

Numerička matematika

4. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Rješavanje linearnih sustava (nastavak):
 - Struktura LR (LU) faktorizacije.
 - Matrice za koje ne treba pivotiranje.
 - Simetrične pozitivno definitne matrice.
 - Faktorizacija Choleskog.
 - Pivotiranje u faktorizaciji Choleskog.
- Aproksimacija i interpolacija:
 - Uvod u problem aproksimacije (norme, linearnost).

Sadržaj predavanja (nastavak)

- Interpolacija polinomima:
 - Problem interpolacije polinomima.
 - Egzistencija i jedinstvenost.
 - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
 - Lagrangeova baza.
 - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
 - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.

Informacije

Konzultacije:

- samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju). Kopija je na adresi

http://degiorgi.math.hr/~singer/num_mat/

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Kad ne treba pivotirati u LR faktorizaciji?

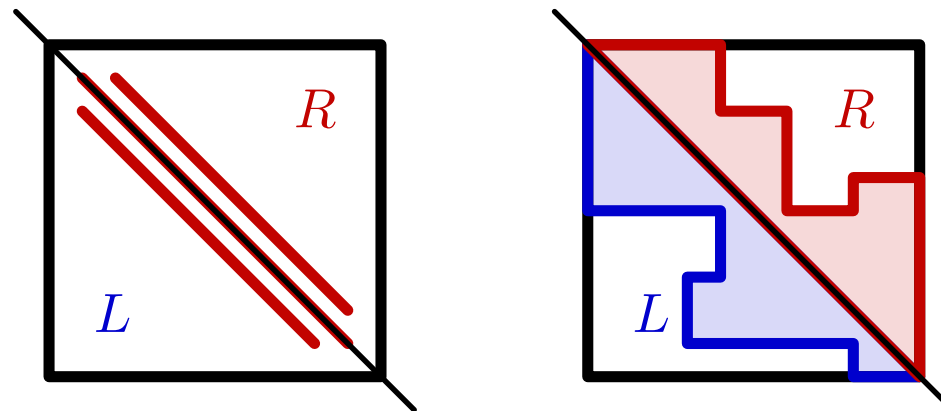
Struktura LR faktorizacije

Ako matrica A , koja ulazi u LR faktorizaciju, ima nekakvu **strukturu**, pitanje je kad će se ta struktura **očuvati** u L i R .

To je **posebno bitno** za tzv. “šuplje” sustave

- gdje se sva informacija o matrici A može spremiti u **bitno manje** od n^2 elemenata.

Ako **ne pivotiramo**, onda se čuvaju, recimo, sljedeće forme:



Prva su **vrpčaste** matrice, a druga su “rupe **udesno i nadolje**”.

Kad ne moramo pivotirati?

Dakle, zgodno je znati kad **ne treba** pivotirati, a da

- imamo **garantiranu stabilnost** algoritma **eliminacija**, odnosno, **LR** faktorizacije.

Odgovor. Postoje tipovi matrica kod kojih **ne moramo** pivotirati. Na primjer, to su:

- strogo **dijagonalno dominantne** matrice po **stupcima**, tj. matrice kod kojih za **svaki** stupac $j = 1, \dots, n$ vrijedi

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|,$$

- dijagonalno dominantne** matrice po **recima** ($i \leftrightarrow j$),
- simetrične pozitivno definitne** matrice (v. malo kasnije).

Dijagonalno dominantna — ne treba pivotirati

Za dijagonalno dominantne matrice po stupcima, treba samo pokazati da iza prvog koraka eliminacije ostaju dijagonalno dominantne po stupcima. Dalje = indukcija po koracima.

Prvi korak. Element $a_{11} \neq 0$ (čak je maksimalan po apsolutnoj vrijednosti u prvom stupcu), pa sigurno možemo napraviti prvi korak eliminacije. Dobivamo matricu $A^{(2)}$ oblika

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $S^{(2)}$ regularna (dokaz korištenjem determinanti).

Za nastavak, moramo pokazati da je matrica $S^{(2)}$, također, dijagonalno dominantna po stupcima (“korak indukcije”).

Dijagonalno dominantna — ne treba pivotirati

Iz formula za transformacije elemenata, za $j = 2, \dots, n$, slijedi

$$\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^{(2)}| = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \leq \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| + \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{i1}|$$

(dijagonalna dominantnost obje sume)

$$< (|a_{jj}| - |a_{1j}|) + \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \cdot (|a_{11}| - |a_{j1}|)$$

$$= |a_{jj}| - \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{j1} \right| \quad (\text{koristimo } |a| - |b| \leq |a - b|)$$

$$\leq \left| a_{jj} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{j1} \right| = |a_{jj}^{(2)}|.$$

Dakle, i $S^{(2)}$ je **dijagonalno dominantna** po **stupcima**. ■

Dijagonalno dominantne matrice — preciznije

Za kompleksnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kažemo da je **dijagonalno dominantna** po **stupcima** ako vrijedi

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ako vrijedi **stroga** nejednakost ($>$), za **sve** $j = 1, \dots, n$, onda kažemo da je A **strogo** dijagonalno dominantna po **stupcima**.

Matrica A je (**strogo**) dijagonalno dominantna po **recima**, ako je A^* (**strogo**) dijagonalno dominantna po **stupcima** ($i \leftrightarrow j$).

U oba slučaja, **Gaussove eliminacije** i **LR faktorizacija** su

🔴 savršeno **stabilne** i **bez pivotiranja**.

GE i LR za dijagonalno dominantne matrice

Teorem (Wilkinson). Neka je A kompleksna regularna kvadratna matrica reda n .

- Ako je A dijagonalno dominantna po recima ili stupcima, tada A ima LR faktorizaciju bez pivotiranja i za faktor rasta vrijedi $\rho_n \leq 2$.
- Ako je A dijagonalno dominantna po stupcima, tada je $|l_{ij}| \leq 1$ za sve i, j , u LR faktorizaciji bez pivotiranja.

To znači da parcijalno pivotiranje ne radi nikakve zamjene redaka — najveći element u stupcu je već na dijagonali. ■

Napomena. Regularnost samo osigurava da dijagonalni elementi ne smiju biti nula, jer dozvoljavamo \geq .

Dokaz. Sličan prethodnom (v. skripta ili Higham, ASNA2).

Simetrične pozitivno definitne matrice

Simetrične pozitivno definitne matrice

Za simetrične/hermitske pozitivno definitne matrice radi se “simetrizirana” varijanta LR faktorizacije

- jer je 2 puta brža nego obična LR faktorizacija,
- i čuva strukturu matrice A — čak i kad računamo u aritmetici računala, množenjem faktora uvijek dobivamo simetričnu/hermitsku matricu.

Ova simetrizirana faktorizacija zove se faktorizacija Choleskog.

Prisjećanje. Kompleksna matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je hermitska ako je

$$A = A^*, \quad \text{ili} \quad a_{ji} = \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Ako je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onda je hermitska matrica isto što i simetrična, tj. $*$ = T .

Simetrične pozitivno definitne matrice

Definicija. Matrica $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je **pozitivno definitna** ako za svaki vektor $x \in \mathbb{F}^n$, takav da je $x \neq 0$, vrijedi

$$\langle Ax, x \rangle = x^* Ax > 0. \quad \blacksquare$$

Napomena. **Pozitivna definitnost** matrice se **ne vidi odmah**. Obično se **unaprijed**, iz prirode problema, **zna** da je neka matrica pozitivno definitna (očuvanje energije i slično).

Ekvivalentni uvjeti za pozitivnu definitnost:

• sve **sojstvene vrijednosti** od A su **pozitivne**, tj. vrijedi

$$\lambda_k(A) > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje λ_k označava k -tu najveću svojstvenu vrijednost;

Simetrične pozitivno definitne matrice

Ekvivalentni uvjeti (nastavak):

- ☛ sve vodeće glavne minore od A su pozitivne, tj. vrijedi

$$\det(A_k) > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje je $A_k = A(1 : k, 1 : k)$ vodeća glavna podmatrica od A , reda k .

Posljedica. Sve vodeće glavne podmatrice A_k su regularne, za $k = 1, \dots, n$. Posebno, matrica A je regularna.

Digresija. Katkad se lakše vidi da neka matrica nije pozitivno definitna. Pokažite da nisu pozitivno definitne one matrice

- ☛ koje na dijagonali imaju bar jedan negativan element ili nulu.

Pozitivna definitnost i simetrija

Za **kompleksne** matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, može se pokazati da vrijedi

● A je **pozitivno definitna** $\implies A$ je **hermitska** ($A = A^*$).

Za **realne** matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ to **ne mora** vrijediti, tj.

● **pozitivno definitna** matrica **ne mora** biti **simetrična**
(može biti i $A \neq A^T$).

Međutim, u **numerici** se vrlo često koristi “**stroža**” varijanta pojma — koja, po **definiciji**, uključuje i **simetriju**:

● **Realna** matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **pozitivno definitna** ako je **simetrična** i za svaki $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, vrijedi $x^T A x > 0$.

Da ne bude zabune, u nastavku, koristimo “**strožu**” definiciju! U tom slučaju, originalni pojam (**bez** simetrije) katkad se zove samo “**pozitivnost**” matrice A .

LR faktorizacija za sim. poz. def. matrice

Tvrdnja. Za svaku hermitsku/simetričnu pozitivno definitnu matricu A

• uvijek se može napraviti LR faktorizacija bez pivotiranja.

Osim toga, matrica R ima pozitivnu dijagonalu i regularna je.

Dokaz. Sve vodeće glavne podmatrice $A_k = A(1:k, 1:k)$ su regularne, pa prva tvrdnja slijedi iz teorema o LR faktorizaciji.

U LR faktorizaciji matrice A , za sve vodeće glavne podmatrice matrica A i R vrijedi (v. prošli puta)

$$\det(A_k) = \det(R_k) = r_{11} r_{22} \cdots r_{kk}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Iz drugog ekvivalentnog uvjeta $\det(A_k) > 0$, slijedi $r_{11} > 0$ i $r_{kk} = \det(A_k) / \det(A_{k-1}) > 0$, za $k = 2, \dots, n$. ■

Simetrizirana LR faktorizacija

Tvrdnja. LR faktorizaciju hermitske/simetrične pozitivno definitne matrice A možemo napisati u simetriziranom obliku

$$A = LDL^*,$$

gdje je

- L donja trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali,
- a D dijagonalna matrica s pozitivnom dijagonalom.

Ta faktorizacija se obično zove LDL^* faktorizacija.

Dokaz. Ide u dva koraka. U LR faktorizaciji matrice A , faktor R se prvo rastavi na

$$R = DM^*,$$

gdje je M^* gornja trokutasta s jedinicama na dijagonali, a zatim se dokaže da je $M = L$.

Simetrizirani LR — faktorizacija Choleskog

Prvi korak. Faktorizaciju $R = DM^*$ dobijemo tako da

- dijagonalne elemente r_{ii} od R izlučimo slijeva (iz redaka) u dijagonalnu matricu D (s pozitivnom dijagonalom),
- svaki redak u R podijelimo s dijagonalnim elementom r_{ii} u tom retku — dobijemo M^* s jedinicama na dijagonali (ostaje gornja trokutasta, kao i R).

Dakle, izlazi da je

$$A = LDM^*,$$

gdje su L i M donje trokutaste s jedinicama na dijagonali, a D je dijagonalna s pozitivnim dijagonalnim elementima.

Sve tri matrice su regularne.

Simetrizirani LR — faktorizacija Choleskog

Drugi korak. Zbog hermitičnosti/simetrije matrice A , vrijedi

$$LDM^* = A = A^* = (LDM^*)^* = MDL^*.$$

Množenjem slijeva s L^{-1} i zdesna s $L^{-*} = (L^{-1})^*$ dobivamo

$$DM^*L^{-*} = L^{-1}MD.$$

Na lijevoj strani imamo produkt gornjih trokutastih matrica, a na desnoj donjih, pa su ti produkti = dijagonalna matrica.

Matrice M i L imaju jedinice na dijagonali, pa usporedbom dijagonala izlazi da su obje strane baš jednake D . Koristeći regularnost od L i D , dobivamo

$$L^{-1}MD = D \implies MD = LD \implies M = L. \quad \blacksquare$$

Faktorizacija Choleskog — standardni oblik

Teorem (Standardni oblik faktorizacije Choleskog). Za svaku hermitsku/simetričnu pozitivno definitnu matricu A postoji faktorizacija

$$A = R^* R,$$

gdje je R gornja trokutasta matrica. Ako fiksiramo da R ima (na pr.) pozitivnu dijagonalu, ova faktorizacija je jedinstvena.

Dokaz. Matrica A ima jedinstvenu LDL^* faktorizaciju (jedinstvenost slijedi iz jedinstvenosti LR faktorizacije).

Nadalje, D ima pozitivnu dijagonalu, pa se može rastaviti kao

$$D = \Delta \cdot \Delta = \Delta \cdot \Delta^*,$$

gdje je Δ dijagonalna i $\Delta_{ii} = \sqrt{D_{ii}} = \sqrt{r_{ii}} > 0$ (+ predznak).

Faktorizacija Choleskog — standardni oblik

Tada LDL^* faktorizaciju od A možemo napisati u obliku

$$A = LDL^* = (L\Delta)(\Delta L^*) = (L\Delta)(\Delta^*L^*) = (L\Delta)(L\Delta)^*.$$

Uz oznaku $R := (L\Delta)^*$ dobivamo faktorizaciju Choleskog

$$A = R^*R. \quad \blacksquare$$

Napomena. Mnogi slovom L označavaju matricu $L := L\Delta$, pa se u literaturi faktorizacija Choleskog može naći napisana kao

$$A = LL^*.$$

Oprez: Ovaj “novi” L više nema jedinice na dijagonali!

Kad znamo da postoji, faktorizacija Choleskog se može i direktno izvesti (slično kao LR), znajući da je $A = R^*R$.

Algoritam

Ograničimo se na **realni** slučaj. Iz $A = R^T R$, za **gornji** trokut od A , slijedi

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i r_{ki} r_{kj}, \quad i \leq j,$$

pa dobivamo sljedeću **rekurziju** za elemente:

za $j = 1, \dots, n$:

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right), \quad i = 1, \dots, j-1,$$

$$r_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj}^2 \right)^{1/2}.$$

U prvom koraku, za $j = 1$, računamo samo $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$.

Algoritam

Zbog grešaka **zaokruživanja**, pod **korijenom** možemo dobiti

● **negativan** izraz ili **nulu** \implies nužna provjera!

Faktorizacija Choleskog

```
za j = 1 do n radi {  
    /* Nađi j-ti stupac od R */  
    /* Supstitucija unaprijed iznad dijagonale */  
    za i = 1 do j - 1 radi {  
        sum = A[i, j];  
        za k = 1 do i - 1 radi {  
            sum = sum - R[k, i] * R[k, j];  
        }  
        R[i, j] = sum / R[i, i];  
    }  
}
```

Algoritam

```
    /* Dijagonalni element */
sum = A[j, j];
za k = 1 do j - 1 radi {
    sum = sum - R[k, j]**2;    /* ** <=> pow */
}
    /* Provjera prije korijena */
ako je sum > 0.0 onda {
    R[j, j] = sqrt(sum);
}
inače
    /* Matrica nije pozitivno definitna, STOP */
}
```

Napomena. Za simetričnu matricu A , test $\text{sum} > 0.0$ ekvivalentan je provjeri pozitivne definitnosti od A .

Komentar na algoritam, složenost

Ovo je tzv. *jik* varijanta algoritma, a naziv dolazi od **poretka petlji** (izvana, prema unutra), uz prirodno imenovanje indeksa.

- Ovdje se matrica R generira **stupac po stupac** (Fortran),
- dok se, u LR faktorizaciji, matrica R generirala **redak po redak**, a L **stupac po stupac**.

To **nije** jedina varijanta za realizaciju algoritma (v. iza).

Za **složenost algoritma** = broj aritmetičkih operacija, izlazi

$$OP(n) \sim \frac{1}{3} n^3,$$

što je, približno, **polovina** složenosti LR faktorizacije. Razlog:

- računamo samo **jednu** trokutastu matricu, a ne **dvije**.

Algoritam — *ijk* varijanta (račun “na ruke”, C)

Zamjenom indeksa i , j dobivamo tzv. *ijk* varijantu algoritma:

za $i = 1, \dots, n$:

$$r_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2 \right)^{1/2},$$

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right), \quad j = i + 1, \dots, n.$$

Tu se R računa **redak po redak**, a za $i = n$ računamo samo r_{nn} .

Kad imamo faktorizaciju Choleskog $A = R^T R$, onda se rješenje sustava $Ax = b$ svodi na rješavanje **dva trokutasta** sustava

$$R^T y = b, \quad Rx = y.$$

Rješenje linearnog sustava

Ove sustave lako rješavamo:

🔴 sustav $R^T y = b$ — supstitucijom unaprijed

$$y_1 = \frac{b_1}{r_{11}},$$

$$y_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji} y_j \right), \quad i = 2, \dots, n,$$

🔴 sustav $Rx = y$ — supstitucijom unatrag

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}},$$

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij} x_j \right), \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Alternativa za rješenje linearnog sustava

Za **razliku** od LR faktorizacije, ovdje

- u **obje** supstitucije imamo **dijeljenja** (**istim** brojevima).

U praksi se često koristi LDL^T oblik faktorizacije **Choleskog**.

Prednosti te varijante su:

- u algoritmu faktorizacije **nema** računanja **drugih korijena**;
- rješavaju se **tri** jednostavna linearna sustava

$$Lz = b, \quad Dy = z, \quad L^T x = y.$$

Srednji sustav $Dy = z$ treba samo n **dijeljenja**.

- L ima **jediničnu** dijagonalu, pa **štedimo** n **dijeljenja**.

Pivotiranje u faktorizaciji Choleskog

I kod faktorizacije **Choleskog** možemo koristiti **pivotiranje**. Međutim, da bismo **očuvali simetriju** radne matrice,

- **pivotiranje** mora biti “**simetrično**”, tj.
- radimo **istovremene** zamjene **redaka** i **stupaca** u A

$$A \mapsto P^T A P,$$

gdje je P matrica permutacije,

- \Rightarrow **dijagonalni** element zamjenjuje mjesto s **dijagonalnim**.

Matrica $P^T A P$ je opet **hermitska/simetrična** i, što je ključno,

- ostaje **pozitivno definitna** (dokažite to)!

Posljedica. Sve glavne podmatrice od A (a ne samo **vodeće**) imaju **pozitivnu** determinantu.

Dijagonalno pivotiranje u faktORIZACIJI Choleskog

Standardno se koristi tzv. **dijagonalno** pivotiranje:

u k -tom koraku faktORIZACIJE, izbor pivotnog elementa je

$$a_{rr}^{(k)} = \max_{k \leq i \leq n} a_{ii}^{(k)}.$$

To odgovara **potpunom** pivotiranju u LR faktORIZACIJI ili GE. Naime, **najveći** elementi u $A^{(k)}$ su sigurno na **dijagonali**.

Dokaz. Gledamo **bilo koju** glavnu podmatricu A_2 , reda 2, u A

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ \bar{a}_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix}.$$

Iz $\det(A_2) > 0$ slijedi $a_{ii}a_{jj} > |a_{ij}|^2$, pa je bar **jedan** od **dijagonalnih** elemenata **veći** od $|a_{ij}|$. Isto vrijedi za sve $A^{(k)}$. ■

Dijagonalno pivotiranje u faktORIZACIJI Choleskog

Ovim postupkom dobivamo faktORIZACIJU Choleskog

$$P^T A P = R^T R,$$

u kojoj za elemente matrice R vrijedi

$$r_{kk}^2 \geq \sum_{i=k}^j r_{ij}^2, \quad j = k + 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Desna strana = elementi j -tog stupca, od k -tog do dijagonale. Posebno, to znači da R ima nerastuću dijagonalu

$$r_{11} \geq \dots \geq r_{nn} > 0.$$

Isto je u QR faktORIZACIJI s pivotiranjem stupaca (v. kasnije).

Nažalost, kod Hilbertove matrice, ni to ne pomaže! Probajte!

Može li LDL^T za bilo koje simetrične matrice?

Pitanje. Može li se LDL^T faktorizacija napraviti za bilo koju simetričnu matricu $A = A^T$ — općenito, indefinitnu,

uz dozvolu da matrica D ima i negativne elemente?

To ne vrijedi! Kontraprimjer je tzv. elementarna indefinitna matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pomaže li simetrična permutacija redaka i stupaca? Opet, ne!

Pravo poopćenje na indefinitne matrice dobivamo tako da

dozvolimo dijagonalne blokove reda 2 u matrici D .

Faktorizacija: Bunch–Parlett ili Bunch–Kaufman–Parlett (razlike su u pivotiranju). Slično ide za $A = -A^T$ (Bunch).

Aproksimacija i interpolacija

Općenito o problemu aproksimacije

Što je problem **aproksimacije**?

Poznate su **neke** informacije o funkciji f , definiranoj na nekom podskupu $X \subseteq \mathbb{R}$.

Na osnovu tih **informacija**, želimo funkciju f

- **zamijeniti** nekom **drugom** funkcijom φ na istom skupu X , ili na još **većem** skupu,
- tako da su funkcije f i φ **bliske** u nekom **smislu**.

Skup X je najčešće:

- **interval** oblika $[a, b]$ (koji može biti i **neograničen**), ili
- **diskretni skup** točaka.

Pitanje: Zašto uopće želimo **zamjenu** $f \mapsto \varphi$?

Oblici problema aproksimacije

Problem aproksimacije javlja se u dva bitno različita oblika.

Prvi oblik: Znamo funkciju f (analitički ili slično),

• ali je njezina forma prekomplikirana za računanje.

U tom slučaju,

• izaberemo neke informacije o f i

• po nekom kriteriju odredimo aproksimacijsku funkciju φ .

Prednosti ovog oblika problema aproksimacije:

• Možemo birati informacije o f koje ćemo koristiti.

• Jednako tako, možemo ocijeniti grešku dobivene aproksimacije φ , obzirom na prave vrijednosti funkcije f .

Oblici problema aproksimacije (nastavak)

Drugi oblik: Ne znamo funkciju f ,

- već samo neke informacije o njoj,
- na primjer, vrijednosti na nekom (diskretnom) skupu točaka.

Zamjenska funkcija φ određuje se iz raspoloživih informacija.

- Osim samih podataka (poznate vrijednosti),
- ove informacije mogu uključivati i očekivani oblik ponašanja tih podataka, tj. oblik funkcije φ .

Mane ovog oblika problema aproksimacije:

- Ne može se napraviti ocjena pogreške,
- bez dodatnih informacija o nepoznatoj funkciji f .

Prvi oblik problema — primjene

Prvi oblik se obično koristi u teoriji

- za razvoj numeričkih metoda na bazi aproksimacije.

Na primjer, za numeričko

- integriranje funkcija (integriramo aproksimaciju),
- rješavanje diferencijalnih jednačbi.

Praktični primjer:

- programska biblioteka za računanje raznih elementarnih funkcija (`exp`, `sin`, `cos`, `sqrt`, ...), poput `<math.h>`.

Traži se maksimalna brzina i puna točnost, na razini osnovne greške zaokruživanja.

Realizacija standardno ide racionalnim aproksimacijama.

Drugi oblik problema — primjene

Drugi oblik problema se vrlo često javlja u praksi.

Na primjer,

- kod mjerenja nekih veličina (rezultat je “tablica”),
- osim izmjerenih podataka, pokušavamo aproksimirati i podatke koji se nalaze “između” izmjerenih točaka.

To je ključna svrha ovakve aproksimacije!

Napomena. Kod mjerenja se javljaju i greške mjerenja.

- Zato postoje posebne tehnike — vrste aproksimacija, za “ublažavanje” tako nastalih grešaka.

Na primjer, metoda najmanjih kvadrata.

Izbor aproksimacijske funkcije φ

Aproksimacijska funkcija φ bira se

- prema **prirodi modela** — izbor dolazi iz **problema**,
- ali tako da bude relativno **jednostavna** za **računanje**.

Obično se **prvo fiksira** (izabere) neki **skup** funkcija \mathcal{F} .

- **Onda** se traži “**najbolja**” aproksimacija φ iz tog skupa \mathcal{F} .

Skup \mathcal{F} može biti **vektorski prostor**, ali ne mora.

Za **praktično** računanje, funkcija φ obično ovisi

- o nekom **konačnom** broju **parametara** a_k , $k = 0, \dots, m$,
- koje treba **odrediti** po nekom **kriteriju** aproksimacije.

Ideja: **Sve moguće** vrijednosti ovih $m + 1$ parametara određuju skup **svih** “**dozvoljenih**” funkcija \mathcal{F} .

Parametrizacija aproksimacijske funkcije φ

Kad funkciju φ zapišemo u obliku

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

kao funkciju koja ovisi i o parametrima a_k , onda kažemo

- da smo izabrali opći oblik aproksimacijske funkcije φ (u odnosu na skup \mathcal{F} — na primjer, izborom baze u \mathcal{F}).

Prema obliku ovisnosti o parametrima, aproksimacijske funkcije možemo grubo podijeliti na:

- linearne aproksimacijske funkcije,
- nelinearne aproksimacijske funkcije.

Koje su bitne razlike između ove dvije grupe?

Linearne aproksimacijske funkcije

Opći oblik **linearne** aproksimacijske funkcije je

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

gdje su $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ **poznate** funkcije koje **znamo** računati.

Linearnost u **ovisnosti** o **parametrima** znači:

- traženi parametri su **koeficijenti** u **linearnoj kombinaciji poznatih** funkcija.

Velika **prednost**: **Određivanje** parametara a_k obično vodi na “**linearne**” probleme (koji su **lakše** rješivi od **nelinearnih**):

- **sustave linearnih** jednadžbi, ili
- **linearne** probleme **optimizacije**.

Linearne aproksimacijske funkcije (nastavak)

Standardni model za linearni oblik aproksimacije:

- skup “dozvoljenih” funkcija \mathcal{F} je vektorski prostor, a
- funkcije $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ su neka baza u tom prostoru.

Unaprijed se bira (fiksira):

- vektorski prostor \mathcal{F} , odgovarajuće dimenzije $m + 1$,
- baza $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ u \mathcal{F} .

Napomena. Kod približnog numeričkog računanja,

- “dobar” izbor baze je ključan za stabilnost postupka
- i točnost izračunatih vrijednosti parametara aproksimacijske funkcije φ .

Primjer 1 — polinomi

Nekoliko primjera najčešće korištenih vektorskih prostora \mathcal{F} .

Polinomi. Uzimamo $\mathcal{F} = \mathcal{P}_m$, gdje je \mathcal{P}_m vektorski prostor polinoma stupnja $\leq m$ (dimenzija tog prostora je $m + 1$).

Standardni izbor baze je $\varphi_k(x) = x^k$, za $k = 0, \dots, m$, tj.

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$$

Nije nužno da φ zapišemo u bazi potencija $\{1, x, \dots, x^m\}$.
Upravo **suprotno**, vrlo često je neka druga baza **bitno bolja**.

- Na primjer, $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots\}$, gdje su x_0, x_1, \dots **zadane** točke (v. kod interpolacije).
- **Ortogonalni** polinomi, obzirom na **pogodno** izabrani **skalarni produkt** (v. kod najmanjih kvadrata).

Primjer 2 — trigonometrijski polinomi

Trigonometrijski “polinomi”. Za funkcije φ_k uzima se prvih $m + 1$ funkcija iz skupa

$$\{ 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \}.$$

Koriste se za aproksimaciju **periodičkih** funkcija na intervalu **perioda** — ovdje, recimo, na $[0, 2\pi]$.


● **Primjena** je, na primjer, u **obradi i modeliranju signala**.

Varijacije u izboru **baze**:

● Koristi se **dodatni faktor** u argumentu **sinusa i kosinusa** ($x \mapsto \lambda x$) — koji služi za **kontrolu perioda**.

● Ponekad se biraju **samo parne** ili **samo neparne** funkcije iz ovog skupa.

Primjer 3 — polinomni splajnovi

Polinomni splajnovi. To su funkcije koje su “po dijelovima” **polinomi**. Ako su zadane točke $x_0 < \dots < x_n$, onda se **splajn** funkcija φ , na svakom **podintervalu** između susjednih točaka,  svodi na **polinom** određenog fiksnog (**niskog**) stupnja, tj.

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

a p_k su **polinomi** — najčešće, stupnjeva 1, 2, 3 ili 5.

U točkama x_i obično se zahtijeva da funkcija φ zadovoljava još

 i “**uvjete ljepljenja**” vrijednosti **funkcije** i nekih njezinih **derivacija**, ili nekih **aproksimacija** za te **derivacije**.

Splajnovi se često koriste zbog dobrih **ocjena greške** aproksimacije i **kontrole oblika** aproksimacijske funkcije.

Nelinearne aproksimacijske funkcije

Nelinearne aproksimacijske funkcije φ

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

imaju nelinearnu ovisnost o parametrima aproksimacijske funkcije a_0, \dots, a_m .

Pripadni skup “dozvoljenih” funkcija \mathcal{F} najčešće

● nije vektorski prostor.

Određivanje parametara a_k , općenito, vodi na “nelinearne” probleme:

● sustave nelinearnih jednažbi, ili

● nelinearne probleme optimizacije.

Primjer 4 — eksponencijalne funkcije

Par primjera najčešće korištenih oblika nelinearnih aproksimacijskih funkcija.

Eksponencijalne aproksimacije. Imaju oblik linearne kombinacije eksponencijalnih funkcija s parametrima u eksponentu:

$$\varphi(x) = c_0 e^{b_0 x} + c_1 e^{b_1 x} + \dots + c_r e^{b_r x},$$

Broj nezavisnih parametara je $m + 1 = 2r + 2$.

Opisuju, na primjer,

- procese rasta i odumiranja u raznim populacijama,
- s primjenom u biologiji, ekonomiji i medicini.

Primjer 5 — racionalne funkcije

Racionalne funkcije. Imaju opći oblik

$$\varphi(x) = \frac{b_0 + b_1x + \cdots + b_r x^r}{c_0 + c_1x + \cdots + c_s x^s},$$

i $m + 1 = r + s + 1$ nezavisnih parametara, a ne $r + s + 2$, kako formalno piše.

Objašnjenje. Razlomci se mogu proširivati,

- ako su b_i, c_i parametri, onda su to i tb_i, tc_i , za $t \neq 0$;
- uvijek možemo fiksirati jedan od koeficijenata b_i ili c_i , a koji je to — obično slijedi iz prirode modela.

Ovako definirane racionalne funkcije imaju mnogo bolja svojstva aproksimacije nego polinomi, a pripadna teorija je relativno nova.

Kriteriji aproksimacije — interpolacija

Interpolacija je zahtjev da se funkcije f i φ **podudaraju** na nekom **konačnom skupu točaka**.

- Te točke nazivamo **čvorovima interpolacije**.
- Zahtjevu se može, ali ne mora, **dodati** zahtjev da se u čvorovima, **osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti nekih derivacija**.

U **najjednostavnijem** obliku interpolacije, kad se podudaraju samo funkcijske vrijednosti, od podataka o funkciji f

- koristi se **samo informacija** o njezinoj vrijednosti na skupu od $n + 1$ točaka,
- tj. podaci (x_k, f_k) , gdje je $f_k := f(x_k)$, za $k = 0, \dots, n$.

Kriteriji aproksimacije — interpolacija

Kod **interpolacije** zadanih vrijednosti

- broj **parametara** interpolacijske funkcije **mora biti jednak** broju zadanih **podataka**, tj. **mora biti** $m = n$.

Prijevod: “broj stupnjeva slobode” = “broj uvjeta”.

- Parametri a_0, \dots, a_n određuju se iz uvjeta interpolacije

$$\varphi(x_k; a_0, a_1, \dots, a_n) = f_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

što je, općenito, **nelinearni** sustav jednažbi.

- **Linearnost** funkcije φ povlači da parametre a_k dobivamo iz sustava **linearnih jednažbi**
 - koji ima **točno** $n + 1$ jednažbi za $n + 1$ nepoznanica. Matrica tog sustava je **kvadratna**.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Minimizacija pogreške je drugi kriterij određivanja parametara aproksimacije. Funkcija φ bira se tako da se minimizira neka odabrana norma $\| \cdot \|$ funkcije pogreške

$$e(x) = f(x) - \varphi(x),$$

u nekom odabranom prostoru funkcija \mathcal{F} za φ , na nekoj domeni X .

Ove aproksimacije često se zovu i najbolje aproksimacije po normi. Dijele se na

- diskretne — ako se $\|e\|$ minimizira na diskretnom skupu podataka X (to znači da je X konačan ili prebrojiv);
- kontinuirane — ako se $\|e\|$ minimizira na kontinuiranom skupu podataka X .

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Standardno se kao **norme pogreške** koriste

- 2-norma i
- ∞ -norma.

Za 2-normu,

- pripadna se aproksimacija zove **srednjekvadratna**,
- a **metoda** za njezino nalaženje zove se **metoda najmanjih kvadrata**.

Funkcija φ , odnosno njezini **parametri**, traže se tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2.$$

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

• U diskretnom slučaju, za $X = \{x_0, \dots, x_n\}$, dobivamo

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (f(x_k) - \varphi(x_k))^2} \rightarrow \min,$$

• a u kontinuiranom slučaju, za $X = [a, b]$, dobivamo

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx} \rightarrow \min.$$

Preciznije, minimizira se samo ono pod korijenom, pa odatle naziv “najmanji kvadrati”.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

U slučaju ∞ -norme, pripadna se aproksimacija zove **minimaks aproksimacija**, a parametri se biraju tako da se nađe

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_{\infty}.$$

• U **diskretnom** slučaju, za $X = \{x_0, \dots, x_n\}$, traži se

$$\max_{k=0, \dots, n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \rightarrow \min,$$

• a u **kontinuiranom** slučaju, za $X = [a, b]$, traži se

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \rightarrow \min.$$

Naziv “**minimaks**” dolazi od **minimizacije maksimuma**.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Ovaj je tip aproksimacija **poželjniji** od srednjevadratnih,

- jer se traži da **maksimalna greška** bude **minimalna**,
- ali ih je, općenito, **mного teže izračunati** (na primjer, dobivamo problem minimizacije **nederivabilne** funkcije!).

Za znatiželjne: U praksi — **norme**, pored funkcije, mogu uključivati i **neke njezine derivacije**. Primjer takve norme je

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b [(f(x))^2 + (f'(x))^2] dx},$$

na prostoru $C^1[a, b]$ — svih funkcija koje imaju **neprekidnu prvu derivaciju** na $[a, b]$.

Ključni problemi kod aproksimacije

Matematički problemi koje treba riješiti:

- egzistencija i jedinstvenost rješenja problema aproksimacije, što ovisi o tome
 - koje funkcije f aproksimiramo kojim funkcijama φ (dva prostora)
 - i kako mjerimo grešku e (norma);
- analiza kvalitete dobivene aproksimacije — vrijednost “najmanje” pogreške i ponašanje funkcije greške e (jer norma je ipak samo jedan broj),
- konstrukcija algoritama za računanje najbolje aproksimacije.

Veza aproksimacije i interpolacije — diskretno

U diskretnom slučaju,

- problem interpolacije na konačnom skupu točaka X (točke iz X su čvorovi interpolacije),

možemo smatrati specijalnim, ali posebno važnim slučajem

- aproksimacije po normi na skupu X , uz neku od
- standardnih normi na konačnodimenzionalnim prostorima (ovisi o tome odakle bирамо φ).

Posebnost: uz minimizaciju norme pogreške $\|e\| \rightarrow \min$, dodatno tražimo da je

- minimum norme pogreške jednak nuli, tj. $\min \|e\| = 0$, što je onda ekvivalentno odgovarajućim uvjetima interpolacije.

Veza aproksimacije i interpolacije — primjer

Primjer. Neka je $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ i tražimo aproksimacijsku funkciju φ

• u prostoru \mathcal{P}_n svih polinoma stupnja najviše baš n .

Kao kriterij aproksimacije uzmimo neku p -normu ($1 \leq p \leq \infty$)

• vektora e grešaka funkcijskih vrijednosti na skupu X .

Za $1 \leq p < \infty$, zahtjev je

$$\|e\|_p = \|f - \varphi\|_p = \left(\sum_{k=0}^n |f(x_k) - \varphi(x_k)|^p \right)^{1/p} \rightarrow \min.$$

Za $p = \infty$, tražimo

$$\|e\|_\infty = \|f - \varphi\|_\infty = \max_{k=0, \dots, n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \rightarrow \min.$$

Veza aproksimacije i interpolacije — primjer

Očito je $\|e\|_p = 0$ ekvivalentno uvjetima interpolacije

$$f(x_k) = \varphi(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Međutim, nije jasno može li se to postići, tj.

- postoji li takva aproksimacijska funkcija $\varphi \in \mathcal{P}_n$
 - za koju je minimum norme greške jednak nuli,
- tako da je φ i interpolacijska funkcija.

U nastavku, pokazat ćemo da je odgovor potvrđan za ovaj primjer. Razlog:

- Prostor \mathcal{P}_n , u kojem tražimo aproksimaciju, ima taman dovoljno veliku dimenziju.

Interpolacija polinomima

Interpolacija polinomima

Neka je funkcija f zadana na

- diskretnom skupu međusobno različitih točaka (čvorova) x_k , za $k = 0, \dots, n$, tj. vrijedi $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$.
- Poznate funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Komentar. Kad bismo dozvolili da je $x_i = x_j$, za neke $i \neq j$,

- ili f nije funkcija (ako je $f_i \neq f_j$),
- ili imamo redundantan podatak (ako je $f_i = f_j$).

Ako je $[a, b]$ segment, u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

ali to ovdje nije bitno.

Egzistencija i jedinstvenost

Pitanja.

- Uz koje uvjete **postoji** interpolacijski polinom?
- Je li **jedinstven**?

Odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za zadane točke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, **postoji jedinstveni** interpolacijski polinom $\varphi \in \mathcal{P}_n$, **stupnja najviše n** ,

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

za kojeg vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Uočiti: čvorovi moraju biti **različiti**, a f_k mogu biti **bilo kakvi**!

Egzistencija i jedinstvenost

Dokaz. Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

polinom stupnja najviše n . Uvjete interpolacije napišimo u obliku **linearnog sustava** s nepoznicama a_0, \dots, a_n ,

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = f_n.$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava **regularna**, pa sustav **ima jedinstveno rješenje**, ako i samo ako su čvorovi **različiti**.

Egzistencija i jedinstvenost

Provjeru **regularnosti** napraviti ćemo računanjem vrijednosti **determinante**.

Pripadna determinanta je tzv. **Vandermondeova determinanta**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} .$$

Egzistencija i jedinstvenost

Definiramo determinantu koja “naliči” na D_n , samo umjesto čvora x_n , stavimo da je **posljednji redak** u $V_n(x)$ funkcija od x :

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ \mathbf{1} & \mathbf{x} & \mathbf{x^2} & \cdots & \mathbf{x^n} \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$D_n = V_n(x_n).$$

Promatrajmo $V_n(x)$ kao **funkciju** varijable x .

Egzistencija i jedinstvenost

Razvojem po posljednjem retku uočavamo da je

- $V_n(x)$ polinom stupnja najviše n u varijabli x ,
- koeficijent tog polinoma uz x^n je determinanta D_{n-1} (“križanje” zadnjeg retka i stupca u $V_n(x)$).

Ako u determinantu $V_n(x)$, redom, uvrštavamo x_0, \dots, x_{n-1} ,

- determinanta $V_n(x_k)$, za $k = 0, \dots, n - 1$, ima dva jednaka retka,

pa je

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \dots = V_n(x_{n-1}) = 0,$$

tj. točke x_0, \dots, x_{n-1} su nultočke polinoma $V_n(x)$ stupnja n .

Egzistencija i jedinstvenost

Za polinom $V_n(x)$, stupnja n , znamo

• vodeći koeficijent — D_{n-1} ,

• sve nultočke — x_0, \dots, x_{n-1} ,

pa $V_n(x)$ možemo napisati kao produkt

$$V_n(x) = D_{n-1} (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Uvrštavanjem $x = x_n$, dobivamo rekurzivnu relaciju za D_n

$$D_n = D_{n-1} (x_n - x_0) (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Odmah vidimo da je $D_0 = 1$ (lijevi gornji kut!), pa indukcijom slijedi

$$D_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Egzistencija i jedinstvenost

Budući da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, onda je

$$D_n \neq 0,$$

a vrijedi i obrat. Matrica linearnog sustava je **regularna**, pa

- postoji **jedinstveno** rješenje a_0, \dots, a_n za koeficijente polinoma p_n u standardnoj bazi potencija.

Iz jedinstvenosti prikaza u bazi slijedi da **postoji jedinstveni** interpolacijski polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ za zadane podatke. ■

Napomena. Nadalje ćemo se baviti

- **raznim formama** interpolacijskog polinoma,
- koje će **uvijek** predstavljati **isti** interpolacijski polinom, samo **zapisan** u **raznim bazama**.

Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma \mathcal{P}_n izaberemo neku bazu $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, onda interpolacijski polinom p_n možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente a_0, \dots, a_n ima oblik

$$p_n(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \dots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \dots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \dots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n.$$

Pitanje. Može li se relativno jednostavno pronaći baza $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ za koju je matrica ovog sustava jedinična matrica?

Izbor baze za interpolaciju

Primjer

Primjer. Rješavanjem linearnog sustava za koeficijente, nađite interpolacijski polinom p_{40} stupnja 40 koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin x,$$

na ekvidistantnoj mreži čvorova $x_i = i \frac{\pi}{2}$, na intervalu $[0, 20\pi]$.

Vandermondeov linearni sustav je katastrofalno uvjetovan,

$$\kappa_2 \approx 5.027 \cdot 10^{82},$$

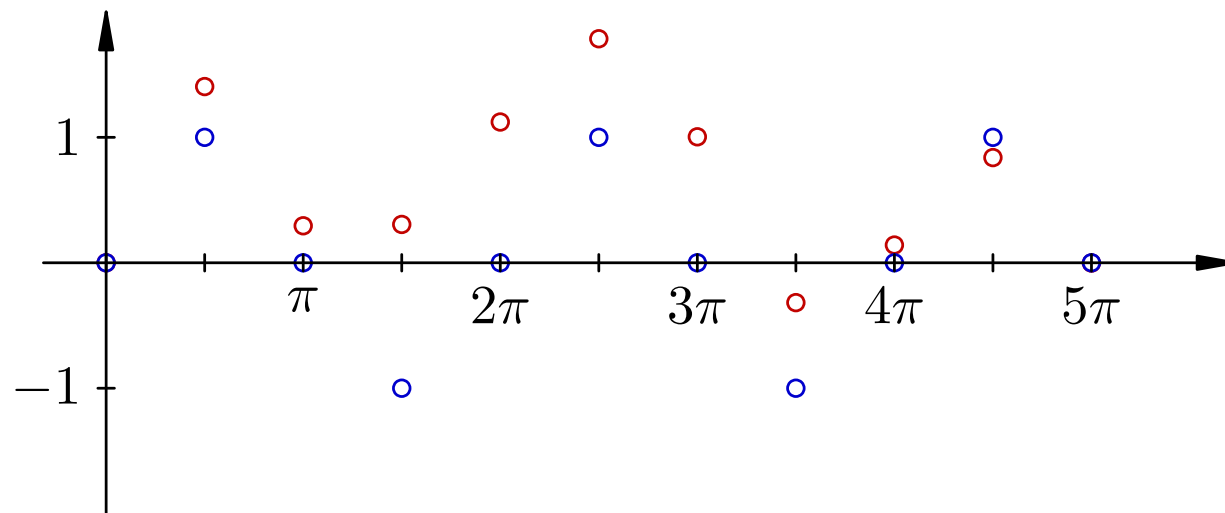
pa se očekuju velike greške u rješenju.

Kad izračunamo vrijednost u čvorovima interpolacije, greške su tolike da interpolacijski polinom ne interpolira zadane podatke — dakle, ni izračunati rezidual više nije malen.

Primjer (nastavak)

Legenda. Slika prikazuje samo dio podataka do 5π . Oznake:

- plavi kružići = zadane vrijednosti funkcije \sin ,
- crveni kružići = izračunate vrijednosti polinoma p_{40} u čvorovima interpolacije.



Zaključak. Treba naći **brži** način računanja (ovo traje $O(n^3)$), koji u **čvorovima** daje grešku 0 .

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Pogledajmo **uvjetovanost** Vandermondeovih matrica za neke standardne izbore **mreža čvorova**, u ovisnosti o **broju** čvorova.

Oznaka: Za zadani $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ promatramo **mrežu** s $n + 1$ **čvorova**

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad x_0^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}.$$

Pripadnu **Vandermondeovu matricu** reda $n + 1$ označavamo s

$$V^{(n+1)} = V^{(n+1)}(x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}),$$

a njezini elementi su

$$(V^{(n+1)})_{ij} = \left(x_{i-1}^{(n)}\right)^{j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n + 1.$$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 1. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[-1, 1]$,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^0$	8	$1.605 \cdot 10^3$	25	$2.131 \cdot 10^{11}$	60	$2.253 \cdot 10^{28}$
2	$3.226 \cdot 10^0$	10	$1.395 \cdot 10^4$	30	$5.642 \cdot 10^{13}$	70	$1.722 \cdot 10^{33}$
3	$8.012 \cdot 10^0$	12	$1.234 \cdot 10^5$	35	$1.496 \cdot 10^{16}$	80	$1.329 \cdot 10^{38}$
4	$2.353 \cdot 10^1$	14	$1.105 \cdot 10^6$	40	$4.044 \cdot 10^{18}$	90	$1.033 \cdot 10^{43}$
5	$6.383 \cdot 10^1$	16	$9.983 \cdot 10^6$	45	$1.093 \cdot 10^{21}$	100	$8.083 \cdot 10^{47}$
6	$1.898 \cdot 10^2$	18	$9.085 \cdot 10^7$	50	$2.989 \cdot 10^{23}$		
7	$5.354 \cdot 10^2$	20	$8.314 \cdot 10^8$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 2. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$2.618 \cdot 10^0$	8	$2.009 \cdot 10^6$	25	$2.628 \cdot 10^{21}$	60	$7.018 \cdot 10^{52}$
2	$1.510 \cdot 10^1$	10	$1.156 \cdot 10^8$	30	$7.896 \cdot 10^{25}$	70	$6.998 \cdot 10^{61}$
3	$9.887 \cdot 10^1$	12	$6.781 \cdot 10^9$	35	$2.404 \cdot 10^{30}$	80	$7.048 \cdot 10^{70}$
4	$6.864 \cdot 10^2$	14	$4.032 \cdot 10^{11}$	40	$7.391 \cdot 10^{34}$	90	$7.151 \cdot 10^{79}$
5	$4.924 \cdot 10^3$	16	$2.421 \cdot 10^{13}$	45	$2.289 \cdot 10^{39}$	100	ne ide
6	$3.606 \cdot 10^4$	18	$1.465 \cdot 10^{15}$	50	$7.132 \cdot 10^{43}$		
7	$2.678 \cdot 10^5$	20	$8.920 \cdot 10^{16}$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Primjer 3. Neekvidistantna “harmonijska” mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$6.342 \cdot 10^0$	8	$4.650 \cdot 10^9$	25	$9.112 \cdot 10^{39}$
2	$5.965 \cdot 10^1$	10	$6.033 \cdot 10^{12}$	30	$1.037 \cdot 10^{50}$
3	$7.532 \cdot 10^2$	12	$1.129 \cdot 10^{16}$	35	$2.649 \cdot 10^{60}$
4	$1.217 \cdot 10^4$	14	$2.878 \cdot 10^{19}$	40	$1.356 \cdot 10^{71}$
5	$2.404 \cdot 10^5$	16	$9.586 \cdot 10^{22}$	45	$1.277 \cdot 10^{82}$
6	$5.620 \cdot 10^6$	18	$4.041 \cdot 10^{26}$	50	$2.071 \cdot 10^{93}$
7	$1.518 \cdot 10^8$	20	$2.102 \cdot 10^{30}$		

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Za dani n , čvorovi “harmonijske” mreže su, redom,

$$x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2}, \quad x_n^{(n)} = \frac{1}{1},$$

pa zato i naziv “harmonijska”. Prvi čvor teži prema 0, kad $n \rightarrow \infty$.

Može se pokazati da je

$$\kappa_2(V^{(n+1)}) > (n+1)^{n+1}.$$

“Dobre” Vandermondeove matrice

Primjer 4. Postoje i “dobre” mreže čvorova za interpolaciju, ali njih treba tražiti u \mathbb{C} , a ne u \mathbb{R} .

Najvažniji primjer u praksi su **kompleksni** korijeni iz **jedinice** (promjena indeksa $i \rightarrow k$, jer je i imaginarna jedinica),

$$x_k^{(n)} = e^{2\pi ki/(n+1)} = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Vandermondeova matrica je skalarni višekratnik **unitarne** matrice $U^{(n+1)}$

$$V^{(n+1)} = \sqrt{n+1} \cdot U^{(n+1)},$$

a za njezinu uvjetovanost vrijedi $\kappa_2(V^{(n+1)}) = 1$.

Ovo je **podloga** za tzv. **brzu Fourierovu transformaciju** (FFT), “**najkorisniji**” algoritam u povijesti!

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, **nije potrebno** (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom p_n treba zapisati u nekoj **drugoj** bazi.

Po definiciji, **Lagrangeova baza** $\{\ell_k, k = 0, \dots, n\}$ u prostoru polinoma \mathcal{P}_n je **ona** baza za koju je

- matrica sustava za interpolaciju baš **jedinična** matrica, tj.
- za **koeficijente** interpolacijskog polinoma vrijedi $a_k = f_k$.

Dakle, **Lagrangeov** oblik interpolacijskog polinoma p_n je

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x).$$

Koeficijenti su **zadani podaci** f_k , a problem je **izračunati bazu!**

Lagrangeova baza — kardinalna interpolacija

U Lagrangeovoj bazi, elementi matrice A sustava interpolacije su $A_{ik} = \ell_k(x_i)$, za $i, k = 0, \dots, n$. Iz uvjeta $A = I$ dobivamo:

Polinomi ℓ_k Lagrangeove baze su rješenja posebnih problema interpolacije

$$\ell_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases}$$

u kojima su desne strane (zadane vrijednosti) upravo jedinični vektori e_{k+1} standardne baze u \mathbb{R}^{n+1} , za $k = 0, \dots, n$.

Raniji teorem \implies postoje jedinstveni polinomi $\ell_k \in \mathcal{P}_n$ koji zadovoljavaju ove — tzv. kardinalne uvjete interpolacije.

- Iz njih odmah slijedi da je $\{\ell_k, k = 0, \dots, n\}$ baza u \mathcal{P}_n (katkad se zove i kardinalna baza). Dokažite to!

Lagrangeova baza — eksplicitni oblik polinoma

Kardinalni uvjeti interpolacije za polinom ℓ_k

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases}$$

zadaju sve nultočke i još jednu vrijednost za ℓ_k . Odavde slijedi

$$\begin{aligned} \ell_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Iz ovog oblika vidimo da je za računanje vrijednosti polinoma $p_n(x)$ u Lagrangeovoj formi potrebno $O(n^2)$ operacija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

To je ubrzanje obzirom na $O(n^3)$ iz sustava, ali može još brže.

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

zovemo polinom čvorova.

Polinome $l_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'_k(x_k)}.$$

Nadalje, derivacijom ω kao produkta izlazi $\omega'_k(x_k) = \omega'(x_k)$, pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$, za $k = 0, \dots, n$ (za $x = x_k$ znamo da je $p_n(x_k) = f_k$). Broj operacija za svaku točku x je $O(n)$, tj. **linearan** u n .

Ipak, svrha **Lagrangeovog** oblika interpolacijskog polinoma

- **nije računanje** vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za **teoretske svrhe** (dokaze).

Ako znamo neke **informacije** o funkciji f , možemo napraviti i **ocjenu greške** interpolacijskog polinoma. **Razumno** u **praksi**:

- f je “**malo više**” netrivialno **glatka** od polinoma p_n .

Greška interpolacijskog polinoma

Teorem. Pretpostavimo da

- funkcija f ima $(n + 1)$ -u derivaciju na segmentu $[a, b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \dots, n$, su međusobno **različiti čvorovi interpolacije**, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- p_n je **interpolacijski polinom** za f u tim čvorovima.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, postoji točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \dots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za **grešku** interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Greška interpolacijskog polinoma

Dokaz. 1. slučaj — ako je $x = x_k$, tj. x je čvor interpolacije.

Tada je $e(x_k) = \omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan. Dakle, tvrdnja vrijedi!

2. slučaj — pretpostavimo da x nije čvor interpolacije.

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran (broj), čim x nije čvor.

Fiksirajmo x , a zatim definiramo funkciju $g = g_x$ u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t) \frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$

Greška interpolacijskog polinoma

Gledamo derivabilnost od g po t , s tim da su p_n i ω polinomi.

Zaključci:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f , i one su neprekidne kad su to i derivacije od f ;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g . Ako za t uvrstimo čvor x_k , dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k) \frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n + 2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Greška interpolacijskog polinoma

Sad iskoristimo da $g^{(n+1)}$ postoji na $[x_{\min}, x_{\max}] \subseteq [a, b]$.

Zbog $n \geq 0$, funkcija g je derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$, pa

- Rolleov teorem $\implies g'$ ima barem $n + 1$ nultočku unutar (x_{\min}, x_{\max}) .

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima barem $n + 2 - j$ nultočaka na (x_{\min}, x_{\max}) , za $j = 0, \dots, n + 1$;
- Na kraju, za $j = n + 1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ova nultočka ξ , naravno, ovisi o x , isto kao i funkcija g .

Za kraj dokaza, treba izračunati $g^{(n+1)}$ i uvrstiti nultočku ξ .

Greška interpolacijskog polinoma

Znamo da su p_n i ω polinomi odgovarajućih stupnjeva:

- p_n je polinom stupnja **najviše** n , pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja **točno** $n + 1$.

Onda je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n + 1)!.$$

Uvrštavanjem ovih relacija u izraz za $g^{(n+1)}(t)$, dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t) \frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n + 1)! \frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Greška interpolacijskog polinoma

Kad uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno,

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Uočite sljedeće **bitne** stvari u tvrdnji i dokazu:

- Dovoljno je **samo** da $f^{(n+1)}(x)$ **postoji**, za **svaki** $x \in [a, b]$, **bez daljnjih** zahtjeva (ograničenost, neprekidnost, i sl.).
- Faktor $\omega(x)$ osigurava **poništavanje** greške u čvorovima. **Lijepi** oblik \Rightarrow treba $n+1$ -a derivacija. Zato nam treba prijelaz na t i “trik” s x , kao **dodatnom** nultočkom za g .

Za drugačije glatkoće od f postoje tzv. **Jacksonovi teoremi**.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Pojačanje tvrdnje.

- Ako je $f^{(n+1)}$ ograničena na $[a, b]$, ili, jače,
- ako je $f \in C^{n+1}[a, b]$, tj. f ima neprekidnu $(n + 1)$ -u derivaciju na $[a, b]$,

onda vrijedi sljedeća “globalna” ocjena greške interpolacijskog polinoma p_n za funkciju f , u bilo kojoj točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n + 1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz prošlog teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost M_{n+1} .