

# *Numerička matematika*

## *4. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Rješavanje linearnih sustava (nastavak):
  - Struktura LR (LU) faktorizacije.
  - Matrice za koje ne treba pivotiranje.
  - Simetrične pozitivno definitne matrice.
  - Faktorizacija Choleskog.
  - Pivotiranje u faktorizaciji Choleskog.
- Aproksimacija i interpolacija:
  - Uvod u problem aproksimacije (norme, linearnost).

# Sadržaj predavanja (nastavak)

- Interpolacija polinomima:
  - Problem interpolacije polinomima.
  - Egzistencija i jedinstvenost.
  - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
  - Lagrangeova baza.
  - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
  - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.

# Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/](http://web.math.hr/~singer/num_mat/)

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat1.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf)

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat2.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf)

# Informacije — demonstratori

Kolegij “Numerička matematika” ima **dvije demonstratorice**:

● Gayatri Čaklović

● termin: **petak, 12–14.**

● e-mail: [caklovicka@gmail.com](mailto:caklovicka@gmail.com)

● Iva Manojlović

● termin: **ponedjeljak, 10–12.**

● e-mail: [iva.manojlovic@student.math.hr](mailto:iva.manojlovic@student.math.hr)

Demosice lijepo **mole** da im se **najavite** mailom bar **dan ranije!**

● Sastanak za demonstrature je pred **oglasnom pločom**  
(bar zasad).

# Kad ne treba pivotirati u LR faktorizaciji?

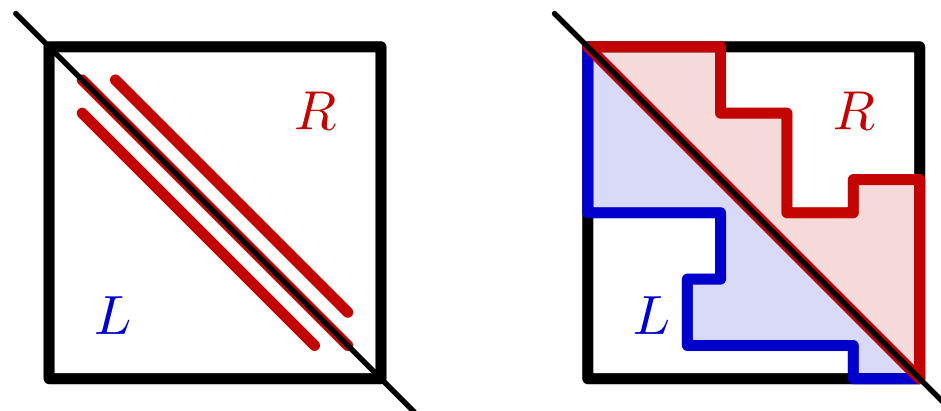
# Struktura LR faktorizacije

Ako matrica  $A$ , koja ulazi u LR faktorizaciju, ima nekakvu **strukturu**, pitanje je kad će se ta struktura **očuvati** u  $L$  i  $R$ .

To je **posebno bitno** za tzv. “šuplje” sustave

- gdje se sva informacija o matrici  $A$  može spremiti u **bitno manje** od  $n^2$  elemenata.

Ako **ne pivotiramo**, onda se čuvaju, recimo, sljedeće forme:



Prva su **vrpčaste** matrice, a druga su “rupe **udesno i nadolje**”.

## Kad ne moramo pivotirati?

Dakle, zgodno je znati kad **ne treba** pivotirati, a da

- imamo **garantiranu stabilnost** algoritma **eliminacija**, odnosno, **LR** faktorizacije.

**Odgovor.** Postoje tipovi matrica kod kojih **ne moramo** pivotirati. Na primjer, to su:

- strogo **dijagonalno dominantne** matrice po **stupcima**, tj. matrice kod kojih za **svaki** stupac  $j = 1, \dots, n$  vrijedi

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|,$$

- dijagonalno dominantne** matrice po **recima** ( $i \leftrightarrow j$ ),
- simetrične pozitivno definitne** matrice (v. malo kasnije).



## Dijagonalno dominantna — ne treba pivotirati

Za dijagonalno dominantne matrice po stupcima, treba samo pokazati da iza prvog koraka eliminacije ostaju dijagonalno dominantne po stupcima. Dalje = indukcija po koracima.

Prvi korak. Element  $a_{11} \neq 0$  (čak je maksimalan po apsolutnoj vrijednosti u prvom stupcu), pa sigurno možemo napraviti prvi korak eliminacije. Dobivamo matricu  $A^{(2)}$  oblika

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix},$$

pri čemu je  $S^{(2)}$  regularna (dokaz korištenjem determinanti).

Za nastavak, moramo pokazati da je matrica  $S^{(2)}$ , također, dijagonalno dominantna po stupcima (“korak indukcije”).

## Dijagonalno dominantna — ne treba pivotirati

Iz formula za transformacije elemenata, za  $j = 2, \dots, n$ , slijedi

$$\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^{(2)}| = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \leq \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| + \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{i1}|$$

(dijagonalna dominantnost obje sume)

$$< (|a_{jj}| - |a_{1j}|) + \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \cdot (|a_{11}| - |a_{j1}|)$$

$$= |a_{jj}| - \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{j1} \right| \quad (\text{koristimo } |a| - |b| \leq |a - b|)$$

$$\leq \left| a_{jj} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{j1} \right| = |a_{jj}^{(2)}|.$$

Dakle, i  $S^{(2)}$  je **dijagonalno dominantna** po **stupcima**. ■

## Dijagonalno dominantne matrice — preciznije

Za kompleksnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  kažemo da je **dijagonalno dominantna** po **stupcima** ako vrijedi

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ako vrijedi **stroga** nejednakost ( $>$ ), za **sve**  $j = 1, \dots, n$ , onda kažemo da je  $A$  **strogo** dijagonalno dominantna po **stupcima**.

Matrica  $A$  je (**strogo**) dijagonalno dominantna po **recima**, ako je  $A^*$  (**strogo**) dijagonalno dominantna po **stupcima** ( $i \leftrightarrow j$ ).

U oba slučaja, **Gaussove eliminacije** i **LR faktorizacija** su

🔴 savršeno **stabilne** i **bez pivotiranja**.

# GE i LR za dijagonalno dominantne matrice

**Teorem** (Wilkinson). Neka je  $A$  kompleksna regularna kvadratna matrica reda  $n$ .

- Ako je  $A$  dijagonalno dominantna po recima ili stupcima, tada  $A$  ima LR faktorizaciju bez pivotiranja i za faktor rasta vrijedi  $\rho_n \leq 2$ .
- Ako je  $A$  dijagonalno dominantna po stupcima, tada je  $|l_{ij}| \leq 1$  za sve  $i, j$ , u LR faktorizaciji bez pivotiranja.

To znači da parcijalno pivotiranje ne radi nikakve zamjene redaka — najveći element u stupcu je već na dijagonali. ■

**Napomena.** Regularnost samo osigurava da dijagonalni elementi ne smiju biti nula, jer dozvoljavamo  $\geq$ .

**Dokaz.** Sličan prethodnom (v. skripta ili Higham, ASNA2).

# Simetrične pozitivno definitne matrice

# Simetrične pozitivno definitne matrice

Za simetrične/hermitske pozitivno definitne matrice radi se “simetrizirana” varijanta LR faktorizacije

- jer je 2 puta brža nego obična LR faktorizacija,
- i čuva strukturu matrice  $A$  — čak i kad računamo u aritmetici računala, množenjem faktora uvijek dobivamo simetričnu/hermitsku matricu.

Ova simetrizirana faktorizacija zove se faktorizacija Choleskog.

Prisjećanje. Kompleksna matrica  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je hermitska ako je

$$A = A^*, \quad \text{ili} \quad a_{ji} = \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Ako je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , onda je hermitska matrica isto što i simetrična, tj.  $*$  =  $T$ .

# Simetrične pozitivno definitne matrice

**Definicija.** Matrica  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je **pozitivno definitna** ako za svaki vektor  $x \in \mathbb{F}^n$ , takav da je  $x \neq 0$ , vrijedi

$$\langle Ax, x \rangle = x^* Ax > 0. \quad \blacksquare$$

**Napomena.** **Pozitivna definitnost** matrice se **ne vidi odmah**. Obično se **unaprijed**, iz prirode problema, **zna** da je neka matrica pozitivno definitna (očuvanje energije i slično).

**Ekvivalentni uvjeti** za pozitivnu definitnost:

• sve **sojstvene vrijednosti** od  $A$  su **pozitivne**, tj. vrijedi

$$\lambda_k(A) > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje  $\lambda_k$  označava  $k$ -tu najveću svojstvenu vrijednost;

# Simetrične pozitivno definitne matrice

Ekvivalentni uvjeti (nastavak):

- ☛ sve vodeće glavne minore od  $A$  su pozitivne, tj. vrijedi

$$\det(A_k) > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje je  $A_k = A(1 : k, 1 : k)$  vodeća glavna podmatrica od  $A$ , reda  $k$ .

Posljedica. Sve vodeće glavne podmatrice  $A_k$  su regularne, za  $k = 1, \dots, n$ . Posebno, matrica  $A$  je regularna.

Digresija. Katkad se lakše vidi da neka matrica nije pozitivno definitna. Pokažite da nisu pozitivno definitne one matrice

- ☛ koje na dijagonali imaju bar jedan negativan element ili nulu.



## Pozitivna definitnost i simetrija

Za **kompleksne** matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , može se pokazati da vrijedi

●  $A$  je **pozitivno definitna**  $\implies A$  je **hermitska** ( $A = A^*$ ).

Za **realne** matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  to **ne mora** vrijediti, tj.

● **pozitivno definitna** matrica **ne mora** biti **simetrična** (može biti i  $A \neq A^T$ ).

Međutim, u **numerici** se vrlo često koristi “**stroža**” varijanta pojma — koja, po **definiciji**, uključuje i **simetriju**:

● **Realna** matrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **pozitivno definitna** ako je **simetrična** i za svaki  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , vrijedi  $x^T A x > 0$ .

Da ne bude zabune, u nastavku, koristimo “**strožu**” definiciju! U tom slučaju, originalni pojam (**bez** simetrije) katkad se zove samo “**pozitivnost**” matrice  $A$ .

# LR faktorizacija za sim. poz. def. matrice

Tvrdnja. Za svaku hermitsku/simetričnu pozitivno definitnu matricu  $A$

• uvijek se može napraviti LR faktorizacija bez pivotiranja.

Osim toga, matrica  $R$  ima pozitivnu dijagonalu i regularna je.

Dokaz. Sve vodeće glavne podmatrice  $A_k = A(1:k, 1:k)$  su regularne, pa prva tvrdnja slijedi iz teorema o LR faktorizaciji.

U LR faktorizaciji matrice  $A$ , za sve vodeće glavne podmatrice matrica  $A$  i  $R$  vrijedi (v. prošli puta)

$$\det(A_k) = \det(R_k) = r_{11} r_{22} \cdots r_{kk}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Iz drugog ekvivalentnog uvjeta  $\det(A_k) > 0$ , slijedi  $r_{11} > 0$  i  $r_{kk} = \det(A_k) / \det(A_{k-1}) > 0$ , za  $k = 2, \dots, n$ . ■

# Simetrizirana LR faktorizacija

Tvrdnja. LR faktorizaciju hermitske/simetrične pozitivno definitne matrice  $A$  možemo napisati u simetriziranom obliku

$$A = LDL^*,$$

gdje je

- $L$  donja trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali,
- a  $D$  dijagonalna matrica s pozitivnom dijagonalom.

Ta faktorizacija se obično zove  $LDL^*$  faktorizacija.

Dokaz. Ide u dva koraka. U LR faktorizaciji matrice  $A$ , faktor  $R$  se prvo rastavi na

$$R = DM^*,$$

gdje je  $M^*$  gornja trokutasta s jedinicama na dijagonali, a zatim se dokaže da je  $M = L$ .

# Simetrizirani LR — faktorizacija Choleskog

Prvi korak. Faktorizaciju  $R = DM^*$  dobijemo tako da

- dijagonalne elemente  $r_{ii}$  od  $R$  izlučimo slijeva (iz redaka) u dijagonalnu matricu  $D$  (s pozitivnom dijagonalom),
- svaki redak u  $R$  podijelimo s dijagonalnim elementom  $r_{ii}$  u tom retku — dobijemo  $M^*$  s jedinicama na dijagonali (ostaje gornja trokutasta, kao i  $R$ ).

Dakle, izlazi da je

$$A = LDM^*,$$

gdje su  $L$  i  $M$  donje trokutaste s jedinicama na dijagonali, a  $D$  je dijagonalna s pozitivnim dijagonalnim elementima.

Sve tri matrice su regularne.

# Simetrizirani LR — faktorizacija Choleskog

Drugi korak. Zbog hermitičnosti/simetrije matrice  $A$ , vrijedi

$$LDM^* = A = A^* = (LDM^*)^* = MDL^*.$$

Množenjem s lijeva s  $L^{-1}$  i zdesna s  $L^{-*} = (L^{-1})^*$  dobivamo

$$DM^*L^{-*} = L^{-1}MD.$$

Na lijevoj strani imamo produkt gornjih trokutastih matrica, a na desnoj donjih, pa su ti produkti = dijagonalna matrica.

Matrice  $M$  i  $L$  imaju jedinice na dijagonali, pa usporedbom dijagonala izlazi da su obje strane baš jednake  $D$ . Koristeći regularnost od  $L$  i  $D$ , dobivamo

$$L^{-1}MD = D \implies MD = LD \implies M = L. \quad \blacksquare$$

# Faktorizacija Choleskog — standardni oblik

**Teorem** (Standardni oblik faktorizacije Choleskog). Za svaku hermitsku/simetričnu pozitivno definitnu matricu  $A$  postoji faktorizacija

$$A = R^* R,$$

gdje je  $R$  gornja trokutasta matrica. Ako fiksiramo da  $R$  ima (na pr.) pozitivnu dijagonalu, ova faktorizacija je jedinstvena.

**Dokaz.** Matrica  $A$  ima jedinstvenu  $LDL^*$  faktorizaciju (jedinstvenost slijedi iz jedinstvenosti LR faktorizacije).

Nadalje,  $D$  ima pozitivnu dijagonalu, pa se može rastaviti kao

$$D = \Delta \cdot \Delta = \Delta \cdot \Delta^*,$$

gdje je  $\Delta$  dijagonalna i  $\Delta_{ii} = \sqrt{D_{ii}} = \sqrt{r_{ii}} > 0$  (+ predznak).

## Faktorizacija Choleskog — standardni oblik

Tada  $LDL^*$  faktorizaciju od  $A$  možemo napisati u obliku

$$A = LDL^* = (L\Delta)(\Delta L^*) = (L\Delta)(\Delta^*L^*) = (L\Delta)(L\Delta)^*.$$

Uz oznaku  $R := (L\Delta)^*$  dobivamo faktorizaciju Choleskog

$$A = R^*R. \quad \blacksquare$$

**Napomena.** Mnogi slovom  $L$  označavaju matricu  $L := L\Delta$ , pa se u literaturi faktorizacija Choleskog može naći napisana kao

$$A = LL^*.$$

**Oprez:** Ovaj “novi”  $L$  više nema jedinice na dijagonali!

Kad znamo da postoji, faktorizacija Choleskog se može i direktno izvesti (slično kao LR), znajući da je  $A = R^*R$ .

# Algoritam

Ograničimo se na **realni** slučaj. Iz  $A = R^T R$ , za **gornji** trokut od  $A$ , slijedi

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i r_{ki} r_{kj}, \quad i \leq j,$$

pa dobivamo sljedeću **rekurziju** za elemente:

za  $j = 1, \dots, n$  :

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right), \quad i = 1, \dots, j-1,$$

$$r_{jj} = \left( a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj}^2 \right)^{1/2}.$$

U prvom koraku, za  $j = 1$ , računamo samo  $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$ .



# Algoritam

Zbog grešaka **zaokruživanja**, pod **korijenom** možemo dobiti

● **negativan** izraz ili **nulu**  $\implies$  nužna provjera!

## Faktorizacija Choleskog

```
za j = 1 do n radi {
    /* Nađi j-ti stupac od R */
    /* Supstitucija unaprijed iznad dijagonale */
    za i = 1 do j - 1 radi {
        sum = A[i, j];
        za k = 1 do i - 1 radi {
            sum = sum - R[k, i] * R[k, j];
        }
        R[i, j] = sum / R[i, i];
    }
}
```

# Algoritam

```
    /* Dijagonalni element */
sum = A[j, j];
za k = 1 do j - 1 radi {
    sum = sum - R[k, j]**2;    /* ** <=> pow */
}
    /* Provjera prije korijena */
ako je sum > 0.0 onda {
    R[j, j] = sqrt(sum);
}
inače
    /* Matrica nije pozitivno definitna, STOP */
}
```

Napomena. Za simetričnu matricu  $A$ , test  $\text{sum} > 0.0$  ekvivalentan je provjeri pozitivne definitnosti od  $A$ .

## Komentar na algoritam, složenost

Ovo je tzv. *jik* varijanta algoritma, a naziv dolazi od **poretka petlji** (izvana, prema unutra), uz prirodno imenovanje indeksa.

- Ovdje se matrica  $R$  generira **stupac po stupac** (Fortran),
- dok se, u LR faktorizaciji, matrica  $R$  generirala **redak po redak**, a  $L$  **stupac po stupac**.

To **nije** jedina varijanta za realizaciju algoritma (v. iza).

Za **složenost algoritma** = broj aritmetičkih operacija, izlazi

$$OP(n) \sim \frac{1}{3} n^3,$$

što je, približno, **polovina** složenosti LR faktorizacije. Razlog:

- računamo samo **jednu** trokutastu matricu, a ne **dvije**.

# Algoritam — *ijk* varijanta (račun “na ruke”, C)

Zamjenom indeksa  $i$ ,  $j$  dobivamo tzv. *ijk* varijantu algoritma:

za  $i = 1, \dots, n$ :

$$r_{ii} = \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2 \right)^{1/2},$$

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right), \quad j = i + 1, \dots, n.$$

Tu se  $R$  računa **redak po redak**, a za  $i = n$  računamo samo  $r_{nn}$ .

Kad imamo faktorizaciju Choleskog  $A = R^T R$ , onda se rješenje sustava  $Ax = b$  svodi na rješavanje **dva trokutasta** sustava

$$R^T y = b, \quad Rx = y.$$

# Rješenje linearnog sustava

Ove sustave lako rješavamo:

🔴 sustav  $R^T y = b$  — supstitucijom unaprijed

$$y_1 = \frac{b_1}{r_{11}},$$

$$y_i = \frac{1}{r_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji} y_j \right), \quad i = 2, \dots, n,$$

🔴 sustav  $Rx = y$  — supstitucijom unatrag

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}},$$

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij} x_j \right), \quad i = n-1, \dots, 1.$$

# Alternativa za rješenje linearnog sustava

Za **razliku** od LR faktorizacije, ovdje

- u **obje** supstitucije imamo **dijeljenja** (**istim** brojevima).

U praksi se često koristi  $LDL^T$  oblik faktorizacije **Choleskog**.

**Prednosti** te varijante su:

- u algoritmu faktorizacije **nema** računanja **drugih korijena**;
- rješavaju se **tri** jednostavna linearna sustava

$$Lz = b, \quad Dy = z, \quad L^T x = y.$$

Srednji sustav  $Dy = z$  treba samo  $n$  **dijeljenja**.

- $L$  ima **jediničnu** dijagonalu, pa **štedimo**  $n$  **dijeljenja**.

# Pivotiranje u faktorizaciji Choleskog

I kod faktorizacije **Choleskog** možemo koristiti **pivotiranje**. Međutim, da bismo **očuvali simetriju** radne matrice,

- **pivotiranje** mora biti “**simetrično**”, tj.
- radimo **istovremene** zamjene **redaka** i **stupaca** u  $A$

$$A \mapsto P^T A P,$$

gdje je  $P$  matrica permutacije,

- $\Rightarrow$  **dijagonalni** element zamjenjuje mjesto s **dijagonalnim**.

Matrica  $P^T A P$  je opet **hermitska/simetrična** i, što je ključno,

- ostaje **pozitivno definitna** (dokažite to)!

**Posljedica.** Sve glavne podmatrice od  $A$  (a ne samo **vodeće**) imaju **pozitivnu** determinantu.

# Dijagonalno pivotiranje u faktORIZACIJI Choleskog

Standardno se koristi tzv. **dijagonalno** pivotiranje:

u  $k$ -tom koraku faktORIZACIJE, izbor pivotnog elementa je

$$a_{rr}^{(k)} = \max_{k \leq i \leq n} a_{ii}^{(k)}.$$

To odgovara **potpunom** pivotiranju u LR faktORIZACIJI ili GE. Naime, **najveći** elementi u  $A^{(k)}$  su sigurno na **dijagonali**.

**Dokaz.** Gledamo **bilo koju** glavnu podmatricu  $A_2$ , reda 2, u  $A$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ \bar{a}_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix}.$$

Iz  $\det(A_2) > 0$  slijedi  $a_{ii}a_{jj} > |a_{ij}|^2$ , pa je bar **jedan** od **dijagonalnih** elemenata **veći** od  $|a_{ij}|$ . Isto vrijedi za sve  $A^{(k)}$ . ■



# Dijagonalno pivotiranje u faktORIZACIJI Choleskog

Ovim postupkom dobivamo faktORIZACIJU Choleskog

$$P^T A P = R^T R,$$

u kojoj za elemente matrice  $R$  vrijedi

$$r_{kk}^2 \geq \sum_{i=k}^j r_{ij}^2, \quad j = k + 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Desna strana = elementi  $j$ -tog stupca, od  $k$ -tog do dijagonale. Posebno, to znači da  $R$  ima nerastuću dijagonalu

$$r_{11} \geq \dots \geq r_{nn} > 0.$$

Isto je u QR faktORIZACIJI s pivotiranjem stupaca (v. kasnije).

Nažalost, kod Hilbertove matrice, ni to ne pomaže! Probajte!

# Može li $LDL^T$ za bilo koje simetrične matrice?

Pitanje. Može li se  $LDL^T$  faktorizacija napraviti za bilo koju simetričnu matricu  $A = A^T$  — općenito, indefinitnu,

uz dozvolu da matrica  $D$  ima i negativne elemente?

To ne vrijedi! Kontraprimjer je tzv. elementarna indefinitna matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pomaže li simetrična permutacija redaka i stupaca? Opet, ne!

Pravo poopćenje na indefinitne matrice dobivamo tako da

dozvolimo dijagonalne blokove reda 2 u matrici  $D$ .

Faktorizacija: Bunch–Parlett ili Bunch–Kaufman–Parlett (razlike su u pivotiranju). Slično ide za  $A = -A^T$  (Bunch).

# Aproksimacija i interpolacija

# Općenito o problemu aproksimacije

Što je problem **aproksimacije**?

**Poznate** su **neke** informacije o funkciji  $f$ , definiranoj na nekom podskupu  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

Na osnovu tih **informacija**, želimo funkciju  $f$

- **zamijeniti** nekom **drugom** funkcijom  $\varphi$  na istom skupu  $X$ , ili na još **većem** skupu,
- tako da su funkcije  $f$  i  $\varphi$  **bliske** u nekom **smislu**.

Skup  $X$  je najčešće:

- **interval** oblika  $[a, b]$  (koji može biti i **neograničen**), ili
- **diskretni skup** točaka.

**Pitanje**: Zašto uopće želimo **zamjenu**  $f \mapsto \varphi$ ?

# Oblici problema aproksimacije

Problem aproksimacije javlja se u dva bitno različita oblika.

Prvi oblik: Znamo funkciju  $f$  (analitički ili slično),

ali je njezina forma prekomplikirana za računanje.

U tom slučaju,

izaberemo neke informacije o  $f$  i

po nekom kriteriju odredimo aproksimacijsku funkciju  $\varphi$ .

Prednosti ovog oblika problema aproksimacije:

Možemo birati informacije o  $f$  koje ćemo koristiti.

Jednako tako, možemo ocijeniti grešku dobivene aproksimacije  $\varphi$ , obzirom na prave vrijednosti funkcije  $f$ .

# Oblici problema aproksimacije (nastavak)

Drugi oblik: Ne znamo funkciju  $f$ ,

- već samo neke informacije o njoj,
- na primjer, vrijednosti na nekom (diskretnom) skupu točaka.

Zamjenska funkcija  $\varphi$  određuje se iz raspoloživih informacija.

- Osim samih podataka (poznate vrijednosti),
- ove informacije mogu uključivati i očekivani oblik ponašanja tih podataka, tj. oblik funkcije  $\varphi$ .

Mane ovog oblika problema aproksimacije:

- Ne može se napraviti ocjena pogreške,
- bez dodatnih informacija o nepoznatoj funkciji  $f$ .

# Prvi oblik problema — primjene

Prvi oblik se obično koristi u teoriji

- za razvoj numeričkih metoda na bazi aproksimacije.

Na primjer, za numeričko

- integriranje funkcija (integriramo aproksimaciju),
- rješavanje diferencijalnih jednačbi.

Praktični primjer:

- programska biblioteka za računanje raznih elementarnih funkcija (`exp`, `sin`, `cos`, `sqrt` i sl),

Traži se maksimalna brzina i puna točnost, na razini osnovne greške zaokruživanja.

Realizacija standardno ide racionalnim aproksimacijama.

## Drugi oblik problema — primjene

Drugi oblik problema se vrlo često javlja u praksi.

Na primjer,

- kod mjerenja nekih veličina (rezultat je “tablica”),
- osim izmjerenih podataka, pokušavamo aproksimirati i podatke koji se nalaze “između” izmjerenih točaka.

To je ključna svrha ovakve aproksimacije!

Napomena. Kod mjerenja se javljaju i greške mjerenja.

- Zato postoje posebne tehnike — vrste aproksimacija, za “ublažavanje” tako nastalih grešaka.

Na primjer, metoda najmanjih kvadrata.



# Izbor aproksimacijske funkcije $\varphi$

Aproksimacijska funkcija  $\varphi$  bira se

- prema **prirodi modela** — izbor dolazi iz **problema**,
- ali tako da bude relativno **jednostavna** za **računanje**.

Obično se **prvo fiksira** (izabere) neki **skup** funkcija  $\mathcal{F}$ .

- **Onda** se traži “**najbolja**” aproksimacija  $\varphi$  iz tog skupa  $\mathcal{F}$ .

Skup  $\mathcal{F}$  može biti **vektorski prostor**, ali ne mora.

Za **praktično** računanje, funkcija  $\varphi$  obično ovisi

- o nekom **konačnom** broju **parametara**  $a_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ ,
- koje treba **odrediti** po nekom **kriteriju** aproksimacije.

**Ideja:** **Sve moguće** vrijednosti ovih  $m + 1$  parametara određuju skup **svih** “**dozvoljenih**” funkcija  $\mathcal{F}$ .

# Parametrizacija aproksimacijske funkcije $\varphi$

Kad funkciju  $\varphi$  zapišemo u obliku

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

kao funkciju koja ovisi i o parametrima  $a_k$ , onda kažemo

- da smo izabrali opći oblik aproksimacijske funkcije  $\varphi$  (u odnosu na skup  $\mathcal{F}$  — na primjer, izborom baze u  $\mathcal{F}$ ).

Prema obliku ovisnosti o parametrima, aproksimacijske funkcije možemo grubo podijeliti na:

- linearne aproksimacijske funkcije,
- nelinearne aproksimacijske funkcije.

Koje su bitne razlike između ove dvije grupe?

# Linearne aproksimacijske funkcije

Opći oblik **linearne** aproksimacijske funkcije je

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

gdje su  $\varphi_0, \dots, \varphi_m$  **poznate** funkcije koje **znamo** računati.

Linearnost u **ovisnosti** o parametrima znači:

- traženi parametri su **koeficijenti** u **linearnoj kombinaciji poznatih** funkcija.

Velika **prednost**: **Određivanje** parametara  $a_k$  obično vodi na “**linearne**” probleme (koji su **lakše** rješivi od **nelinearnih**):

- **sustave linearnih** jednažbi, ili
- **linearne** probleme **optimizacije**.

# Linearne aproksimacijske funkcije (nastavak)

Standardni model za linearni oblik aproksimacije:

- skup “dozvoljenih” funkcija  $\mathcal{F}$  je vektorski prostor, a
- funkcije  $\varphi_0, \dots, \varphi_m$  su neka baza u tom prostoru.

Unaprijed se bira (fiksira):

- vektorski prostor  $\mathcal{F}$ , odgovarajuće dimenzije  $m + 1$ ,
- baza  $\varphi_0, \dots, \varphi_m$  u  $\mathcal{F}$ .

Napomena. Kod približnog numeričkog računanja,

- “dobar” izbor baze je ključan za stabilnost postupka
- i točnost izračunatih vrijednosti parametara aproksimacijske funkcije  $\varphi$ .

## Primjer 1 — polinomi

Nekoliko **primjera** najčešće korištenih **vektorskih** prostora  $\mathcal{F}$ .

**Polinomi.** Uzimamo  $\mathcal{F} = \mathcal{P}_m$ , gdje je  $\mathcal{P}_m$  vektorski prostor polinoma stupnja  $\leq m$  (dimenzija tog prostora je  $m + 1$ ).

**Standardni** izbor baze je  $\varphi_k(x) = x^k$ , za  $k = 0, \dots, m$ , tj.

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$$

**Nije** nužno da  $\varphi$  zapišemo u bazi potencija  $\{1, x, \dots, x^m\}$ .  
Upravo **suprotno**, vrlo često je neka druga baza **bitno bolja**.

- Na primjer,  $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots\}$ , gdje su  $x_0, x_1, \dots$  **zadane** točke (v. kod interpolacije).
- **Ortogonalni** polinomi, obzirom na **pogodno** izabrani **skalarni produkt** (v. kod najmanjih kvadrata).

## Primjer 2 — trigonometrijski polinomi

Trigonometrijski “polinomi”. Za funkcije  $\varphi_k$  uzima se prvih  $m + 1$  funkcija iz skupa

$$\{ 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \}.$$

Koriste se za aproksimaciju **periodičkih** funkcija na intervalu **perioda** — ovdje, recimo, na  $[0, 2\pi]$ .


● **Primjena** je, na primjer, u **obradi i modeliranju signala**.

Varijacije u izboru **baze**:

● Koristi se **dodatni faktor** u argumentu **sinusa i kosinusa** ( $x \mapsto \lambda x$ ) — koji služi za **kontrolu perioda**.

● Ponekad se biraju **samo parne** ili **samo neparne** funkcije iz ovog skupa.

## Primjer 3 — polinomni splajnovi

**Polinomni splajnovi.** To su funkcije koje su “po dijelovima” **polinomi**. Ako su zadane točke  $x_0 < \dots < x_n$ , onda se **splajn** funkcija  $\varphi$ , na svakom **podintervalu** između susjednih točaka,  svodi na **polinom** određenog fiksnog (**niskog**) stupnja, tj.

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

a  $p_k$  su **polinomi** — najčešće, stupnjeva 1, 2, 3 ili 5.

U točkama  $x_i$  obično se zahtijeva da funkcija  $\varphi$  zadovoljava još

 i “**uvjete ljepljenja**” vrijednosti **funkcije** i nekih njezinih **derivacija**, ili nekih **aproksimacija** za te **derivacije**.

Splajnovi se često koriste zbog dobrih **ocjena greške** aproksimacije i **kontrole oblika** aproksimacijske funkcije.

# Nelinearne aproksimacijske funkcije

Nelinearne aproksimacijske funkcije  $\varphi$

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

imaju nelinearnu ovisnost o parametrima aproksimacijske funkcije  $a_0, \dots, a_m$ .

Pripadni skup “dozvoljenih” funkcija  $\mathcal{F}$  najčešće

● nije vektorski prostor.

Određivanje parametara  $a_k$ , općenito, vodi na “nelinearne” probleme:

● sustave nelinearnih jednažbi, ili

● nelinearne probleme optimizacije.



## Primjer 4 — eksponencijalne funkcije

Par primjera najčešće korištenih oblika nelinearnih aproksimacijskih funkcija.

**Eksponencijalne aproksimacije.** Imaju oblik linearne kombinacije eksponencijalnih funkcija s parametrima u eksponentu:

$$\varphi(x) = c_0 e^{b_0 x} + c_1 e^{b_1 x} + \dots + c_r e^{b_r x},$$

Broj nezavisnih parametara je  $m + 1 = 2r + 2$ .

Opisuju, na primjer,

- procese rasta i odumiranja u raznim populacijama,
- s primjenom u biologiji, ekonomiji i medicini.

## Primjer 5 — racionalne funkcije

Racionalne funkcije. Imaju opći oblik

$$\varphi(x) = \frac{b_0 + b_1x + \cdots + b_r x^r}{c_0 + c_1x + \cdots + c_s x^s},$$

i  $m + 1 = r + s + 1$  nezavisnih parametara, a ne  $r + s + 2$ , kako formalno piše.

Objašnjenje. Razlomci se mogu proširivati,

- ako su  $b_i, c_i$  parametri, onda su to i  $tb_i, tc_i$ , za  $t \neq 0$ ;
- uvijek možemo fiksirati jedan od koeficijenata  $b_i$  ili  $c_i$ , a koji je to — obično slijedi iz prirode modela.

Ovako definirane racionalne funkcije imaju mnogo bolja svojstva aproksimacije nego polinomi, a pripadna teorija je relativno nova.

# Kriteriji aproksimacije — interpolacija

**Interpolacija** je zahtjev da se funkcije  $f$  i  $\varphi$  **podudaraju** na nekom **konačnom skupu točaka**.

- Te točke nazivamo **čvorovima interpolacije**.
- Zahtjevu se može, ali i ne mora, **dodati** zahtjev da se u čvorovima, **osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti nekih derivacija**.

U **najjednostavnijem** obliku interpolacije, kad se podudaraju samo funkcijske vrijednosti, od podataka o funkciji  $f$

- koristi se **samo informacija** o njezinoj vrijednosti na skupu od  $n + 1$  točaka,
- tj. podaci  $(x_k, f_k)$ , gdje je  $f_k := f(x_k)$ , za  $k = 0, \dots, n$ .

# Kriteriji aproksimacije — interpolacija

Kod **interpolacije** zadanih vrijednosti

- broj **parametara** interpolacijske funkcije **mora biti jednak** broju zadanih **podataka**, tj. **mora biti**  $m = n$ .

Prijevod: “broj stupnjeva slobode” = “broj uvjeta”.

- Parametri  $a_0, \dots, a_n$  određuju se iz uvjeta interpolacije

$$\varphi(x_k; a_0, a_1, \dots, a_n) = f_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

što je, općenito, **nelinearni** sustav jednažbi.

- **Linearnost** funkcije  $\varphi$  povlači da parametre  $a_k$  dobivamo iz sustava **linearnih jednažbi**
  - koji ima **točno**  $n + 1$  jednažbi za  $n + 1$  nepoznanica. Matrica tog sustava je **kvadratna**.

# Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Minimizacija pogreške je drugi kriterij određivanja parametara aproksimacije. Funkcija  $\varphi$  bira se tako da se minimizira neka odabrana norma  $\| \cdot \|$  funkcije pogreške

$$e(x) = f(x) - \varphi(x),$$

u nekom odabranom prostoru funkcija  $\mathcal{F}$  za  $\varphi$ , na nekoj domeni  $X$ .

Ove aproksimacije, često zvane i najbolje aproksimacije po normi, dijele se na

- diskretne — ako se  $\|e\|$  minimizira na diskretnom skupu podataka  $X$  (to znači da je  $X$  konačan ili prebrojiv);
- kontinuirane — ako se  $\|e\|$  minimizira na kontinuiranom skupu podataka  $X$ .

# Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Standardno se kao **norme pogreške** koriste

- 2-norma i
- $\infty$ -norma.

Za 2-normu,

- pripadna se aproksimacija zove **srednjekvadratna**,
- a **metoda** za njezino nalaženje zove se **metoda najmanjih kvadrata**.

Funkcija  $\varphi$ , odnosno njezini **parametri**, traže se tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2.$$

# Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

U diskretnom slučaju, za  $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ , dobivamo

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (f(x_k) - \varphi(x_k))^2} \rightarrow \min,$$

a u kontinuiranom slučaju, za  $X = [a, b]$ , dobivamo

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx} \rightarrow \min.$$

Preciznije, minimizira se samo ono pod korijenom, pa odatle naziv “najmanji kvadrati”.

# Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

U slučaju  $\infty$ -norme, pripadna se aproksimacija zove **minimaks aproksimacija**, a parametri se biraju tako da se nađe

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_{\infty}.$$

• U **diskretnom** slučaju, za  $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ , traži se

$$\max_{k=0, \dots, n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \rightarrow \min,$$

• a u **kontinuiranom** slučaju, za  $X = [a, b]$ , traži se

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \rightarrow \min.$$

Naziv “**minimaks**” dolazi od **minimizacije maksimuma**.



# Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Ovaj je tip aproksimacija **poželjniji** od srednjkvadratnih,

- jer se traži da **maksimalna greška** bude **minimalna**,
- ali ih je, općenito, **mного teže izračunati** (na primjer, dobivamo problem minimizacije **nederivabilne** funkcije!).

**Za znatiželjne:** U praksi — **norme**, pored funkcije, mogu uključivati i **neke njezine derivacije**. Primjer takve norme je

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b [(f(x))^2 + (f'(x))^2] dx},$$

na prostoru  $C^1[a, b]$  — svih funkcija koje imaju **neprekidnu prvu derivaciju** na  $[a, b]$ .

# Ključni problemi kod aproksimacije

Matematički problemi koje treba riješiti:

- egzistencija i jedinstvenost rješenja problema aproksimacije, što ovisi o tome
  - koje funkcije  $f$  aproksimiramo kojim funkcijama  $\varphi$  (dva prostora)
  - i kako mjerimo grešku  $e$  (norma);
- analiza kvalitete dobivene aproksimacije — vrijednost “najmanje” pogreške i ponašanje funkcije greške  $e$  (jer norma je ipak samo jedan broj),
- konstrukcija algoritama za računanje najbolje aproksimacije.

# Veza aproksimacije i interpolacije — diskretno

U diskretnom slučaju,

- problem interpolacije na konačnom skupu točaka  $X$  (točke iz  $X$  su čvorovi interpolacije),

možemo smatrati specijalnim, ali posebno važnim slučajem

- aproksimacije po normi na skupu  $X$ , uz neku od
- standardnih normi na konačnodimenzionalnim prostorima (ovisi o tome odakle bирамо  $\varphi$ ).

Posebnost: uz minimizaciju norme pogreške  $\|e\| \rightarrow \min$ , dodatno tražimo da je

- minimum norme pogreške jednak nuli, tj.  $\min \|e\| = 0$ , što je onda ekvivalentno odgovarajućim uvjetima interpolacije.

# Veza aproksimacije i interpolacije — primjer

Primjer. Neka je  $X = \{x_0, \dots, x_n\}$  i tražimo aproksimacijsku funkciju  $\varphi$

• u prostoru  $\mathcal{P}_n$  svih polinoma stupnja najviše baš  $n$ .

Kao kriterij aproksimacije uzmimo neku  $p$ -normu ( $1 \leq p \leq \infty$ )

• vektora  $e$  grešaka funkcijskih vrijednosti na skupu  $X$ .

Za  $1 \leq p < \infty$ , zahtjev je

$$\|e\|_p = \|f - \varphi\|_p = \left( \sum_{k=0}^n |f(x_k) - \varphi(x_k)|^p \right)^{1/p} \rightarrow \min.$$

Za  $p = \infty$ , tražimo

$$\|e\|_\infty = \|f - \varphi\|_\infty = \max_{k=0, \dots, n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \rightarrow \min.$$

## Veza aproksimacije i interpolacije — primjer

Očito je  $\|e\|_p = 0$  ekvivalentno uvjetima interpolacije

$$f(x_k) = \varphi(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Međutim, nije jasno može li se to postići, tj.

- postoji li takva aproksimacijska funkcija  $\varphi \in \mathcal{P}_n$
  - za koju je minimum norme greške jednak nuli,
- tako da je  $\varphi$  i interpolacijska funkcija.

U nastavku, pokazat ćemo da je odgovor potvrđan za ovaj primjer. Razlog:

- Prostor  $\mathcal{P}_n$ , u kojem tražimo aproksimaciju, ima taman dovoljno veliku dimenziju.

# Interpolacija polinomima

# Interpolacija polinomima

Neka je funkcija  $f$  zadana na

- diskretnom skupu međusobno različitih točaka (čvorova)  $x_k$ , za  $k = 0, \dots, n$ , tj. vrijedi  $x_i \neq x_j$  za  $i \neq j$ .
- Poznate funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s  $f_k = f(x_k)$ .

**Komentar.** Kad bismo dozvolili da je  $x_i = x_j$ , za neke  $i \neq j$ ,

- ili  $f$  nije funkcija (ako je  $f_i \neq f_j$ ),
- ili imamo redundantan podatak (ako je  $f_i = f_j$ ).

Ako je  $[a, b]$  segment, u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

ali to ovdje nije bitno.

# Egzistencija i jedinstvenost

Pitanja.

- Uz koje uvjete postoji interpolacijski polinom?
- Je li jedinstven?

Odgovor daje sljedeći teorem.

**Teorem.** Neka je  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Za zadane točke  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , gdje je  $x_i \neq x_j$  za  $i \neq j$ , postoji jedinstveni interpolacijski polinom  $\varphi \in \mathcal{P}_n$ , stupnja najviše  $n$ ,

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

za kojeg vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

**Uočiti:** čvorovi moraju biti različiti, a  $f_k$  mogu biti bilo kakvi!



# Egzistencija i jedinstvenost

Dokaz. Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

polinom stupnja najviše  $n$ . Uvjete interpolacije napišimo u obliku **linearnog sustava** s nepoznicama  $a_0, \dots, a_n$ ,

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = f_n.$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava **regularna**, pa sustav **ima jedinstveno rješenje**, ako i samo ako su čvorovi **različiti**.

# Egzistencija i jedinstvenost

Provjeru **regularnosti** napraviti ćemo računanjem vrijednosti **determinante**.

Pripadna determinanta je tzv. **Vandermondeova determinanta**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} .$$

## Egzistencija i jedinstvenost

Definiramo determinantu koja “naliči” na  $D_n$ , samo umjesto čvora  $x_n$ , stavimo da je **posljednji redak** u  $V_n(x)$  funkcija od  $x$ :

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ \mathbf{1} & \mathbf{x} & \mathbf{x^2} & \cdots & \mathbf{x^n} \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$D_n = V_n(x_n).$$

Promatrajmo  $V_n(x)$  kao **funkciju** varijable  $x$ .

# Egzistencija i jedinstvenost

Razvojem po posljednjem retku uočavamo da je

- $V_n(x)$  polinom stupnja najviše  $n$  u varijabli  $x$ ,
- koeficijent tog polinoma uz  $x^n$  je determinanta  $D_{n-1}$  (“križanje” zadnjeg retka i stupca u  $V_n(x)$ ).

Ako u determinantu  $V_n(x)$ , redom, uvrštavamo  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ,

- determinanta  $V_n(x_k)$ , za  $k = 0, \dots, n - 1$ , ima dva jednaka retka,

pa je

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \dots = V_n(x_{n-1}) = 0,$$

tj. točke  $x_0, \dots, x_{n-1}$  su nultočke polinoma  $V_n(x)$  stupnja  $n$ .

# Egzistencija i jedinstvenost

Za polinom  $V_n(x)$ , stupnja  $n$ , znamo

• vodeći koeficijent —  $D_{n-1}$ ,

• sve nultočke —  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ,

pa  $V_n(x)$  možemo napisati kao produkt

$$V_n(x) = D_{n-1} (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Uvrštavanjem  $x = x_n$ , dobivamo rekurzivnu relaciju za  $D_n$

$$D_n = D_{n-1} (x_n - x_0) (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Odmah vidimo da je  $D_0 = 1$  (lijevi gornji kut!), pa indukcijom slijedi

$$D_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

# Egzistencija i jedinstvenost

Budući da je  $x_i \neq x_j$ , za  $i \neq j$ , onda je

$$D_n \neq 0,$$

a vrijedi i obrat. Matrica linearnog sustava je **regularna**, pa

- postoji **jedinstveno** rješenje  $a_0, \dots, a_n$  za koeficijente polinoma  $p_n$  u standardnoj bazi potencija.

Iz jedinstvenosti prikaza u bazi slijedi da **postoji jedinstveni** interpolacijski polinom  $p_n \in \mathcal{P}_n$  za zadane podatke. ■

**Napomena.** Nadalje ćemo se baviti

- **raznim formama** interpolacijskog polinoma,
- koje će **uvijek** predstavljati **isti** interpolacijski polinom, samo **zapisan** u **raznim bazama**.

## Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma  $\mathcal{P}_n$  izaberemo neku bazu  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ , onda interpolacijski polinom  $p_n$  možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente  $a_0, \dots, a_n$  ima oblik

$$p_n(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \dots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \dots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \dots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n.$$

Pitanje. Može li se relativno jednostavno pronaći baza  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  za koju je matrica ovog sustava jedinična matrica?

# Izbor baze za interpolaciju



## Primjer

**Primjer.** Rješavanjem linearnog sustava za koeficijente, nađite interpolacijski polinom  $p_{40}$  stupnja 40 koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin x,$$

na ekvidistantnoj mreži čvorova  $x_i = i \frac{\pi}{2}$ , na intervalu  $[0, 20\pi]$ .

Vandermondeov linearni sustav je katastrofalno uvjetovan,

$$\kappa_2 \approx 5.027 \cdot 10^{82},$$

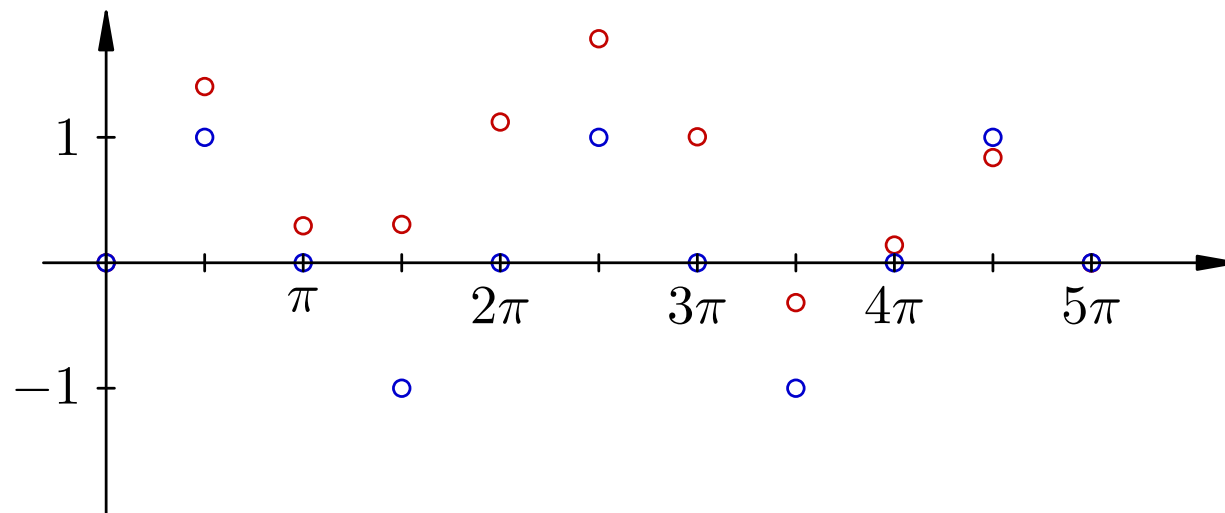
pa se očekuju velike greške u rješenju.

Kad izračunamo vrijednost u čvorovima interpolacije, greške su tolike da interpolacijski polinom ne interpolira zadane podatke — dakle, ni izračunati rezidual više nije malen.

## Primjer (nastavak)

Legenda. Slika prikazuje samo dio podataka do  $5\pi$ . Oznake:

- plavi kružići = zadane vrijednosti funkcije  $\sin$ ,
- crveni kružići = izračunate vrijednosti polinoma  $p_{40}$  u čvorovima interpolacije.



Zaključak. Treba naći **brži** način računanja (ovo traje  $O(n^3)$ ), koji u **čvorovima** daje grešku 0.

# Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Pogledajmo **uvjetovanost** Vandermondeovih matrica za neke standardne izbore **mreža čvorova**, u ovisnosti o **broju** čvorova.

**Oznaka:** Za zadani  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  promatramo **mrežu** s  $n + 1$  **čvorova**

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad x_0^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}.$$

Pripadnu **Vandermondeovu matricu** reda  $n + 1$  označavamo s

$$V^{(n+1)} = V^{(n+1)}(x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}),$$

a njezini elementi su

$$(V^{(n+1)})_{ij} = \left(x_{i-1}^{(n)}\right)^{j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n + 1.$$

# Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 1. Ekvidistantna mreža s  $n$  podintervala na segmentu  $[-1, 1]$ ,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \dots, n.$$

$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^0$	8	$1.605 \cdot 10^3$	25	$2.131 \cdot 10^{11}$	60	$2.253 \cdot 10^{28}$
2	$3.226 \cdot 10^0$	10	$1.395 \cdot 10^4$	30	$5.642 \cdot 10^{13}$	70	$1.722 \cdot 10^{33}$
3	$8.012 \cdot 10^0$	12	$1.234 \cdot 10^5$	35	$1.496 \cdot 10^{16}$	80	$1.329 \cdot 10^{38}$
4	$2.353 \cdot 10^1$	14	$1.105 \cdot 10^6$	40	$4.044 \cdot 10^{18}$	90	$1.033 \cdot 10^{43}$
5	$6.383 \cdot 10^1$	16	$9.983 \cdot 10^6$	45	$1.093 \cdot 10^{21}$	100	$8.083 \cdot 10^{47}$
6	$1.898 \cdot 10^2$	18	$9.085 \cdot 10^7$	50	$2.989 \cdot 10^{23}$		
7	$5.354 \cdot 10^2$	20	$8.314 \cdot 10^8$				

# Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 2. Ekvidistantna mreža s  $n$  podintervala na segmentu  $[0, 1]$ ,

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$2.618 \cdot 10^0$	8	$2.009 \cdot 10^6$	25	$2.628 \cdot 10^{21}$	60	$7.018 \cdot 10^{52}$
2	$1.510 \cdot 10^1$	10	$1.156 \cdot 10^8$	30	$7.896 \cdot 10^{25}$	70	$6.998 \cdot 10^{61}$
3	$9.887 \cdot 10^1$	12	$6.781 \cdot 10^9$	35	$2.404 \cdot 10^{30}$	80	$7.048 \cdot 10^{70}$
4	$6.864 \cdot 10^2$	14	$4.032 \cdot 10^{11}$	40	$7.391 \cdot 10^{34}$	90	$7.151 \cdot 10^{79}$
5	$4.924 \cdot 10^3$	16	$2.421 \cdot 10^{13}$	45	$2.289 \cdot 10^{39}$	100	ne ide
6	$3.606 \cdot 10^4$	18	$1.465 \cdot 10^{15}$	50	$7.132 \cdot 10^{43}$		
7	$2.678 \cdot 10^5$	20	$8.920 \cdot 10^{16}$				

# Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 3. Neekvidistantna “harmonijska” mreža s  $n$  podintervala na segmentu  $[0, 1]$ ,

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	$n$	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$6.342 \cdot 10^0$	8	$4.650 \cdot 10^9$	25	$9.112 \cdot 10^{39}$
2	$5.965 \cdot 10^1$	10	$6.033 \cdot 10^{12}$	30	$1.037 \cdot 10^{50}$
3	$7.532 \cdot 10^2$	12	$1.129 \cdot 10^{16}$	35	$2.649 \cdot 10^{60}$
4	$1.217 \cdot 10^4$	14	$2.878 \cdot 10^{19}$	40	$1.356 \cdot 10^{71}$
5	$2.404 \cdot 10^5$	16	$9.586 \cdot 10^{22}$	45	$1.277 \cdot 10^{82}$
6	$5.620 \cdot 10^6$	18	$4.041 \cdot 10^{26}$	50	$2.071 \cdot 10^{93}$
7	$1.518 \cdot 10^8$	20	$2.102 \cdot 10^{30}$		

# Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Za dani  $n$ , čvorovi “harmonijske” mreže su, redom,

$$x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2}, \quad x_n^{(n)} = \frac{1}{1},$$

pa zato i naziv “harmonijska”. Prvi čvor teži prema 0, kad  $n \rightarrow \infty$ .

Može se pokazati da je

$$\kappa_2(V^{(n+1)}) > (n+1)^{n+1}.$$

## “Dobre” Vandermondeove matrice

**Primjer 4.** Postoje i “dobre” mreže čvorova za interpolaciju, ali njih treba tražiti u  $\mathbb{C}$ , a ne u  $\mathbb{R}$ .

**Najvažniji** primjer u praksi su **kompleksni** korijeni iz **jedinice** (promjena indeksa  $i \rightarrow k$ , jer je  $i$  imaginarna jedinica),

$$x_k^{(n)} = e^{2\pi ki/(n+1)} = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n.$$

**Vandermondeova** matrica je skalarni višekratnik **unitarne** matrice  $U^{(n+1)}$

$$V^{(n+1)} = \sqrt{n+1} \cdot U^{(n+1)},$$

a za njezinu uvjetovanost vrijedi  $\kappa_2(V^{(n+1)}) = 1$ .

Ovo je **podloga** za tzv. **brzu Fourierovu transformaciju** (FFT), “**najkorisniji**” algoritam u povijesti!



# Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

# Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, **nije potrebno** (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom  $p_n$  treba zapisati u nekoj **drugoj** bazi.

Po definiciji, **Lagrangeova baza**  $\{\ell_k, k = 0, \dots, n\}$  u prostoru polinoma  $\mathcal{P}_n$  je **ona** baza za koju je

- matrica sustava za interpolaciju baš **jedinična** matrica, tj.
- za **koeficijente** interpolacijskog polinoma vrijedi  $a_k = f_k$ .

Dakle, **Lagrangeov** oblik interpolacijskog polinoma  $p_n$  je

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x).$$

Koeficijenti su **zadani podaci**  $f_k$ , a problem je **izračunati bazu!**

# Lagrangeova baza — kardinalna interpolacija

U Lagrangeovoj bazi, elementi matrice  $A$  sustava interpolacije su  $A_{ik} = \ell_k(x_i)$ , za  $i, k = 0, \dots, n$ . Iz uvjeta  $A = I$  dobivamo:

Polinomi  $\ell_k$  Lagrangeove baze su rješenja posebnih problema interpolacije

$$\ell_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases}$$

u kojima su desne strane (zadane vrijednosti) upravo jedinični vektori  $e_{k+1}$  standardne baze u  $\mathbb{R}^{n+1}$ , za  $k = 0, \dots, n$ .

Raniji teorem  $\implies$  postoje jedinstveni polinomi  $\ell_k \in \mathcal{P}_n$  koji zadovoljavaju ove — tzv. kardinalne uvjete interpolacije.

- Iz njih odmah slijedi da je  $\{\ell_k, k = 0, \dots, n\}$  baza u  $\mathcal{P}_n$  (katkad se zove i kardinalna baza). Dokažite to!

# Lagrangeova baza — eksplicitni oblik polinoma

Kardinalni uvjeti interpolacije za polinom  $\ell_k$

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases}$$

zadaju sve nultočke i još jednu vrijednost za  $\ell_k$ . Odavde slijedi

$$\begin{aligned} \ell_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Iz ovog oblika vidimo da je za računanje vrijednosti polinoma  $p_n(x)$  u Lagrangeovoj formi potrebno  $O(n^2)$  operacija.

# Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

To je ubrzanje obzirom na  $O(n^3)$  iz sustava, ali može još brže.

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

zovemo polinom čvorova.

Polinome  $l_k(x)$  Lagrangeove baze možemo napisati preko  $\omega(x)$ ,

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'_k(x_k)}.$$

Nadalje, derivacijom  $\omega$  kao produkta izlazi  $\omega'_k(x_k) = \omega'(x_k)$ , pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}.$$

# Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki  $x \neq x_k$ , za  $k = 0, \dots, n$  (za  $x = x_k$  znamo da je  $p_n(x_k) = f_k$ ). Broj operacija za svaku točku  $x$  je  $O(n)$ , tj. **linearan** u  $n$ .

Ipak, svrha **Lagrangeovog** oblika interpolacijskog polinoma

- **nije računanje** vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za **teoretske svrhe** (dokaze).

Ako znamo neke **informacije** o funkciji  $f$ , možemo napraviti i **ocjenu greške** interpolacijskog polinoma. **Razumno** u **praksi**:

- $f$  je “**malo više**” netrivialno **glatka** od polinoma  $p_n$ .

# Greška interpolacijskog polinoma

**Teorem.** Pretpostavimo da

- funkcija  $f$  ima  $(n + 1)$ -u derivaciju na segmentu  $[a, b]$  za neki  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;
- $x_k \in [a, b]$ ,  $k = 0, \dots, n$ , su međusobno **različiti čvorovi interpolacije**, tj.  $x_i \neq x_j$  za  $i \neq j$ ;
- $p_n$  je **interpolacijski polinom** za  $f$  u tim čvorovima.

Za **bilo koju** točku  $x \in [a, b]$ , **postoji** točka  $\xi$

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \dots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za **grešku** interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

# Greška interpolacijskog polinoma

Dokaz. 1. slučaj — ako je  $x = x_k$ , tj.  $x$  je čvor interpolacije.

Tada je  $e(x_k) = \omega(x_k) = 0$ , pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a  $\xi$  je proizvoljan. Dakle, tvrdnja vrijedi!

2. slučaj — pretpostavimo da  $x$  nije čvor interpolacije.

Tada je  $\omega(x) \neq 0$  i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je  $s(x)$  korektno definiran (broj), čim  $x$  nije čvor.

Fiksirajmo  $x$ , a zatim definiramo funkciju  $g = g_x$  u varijabli  $t$

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t) \frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$



## Greška interpolacijskog polinoma

Gledamo derivabilnost od  $g$  po  $t$ , s tim da su  $p_n$  i  $\omega$  polinomi.

Zaključci:

- funkcija pogreške  $e$  ima točno onoliko derivacija (po  $t$ ) koliko i  $f$ , i one su neprekidne kad su to i derivacije od  $f$ ;
- $x$  nije čvor, pa je  $g^{(n+1)}$  korektno definirana na  $[a, b]$ .

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija  $g$ . Ako za  $t$  uvrstimo čvor  $x_k$ , dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k) \frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima,  $g$  ima barem  $n + 2$  nultočke na  $[x_{\min}, x_{\max}]$ .

# Greška interpolacijskog polinoma

Sad iskoristimo da  $g^{(n+1)}$  postoji na  $[x_{\min}, x_{\max}] \subseteq [a, b]$ .

Zbog  $n \geq 0$ , funkcija  $g$  je derivabilna na  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , pa

- Rolleov teorem  $\implies g'$  ima barem  $n + 1$  nultočku unutar  $(x_{\min}, x_{\max})$ .

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$  ima barem  $n + 2 - j$  nultočaka na  $(x_{\min}, x_{\max})$ , za  $j = 0, \dots, n + 1$ ;
- Na kraju, za  $j = n + 1$  dobivamo da  $g^{(n+1)}$  ima bar jednu nultočku  $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$ .

Ova nultočka  $\xi$ , naravno, ovisi o  $x$ , isto kao i funkcija  $g$ .

Za kraj dokaza, treba izračunati  $g^{(n+1)}$  i uvrstiti nultočku  $\xi$ .

## Greška interpolacijskog polinoma

Znamo da su  $p_n$  i  $\omega$  polinomi odgovarajućih stupnjeva:

- $p_n$  je polinom stupnja **najviše**  $n$ , pa je  $p_n^{(n+1)} = 0$ ,
- $\omega$  je polinom stupnja **točno**  $n + 1$ .

Onda je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n + 1)!.$$

Uvrštavanjem ovih relacija u izraz za  $g^{(n+1)}(t)$ , dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t) \frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n + 1)! \frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

# Greška interpolacijskog polinoma

Kad uvažimo da je  $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ , onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno,

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Uočite sljedeće **bitne** stvari u tvrdnji i dokazu:

- Dovoljno je **samo** da  $f^{(n+1)}(x)$  **postoji**, za **svaki**  $x \in [a, b]$ , **bez daljnjih** zahtjeva (ograničenost, neprekidnost, i sl.).
- Faktor  $\omega(x)$  osigurava **poništavanje** greške u čvorovima. **Lijepi** oblik  $\Rightarrow$  treba  $n+1$ -a derivacija. Zato nam treba prijelaz na  $t$  i “trik” s  $x$ , kao **dodatnom** nultočkom za  $g$ .

Za drugačije glatkoće od  $f$  postoje tzv. **Jacksonovi teoremi**.

# Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Pojačanje tvrdnje.

- Ako je  $f^{(n+1)}$  ograničena na  $[a, b]$ , ili, jače,
- ako je  $f \in C^{n+1}[a, b]$ , tj.  $f$  ima neprekidnu  $(n + 1)$ -u derivaciju na  $[a, b]$ ,

onda vrijedi sljedeća “globalna” ocjena greške interpolacijskog polinoma  $p_n$  za funkciju  $f$ , u bilo kojoj točki  $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n + 1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz prošlog teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost  $M_{n+1}$ .