

Numerička matematika

9. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Metoda najmanjih kvadrata:
 - Svojstva ortogonalnih polinoma.
 - Tročlana homogena rekurzija.
 - Nultočke ortogonalnih polinoma.
 - Christoffel–Darbouxov identitet.
- Računanje vrijednosti funkcija:
 - Polinomi i Hornerova shema.
 - Specijalne funkcije i generalizirana Hornerova shema.
 - Primjeri.
 - Razvoj po T_n i skoro minimaks aproksimacije.
 - Fourierov red.

Informacije — riješeni zadaci . . .

Zadaci. Na [mojoj](#) i [službenoj](#) web stranici možete naći

- [riješene](#) zadatke iz [neprekidnih najmanjih kvadrata](#) (pdf format).

Tamo ima [6](#) zadataka s detaljnim rješenjima, a neki zadaci imaju i [dva](#) rješenja.

Neprekidni najmanji kvadrati se

- [detaljno](#) rade na [predavanjima](#), skupa sa zadacima, a ovo je dodatak za [vježbanje](#).

Informacije

Konzultacije:

- samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Ortogonalni polinomi i tročlane rekurzije

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokažimo neka svojstva ortogonalnih polinoma koja smo već spomenuli.

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Pretpostavljamo da je p_n polinom stupnja n , za svaki $n \geq 0$.

Ako je f polinom stupnja m , tada vrijedi

$$f = \sum_{i=0}^m \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} p_i.$$

Dokaz. Provodi se Gram–Schmidtovim procesom ortogonalizacije na sustavu potencija $\{1, x, x^2, \dots\}$, pa se iskoristi da je f linearna kombinacija baze $\{1, x, \dots, x^m\}$. ■

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Dokaz može i preko linearne nezavisnosti ortogonalnih funkcija (v. prošli puta), pa to vrijedi i za familiju $\{p_n \mid n \geq 0\}$.

Početni komad te familije — skup $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ je

- linearno nezavisan skup od $m + 1$ funkcija,

- i svi elementi su polinomi stupnja manjeg ili jednakog m ,

pa je $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ baza u prostoru polinoma \mathcal{P}_m (dimenzija je $m + 1$).

Zbog $f \in \mathcal{P}_m$, slijedi da je f neka linearna kombinacija funkcija $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$.

Formula za koeficijente u toj kombinaciji (prikaz) slijedi iz ortogonalnosti polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$. ■

Ortogonalnost na polinome nižeg stupnja

Jednostavna **posljedica** prethodne tvrdnje je sljedeći rezultat, kojeg ćemo koristiti u nastavku.

Korolar. Neka je p_n **ortogonalni** polinom stupnja n , za $n \geq 0$, i neka je f bilo koji polinom stupnja **strogo manjeg** od n , tj. $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Onda je

$$\langle p_n, f \rangle = 0.$$

Drugim riječima,

• p_n je **ortogonalan** na **sve** polinome **nižeg** stupnja od n .

Dokaz. Stavimo $m = n - 1$, pa tvrdnja ide direktno iz **prikaza** u prošlom teoremu i **ortogonalnosti** $\langle p_n, p_i \rangle = 0$, za $i = 0, \dots, n - 1$. ■

Korist: za nalaženje p_n “na ruke” — izaberemo bazu u \mathcal{P}_{n-1} .

Nultočke ortogonalnih polinoma

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Tada svaki polinom p_n ima **točno n različitih** (jednostrukih) realnih **nultočaka** na otvorenom intervalu (a, b) .

Dokaz. Neka su x_1, x_2, \dots, x_m sve međusobno različite **nultočke** polinoma p_n za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u x_i .

Budući da je p_n stupnja n ,

- po **osnovnom teoremu algebre**, p_n ima **točno n** nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima **manje ili jednako n** , tj. znamo da je $m \leq n$.

Nultočke ortogonalnih polinoma

Polinom p_n onda možemo prikazati u obliku **produkta**

$$p_n(x) = h(x) (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi r_i moraju biti **neparni**, a
- polinom $h(x)$ **ne smije** promijeniti predznak na (a, b) .

Pretpostavimo da nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva ima **striktno manje** od n , tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Nultočke ortogonalnih polinoma

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x) (x - x_1) \cdots (x - x_m) \\ &= h(x) (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka x_1, \dots, x_m , ovaj polinom **ne mijenja** znak prolaskom kroz točke x_1, \dots, x_m (eksponenti $r_i + 1$ su **parni**).

Osim toga, $h(x)$ **ne mijenja** znak na (a, b) , tj.

● čitav polinom $p_n(x)B(x)$ **ne mijenja** znak na (a, b) .

Zato vrijedi

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x) dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije **fiksnog predznaka** (plus ili minus).

Nultočke ortogonalnih polinoma

S druge strane, prethodni integral je **skalarni produkt** polinoma B (stupnja $m < n$) i polinoma p_n (stupnja n).

- Svaki ortogonalni polinom p_n je **okomit** na sve polinome **nižeg stupnja** (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x) dx = \langle B, p_n \rangle = 0,$$

što je **kontradikcija**.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma B je bila **pogrešna**, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, p_n ima **točno** n nultočaka x_1, \dots, x_n u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti **jednostruke**, jer je $p'_n(x_i) \neq 0$. ■

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zadana je familija **ortogonalnih** polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ i neka su A_n i B_n **vodeća dva** koeficijenta polinoma p_n , tj.

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \dots,$$

s tim da je $A_n \neq 0$ (uz $B_0 = 0$). Tada p_n možemo napisati kao

$$p_n(x) = A_n (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Definiramo još i

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \quad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Uočite: a_n je **omjer** vodećih koeficijenata susjednih polinoma.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Teorem. Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija **ortogonalnih** polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za svaki $n \geq 1$ vrijedi **tročlana homogena** rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x),$$

pri čemu su **koeficijenti** u rekurziji dani formulama

$$b_n = a_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right) = -\frac{a_n}{\gamma_n} \langle x p_n, p_n \rangle,$$

$$c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \frac{a_n \gamma_n}{a_{n-1} \gamma_{n-1}}.$$

Za polinome p_n s **vodećim** koeficijentom $A_n = 1$, ove formule su još **jednostavnije**, jer je $a_n = 1$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Dokaz. Definiramo polinom G na sljedeći način — tako da **poništimo** vodeći koeficijent u p_{n+1} , tj. dobijemo $\deg G \leq n$.

$$\begin{aligned} G(x) &= p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x) \\ &= (A_{n+1} x^{n+1} + B_{n+1} x^n + \dots) \\ &\quad - \frac{A_{n+1}}{A_n} x (A_n x^n + B_n x^{n-1} + \dots) \\ &= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1} B_n}{A_n} \right) x^n + \dots \end{aligned}$$

Dakle, G je zaista stupnja **manjeg ili jednakog** n .

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Polinom G onda možemo napisati kao **linearnu kombinaciju** ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n , tj.

$$G(x) = d_n p_n(x) + \cdots + d_0 p_0(x).$$

Računanjem koeficijenata d_i (v. prvi teorem o prikazu) izlazi

$$d_i = \frac{\langle G, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{1}{\gamma_i} \left(\langle p_{n+1}, p_i \rangle - a_n \langle x p_n, p_i \rangle \right), \quad i = 0, \dots, n.$$

Treba još izračunati oba **skalarna produkta** na **desnoj** strani.

Za **prvi** produkt, iz **ortogonalnosti** odmah dobivamo

$$\langle p_{n+1}, p_i \rangle = 0, \quad i \leq n,$$

tj. tog člana **nema** u relaciji za koeficijente d_i , $i = 0, \dots, n$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Za drugi produkt $\langle xp_n, p_i \rangle$ dobivamo

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \int_a^b w(x)p_n(x)xp_i(x) dx = \langle p_n, xp_i \rangle.$$

Polinom $xp_i(x)$ je stupnja $i + 1$. Nadalje, polinom p_n je **ortogonalan** na sve polinome nižeg stupnja.

Dakle, za sve $i \leq n - 2$, stupanj polinoma $xp_i(x)$ je **manji ili jednak** $n - 1$, pa je

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \langle p_n, xp_i \rangle = 0, \quad i \leq n - 2.$$

Kombiniranjem ta dva rezultata, dobivamo

$$d_i = 0, \quad \text{za } 0 \leq i \leq n - 2.$$

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zbog toga je

$$G(x) = d_n p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Kad uvrstimo $G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x)$ i sredimo, izlazi

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + d_n) p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Dakle, vrijedi **tročlana rekurzija**, s $b_n = d_n$ i $c_n = -d_{n-1}$.

Iz **prve** relacije, uspoređivanjem **vodećih** koeficijenata funkcije G i funkcije s **desne** strane, slijedi prva formula za $b_n = d_n$.

Iz opće relacije za d_i , za koeficijente d_{n-1} i d_n dobivamo

$$d_i = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle x p_n, p_i \rangle = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle p_n, x p_i \rangle, \quad i = n-1, n.$$

Oдавде izlaze i preostale dvije formule. ■

Christoffel–Darbouxov identitet

Mnoge korisne relacije za ortogonalne polinome izvode se korištenjem sljedećeg teorema.

Teorem. (Christoffel–Darbouxov identitet.) Neka je $x \neq y$ i neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija **ortogonalnih** polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za njih vrijedi

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{\gamma_k} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{a_n \gamma_n (x - y)}.$$

Dokaz. Manipulacijom tročlane rekurzije. ■

Ako su x i y dvije **različite nultočke** polinoma p_{n+1} (ili p_n), desna strana je **nula**. Iz lijeve strane dobivamo tzv.

● **diskretnu** ortogonalnost ortogonalnih polinoma!

Christoffel–Darbouxov identitet u jednoj točki

Prijelazom na limes $y \rightarrow x$, dobivamo Christoffel–Darbouxov identitet u jednoj točki x

$$\sum_{k=0}^n \frac{(p_k(x))^2}{\gamma_k} = \frac{p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)}{a_n \gamma_n}.$$

Uz oznaku za vektor vrijednosti **normaliziranih** polinoma u točki x

$$\tilde{z}(x) = \left[\frac{p_0(x)}{\|p_0\|}, \dots, \frac{p_n(x)}{\|p_n\|} \right]^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

lijeva strana je jednaka $\|\tilde{z}(x)\|_2^2$.

Posebno, ako je x **nultočka** polinoma p_{n+1} (ili p_n), na **desnoj** strani ostaje samo **jedan** član!

To ćemo iskoristiti kod **Gaussovih** integracijskih formula.

Hornerova shema

Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Već ste upoznali **Hornerovu shemu** za izvrednjavanje **polinoma**.

- Postoji **vrlo slična** shema za izvrednjavanje **ortogonalnih polinoma**.
- Ponovimo svojstva **Hornerove** sheme za **polinome**.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom p_n stupnja n

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_n \neq 0,$$

kojemu treba izračunati **vrijednost** u zadanoj točki x_0 . To se može napraviti na više načina.

● Prvo, napravimo to **direktno** po zapisu, **potencirajući**.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se **rekurzivno**

$$x^i = x \cdot x^{i-1}.$$

Imamo li zapamćen x^{i-1} , lako je izračunati x^i — korištenjem samo **jednog** množenja.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Vrijednost polinoma u točki x_0 s pamćenjem potencija

```
sum = a[0];  
pot = 1;  
za i = 1 do n radi {  
    pot = pot * x_0;  
    sum = sum + a[i] * pot;  
};  
/* Na kraju je  $p_n(x_0) = \text{sum}$ . */
```

U unutarnjoj petlji javljaju se 2 množenja i 1 zbrajanje.
Petlja se izvršava n puta, pa ukupno imamo

$2n$ množenja + n zbrajanja.

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s **manje** množenja — ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots ((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvednjava polinom zove se **Hornerova shema**.

Hornerova shema

```
sum = a[n];  
za i = n - 1 do 0 radi {  
    sum = sum * x_0 + a[i];  
};  
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum. */
```

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Odmah je očito da smo korištenjem ovog algoritma broj množenja **prepolovili**, tj. da je njegova složenost

$$n \text{ množenja} + n \text{ zbrajanja.}$$

Hornerova shema je **optimalan** algoritam za izvrednjavanje zadanog **polinoma** u zadanoj **točki**.

👉 **Ulaz** algoritma su: **polinom** i **točka!**

Napomena: za izvrednjavanje **fiksnog** polinoma u **puno** točaka

👉 postoje i **brži** algoritmi — tzv. prethodna obrada koeficijenata, FFT.

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Za **opći** polinom (ulaz u Horner) automatski pretpostavljamo da je **većina** koeficijenata **različita** od **nule**.

Ako imamo **fiksni** polinom s **malo** koeficijenata različitih od **nule** — postoje i bolji algoritmi! Na primjer, polinom

$$p_{100}(x) = x^{100} + 1$$

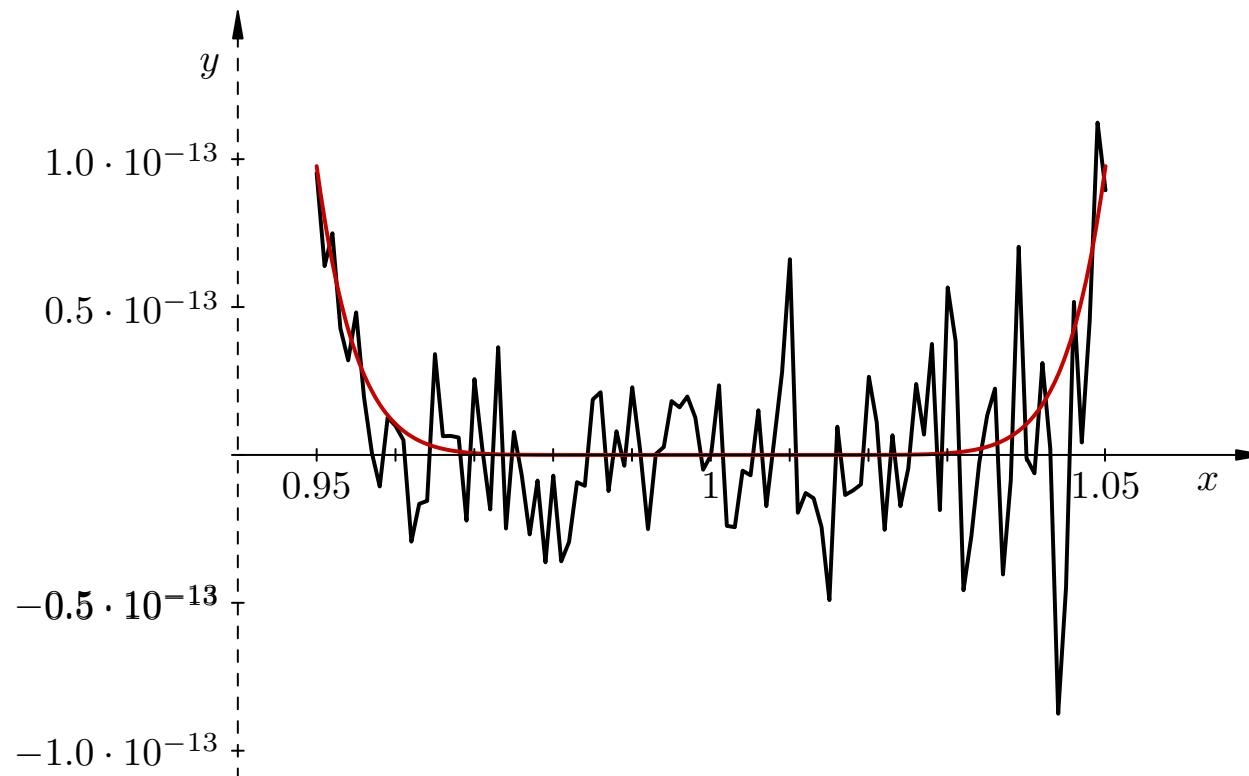
besmisleno je izvodnjavati Hornerovom shemom, jer bi to predugo trajalo (**binarno potenciranje** je brže). Sastavite odgovarajući algoritam.

Dodatna prednost **Hornerove** sheme:

- **Hornerova** shema može biti **stabilnija** nego direktno **potenciranje**, zbog redova veličine članova u sumi.

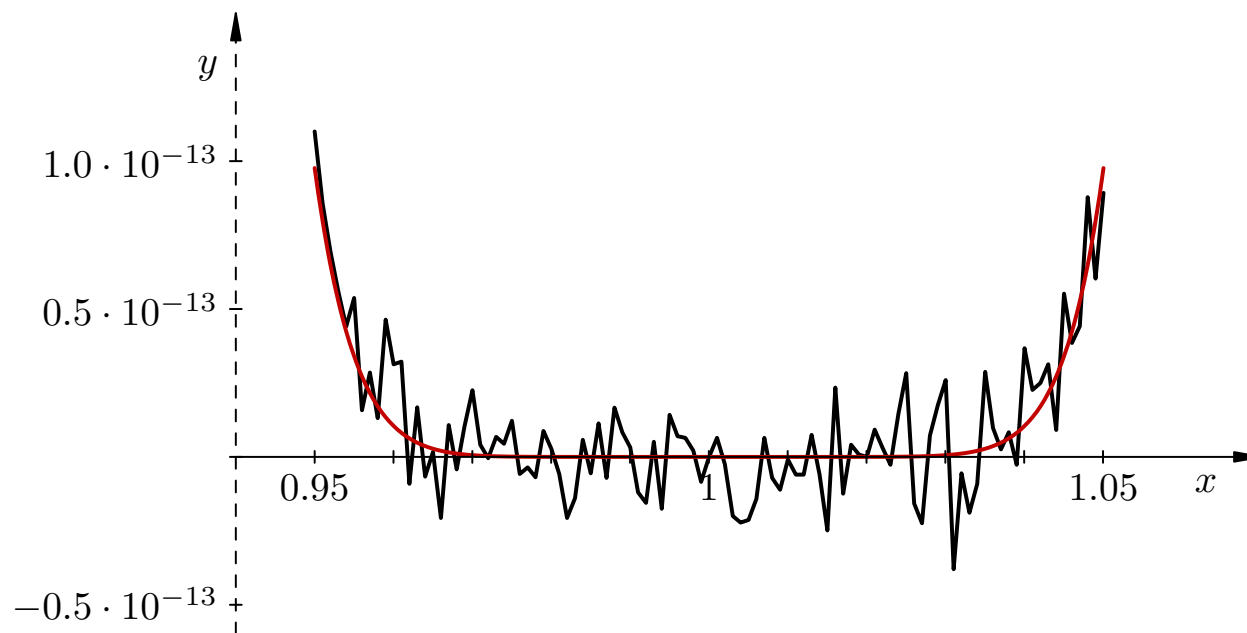
Ilustracija je na sljedeće **dvije** stranice.

Stabilnost direktnog potenciranja



Izvrednjavanje $(x - 1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x :
direktnim potenciranjem (dvostruka točnost).

Stabilnost Hornerove sheme



Izvednjavanje $(x - 1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x :
Hornerovom shemom (dvostruka točnost).

Hornerova shema “na ruke”

Hornerova shema “na ruke” radi se tako da se napravi tablica kojoj se

- u **gornjem** redu se popišu redom **svi** koeficijenti polinoma p_n — od a_n do a_0 ;
- donji** red se izračunava korištenjem gornjeg reda i točke x_0 .

Elemente **donjeg** reda, slijeva nadesno, označimo s $x_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0, r_0$, tako da se c_{n-1} nalazi **ispod** a_n :

| | | | | | |
|-------|-----------|-----------|---------|-------|-------|
| | a_n | a_{n-1} | \dots | a_1 | a_0 |
| x_0 | c_{n-1} | c_{n-2} | \dots | c_0 | r_0 |

Hornerova shema “na ruke”

Elementi donjeg reda računaju se ovako:

$$c_{n-1} := a_n,$$

$$c_{i-1} := c_i * x_0 + a_i, \quad i = n - 1, \dots, 1,$$

$$r_0 := c_0 * x_0 + a_0.$$

Dakle,

- vodeći koeficijent a_n se prepíše,
- svi ostali se računaju tako da se posljednji izračunati c_i pomnoži s x_0 , a zatim mu se doda a_i .

Na kraju je $p_n(x_0) = r_0$.

Hornerova shema “na ruke”

Primjer. Izračunajmo vrijednost polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki $x_0 = -1$.

Formirajmo tablicu:

| | | | | | | |
|----|---|----|----|---|----|---|
| | 2 | 0 | -1 | 4 | 0 | 1 |
| -1 | 2 | -2 | 1 | 3 | -3 | 4 |

Dakle, $p_5(-1) = 4$.



Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Pogledajmo **značenje** koeficijenata c_i koji se javljaju u donjem redu tablice.

Promatrajmo polinom koji dobijemo **dijeljenjem** polinoma p_n s polinomom stupnja 1 oblika $x - x_0$.

- **Kvocijent** ta dva polinoma nazovimo q_{n-1} — to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$,
- a **ostatak** je broj (mora biti stupnja manjeg od polinoma kojim dijelimo), koji označimo s b_0 .

Tada vrijedi

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je

$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Označimo koeficijente polinoma q_{n-1} s b_i , za $1 \leq i \leq n$,

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i.$$

Uvrstimo li to u relaciju za dijeljenje, **sređivanjem** koeficijenata uz odgovarajuće potencije, dobivamo

$$p_n(x) = b_n x^n + (b_{n-1} - x_0 b_n) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0 b_2) x + b_0 - x_0 b_1.$$

Za vodeći koeficijent b_n , odmah zaključujemo $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \quad i = n - 1, \dots, 0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Dakle, b_i možemo izračunati iz b_{i+1} rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija **istog oblika** kao za dobivanje c_i , samo s **pomaknutim indeksima**. Kako je na startu $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti **kvocijenta** i **ostatka** pri dijeljenju polinoma p_n linearnim faktorom $x - x_0$.

Primjer

Primjer. Podijelimo

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

linearnim polinomom $x + 1$.

Primijetite da je to ista tablica kao u prošlom primjeru, pa imamo

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Odatle lako čitamo

$$2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1 = (x + 1)(2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 3) + 4.$$



Algoritam za dijeljenje polinoma

Dijeljenje polinoma s $(x - x_0)$

```
b[n] = a[n];
```

```
za i = n - 1 do 0 radi {
```

```
    b[i] = b[i + 1] * x_0 + a[i];
```

```
};
```

```
/* Polinom-kvocijent: */
```

```
/*  $q_{n-1}(x) = b[n] \cdot x^{n-1} + \dots + b[2] \cdot x + b[1]$ . */
```

Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta?

Vrijedi

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - x_0)q_{n-1}(x) + r_0 \\ &= (x - x_0)[(x - x_0)q_{n-2}(x) + r_1] + r_0 \\ &= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1(x - x_0) + r_0 \\ &= \dots \\ &= r_n(x - x_0)^n + \dots + r_1(x - x_0) + r_0. \end{aligned}$$

Dakle, polinom p_n razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.

Koja su značenja koeficijenata r_i ?

Potpuna Hornerova shema

Usporedimo dobiveni oblik s **Taylorovim polinomom** oko x_0

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Dakle, **potpuna Hornerova shema** računa

• sve **Taylorove** koeficijente polinoma u zadanoj točki, tj. sve **derivacije** polinoma u zadanoj točki x_0 , **podijeljene** pripadnim **faktorijelima**.

Primjer

Primjer. Nađimo sve derivacije polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki -1 .

Formirajmo potpunu Hornerovu tablicu.

| | | | | | | |
|----|---|-----|----|-----|----|---|
| | 2 | 0 | -1 | 4 | 0 | 1 |
| -1 | 2 | -2 | 1 | 3 | -3 | 4 |
| -1 | 2 | -4 | 5 | -2 | -1 | |
| -1 | 2 | -6 | 11 | -13 | | |
| -1 | 2 | -8 | 19 | | | |
| -1 | 2 | -10 | | | | |
| -1 | 2 | | | | | |

Primjer

Odatle lako čitamo

$$p_5(-1) = 4,$$

$$p_5^{(2)}(-1) = -13 \cdot 2! = -26,$$

$$p_5^{(4)}(-1) = -10 \cdot 4! = -240,$$

$$p_5^{(1)}(-1) = -1 \cdot 1! = -1,$$

$$p_5^{(3)}(-1) = 19 \cdot 3! = 114,$$

$$p_5^{(5)}(-1) = 2 \cdot 5! = 240.$$



Algoritam za Taylorov razvoj polinoma

Taylorov razvoj polinoma oko x_0

Algoritam nalazi koeficijente r_i , (koeficijente Taylorovog razvoja) zadanog polinoma oko točke x_0 , korištenjem **jednodimenzionalnog** polja.

```
za i = 0 do n radi {
    r[i] = a[i];
};
za i = 1 do n radi {
    za j = n - 1 do i - 1 radi {
        r[j] = r[j + 1] * x_0 + r[j];
    };
};
```

Generalizirana Hornerova shema

Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki **ortogonalni** sustav funkcija na domeni aproksimacije.

- Razvoj funkcije f u red po ortogonalnim polinomima je očita **generalizacija** reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za **aproksimaciju** funkcije f , ako znamo da red **konvergira** prema f na nekoj domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

“Rezanjem” reda dobivamo aproksimaciju funkcije f

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima prve vrste

- za aproksimaciju elementarnih i “manje elementarnih” specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni — tzv. “skoro minimaks aproksimacije”.

Primjer ide malo kasnije!

Razvoji po ortogonalnim polinomima

Da bismo izračunali $f_N(x)$ moramo znati sve koeficijente a_n i sve funkcije p_n .

- Najčešće nemamo formulu za p_n , nego znamo da funkcije p_n zadovoljavaju jednostavnu tročlanu rekurziju po n .

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije:

- Ako unaprijed ne znamo N , onda se sumacija vrši unaprijed, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.
- Iz teorije aproksimacija, često je moguće unaprijed naći koliko članova N treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost. Tada se koristi generalizacija Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje f_N .

Izvednjavanje tročlanih rekurzija

Prisjetimo se, **ortogonalni** polinomi, ali i mnoge druge **specijalne** funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

s tim da su **poznate** “početne” funkcije p_0 i p_1 , i sve funkcije α_n , β_n , za $n \in \mathbb{N}$.

Definiramo **rekurziju** za koeficijente

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Generalizirana Hornerova shema

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{n=0}^N a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\ &= \sum_{n=0}^N (B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}) p_n(x) \\ &= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^N \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\ &= (\text{rastavimo indekse na } 1 \text{ do } N - 1 \text{ i ostale}) = \dots \end{aligned}$$

Generalizirana Hornerova shema

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1} (p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)) \\ &\quad + B_0 p_0(x) + B_1 p_1(x) + \alpha_0(x) B_1 p_0(x) \\ &= (\text{iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena}) \\ &= B_0 p_0(x) + B_1 (p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)). \end{aligned}$$

U algoritmu je uobičajeno napraviti **jedan** korak rekurzije za koeficijente B_n “na ruke”, tako da

🔴 algoritam počinje indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

Algoritam za generaliziranu Hornerovu shemu

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ (silazni algoritam)

$$B_1 = 0;$$

$$B_0 = a[N];$$

za $k = N - 1$ do 0 radi {

$$B_2 = B_1;$$

$$B_1 = B_0;$$

$$B_0 = a[k] - \alpha_k(x) * B_1 - \beta_{k+1}(x) * B_2;$$

};

$$f_N(x) = B_0 * p_0(x)$$

$$+ B_1 * (p_1(x) + \alpha_0(x) * p_0(x));$$

Ovaj algoritam se još zove i **Clenshaw**-ov algoritam.

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f'_N(x)$, do pripadnog algoritma dolazimo **deriviranjem** rekurzije za B_n .

- Koeficijente B_n shvatimo kao funkcije od x .
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}$, s tim da B'_n označava **derivaciju** B_n po x , u točki x .

“Formalnim” **deriviranjem** dobivamo **rekurziju** za B'_n

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B'_{N+2} = B'_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

$$B'_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \alpha_n(x)B'_{n+1} \\ - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Oдавде je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0,$$

vidimo da je $b_N = 0$, pa rekurziju za B'_n pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x)B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Ovo ima skoro **isti** oblik kao i rekurzija za B_n , osim **zamjene** a_n s b_n .

Vrijednost $f'_N(x)$ dobivamo deriviranjem $f_N(x)$,

$$f_N(x) = B_0p_0(x) + B_1(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)).$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odmah slijedi

$$\begin{aligned} f'_N(x) &= B_0 p'_0(x) + B'_0 p_0(x) \\ &\quad + B_1 (p'_1(x) + \alpha'_0(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p'_0(x)), \\ &\quad + B'_1 (p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)). \end{aligned}$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f'_N(x)$, dovoljno je znati samo **derivacije** “početnih” funkcija p'_0 i p'_1 , kao i α'_n i β'_n .

- 🔴 Za računanje $f'_N(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično **zajedno** računaju.
- 🔴 Rekurzije za B_n i B'_n provodimo u **istoj** petlji.

Algoritam za funkciju i derivaciju

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ i $f'_N(x)$

$$B_{-1} = 0;$$

$$B_{-0} = a[N];$$

$$B'_{-1} = 0;$$

$$B'_{-0} = 0;$$

za $k = N - 1$ do 0 radi {

$$B_{-2} = B_{-1};$$

$$B_{-1} = B_{-0};$$

$$B_{-0} = a[k] - \alpha_k(x) * B_{-1} - \beta_{k+1}(x) * B_{-2};$$

$$B'_{-2} = B'_{-1};$$

$$B'_{-1} = B'_{-0};$$

$$b = -\alpha'_k(x) * B_{-1} - \beta'_{k+1}(x) * B_{-2};$$

$$B'_{-0} = b - \alpha_k(x) * B'_{-1} - \beta_{k+1}(x) * B'_{-2};$$

};

Algoritam za funkciju i derivaciju

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 * p_0(x) \\ &\quad + B_1 * (p_1(x) + \alpha_0(x) * p_0(x)); \\ f'_N(x) &= B_0 * p'_0(x) + B'_0 * p_0(x) \\ &\quad + B_1 * (p'_1(x) + \alpha'_0(x) * p_0(x) \\ &\quad\quad + \alpha_0(x) * p'_0(x)) \\ &\quad + B'_1 * (p_1(x) + \alpha_0(x) * p_0(x)); \end{aligned}$$

Na isti način možemo izvesti i rekurzije za računanje **viših derivacija** $f_N^{(k)}(x)$, za $k \geq 2$.

- U praksi to **gotovo nikada** nije potrebno.
- Sve “korisne” familije funkcija p_n , $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju **diferencijalne** jednačbe **drugog** reda, s parametrom n .

Primjer: klasični ortogonalni polinomi!

Generalizirana Hornerova shema — primjeri

Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su **neparne**, a parni su **parne** funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za **nulti** i **prvi** polinom, tvrdnja očito vrijedi, jer je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja n), **parne**, a svi neparni, **neparne** funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ **suprotne** parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je **iste** parnosti kao T_{n-1} ,
- pa je T_{n+1} **iste** parnosti kao T_{n-1} . ■

Rekurzija za parne/neparne Čebiševljeve pol.

Isti dokaz kao za **parnost/neparnost** Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se **parne** funkcije razvijaju po **parnim**, a **neparne** po **neparnim** Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su **parne/neparne** funkcije, korisno je imati rekurziju samo za **parne/neparne** polinome.

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = 0$$

$$T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) = 0,$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove. Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su **prva dva parna** polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za **neparne** polinome, rekurzija se dobiva na sličan način.

Pokažite da je rekurzija za **neparne** Čebiševljeve polinome **istog** oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za **parne/neparne** polinome izvodi se na **isti** način.

Napomena. Rekurziju za **parne/neparne** Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti, korištenjem

- **adicijske** formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

odnosno, $T_n(x) = \cos(n\varphi)$, uz $x = \cos \varphi$.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po **parnim** normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k} \left(\frac{2x}{\pi} \right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

| k | a_k | k | a_k |
|-----|-------------------------|-----|-------------------------|
| 0 | 0.47200121576823476745 | 6 | 0.00000000021934576590 |
| 1 | -0.49940325827040708740 | 7 | -0.00000000000074816487 |
| 2 | 0.02799207961754761751 | 8 | 0.00000000000000193230 |
| 3 | -0.00059669519654884650 | 9 | -0.00000000000000000391 |
| 4 | 0.00000670439486991684 | 10 | 0.00000000000000000001 |
| 5 | -0.00000004653229589732 | | |

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x . Testirati za razne n i x .
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x .

Kosinus je parna funkcija, pa je treba aproksimirati parnim funkcijama.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije **kosinus** na intervalu $[-1, 1]$ po **parnim** Čebiševljevim polinomima.

U algoritmu za generaliziranu Hornerovu shemu treba uvrstiti da je za parne Čebiševljeve polinome

$$\alpha(x) = 2(1 - 2x^2), \quad \beta(x) = 1,$$

$$p_0(x) = T_0(x), \quad p_1(x) = T_2(x).$$

Koeficijenti a_k u razvoju **brzo padaju**, pa su **greške** u aproksimaciji vrlo **male** i približno jednake **prvom odbačenom** članu.

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0, 1]$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0, 1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x - 1)$.

Sami izvedite rekurziju za $T_k^*(x)$ i pripadnu generaliziranu Hornerovu shemu.

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

| k | a_k | k | a_k |
|-----|-------------------------|-----|--------------------------|
| 0 | 0.37645281291919543163 | 13 | 0.00000000001717587317 |
| 1 | 0.34314575050761980479 | 14 | -0.00000000000273642009 |
| 2 | -0.02943725152285941438 | 15 | 0.00000000000043819577 |
| 3 | 0.00336708925556438925 | 16 | -0.00000000000007048360 |
| 4 | -0.00043327588861004446 | 17 | 0.000000000000001138172 |
| 5 | 0.00005947071198957983 | 18 | -0.000000000000000184431 |
| 6 | -0.00000850296754120286 | 19 | 0.000000000000000029978 |
| 7 | 0.00000125046736220057 | 20 | -0.000000000000000004886 |
| 8 | -0.00000018772799565082 | 21 | 0.000000000000000000798 |
| 9 | 0.00000002863025064840 | 22 | -0.000000000000000000131 |
| 10 | -0.00000000442095698068 | 23 | 0.000000000000000000021 |
| 11 | 0.00000000068956027323 | 24 | -0.000000000000000000004 |
| 12 | -0.00000000010845068551 | 25 | 0.000000000000000000001 |

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x . Testirati za razne n i x .
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x .

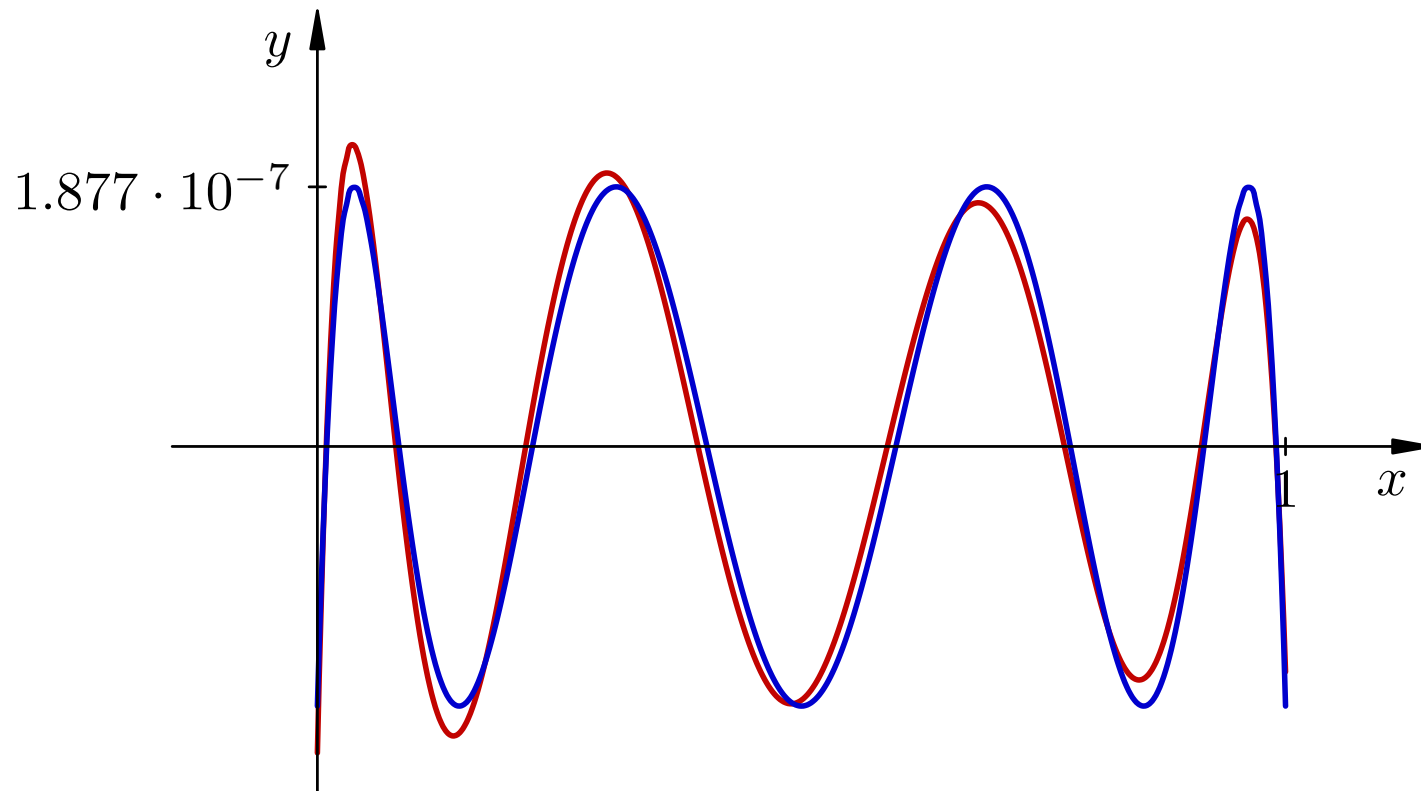
U prethodnom razvoju za $\ln(x + 1)$ uzmemo samo članove do indeksa 7, tj. neka je prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$.

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^7 a_k T_k^*(x), \quad e_7(x) = a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).$$

Razvoj $\ln(x + 1)$ po Čebiševljevim polinomima

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8T_8^*(x)$ plavom bojom.



Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Konačno, treba reći kako se **dobivaju** koeficijenti a_k u ovakvom razvoju.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da radimo na **standardnom** intervalu $[-1, 1]$.

Relacija **ortogonalnosti** za **Čebiševljeve** polinome **prve** vrste ima oblik

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x) T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq \ell, \\ \pi, & \text{za } k = \ell = 0, \\ \pi/2, & \text{za } k = \ell \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da je $\|T_0\|^2 = 2 \|T_k\|^2$, za bilo koji $k \geq 1$.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Zato se **razvoj** zadane funkcije f po T_k obično piše u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

Pripadne formule za **koeficijente** u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati **analitički**

🔴 tek za **poneke** funkcije f .

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Aproksimacija f_n funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata je

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k T_k(x).$$

Za **numeričko** računanje koeficijenata a_k , za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss–Čebiševljeva integracija reda **većeg** od n ,
- **diskretna** ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u **nultočkama** ili **ektremima** Čebiševljevog polinoma T_{N+1} , za $N \geq n$.

Ova dva pristupa su **ekvivalentna**, za razvoje po T_k i općenito.

Prednost razvoja po $T_k =$ nultočke T_{N+1} se **lako** računaju!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi T_k zapravo **kosinusi**, za njih vrijede

- vrlo slične relacije **diskretne** ortogonalnosti kao kod **trigonometrijskih** funkcija (v. malo kasnije).

Neka su x_j sve različite **nultočke** Čebiševljevog polinoma T_{N+1} , tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos \vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za Čebiševljeve polinome na skupu **nultočaka** $\{x_0, \dots, x_N\}$ vrijede sljedeće relacije **ortogonalnosti**

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N T_k(x_j) T_\ell(x_j) &= \sum_{j=0}^N \cos(k\vartheta_j) \cos(\ell\vartheta_j) \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Skica **dokaza**: **Produkt** kosinusa pretvorimo u **zbroj** kosinusa.

- Pripadne **sume** računaju se prijelazom na **kompleksne** brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao **geometrijske** sume ($N+1$ -i korijeni iz jedinice).

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Dakle, $\{T_0, T_1, \dots, T_N\}$ je **ortogonalna** baza u prostoru polinoma \mathcal{P}_N obzirom na **diskretni** skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^N f(x_j) g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija **ne možemo** dodati **sljedeći** Čebiševljev polinom T_{N+1} , jer je

- njegov **vektor** vrijednosti u zadanim točkama **nul-vektor**.

Napomena: **Unitarni** prostor “događaja” je \mathbb{R}^{N+1} , s tim da

- svakoj **funkciji** f pridružujemo
- **vektor** njezinih vrijednosti u točkama x_0, \dots, x_N .

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Neka je f_n aproksimacija za f po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^n d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \|T_k\|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_k(x_j), \quad k = 0, \dots, N.$$

Napomena: koeficijenti d_k ovise o N , samo to nije posebno označeno!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za zadane f i N , ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_k(x_j), \quad k = 0, \dots, N,$$

se **jednostavno** računaju!

Ako koeficijenti a_k relativno **brzo** padaju, onda za relativno **male** vrijednosti N (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se a_k i d_k **podudaraju** na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije **diskretne** ortogonalnosti vrijede i u **ekstremima** polinoma T_{N+1} .

Računanje koeficijenata iz diskretne ortog.

Standardno se koristi $N + 1 = 2^m$. Za fiksni N (odnosno, m):

- tablica vrijednosti $f(x_j)$ se pripremi **jednom**, za sve k ,
- vrijednosti $T_k(x_j)$ mogu se računati **direktno** preko **cos**, ili iz pripremljene **tablice** svih potrebnih kosinusa.

Literatura:

- Luke Y. L., “**Mathematical functions and their approximations**”, Academic Press, 1975.

Ilustracija **brzine** konvergencije koeficijenata $d_k^{(N+1)}$ prema pravim koeficijentima a_k , u ovisnosti o **broju** točaka $N + 1$:

- `09_PROGS\TN_COEF\tn_28.out` za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$,
- `09_PROGS\TN_COEF\tn_04.out` za $\ln(1 + x)$ na $[0, 1]$.

Koeficijenti za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$

Koeficijent a_0 (uz T_0) i njegove aproksimacije:

| $N+1$ | $d_0^{(N+1)}$ | greška |
|-------|-------------------------|---------------|
| 1 | 1.00000 00000 00000 000 | $-5.2800E-01$ |
| 2 | 0.44401 58403 26213 234 | $2.7985E-02$ |
| 4 | 0.47199 45113 73366 783 | $6.7044E-06$ |
| 8 | 0.47200 12157 68232 835 | $1.9320E-15$ |
| 16 | 0.47200 12157 68234 768 | $-3.2526E-19$ |
| 32 | 0.47200 12157 68234 768 | $-3.5237E-19$ |

$a_0 = 0.47200 12157 68234 767$

Koeficijent a_8 (uz T_{16}) i njegove aproksimacije:

| $N+1$ | $d_8^{(N+1)}$ | greška |
|-------|-------------------------|--------------|
| 32 | 0.00000 00000 00001 932 | $9.5100E-20$ |

$a_8 = 0.00000 00000 00001 932$

Koeficijenti za $\ln(x + 1)$ na $[0, 1]$

Koeficijent a_0 (uz T_0^*) i njegove aproksimacije:

| $N+1$ | $d_0^{(N+1)}$ | greška |
|-------|-------------------------|----------------------|
| 1 | 0.40546 51081 08164 382 | $-2.9012\text{E}-02$ |
| 2 | 0.37688 59011 88190 076 | $-4.3309\text{E}-04$ |
| 4 | 0.37645 30006 47120 599 | $-1.8773\text{E}-07$ |
| 8 | 0.37645 28129 19265 915 | $-7.0484\text{E}-14$ |
| 16 | 0.37645 28129 19195 432 | $-1.0842\text{E}-19$ |
| 32 | 0.37645 28129 19195 432 | $-1.0842\text{E}-19$ |

$a_0 = 0.37645 28129 19195 432$

Koeficijent a_{16} (uz T_{16}^*) i njegove aproksimacije:

| $N+1$ | $d_{16}^{(N+1)}$ | greška |
|-------|-------------------------|---------------------|
| 32 | 0.00000 00000 00070 484 | $2.5896\text{E}-21$ |

$a_{16} = 0.00000 00000 00070 484$

Trigonometrijski polinomi

— primjeri

Razvoj periodičkih funkcija

Za aproksimaciju **periodičkih funkcija** standardno koristimo **Fourierove** redove.

- Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je f **periodička** funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$.

Fourierov red za funkciju f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdje su

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Napomena. Granice integracije mogu (zbog periodičnosti) biti bilo koji $c, c + 2\pi!$

Konvergencija Fourierovog reda

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

Teorem (Dirichlet). Pretpostavimo da je

- (a) f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u tim točkama može imati i više vrijednosti),
- (b) f je periodična s periodom 2π ,
- (c) f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Tada red Fourierov red konvergira prema

- (1) $f(x)$, ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,
- (2) $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ako u točki x funkcija ima prekid.

Razvoj periodičkih funkcija

Pretpostavimo da su koeficijenti a_n i b_n poznati i da želimo izračunati aproksimaciju **trigonometrijskim polinomom**

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx),$$

gdje je N unaprijed **zadan** (zanemarimo poseban “status” a_0).

Trigonometrijski polinom sastoji se iz dva dijela: kosinusnog i sinusnog (to ćemo iskoristiti u algoritmu).

Nadalje, Fourierov red

- **parne** funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo **kosinusni** dio, a
- **neparne** funkcije $f(x) = -f(-x)$ samo **sinusni** dio razvoja.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f parna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(nx).$$

- U direktnoj sumaciji trebamo N računanja funkcije \cos , za $\cos(nx)$, uz $n \geq 1$.
- Možemo koristiti i generaliziranu Hornerovu shemu, samo treba naći tročlanu homogenu rekurziju za

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja **sumu** kosinusa pretvara u **produkt**

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right).$$

Ako stavimo $a = (n+1)x$ i $b = (n-1)x$, dobivamo

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2 \cos(nx) \cos x,$$

pa tražena **rekurzija** ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2 \cos x p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u općoj tročlanoj rekurziji treba uzeti

$$\alpha_n(x) = -2 \cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B_n = a_n + 2 \cos x B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 (p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)) \\ &= B_0 \cdot 1 + B_1 (\cos x - 2 \cos x \cdot 1) \\ &= B_0 - B_1 \cos x. \end{aligned}$$

Sad imamo sve elemente za generaliziranu Hornerovu shemu.

Trigonometrijski polinom za parne funkcije

Fourierov “red” parne funkcije

```
B_1 = 0;  
B_0 = a[N];  
alpha = 2 * cos(x);  
za k = N - 1 do 0 radi {  
    B_2 = B_1;  
    B_1 = B_0;  
    B_0 = a[k] + alpha * B_1 - B_2;  
};  
f_N(x) = B_0 - 0.5 * alpha * B_1;
```

Algoritam funkciju `cos` računa **samo** jednom.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f neparna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx).$$

Zbog sume koja ide od 1 treba biti oprezan. Zgodniji zapis je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

Sad očito treba definirati

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja **sumu** sinusa pretvara u **produkt**

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right),$$

Ako stavimo $a = (n+2)x$ i $b = nx$, dobivamo

$$\sin((n+2)x) + \sin(nx) = 2 \sin((n+1)x) \cos x,$$

pa tražena **rekurzija** ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2 \cos x p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je potpuno isti oblik kao i za parne funkcije, odnosno za $p_n(x) = \cos(nx)$.

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Rekurzija za B_n ima **isti** oblik kao prije, samo starta od $N - 1$

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_{n+1} + 2 \cos x B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N - 1, \dots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i
 $p_1(x) = \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 (p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)) \\ &= B_0 \cdot \sin x + B_1 (2 \sin x \cos x - 2 \cos x \cdot \sin x) \\ &= B_0 \sin x. \end{aligned}$$

Algoritam napišite sami.

Razvoj periodičkih funkcija

Za opći Fourierov red koji ima i parni i neparni dio, treba spojiti prethodne algoritme.

Problem. Neparni je za 1 kraći, jer starta s $N - 1$.

Rješenje. Umjetno definiramo $b_0 = 0$ i pišemo

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n \sin(nx).$$

Zatim uzmemo

$$p_n(x) = \sin(nx).$$

Razvoj periodičkih funkcija

Rekurzija za p_n je ista, a za B_n vrijedi “produljena” rekurzija

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_n + 2 \cos x B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \dots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 (p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)) \\ &= B_0 \cdot 0 + B_1 (\sin x - 2 \cos x \cdot 0) \\ &= B_1 \sin x. \end{aligned}$$

To pokazuje da B_0 uopće ne treba računati, ali baš to i očekujemo, kad smo rekurziju **pomakli** za jedan indeks naviše!

Fourierov red za $x + |x|$

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x + |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

može se razviti u Fourierov red

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu svih članova do uključivo $\cos(nx)$, odnosno, $\sin(nx)$.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$ i pogrešku $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ za razne n .

Fourierov red za $x + |x|$

Napomena. Fourierov red konvergira prema **prekidnoj** funkciji

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ 2x, & x \in [0, \pi), \\ \pi, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Ova funkcija je “periodičko” proširenje od f , s tim da ima **korektnu** vrijednost u točki prekida.

Koeficijente u Fourierovom razvoju možemo računati **direktno**

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos(kx) dx.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Sad razlikujemo dva slučaja $k = 0$ i $k \neq 0$. Za $k = 0$ imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \, dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Za $k \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos(kx) \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 \, dx \\ dv = \cos(kx) \, dx & v = \sin(kx)/k \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) \, dx \right) = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2\pi} ((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

Fourierov red za $x + |x|$

Odatle odmah slijedi da je

$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, \quad a_{2k} = 0.$$

Za b_k , budući da je $k \neq 0$, imamo

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin(kx) dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 dx \\ dv = \sin(kx) dx & v = -\cos(kx)/k \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2x}{k} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi}{k} \cos(k\pi) + \frac{2}{k^2} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Fourierov red za $x + |x|$

Posljednji rezultat možemo zapisati i kao

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

Koeficijente u Fourierovom redu mogli smo računati zbrajanjem Fourierovih razvoja funkcija

- x na $[-\pi, \pi]$, (**neparna** funkcija), pa razvoj ima samo b_n ,
- $|x|$ na $[-\pi, \pi]$, (**parna** funkcija), pa razvoj ima samo a_n .

Fourierov red za $x + |x|$

Za vježbu pokažite da je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$x = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

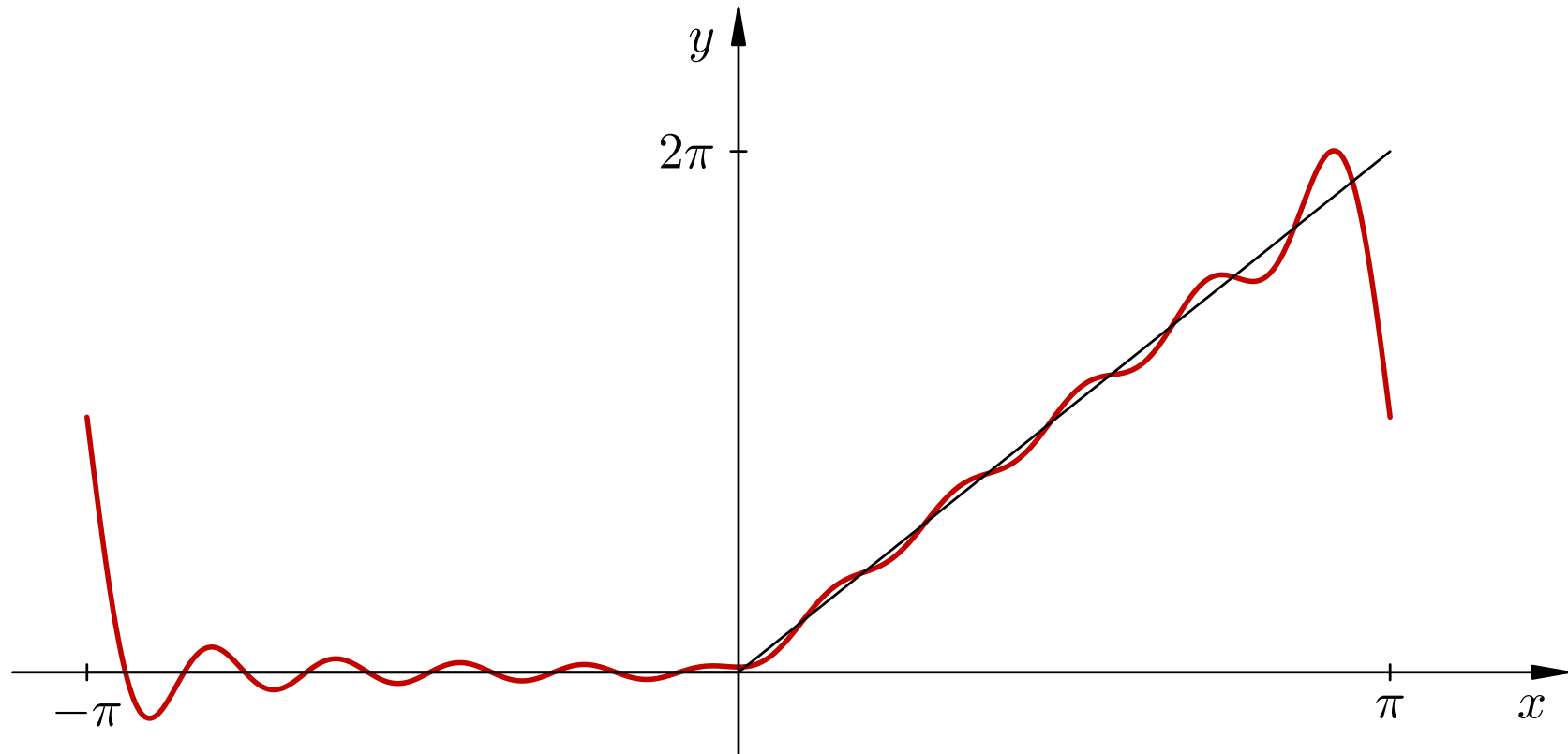
Zbog **neprekidnosti** periodičkog proširenja za $|x|$,

• koeficijenti a_k u razvoju trnu kao k^{-2} .

Periodičko proširenje za x ima **prekid**, pa

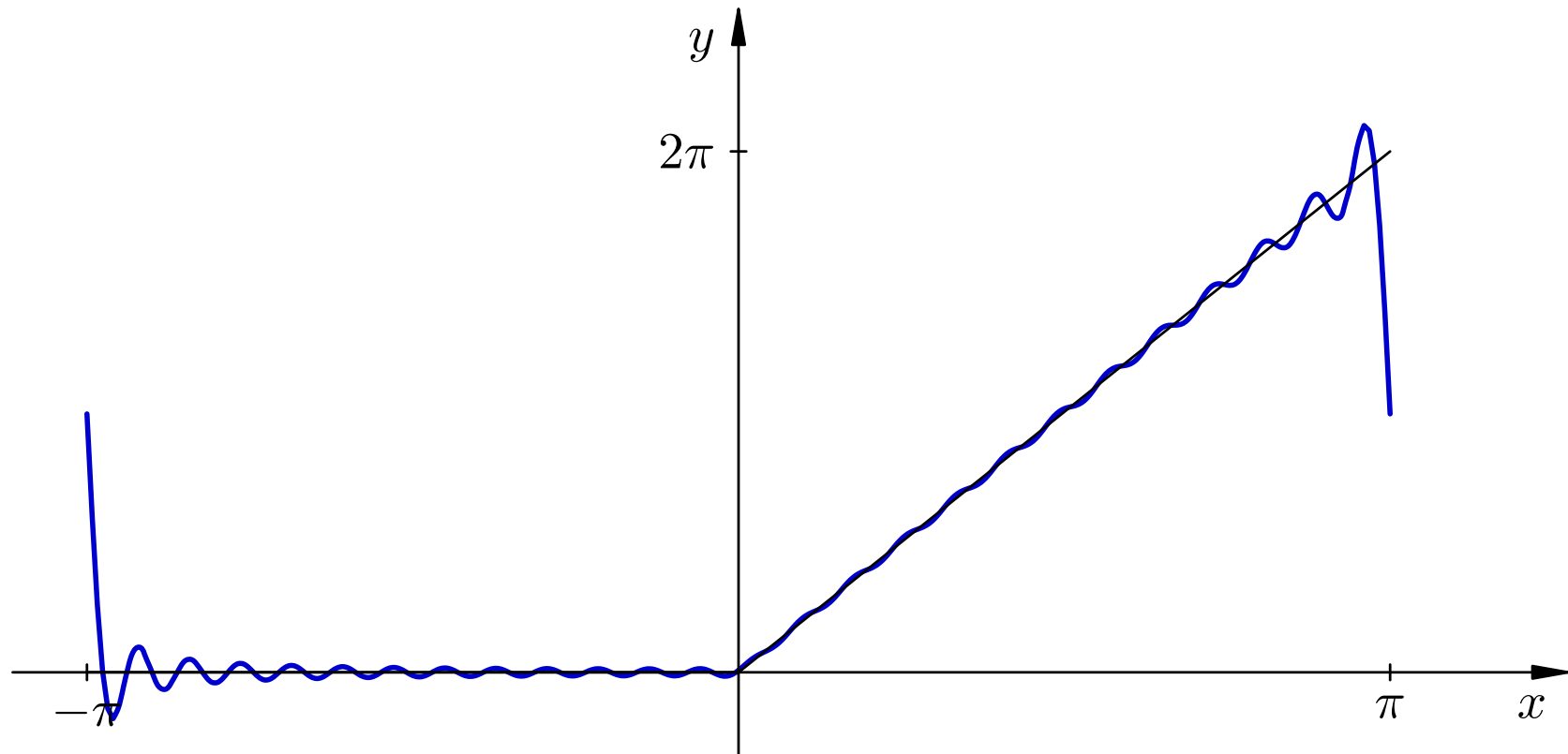
• koeficijenti b_k u razvoju trnu kao k^{-1} .

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



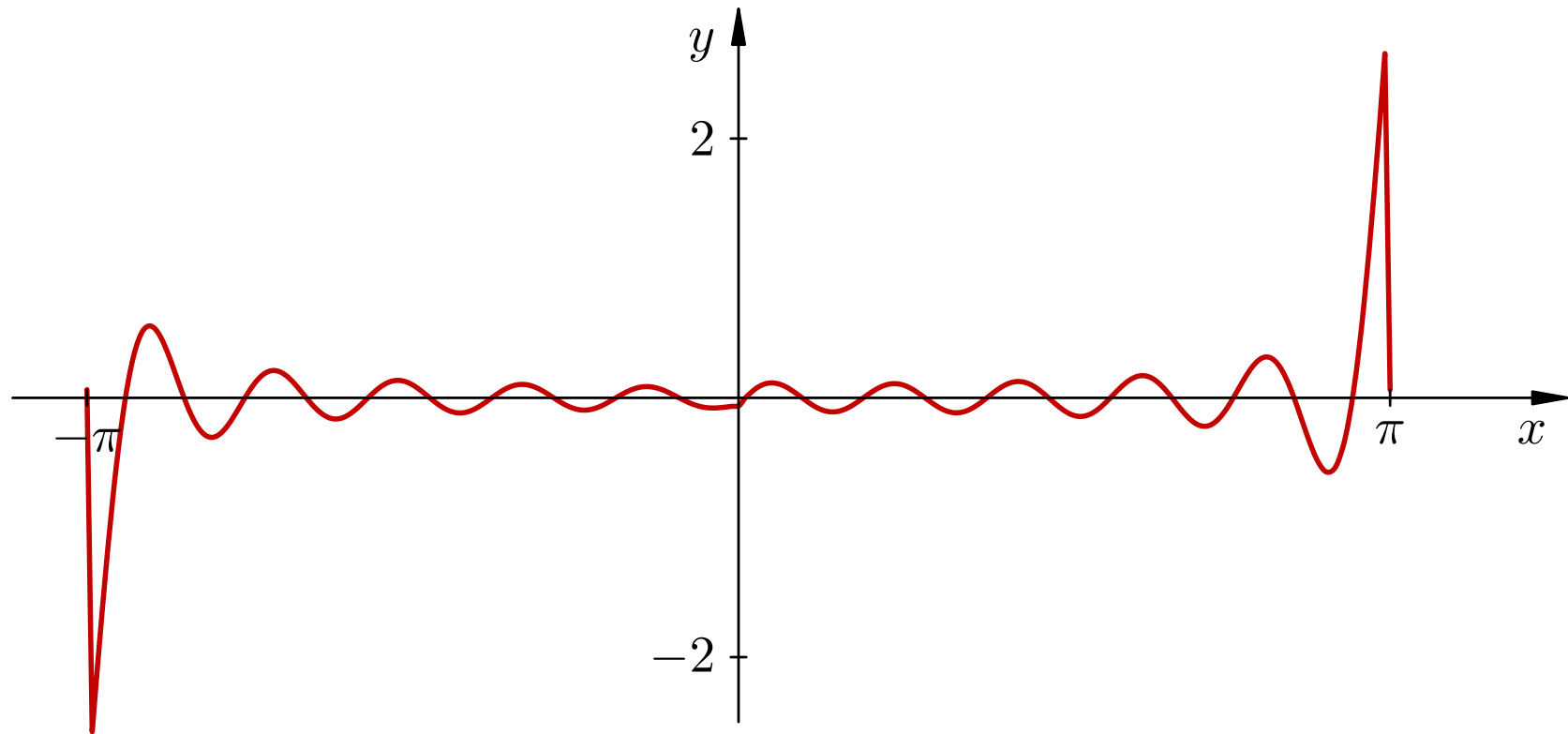
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



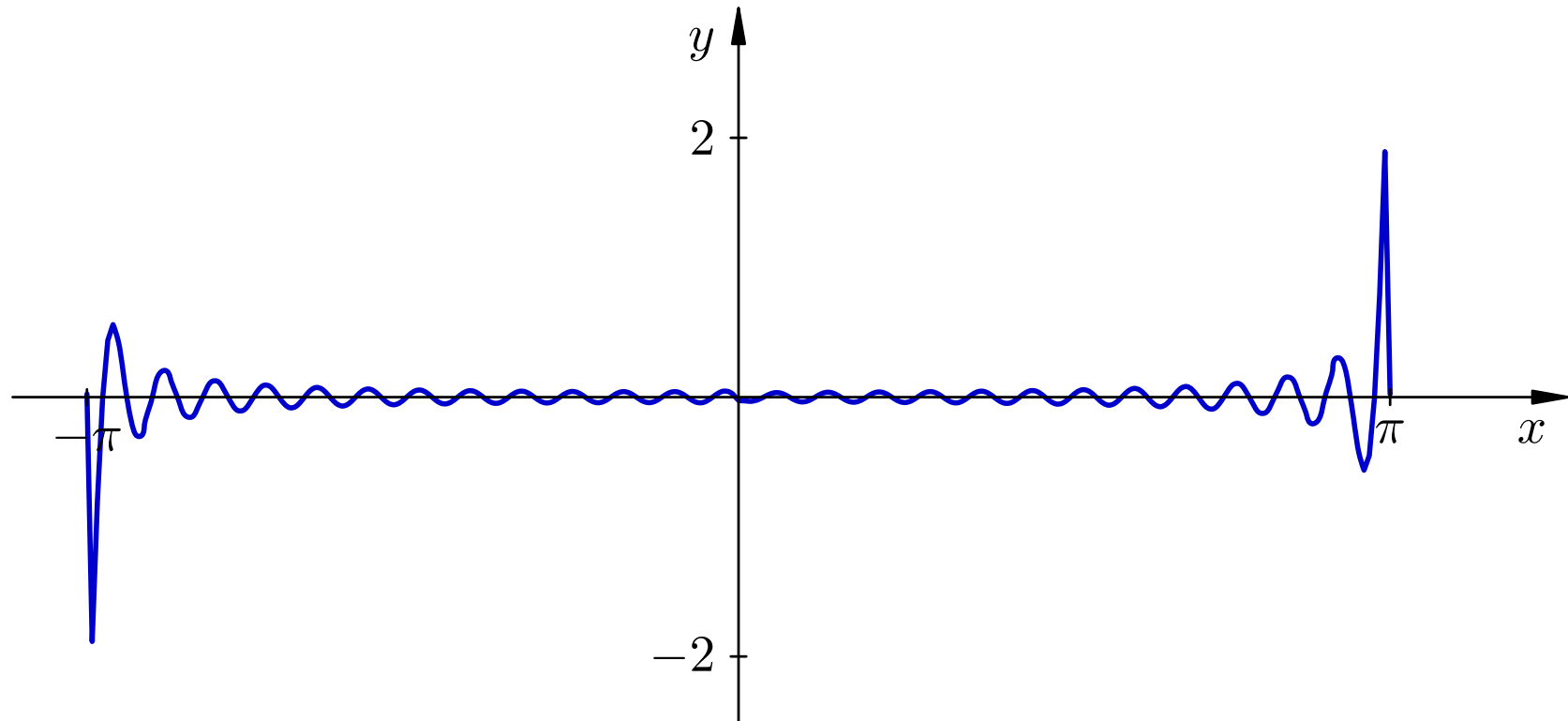
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za **trigonometrijske** funkcije, također, vrijede relacije **diskretne** ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome T_n .

Na mreži od $N + 1$ točaka $0, 1, \dots, N$, uz oznake $x_j = j$ i

$$x_{k,j} = \frac{2\pi}{N+1} k x_j, \quad x_{l,j} = \frac{2\pi}{N+1} l x_j, \quad j = 0, \dots, N,$$

vrijede sljedeće relacije **diskretne** ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\sum_{j=0}^N \sin x_{k,j} \sin x_{l,j} = \begin{cases} 0, & k \neq l \text{ i } k = l = 0, \\ (N+1)/2, & k = l \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^N \sin x_{k,j} \cos x_{l,j} = 0,$$

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

$$\sum_{j=0}^N \cos x_{k,j} \cos x_{\ell,j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \\ N+1, & k = \ell = 0, \end{cases}$$

uz uvjet da je $k + \ell \leq N$.

Dokaz ovih relacija ide još malo **jednostavnije** nego za Čebiševljeve polinome.

- **Produkt** trigonometrijskih funkcija treba pretvoriti u **zbroj** ili **razliku**.
- Pripadne **sume** računaju se prijelazom na **kompleksne** brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao **geometrijske** sume.

Stabilnost rekurzija

— primjeri

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Za rekurzije oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

možemo zaključiti da opasnost od **kraćenja**, pa onda i **gubitak** točnosti nastupa kad niz vrijednosti

$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_N(x)$$

naglo pada po apsolutnoj vrijednosti.

Dva su pitanja na koja bi bilo zgodno odgovoriti.

- Kako se tada ponaša **silazni** algoritam za računanje f_N ?
- Može li se nekim trikom, poput okretanja rekurzije, **popraviti** stabilnost?

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Umjesto općeg odgovora, koji bi koji zahtijevao dublju analizu, ilustrirajmo situaciju na jednom klasičnom primjeru.

Primjer. Neka je $p_n(x) = e^{nx}$. Ove funkcije generiraju tzv. “**eksponencijalne polinome**” (umjesto x^n , imamo eksponencijalne funkcije e^{nx})

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n e^{nx}.$$

Za takve p_n možemo sastaviti **razne** rekurzije.

Dvočlana ima oblik

$$p_{n+1}(x) - e^x p_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stabilnost eksponencijalnih polinoma

Tročlana homogena rekurzija je slična onima za trigonometrijske funkcije,

$$p_{n+1}(x) - 2 \operatorname{ch} x p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ kosinus hiperbolni od x .
Očito je da $p_n(x)$

- **monotono raste** za $x > 0$
- **monotono pada** za $x < 0$.

Testirajmo stabilnost ove rekurzije i pripadne generalizirane Hornerove sheme za računanje $p_n(x) = e^{nx}$ u točkama $x = 1$ i $x = -1$.

- `09_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_p.out` za $x = 1$,
- `09_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_n.out` za $x = -1$.

Tročlana rekurzija za e^{nx} u točki $x = 1$

Izračunate vrijednosti za e^n (tip **extended**, $u \approx 5.42 \cdot 10^{-20}$).
Crvene znamenke su **pogrešne** (eventualno zadnja i to za 1)!

| n | uzlazni algoritam | generalizirani Horner |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| 1 | 2.71828182845904524E+00 | 2.71828182845904524E+00 |
| 2 | 7.38905609893065023E+00 | 7.38905609893065023E+00 |
| 3 | 2.00855369231876677E+01 | 2.00855369231876677E+01 |
| .. | ... | ... |
| 20 | 4.85165195409790279E+08 | 4.85165195409790278E+08 |
| 21 | 1.31881573448321470E+09 | 1.31881573448321470E+09 |
| 22 | 3.58491284613159157E+09 | 3.58491284613159157E+09 |
| 23 | 9.74480344624890261E+09 | 9.74480344624890261E+09 |
| 24 | 2.64891221298434723E+10 | 2.64891221298434723E+10 |
| .. | ... | ... |
| 50 | 5.18470552858707248E+21 | 5.18470552858707248E+21 |

Tročlana rekurzija za e^{nx} u točki $x = -1$

Izračunajte vrijednosti za e^{-n} (tip `extended`, $u \approx 5.42 \cdot 10^{-20}$).
Crvene znamenke su pogrešne!

| n | uzlazni algoritam | generalizirani Horner |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| 1 | 3.67879441171442322E-01 | 3.67879441171442322E-01 |
| 2 | 1.35335283236612692E-01 | 1.35335283236612693E-01 |
| 3 | 4.97870683678639431E-02 | 4.97870683678639445E-02 |
| .. | ... | ... |
| 20 | 2.06312875362352662E-09 | 2.03726813197135925E-09 |
| 21 | 7.63625006000114140E-10 | 8.14907252788543701E-10 |
| 22 | 2.93541164415374309E-10 | 4.65661287307739258E-10 |
| 23 | 1.42290366660849133E-10 | 9.31322574615478516E-10 |
| 24 | 1.45589854214859448E-10 | 1.86264514923095703E-09 |
| .. | ... | ... |
| 50 | 2.11071892033453648E+01 | 5.12000000000000000E+02 |