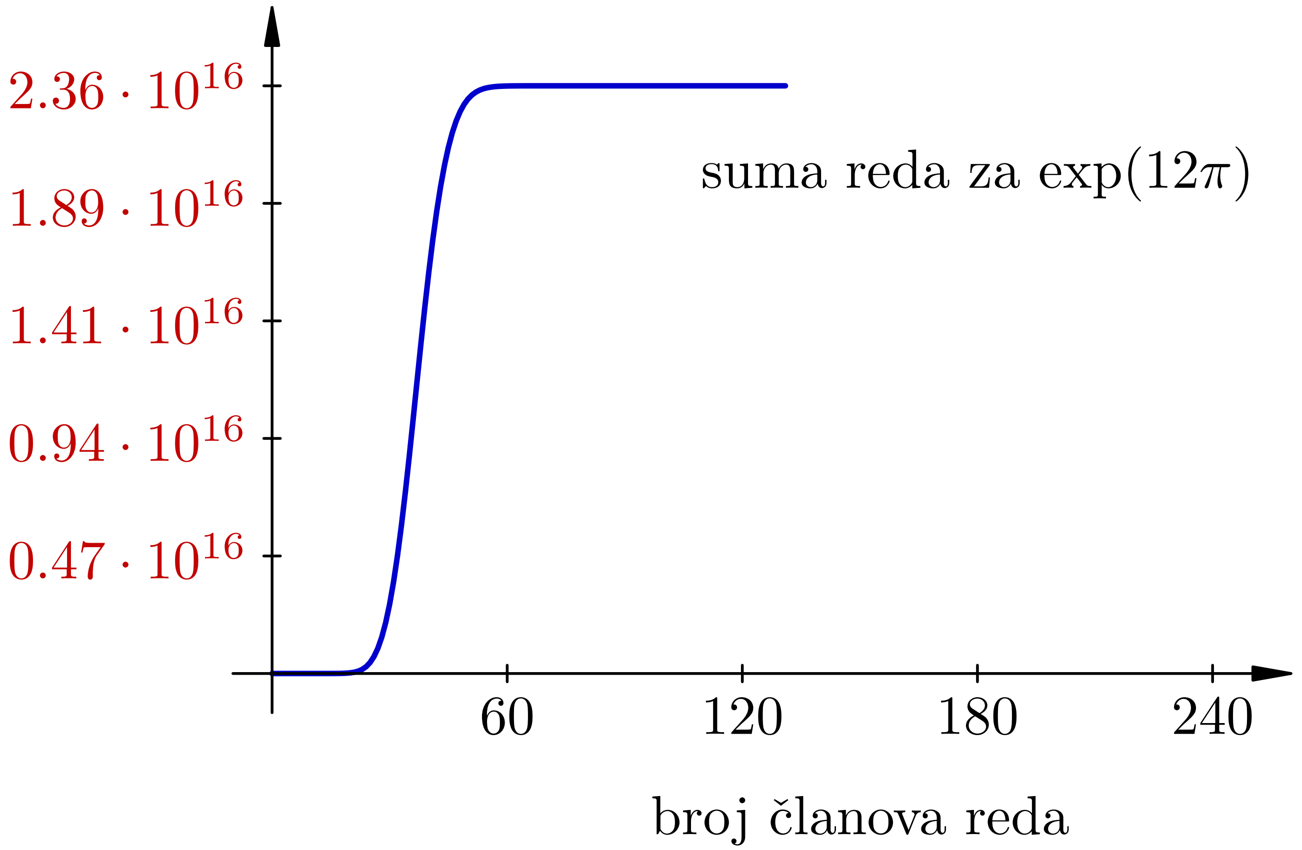
$$\begin{aligned}
\text{prava greška} &= -4.000000000000000 \cdot 10^{0} \\
\text{relativna greška} &= 1.696460473206433\,5 \cdot 10^{-16}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\exp(12\pi)$



Svi članovi imaju isti predznak.

Suma reda za $\exp(12\pi)$



Suma stalno raste, dok se ne stabilizira.

Red za eksponencijalnu funkciju, $x = 24\pi$

Za $x = 24\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 236 članova reda ($n = 235$)

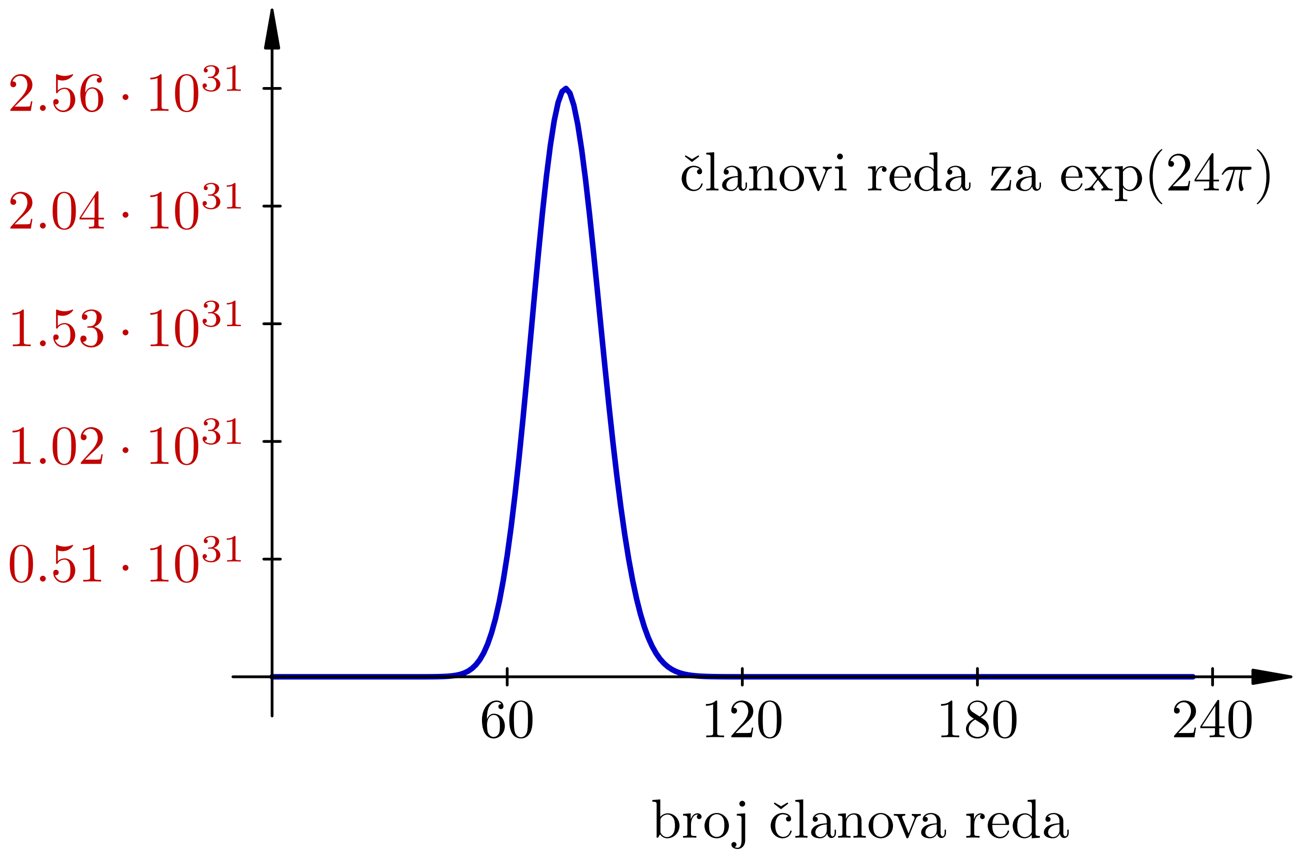
$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 5.0445 \cdot 10^{16}$$

$$|\text{maksimalni član}| = 2.5555 \cdot 10^{31} \quad (n = 75).$$

Dobivamo:

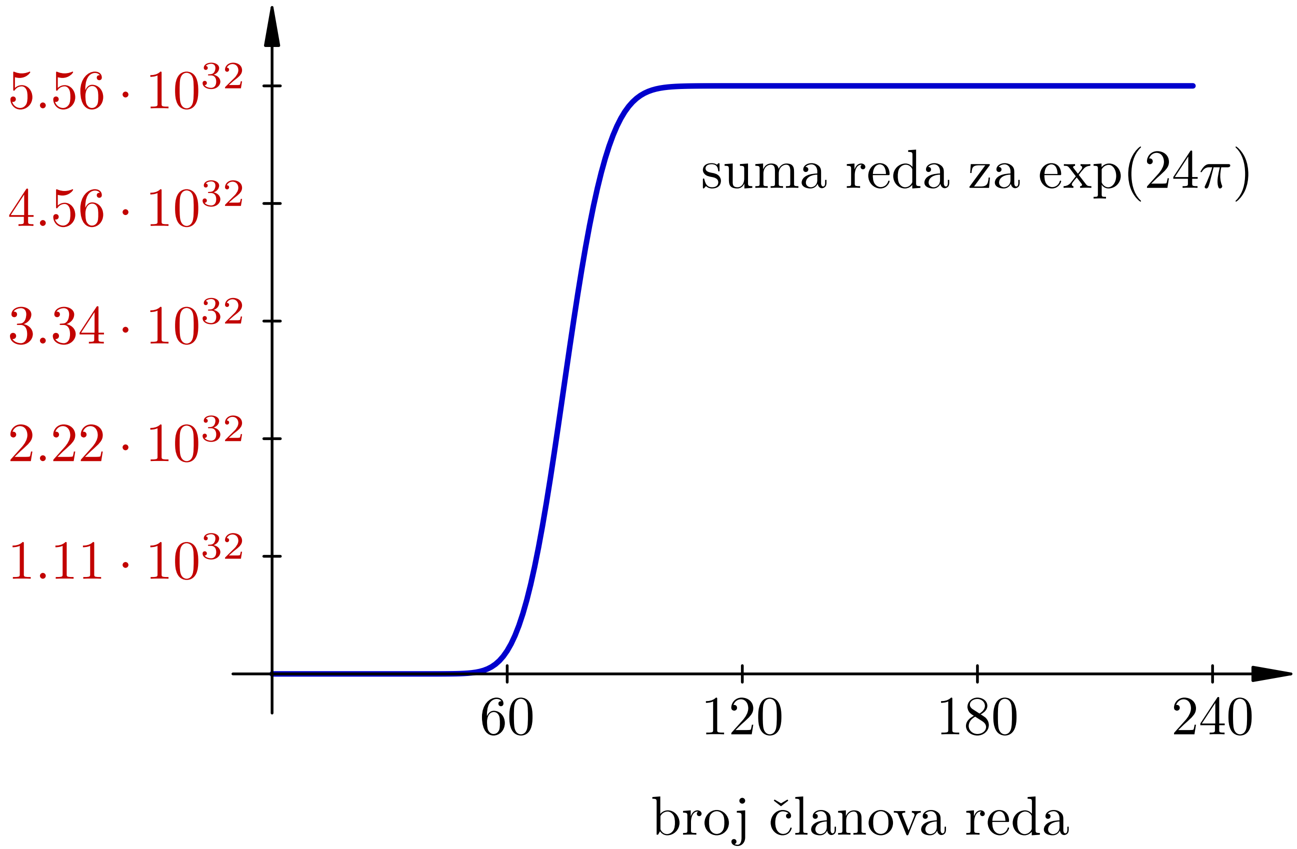
$$\begin{aligned}
\exp(24\pi)_{\text{funkcija}} &= 5.5594584939531437 \cdot 10^{32} \\
\exp(24\pi)_{\text{Taylor}} &= 5.5594584939531445 \cdot 10^{32} \\
\text{prava greška} &= -7.2057594037927936 \cdot 10^{16} \\
\text{relativna greška} &= 1.2961261266057264 \cdot 10^{-16}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\exp(24\pi)$



Svi članovi imaju isti predznak.

Suma reda za $\exp(24\pi)$



Suma stalno raste, dok se ne stabilizira.

Red za funkciju sinus, $x = 12\pi$

Za $x = 12\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 66 članova reda ($n = 131$)

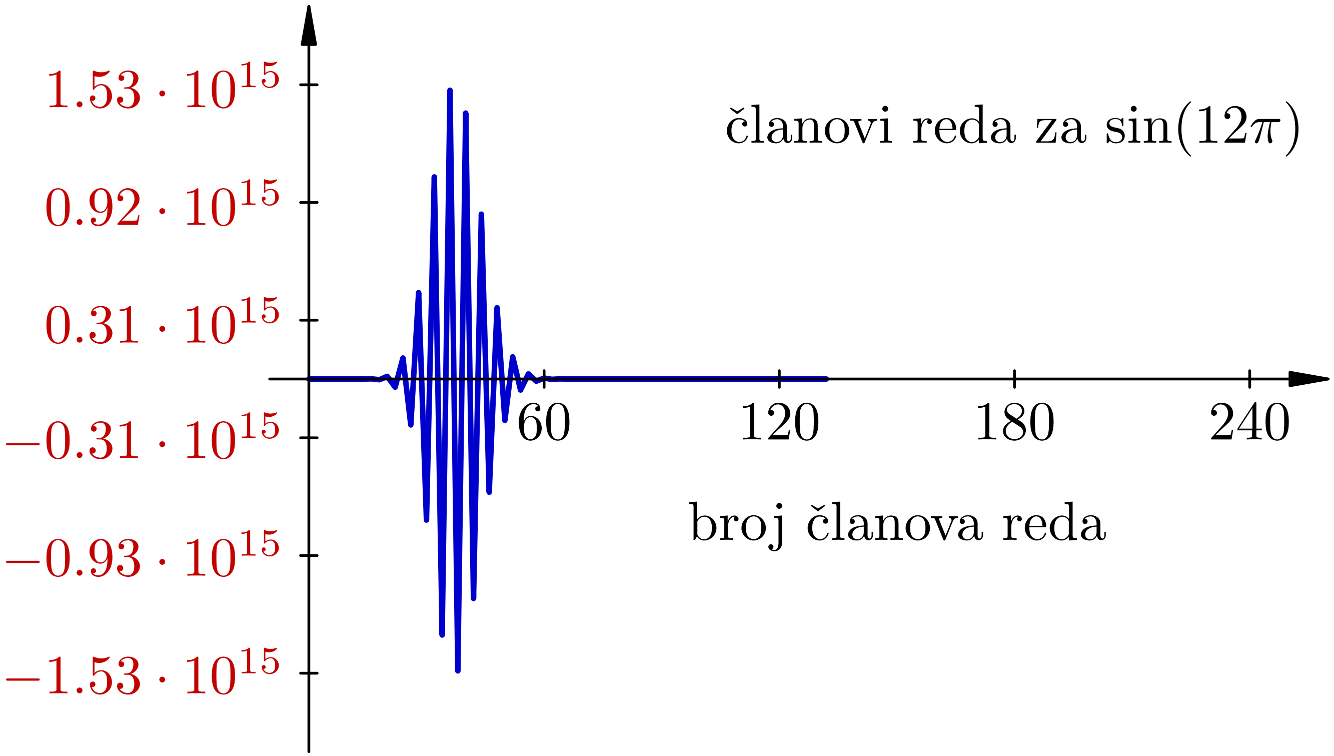
$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 3.0175 \cdot 10^{-17}$$

$$|\text{maksimalni član}| = 1.5329 \cdot 10^{15} \quad (n = 37).$$

Dobivamo:

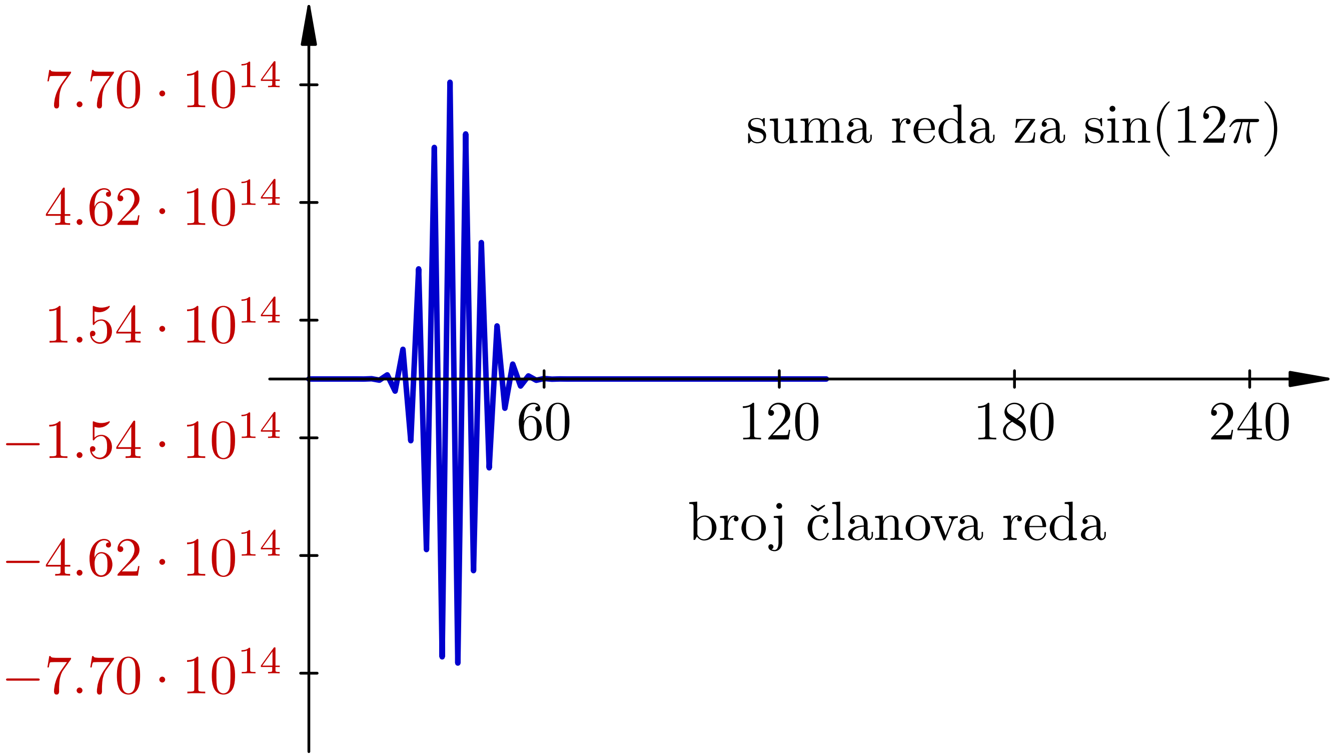
$$\begin{aligned}
\sin(12\pi)_{\text{funkcija}} &= -1.469527624586852 7\cdot 10^{-15} \\
\sin(12\pi)_{\text{Taylor}} &= -4.138163210734445 4\cdot 10^{-2} \\[1ex]
\text{prava greška} &= \quad 4.138163210734298 3 \cdot 10^{-2} \\
\text{relativna greška} &= \quad 2.815981912485458 6 \cdot 10^{13}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\sin(12\pi)$



Članovi alterniraju po predznaku.

Suma reda za $\sin(12\pi)$



Suma naglo naraste, a zatim se skrati, dok se ne stabilizira.

Posljedica: gubitak točnosti — relativno obzirom na najveći međurezultat.

Red za funkciju sinus, $x = 24\pi$

Za $x = 24\pi$ i $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-16}$ trebamo 118 članova reda ($n = 235$)

$$|\text{greška odbacivanja}| \leq 2.8867 \cdot 10^{-17}$$

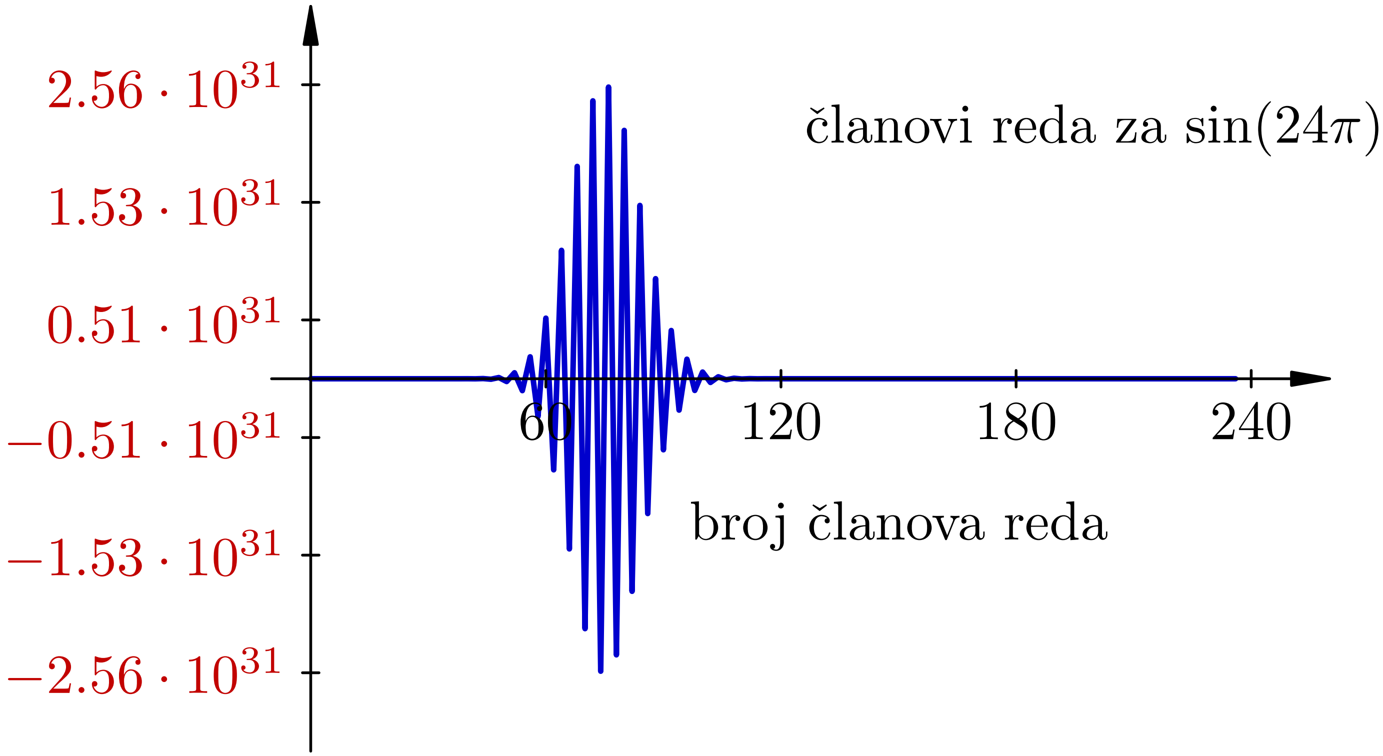
$$|\text{maksimalni član}| = 2.5555 \cdot 10^{31} \quad (n = 75).$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sin(24\pi)_{\text{funkcija}} &= -2.9390552491737054 \cdot 10^{-15} \\
\sin(24\pi)_{\text{Taylor}} &= 3.6199983145905898 \cdot 10^{13}
\end{aligned}$$

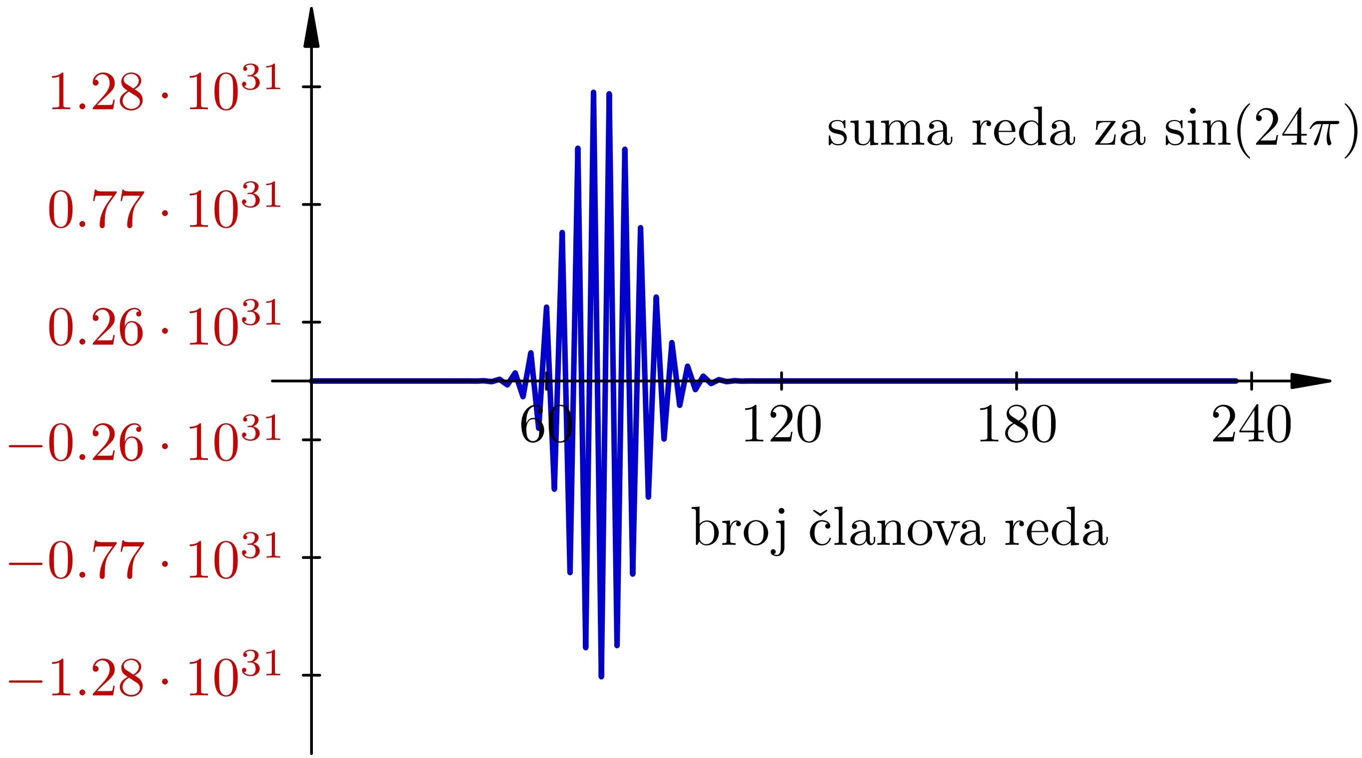
$$\begin{aligned}
\text{prava greška} &= -3.6199983145905898 \cdot 10^{13} \\
\text{relativna greška} &= 1.2316877389794990 \cdot 10^{28}.
\end{aligned}$$

Članovi reda za $\sin(24\pi)$



Članovi alterniraju po predznaku.

Suma reda za $\sin(24\pi)$



Suma naglo naraste, a zatim se skrati, dok se ne stabilizira.

Posljedica: gubitak točnosti — relativno obzirom na najveći međurezultat.

Prikaz brojeva u računalu i greške zaokruživanja

Tipovi brojeva u računalu

U računalu postoje dva bitno različita tipa brojeva:

- cijeli brojevi
- realni brojevi.

Oba skupa su konačni podskupovi odgovarajućih skupova $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$ u matematici.

Kao baza za prikaz oba tipa koristi se baza 2.

Podtipovi — ovisno o broju bitova n predviđenih za prikaz odgovarajuće vrste brojeva.

Cijeli brojevi — sažetak

Cijeli brojevi bez predznaka:

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{\,0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 2^n - 2,\ 2^n - 1\,\}.$$

Cijeli brojevi s predznakom:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^-_{2^n} = \{\,-2^{n-1},\ -2^{n-1}+1,\ \ldots\ ,\ -2,\ -1,&\\ 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 2^{n-1}-2,\ 2^{n-1}-1\,\}&.\end{aligned}$$

Aritmetika cijelih brojeva je modularna aritmetika modulo 2^n:

- operacije $+$, $-$ i $\cdot$ daju cjelobrojni rezultat modulo 2^n,
- operacije cjelobrojnog dijeljenja s ostatkom daju zaokruženi racionalni kvocijent (prema nuli) i pripadni ostatak (s predznakom prvog argumenta).

Oprez: $n!$ u cjelobrojnoj aritmetici — $50! = 0$ (modulo 2^{32}).

Prikaz realnih brojeva
sažetak

Realni brojevi — prikaz

Skup svih realnih brojeva prikazivih u računalu je konačan, a parametriziramo ga duljinom mantise (t) i eksponenta (w) i označavamo s $\mathbb{R}(t, w)$.

mantisa (signifikand)						eksponent (karakteristika)				
$1.$	b_{-1}	b_{-2}	$\cdots$	b_{-t}		e_{w-1}	e_{w-2}	$\cdots$	e_1	e_0

Oznaka: preciznost $p := t + 1$ — to je ukupni broj vodećih značajnih bitova cijele mantise (zajedno s vodećim 1).

Ne može se svaki realni broj egzaktno spremiti u računalo.

Neka je broj $x \in \mathbb{R}$ unutar prikazivog raspona i

$$x = \pm\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_{-i} \cdot 2^{-i}\right) \cdot 2^e.$$

Realni brojevi — zaokruživanje

Ako razlomljeni dio mantise ima više od t znamenki, bit će spremljena aproksimacija tog broja $f\ell(x) \in \mathbb{R}(t, w)$, koja se može prikazati kao

$$f\ell(x) = \pm \left(1 + \sum_{i=1}^{t} b_{-i}^{*} \cdot 2^{-i} \right) \cdot 2^{e^*}.$$

Slično kao kod decimalne aritmetike,

- ako je prva odbačena znamenka 1, broj zaokružujemo nagore,
- a ako je 0, nadolje.

Time smo napravili apsolutnu grešku manju ili jednaku od "pola zadnjeg prikazivog bita", tj. $2^{-t-1+e} = 2^{-p+e}$.

Relativna greška zaokruživanja

Gledajući relativno, greška je manja ili jednaka

$$\left|\frac{x - f\ell(x)}{x}\right| \leq \frac{2^{-t-1+e}}{2^0 \cdot 2^e} = 2^{-t-1} = 2^{-p},$$

tj. imamo vrlo malu relativnu grešku.

Veličinu $2^{-t-1} = 2^{-p}$ zovemo jedinična greška zaokruživanja (engl. unit roundoff) i uobičajeno označavamo s u.

Za $x \in \mathbb{R}$ unutar prikazivog raspona, umjesto x sprema se zaokruženi broj $f\ell(x) \in \mathbb{R}(t, w)$ i vrijedi

$$f\ell(x) = (1 + \varepsilon)x, \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je ε relativna greška napravljena tim zaokruživanjem.

Standardni tipovi realnih brojeva — IEEE 754

Novi standard IEEE 754-2008 standard ima sljedeće tipove za prikaz realnih brojeva:

`ime tipa`	`binary32`	`binary64`	`binary128`
duljina u bitovima	32	64	128
$t =$	23	52	112
$w =$	8	11	15
$u = 2^{-p}$	2^{-24}	2^{-53}	2^{-113}
$u \approx$	$5.96 \cdot 10^{-8}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$9.63 \cdot 10^{-35}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 38}$	$10^{\pm 308}$	$10^{\pm 4932}$

Najveći tip `binary128` još uvijek ne postoji u većini procesora.

Standardni tipovi realnih brojeva — extended

Većina PC procesora još uvijek ima posebni dio — tzv. FPU (engl. Floating–Point Unit). On stvarno koristi

- tip `extended` iz starog standarda, koji odgovara tipu `extended binary64` u novom IEEE 754-2008 standardu.

Dio primjera koje ćete vidjeti napravljen je baš u tom tipu!

`ime tipa`	`extended`
duljina u bitovima	80
$t + 1 =$	$63 + 1$
$w =$	15
$u = 2^{-p}$	2^{-64}
$u \approx$	$5.42 \cdot 10^{-20}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 4932}$

Realna aritmetika računala (IEEE standard)

Realna aritmetika računala — standard

Realna aritmetika računala nije egzaktna!

Razlog:

- Rezultat svake operacije mora biti prikaziv,
- pa dolazi do zaokruživanja.

Standard IEEE 754-2008 za realnu artimetiku računala propisuje da za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi

- ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva,
- tj. da izračunati rezultat ima malu relativnu grešku.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput $\sqrt{\ }$, ali ne mora vrijediti za sve funkcije (na pr. za sin oko 0, ili ln oko 1).

Standard iz 2008. g. to preporučuje, ali (zasad) ne zahtijeva.

Realna aritmetika računala — zaokruživanje

Neka je $\circ$ bilo koja od aritmetičkih operacija $+$, $-$, $*$, $/$, i neka su x i y prikazivi operandi (drugih, ionako, nema u računalu).

- Ako su x i y u dozvoljenom, tj. normaliziranom rasponu,
- i ako se egzaktni rezultat $x \circ y$, također, nalazi u normaliziranom rasponu (ne mora biti prikaziv),

za računalom izračunati (prikazivi) rezultat $f\ell(x \circ y)$ onda vrijedi

$$f\ell(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je u jedinična greška zaokruživanja za dani tip brojeva. Ova ocjena odgovara zaokruživanju egzaktnog rezultata!

Prava relativna greška ε ovisi o: x, y, operaciji $\circ$, i stvarnoj realizaciji aritmetike računala.

Posljedice zaokruživanja u realnoj aritmetici

Napomena. Bez pretpostavki o normaliziranom rasponu, prethodni rezultat ne vrijedi — greška može biti puno veća!

Zbog zaokruživanja, u realnoj aritmetici računala, nažalost,

- ne vrijede uobičajeni zakoni za aritmetičke operacije na skupu $\mathbb{R}$.

Na primjer, za aritmetičke operacije u računalu

- nema asocijativnosti zbrajanja i množenja,
- nema distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Dakle, poredak izvršavanja operacija je bitan!

Zapravo, jedino standardno pravilo koje vrijedi je

- komutativnost za zbrajanje i za množenje.

Širenje grešaka zaokruživanja

Širenje grešaka zaokruživanja

Vidimo da gotovo svaki izračunati rezultat ima neku grešku. Osim toga,

- zaokruživanje se vrši nakon svake pojedine operacije.

Najlakše je stvar zamišljati kao da zaokruživanje ide "na kraju" operacije, iako je ono "dio operacije".

Kad imamo puno aritmetičkih operacija (inače nam računalo ne treba), dolazi do tzv.

- akumulacije ili širenja grešaka zaokruživanja.

Malo pogrešni rezultati (možda već od čitanja), ulaze u operacije, koje opet malo griješe, i tako redom ...

- greške se "šire" kroz sve što računamo!

Opasne i bezopasne operacije — sažetak

Jedina opasna operacija — kad rezultat može imati veliku relativnu grešku, je

- oduzimanje bliskih brojeva,
- i to samo kad polazni operandi već imaju neku grešku (samo oduzimanje je tada, najčešće, egzaktno).

Ovaj fenomen zove se opasno ili katastrofalno kraćenje.

Sve ostale operacije su bezopasne — relativna greška rezultata ne raste pretjerano. Posebno,

- dijeljenje malim brojem nije opasno,
- osim kad je mali broj nastao (ranijim) kraćenjem.

Nažalost, u nekim knjigama piše suprotno — i pogrešno.

Širenje grešaka u aritmetici

Širenje grešaka u aritmetici

Za analizu širenja grešaka u aritmetici, treba pogledati

- što se događa s greškama u rezultatu,
- kad imamo greške u operandima.

Prvo u egzaktnoj aritmetici, a onda i u aritmetici računala.

Pretpostavimo onda da su polazni podaci (ili operandi) x i y malo perturbirani, s pripadnim relativnim greškama ε_x i ε_y.

Koje su operacije $\circ$ opasne (ako takvih ima), ako nam je aritmetika egzaktna, a operandi su $x(1+\varepsilon_x)$ i $y(1+\varepsilon_y)$?

Treba ocijeniti relativnu grešku $\varepsilon_\circ$ rezultata operacije $\circ$

$$(x \circ y)\,(1+\varepsilon_\circ) := [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,] \circ [\,y\,(1+\varepsilon_y)\,].$$

Širenje grešaka u aritmetici (nastavak)

Naravno, za početak, moramo nešto pretpostaviti o ε_x i ε_y.

Što smatramo malom relativnom perturbacijom?

- Svakako mora biti $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| < 1$, inače perturbacijom gubimo predznak operanda.

Međutim, to nije dovoljno za neki razuman rezultat.

- Stvarno očekujemo $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq c \ll 1$, tako da imamo barem nekoliko točnih znamenki u perturbiranim operandima. Na pr., $c = 10^{-1}$ (jedna točna znamenka).
- Idealno, u računalu je $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, tj. kao da smo oba operanda samo spremili u memoriju računala (jedna greška zaokruživanja).

Širenje grešaka kod množenja

Množenje je bezopasno (benigno), jer vrijedi

$$\begin{aligned}(x * y)(1+\varepsilon_*) &:= [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,] * [\,y\,(1+\varepsilon_y)\,] \\ &= xy\,(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_y),\end{aligned}$$

kad stvar napišemo bez nepotrebnih zagrada i $*$. Onda je

$$\varepsilon_* = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_y \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y,$$

ako su $|\varepsilon_x|$ i $|\varepsilon_y|$ dovoljno mali da $\varepsilon_x\varepsilon_y$ možemo zanemariti.

Dakle, relativna greška se samo zbraja.

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, dobivamo približnu ocjenu relativne greške $|\varepsilon_*| \leq 2u$ (do na u^2), ili, na pr., $|\varepsilon_*| \leq 2.01u$.

Širenje grešaka kod dijeljenja

Dijeljenje je, također, bezopasno (benigno), samo je zaključak malo dulji. Na početku je

$$(x\,/\,y)\,(1+\varepsilon_{/}) := [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,]\,/\,[\,y\,(1+\varepsilon_y)\,] = \frac{x\,(1+\varepsilon_x)}{y\,(1+\varepsilon_y)}.$$

Ako su $|\varepsilon_x|$ i $|\varepsilon_y|$ dovoljno mali da sve možemo linearizirati (tj. zanemariti "kvadratne" i više potencije epsilona), onda je

$$\frac{1}{1+\varepsilon_y} = 1-\varepsilon_y + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\varepsilon_y^n \approx 1-\varepsilon_y$$

i

$$(1+\varepsilon_x)\,(1-\varepsilon_y) = 1+\varepsilon_x-\varepsilon_y-\varepsilon_x\varepsilon_y \approx 1+\varepsilon_x-\varepsilon_y.$$

Širenje grešaka kod dijeljenja (nastavak)

Kad to uvrstimo u prvi izraz, dobivamo

$$(x \,/\, y)\,(1+\varepsilon_{/}) \approx \frac{x}{y}\,(1+\varepsilon_x)\,(1-\varepsilon_y) \approx \frac{x}{y}\,(1+\varepsilon_x-\varepsilon_y).$$

Za relativnu grešku (približno) vrijedi

$$\varepsilon_{/} \approx \varepsilon_x - \varepsilon_y, \qquad |\varepsilon_{/}| \approx |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|.$$

Dakle, relativne greške se oduzimaju, a ocjene zbrajaju.

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, opet dobivamo približnu ocjenu relativne greške $|\varepsilon_{/}| \leq 2u$.

Vidimo da su i množenje i dijeljenje bezopasne operacije za širenje grešaka zaokruživanja.

Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Zbrajanje i oduzimanje. Ovdje rezultat ključno ovisi o predznacima od x i y.

Sasvim općenito, neka su x i y proizvoljnih predznaka. Za zbrajanje i oduzimanje (oznaka $\pm$) vrijedi

$$(x \pm y)\,(1 + \varepsilon_\pm) := [\,x\,(1 + \varepsilon_x)\,] \pm [\,y\,(1 + \varepsilon_y)\,].$$

Pogledajmo prvo trivijalne slučajeve. Ako je egzaktni rezultat $x \pm y = 0$, onda imamo dvije mogućnosti.

- Ako je i $x\,(1 + \varepsilon_x) \pm y\,(1 + \varepsilon_y) = 0$, relativna greška $\varepsilon_\pm$ može biti biti koji broj (nije određena), a prirodno je uzeti $\varepsilon_\pm = 0$.
- U protivnom, za $x\,(1 + \varepsilon_x) \pm y\,(1 + \varepsilon_y) \neq 0$, gornja jednakost je nemoguća, pa stavljamo $\varepsilon_\pm = \pm\infty$.

Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Pretpostavimo nadalje da je $x \pm y \neq 0$. Onda je

$$\begin{aligned}(x \pm y)\,(1 + \varepsilon_\pm) &= x\,(1 + \varepsilon_x) \pm y\,(1 + \varepsilon_y) \\ &= (x \pm y) + (x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y) \\ &= (x \pm y)\left(1 + \frac{x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y}{x \pm y}\right).\end{aligned}$$

Relativnu grešku $\varepsilon_\pm$ možemo napisati u obliku linearne kombinacije polaznih grešaka ε_x i ε_y

$$\varepsilon_\pm = \frac{x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y}{x \pm y} = \frac{x}{x \pm y}\,\varepsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y}\,\varepsilon_y.$$

Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Naravno, za nastavak rasprave ključno je pitanje

- koliko su veliki faktori uz polazne greške,

tj. da li "prigušuju" ili "napuhavaju" greške.

Da ne bismo stalno pisali hrpu oznaka $\pm$ (nepregledno), pogledajmo što se zbiva kad

- x i y imaju isti predznak, a
- posebno gledamo operacije $+$ i $-$.

Ako su x i y različitih predznaka, zamijenimo operaciju u suprotnu ($+ \mapsto -$, $- \mapsto +$), pa će vrijediti isti zaključci.

Nadalje, zbrajamo i oduzimamo brojeve istih predznaka.

Širenje grešaka kod zbrajanja

Zbrajanje brojeva istog predznaka je bezopasno (benigno). To izlazi ovako.

Zbog istih predznaka od x i y, vrijedi $|x|, |y| \leq |x+y|$, pa je

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|, \ \left|\frac{y}{x+y}\right| \leq 1.$$

To vrijedi i kad je $x = 0$ ili $y = 0$. Odavde odmah slijedi

$$|\varepsilon_+| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|.$$

Dakle, relativna greška se, u najgorem slučaju, zbraja.

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, opet dobivamo ocjenu relativne greške $|\varepsilon_+| \leq 2u$.

Širenje grešaka kod zbrajanja (nastavak)

Uz malo truda, dobivamo i bolju ocjenu. Prvo uočimo da za faktore vrijedi

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| = 1,$$

i još iskoristimo $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq \max\{\,|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\,\}$. Onda je

$$\begin{aligned} |\varepsilon_+| &\leq \left|\frac{x}{x+y}\right| |\varepsilon_x| + \left|\frac{y}{x+y}\right| |\varepsilon_y| \\ &\leq \left(\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right|\right) \max\{\,|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\,\} \\ &= \max\{\,|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\,\}. \end{aligned}$$

Širenje grešaka kod zbrajanja (nastavak)

Dakle, relativna greška zbrajanja je, u najgorem slučaju,

- maksimum polaznih grešaka (ne treba ih zbrajati).

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, sada dobivamo ocjenu relativne greške $|\varepsilon_+| \leq u$. Bolje ne može!

Naravno, isto vrijedi i za oduzimanje brojeva različitih predznaka. I to je bezopasno.

Širenje grešaka kod oduzimanja

Oduzimanje brojeva istog predznaka može biti opasno, čak katastrofalno loše.

- Točnije, ne mora uvijek biti opasno, ali može!

Zašto i kada je opasno?

Zbog različitih predznaka od x i y, uz $x \neq 0$ i $y \neq 0$, sigurno vrijedi

$$|x - y| < \max\{\, |x|, |y| \,\},$$

pa je barem jedan od faktora veći od 1, tj.

$$\max\left\{ \left|\frac{x}{x-y}\right|, \left|\frac{y}{x-y}\right| \right\} > 1.$$

Širenje grešaka kod oduzimanja (nastavak)

Odavde odmah slijedi da u ocjeni relativne greške

$$|\varepsilon_-| \leq \left|\frac{x}{x-y}\right| |\varepsilon_x| + \left|\frac{y}{x-y}\right| |\varepsilon_y|$$

na barem jednom mjestu imamo rast greške, a to se može dogoditi i na oba mjesta.

Kad je to zaista opasno? Ako je $|x-y| \ll |x|, |y|$, ovi faktori

$$\left|\frac{x}{x-y}\right|, \quad \left|\frac{y}{x-y}\right|,$$

mogu biti proizvoljno veliki, pa i relativna greška $|\varepsilon_-|$ rezultata može biti proizvoljno velika!

Opasno oduzimanje ili kraćenje

Opasna situacija $|x - y| \ll |x|, |y|$ znači da je

- rezultat oduzimanja brojeva istog predznaka $=$
- broj koji je po apsolutnoj vrijednosti mnogo manji od polaznih podataka (oba operanda),

a to znači da operandi x i y moraju biti bliski, tako da dolazi do kraćenja. Zato se ovaj fenomen obično zove

Opasno ili katastrofalno kraćenje.

Dosad smo govorili da relativna greška u tom slučaju može biti velika, ali da li se to zaista događa?

- Naime, ovdje je ipak riječ o ocjeni greške, pa se možda događa da je ocjena vrlo loša, a prava greška ipak mala!

Nažalost, nije tako! To se itekako događa u praksi!

Primjer:
“Katastrofalno” kraćenje

Primjer katastrofalnog kraćenja

Zakruživanjem ulaznih podataka dolazi do male relativne greške. Kako ona može utjecati na konačni rezultat?

Primjer. Uzmimo realnu aritmetiku "računala" u bazi 10. Za mantisu (značajni dio broja) imamo $p = 4$ dekadske znamenke, a za eksponent imamo 2 znamenke (što nije bitno). Neka je

$$x = 8.8866 = 8.8866 \times 10^0,$$
$$y = 8.8844 = 8.8844 \times 10^0.$$

Umjesto brojeva x i y, koji nisu prikazivi, u "memoriju" spremamo brojeve $f\ell(x)$ i $f\ell(y)$, pravilno zaokružene na $p = 4$ znamenke

$$f\ell(x) = 8.887 \times 10^0,$$
$$f\ell(y) = 8.884 \times 10^0.$$

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Ovim zaokruživanjima napravili smo malu relativnu grešku u x i y (ovdje je $u = \frac{1}{2}\, b^{-p} = 5 \times 10^{-5}$).

Razliku $f\ell(x) - f\ell(y)$ računamo tako da izjednačimo eksponente (što već jesu), oduzmemo značajne dijelove (mantise), pa normaliziramo

$$\begin{aligned} f\ell(x) - f\ell(y) &= 8.887 \times 10^0 - 8.884 \times 10^0 \\ &= 0.003 \times 10^0 = 3.??? \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Kod normalizacije, zbog pomaka "ulijevo", pojavljuju se

- $?$ = znamenke koje više ne možemo restaurirati (ta informacija se izgubila — zaokruživanjem x i y).

Što sad?

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Računalo radi isto što bismo i mi napravili:

- na ta mjesta ? upisuje 0.

Razlog: da rezultat bude točan, ako su polazni operandi točni. Dakle, ovo oduzimanje je egzaktno i u aritmetici računala.

Konačni izračunati rezultat je $f\ell(x) - f\ell(y) = 3.000 \times 10^{-3}$.

Pravi rezultat je

$$\begin{aligned} x - y &= 8.8866 \times 10^0 - 8.8844 \times 10^0 \\ &= 0.0022 \times 10^0 = 2.2 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Već prva značajna znamenka u $f\ell(x) - f\ell(y)$ je pogrešna, a relativna greška je ogromna! Uočite da je ta znamenka (3), ujedno, i jedina koja nam je ostala — sve ostalo se skratilo!

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Prava katastrofa se događa ako $3.??? \times 10^{-3}$ uđe u naredna zbrajanja (oduzimanja), a onda se skrati i ta trojka!

Uočite da je oduzimanje $f\ell(x) - f\ell(y)$ bilo egzaktno i u aritmetici našeg “računala”, ali rezultat je, svejedno, pogrešan.

Krivac, očito, nije oduzimanje (kad je egzaktno).

- Uzrok su polazne greške u operandima $f\ell(x)$, $f\ell(y)$.

Ako njih nema, tj. ako su polazni operandi egzaktni,

- i dalje, naravno, dolazi do kraćenja,
- ali je rezultat (uglavnom, a po IEEE standardu sigurno) egzaktan,

pa se ovo kraćenje onda zove benigno kraćenje.

Ponavljanje i dodatak

Ponavljanje Prog1 i dodatak

Za ponavljanje prikaza brojeva u računalu, pogledajte

- 3. i 4. predavanje iz Programiranja 1.

Pogledajte i dodatak ovom predavanju. Sadrži

- ponavljanje gradiva iz Prog1 o prikazu realnih brojeva u računalu i greškama zaokruživanja,
- još poneke stvari o širenju grešaka prilikom aritmetičkih operacija.

Primjeri “grešaka” iz prakse

Promašaj raketa Patriot

U prvom Zaljevskom ratu, 25. veljače 1991. godine, američke rakete Patriot nisu uspjele oboriti iračku Scud raketu iznad Dhahrana u Saudijskoj Arabiji.

- Scud raketa je pukim slučajem pala na američku vojnu bazu — usmrtivši 28 i ranivši stotinjak ljudi.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Istraga otkriva sljedeće:

- Računalo koje je upravljalo Patriot raketama, vrijeme je brojilo u desetinkama sekunde proteklim od trenutka paljenja (uključivanja) sustava.
- Desetinka sekunde binarno

$$0.1_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

- To računalo prikazivalo je realne brojeve korištenjem nenormalizirane mantise duljine 23 bita.
- Spremanjem broja 0.1 u registar takvog računala radi se (apsolutna) greška $\approx 9.5 \cdot 10^{-8}$ (sekundi).

Ne izgleda puno ..., a kamo li opasno.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Detalji:

- Računalo je bilo u pogonu 100 sati, pa je ukupna greška zaokruživanja bila (stalno se zbraja, svakih 0.1 sekundi)

$$100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 9.5 \cdot 10^{-8} = 0.34\,\text{s}.$$

- Scud raketa putuje brzinom $\approx 1.6\,\text{km/s}$, pa je "tražena" više od pola kilometra daleko od stvarnog položaja.
- Greška je uočena dva tjedna ranije, nakon 8 sati rada jednog drugog sustava. Modifikacija programa stigla je dan nakon nesreće.
- Posade sustava mogle su i dva tjedna ranije dobiti uputu "isključi/uključi računalo" svakih nekoliko sati — ali je nisu dobile.

Samouništenje Ariane 5

Raketa Ariane 5 lansirana 4. lipnja 1995. godine iz Kouroua (Francuska Gvajana).

- Nosila je u putanju oko Zemlje komunikacijske satelite vrijedne 500 milijuna USD.
- 37 sekundi nakon lansiranja izvršila je samouništenje.

Samouništenje Ariane 5 (nastavak)

Objašnjenje:

- U programu za vođenje rakete postojala je varijabla koja je registrirala (pamtila) horizontalnu brzinu rakete (stvarno, nije koristila ničemu).
- Greška je nastupila kad je program pokušao pretvoriti
  - preveliki 64-bitni realni broj
  - u 16-bitni cijeli broj.
- Računalo je javilo grešku, što je izazvalo samouništenje.
- Isti program bio je korišten u prijašnjoj sporijoj verziji Ariane 4, pa do katastrofe nije došlo.

Potonuće naftne platforme

Naftna platforma Sleipner A potonula je prilikom prvog sidrenja, 23. kolovoza 1991. godine u blizini Stavangera.

- Baza platforme su 24 betonske ćelije, od kojih su 4 produljene u šuplje stupove na kojima leži paluba.

Potonuće naftne platforme (nastavak)

Razlozi nesreće:

- Prilikom uronjavanja baze došlo je do pucanja veza među ćelijama (v. desnu sliku).
- Rušenje na dno mora je izazvalo potres jačine 3.0 stupnja po Richterovoj ljestvici i štetu od 700 milijuna USD.
- Greška je nastala u projektiranju, primjenom standardnog paketa programa, kad je upotrijebljena metoda konačnih elemenata s nedovoljnom točnošću.
- Proračun je dao naprezanja 47% manja od stvarnih.
- Točnijim proračunom utvrđeno je da su ćelije morale popustiti na dubini od 62 metra, a popustile su na 65 metara!