

Numerička matematika

12. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Numerička integracija (nastavak):
 - Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula.
- Rješavanje nelinearnih jednažbi:
 - Općenito o iterativnim metodama.
 - Brzina konvergencije i pojam reda konvergencije.
 - Metoda raspolavljanja — bisekcije.
 - Regula falsi — metoda pogrešnog položaja.
 - Konstrukcija iterativnih metoda za nultočke.
 - Metoda tangente — Newtonova metoda.
 - Metoda sekante.

Informacije

Konzultacije:

- samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije — kolokviji, rok za zadaće

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu **A2**.

- **Drugi** kolokvij: **ponedjeljak**, **19. 6. 2017.**, u **12** sati.
- **Popravni** kolokvij: **petak**, **1. 9. 2017.**, u **12** sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

Rok za predaju zadaća je

- dan **drugog** kolokvija, do **početka** kolokvija.

Aplikacija se tada “zatvara za javnost” — bodovi su **konačni**.

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula

Gauss–Legendreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Legendreove** formule ($w(x) = 1$).

Čvorovi integracije su **nultočke Legendreovih** polinoma P_n .

Za njih vrijedi tzv. Rodriguesova formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0.$$

Za P_n je

$$\gamma_n = \frac{2}{2n+1}, \quad A_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Legendreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2(1 - x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2}{nP'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = -\frac{2}{(n+1)P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Gauss–Laguerreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Laguerreove** formule.

Čvorovi integracije su **nultočke Laguerreovih** polinoma \tilde{L}_n .

Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$\tilde{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0.$$

Za \tilde{L}_n je

$$\gamma_n = (n!)^2, \quad A_n = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Laguerreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{[(n-1)!]^2 x_k}{[n\tilde{L}_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{(n!)^2 x_k}{[\tilde{L}_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= -\frac{[(n-1)!]^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n-1}(x_k)} = \frac{(n!)^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{(n!)^2}{x_k[\tilde{L}'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty).$$

Gauss–Hermiteove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Hermiteove** formule.

Čvorovi integracije su **nultočke Hermiteovih** polinoma H_n .

Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n \geq 0.$$

Za H_n je

$$\gamma_n = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad A_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Hermiteove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}}{n[H_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2^n(n-1)! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n-1}(x_k)} = -\frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Gauss–Čebiševljeve formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule.

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma prve vrste T_n . Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \sqrt{1-x^2}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n-1/2}), \quad n \geq 0.$$

Za T_n je

$$\gamma_0 = \pi, \quad A_0 = 1, \quad \gamma_n = \frac{\pi}{2}, \quad A_n = 2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Gauss–Čebiševljeve formule

Za $x = \cos \varphi$, znamo da je $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$, pa se čvorovi integracije **lako** računaju — vrijedi formula

$$x_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Sve **težine** u Gaussovoj formuli su **jednake** i vrijedi

$$w_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste.

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma druge vrste U_n . Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2}) \sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^{n+1/2} \right), \quad n \geq 0.$$

Za U_n je

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2}, \quad A_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste

Za $x = \cos \varphi$, znamo da je $U_n(\cos \varphi) = \sin((n+1)\varphi) / \sin(\varphi)$, pa se **čvorovi** integracije **lako** računaju — vrijedi formula

$$x_k = \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Težine u Gaussovoj formuli se, također, **lako** računaju i vrijedi

$$w_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Općenito o iterativnim metodama

Neka je zadana **nelinearna funkcija**

$$f : I \rightarrow \mathbb{R},$$

gdje je I neki interval. Tražimo sve one točke $x \in I$ za koje je

$$f(x) = 0.$$

Takve točke x zovu se

- **rješenja** ili **korijeni** pripadne jednačbe,
- ili **nultočke** funkcije f .

U pravilu, pretpostavljamo da je

- f **neprekidna** na I i
- da su joj nultočke **izolirane**.

Neprekidnost funkcije f

Neprekidnost funkcije f obično se koristi pri određivanju intervala gdje se nalazi nultočka. Naime, ako je

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

na nekom intervalu $[a, b]$, to znači da funkcija je promijenila znak na $[a, b]$. To se može dogoditi na dva načina:

- ili f ima nultočku na $[a, b]$,
- ili f ima prekid na $[a, b]$.

Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$

• i u rubovima vrijedi $f(a) \cdot f(b) < 0$,
onda f sigurno ima nultočku na $[a, b]$ — čak unutar (a, b) .

Izoliranost nultočka

Definicija (Izolirana nultočka). Za nultočku α reći ćemo da je **izolirana**, ako **postoji** krug nekog **pozitivnog** radijusa oko α ,

• takav da je α **jedina** nultočka od f **unutar** tog kruga.

U protivnom, kažemo da je nultočka **neizolirana**. ■

Kod **neizoliranih** nultočaka postoji problem **konvergencije** metoda za nalaženje nultočaka (lokalna nejedinstvenost).

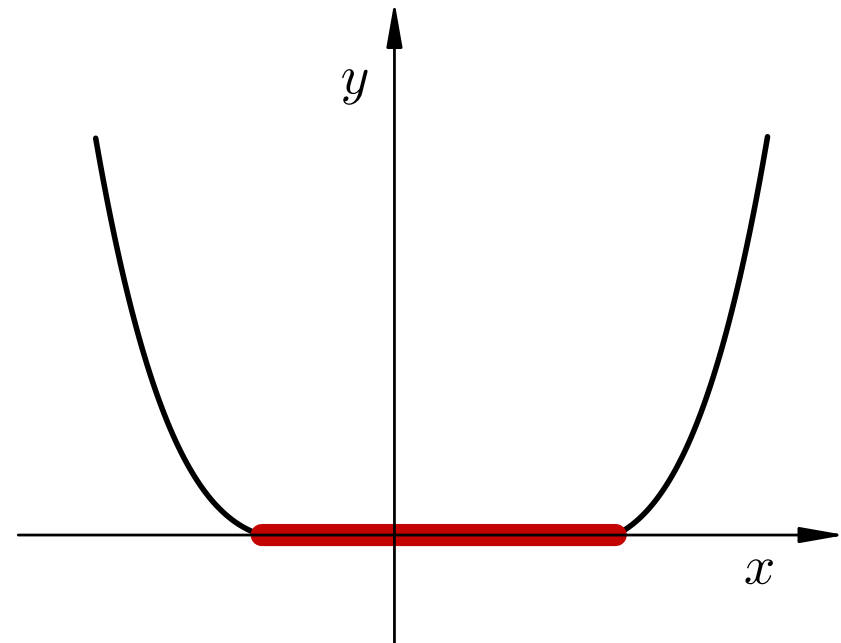
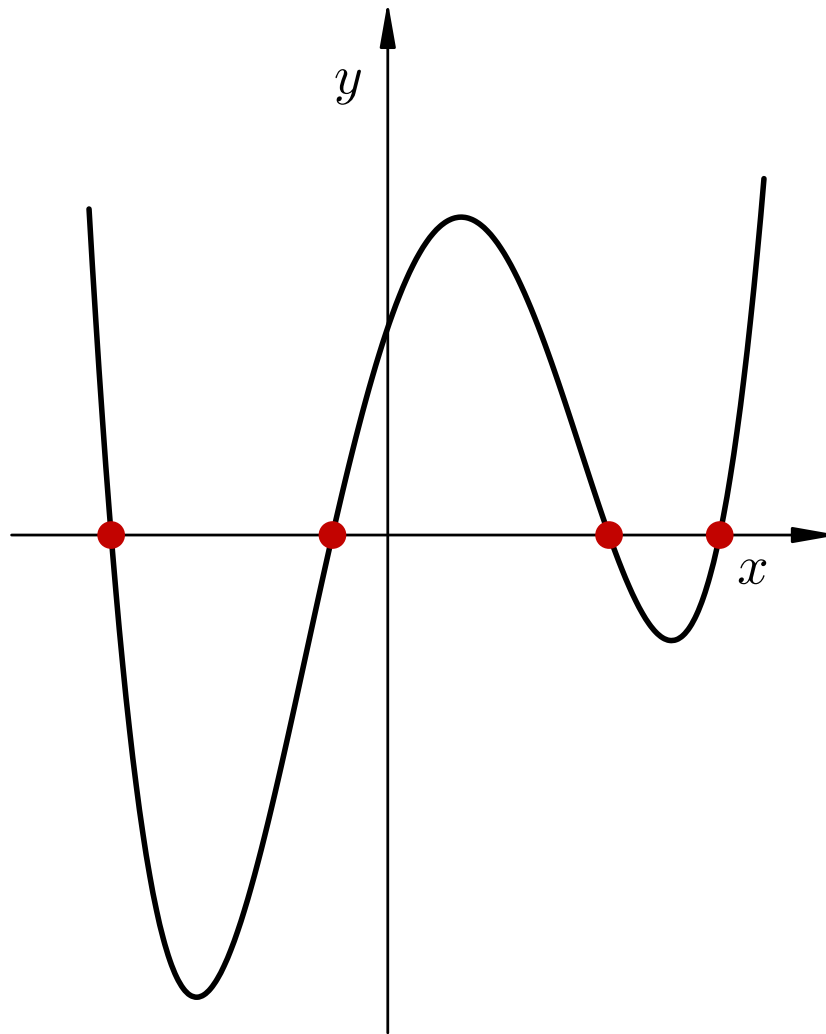
Odsad nadalje, pretpostavljamo da f ima samo **izolirane** nultočke.

Na sljedećoj stranici su primjeri funkcije s

• **izoliranim** nultočkama (lijevo),

• **neizoliranim** nultočkama (desno).

Izoliranost nultočka



Računanje nultočke na zadanu točnost

Traženje nultočki na zadanu točnost sastoji se od dvije faze:

1. Izolacija jedne ili više nultočki, tj. nalaženje intervala I unutar kojeg se nalazi barem jedna nultočka. Ovo je teži dio posla i obavlja se na temelju analize toka funkcije.
2. Iterativno nalaženje nultočke na traženu točnost.

Postoji mnogo metoda za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija na zadanu točnost. One se bitno razlikuju po tome


- imamo li sigurnu konvergenciju ili ne,
- i po brzini konvergencije (ako/kad konvergiraju).

Uobičajeno:

- brze metode nemaju sigurnu konvergenciju,
- dok je sporije metode imaju.


Brzina konvergencije

Definirajmo sada **brzinu konvergencije** nekog niza “iteracija”. Te iteracije **mogu**, ali **ne moraju** biti iteracije za računanje nultočke funkcije.

Definicija. Niz iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ **konvergira** prema točki α  s **redom konvergencije** p , gdje je $p \geq 1$, ako je p **najveći** broj takav da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq c |\alpha - x_{n-1}|^p, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

za neki $c > 0$.

Ako je $p = 1$, kažemo da niz konvergira **linearno** prema α . U tom je slučaju **nužno** da je $c < 1$ (za konvergenciju niza), i obično se c naziva **faktor linearne konvergencije**. 

Brzina konvergencije

Prethodna definicija, katkad, nije zgodna za linearne iterativne algoritme.

Ako u prethodnoj formuli upotrijebimo indukciju za $p = 1$, $c < 1$, onda dobivamo da je

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Katkad će biti mnogo lakše pokazati ovu relaciju, nego onu iz definicije. I u ovom slučaju reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom c .

Metoda bisekcije (raspolavljanja)

Uvodno o metodi raspolavljanja

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočka funkcije je **metoda bisekcije** ili **raspolavljanja**.

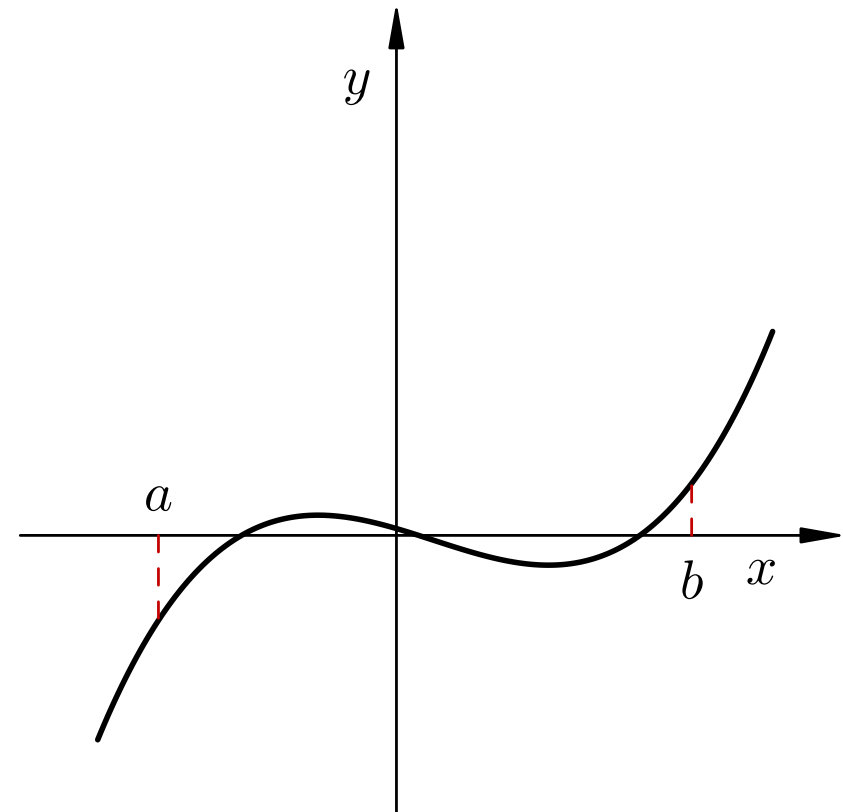
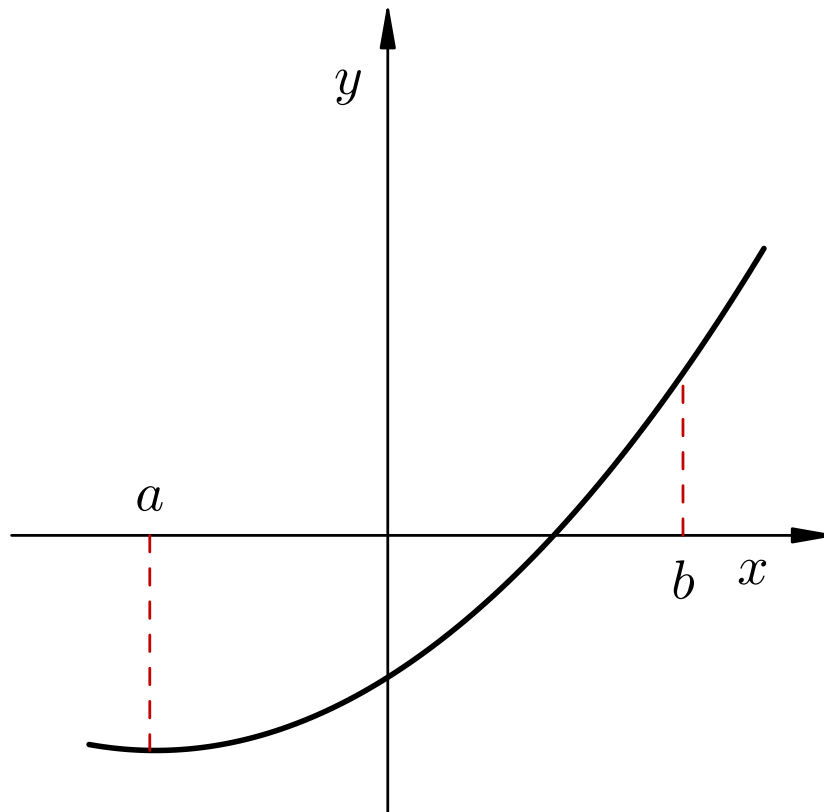
- Osnovna ili **startna** pretpostavka za **početak** algoritma raspolavljanja je **neprekidnost** funkcije f na intervalu $[a, b]$, s tim da u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

To znači da f ima **barem jednu** nultoku u intervalu $[a, b]$. Međutim, f može imati i **više** nultočaka u intervalu $[a, b]$. Na sljedećoj stranici su primjeri kad

- f ima **tačno jednu** nultoku (lijevo),
- **više nultočaka**, točnije, **neparan** broj njih, brojeći kratnost (desno).

Uvodno o metodi raspolavljanja



Uvodno o metodi raspolavljanja

Naravno, ako je $f(a) \cdot f(b) = 0$, onda f sigurno **ima** nultočku u (barem) jednom **rubu** intervala — a ili b . Provjerom $f(a) = 0$, odnosno, $f(b) = 0$, otkrivamo nultočke u **rubovima**.

Na kraju, ako je

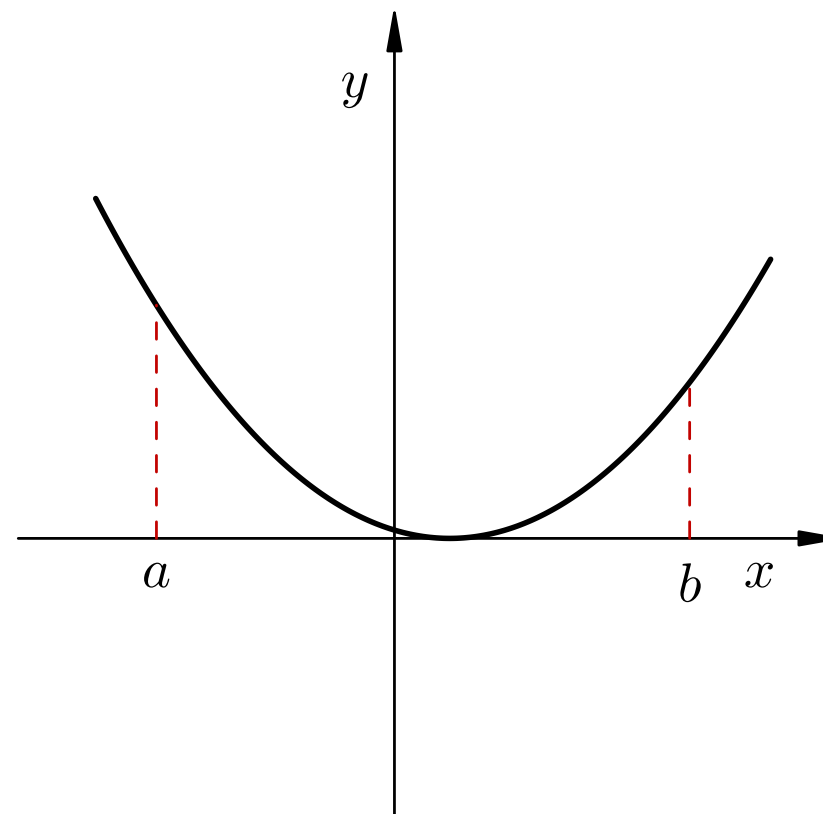
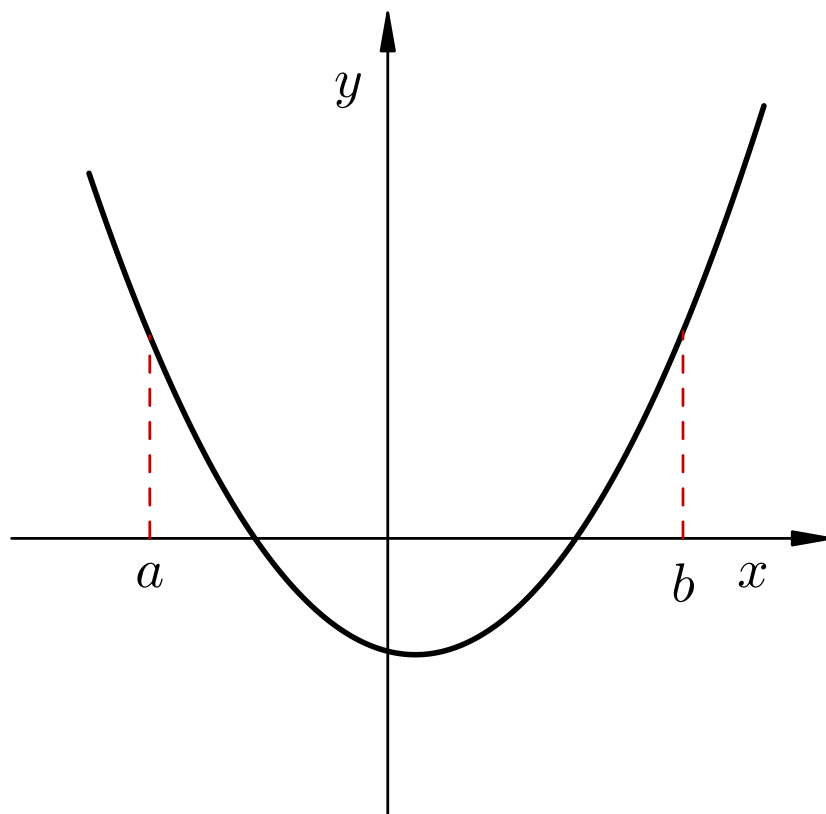
$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$

to **ne mora** značiti da f **nema** nultočku unutar $[a, b]$.

Na primjer, moglo se dogoditi da smo **loše separirali** nultočke i da f , unutar intervala $[a, b]$, ima

- **paran** broj nultočaka (slika lijevo),
- ili nultočku **parnog** reda (slika desno).

Uvodno o metodi raspolavljanja



Uvodno o metodi raspolavljanja

Zaključak.

- Boljom separacijom nultočaka na lijevoj slici, lako ćemo postići da je $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Nultočke **parnog** reda **nemoguće** je **direktno** naći metodom bisekcije (nema promjene predznaka).

Kad ćemo govoriti o nultočkama **višeg** reda, onda ćemo pokazati kako treba **modificirati** funkciju tako da i metodom bisekcije možemo naći **višestruku** nultočku.

- Umjesto f , treba raditi s funkcijom f/f' .

Algoritam

Označimo s α pravu nultočku funkcije (nju tražimo), a zatim s

• $a_0 := a,$

• $b_0 := b$ i

• $x_0 :=$ polovište intervala $[a_0, b_0]$, tj.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ideja metode: u n -tom koraku algoritma, počev od intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ koji sigurno sadrži neku nultočku α ,

• konstruiramo interval $[a_n, b_n]$ kojemu je

• duljina = polovina duljine prethodnog intervala,

• ali tako da je nultočka α ostala unutar intervala $[a_n, b_n]$.

Algoritam

Konstrukcija intervala $[a_n, b_n]$ sastoji se u **raspolavljanju** intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ točkom x_{n-1} , i to tako da je

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = x_{n-1}, \quad \text{ako je } f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0,$$

$$a_n = x_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \text{ako je } f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0.$$

Uočimo da je **dovoljno** ispitivati koji predznak imamo za $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$. Imamo **tri** mogućnosti:

- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) = 0$ znači da je nultočka **upravo** x_{n-1} ,
- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0$ znači da je **barem jedna** nultočka **unutar** $[a_{n-1}, x_{n-1}]$ — **lijeva** polovina,
- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$ znači da je **barem jedna** nultočka **unutar** $[x_{n-1}, b_{n-1}]$ — **desna** polovina.

Algoritam

Objasnimo **posljednju** činjenicu. Množenjem lijevih strana nejednakosti

$$f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$$

$$f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$$

dobivamo

$$(f(a_{n-1}))^2 \cdot f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0,$$

pa mora biti

$$f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0.$$

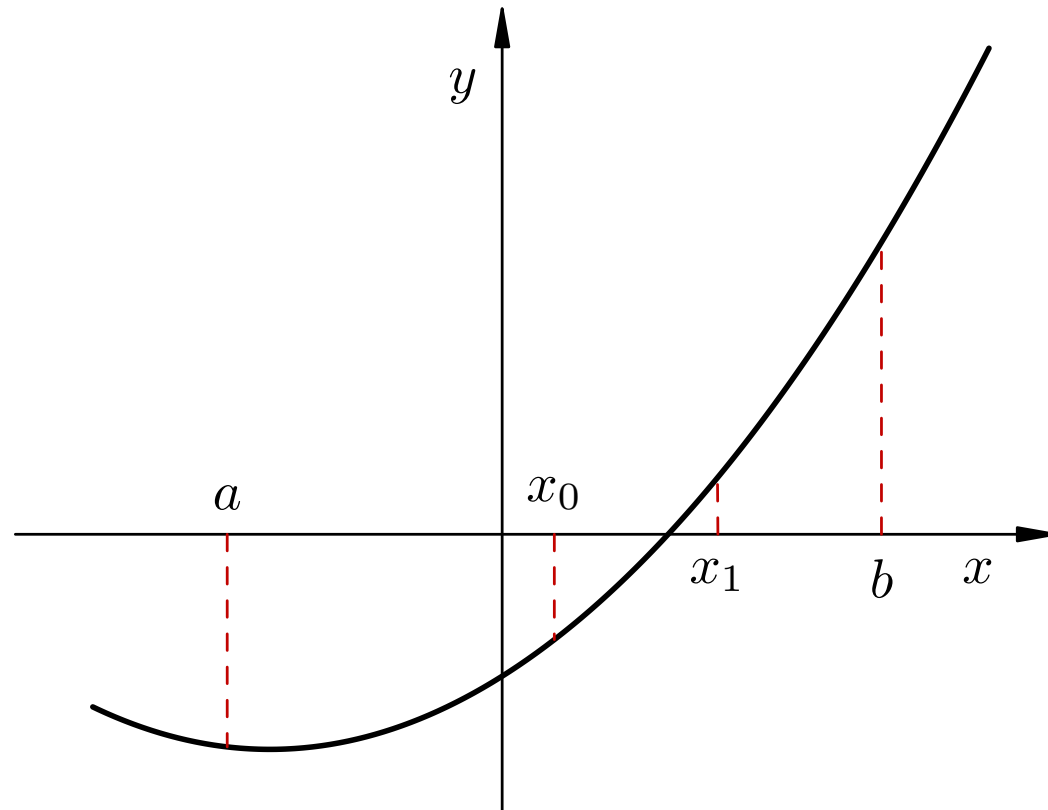
Dakle, nultočka se onda **mora** nalaziti u intervalu $[x_{n-1}, b_{n-1}]$.

Za **svaki** korak metode raspolavljanja, očito, vrijedi zaključak

$$\alpha \in [a_{n-1}, b_{n-1}] \implies \alpha \in [a_n, b_n].$$

Metoda raspolavljanja — grafički

Grafički, metoda **raspolavljanja** izgleda ovako



Algoritam

Metoda raspolavljanja — za zadanu točnost ε :

```
x := (a + b) / 2;
dok je b - x > epsilon radi { // ili x - a > ...
    ako je f(a) * f(x) <= 0.0 onda {
        b := x
    };
    inače {
        a := x;
    };
    x := (a + b) / 2;
};
/* Na kraju je x ≈ alpha. */
```

Pedantni algoritam “čuva” i stare vrijednosti funkcije.

Konvergenција i zaustavljanje algoritma

Tvrdnja. Ako vrijede **startne** pretpostavke na f za metodu raspolavljanja, dobiveni niz x_n će **konvergirati** prema **nekoj** nultočki α iz intervala $[a, b]$.

Nultočku α smo našli sa zadanom **točnošću** ε ako je

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

Kako ćemo znati da je to **ispunjeno**, ako **ne znamo** α ?

- Budući da je x_n **polovište** intervala $[a_n, b_n]$ i $\alpha \in [a_n, b_n]$, onda je

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = x_n - a_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n),$$

- pa je dovoljno zahtijevati

$$b_n - x_n \leq \varepsilon \quad \text{ili} \quad x_n - a_n \leq \varepsilon.$$

Ocjena greške

Iz konstrukcije metode raspolavljanja, lako se izvodi **ocjena pogreške** n -te aproksimacije x_n nultočke α . Vrijedi:

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq b_n - x_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \dots = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a). \end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi $(b - a)/2 = b - x_0 = x_0 - a$, pa slijedi da je

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^n} (b - x_0) = \frac{1}{2^n} (x_0 - a). \quad \blacksquare$$

Ova relacija podsjeća na **linearnu konvergenciju** s $c = 1/2$, ali se zdesna **ne** pojavljuje $|\alpha - x_0|$. Ipak, **desna** strana daje naslutiti da će konvergencija biti **dosta spora** (bit po iteraciji).

Ocjena greške i broj koraka

Relacija

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (b - a)$$

omogućava da se **unaprijed** odredi koliko je **koraka** raspolavljanja potrebno da bismo postigli zadanu **točnost** ε .

Da osiguramo $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \leq \varepsilon.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s 2^{n+1} i dijeljenjem s ε dobivamo

$$\frac{b - a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1},$$

...

Ocjena greške i broj koraka

a zatim, logaritmiranje daje

$$\log(b - a) - \log \varepsilon \leq (n + 1) \log 2,$$

odnosno,

$$n \geq \frac{\log(b - a) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je funkcija f još i klase $C^1[a, b]$, tj. ako f ima neprekidnu prvu derivaciju, može se dobiti i tzv. dinamička ocjena greške.

Po Teoremu srednje vrijednosti za funkciju f oko α , imamo

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je ξ između x_n i α .

Dinamička ocjena greške

Prvo iskoristimo da je α **nultočka**, tj. da je $f(\alpha) = 0$, a zatim uzmemo apsolutne vrijednosti obje strane. Dobivamo

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)| |\alpha - x_n|.$$

Primijetite da je

$$|f'(\xi)| \geq m_1, \quad m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Ako je $m_1 > 0$, uvrštavanjem ove ocjene izlazi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Dinamička ocjena greške

Drugim riječima, ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

odnosno, da vrijedi

$$|f(x_n)| \leq m_1 \varepsilon.$$

Ovaj uvjet možemo provjeriti u **svakoj** iteraciji.

- Iteracije smijemo “**prekinuti**” čim je ovaj uvjet **ispunjen**,
- **neovisno** o **unaprijed** izračunatom potrebnom broju iteracija.

Napomena. Pretpostavka $m_1 > 0$ znači da f' **nema** nultočku na $[a, b]$, tj. da je funkcija f **monotona** na $[a, b]$.

Regula falsi

(metoda pogrešnog položaja)

Uvodno o metodi pogrešnog položaja

Znamo da metoda **raspolavljanja** ima

- **sigurnu** konvergenciju, ali je vrlo **spora**.

Regula falsi ili metoda **pogrešnog položaja** je **prirodan** pokušaj **ubrzavanja** metode raspolavljanja. I ova metoda ima

- **sigurnu** konvergenciju,

uz **iste** pretpostavke kao u metodi raspolavljanja.

Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- **neprekidna** na intervalu $[a, b]$
- **i** da u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Ideja i skica algoritma

Ideja metode: Aproksimirajmo funkciju f pravcem koji prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Traženu nultočku α tada možemo aproksimirati

• nultočkom tog pravca — označimo ju s x_0 .

Uočite da pravac sigurno siječe os x , zbog $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Nakon toga,

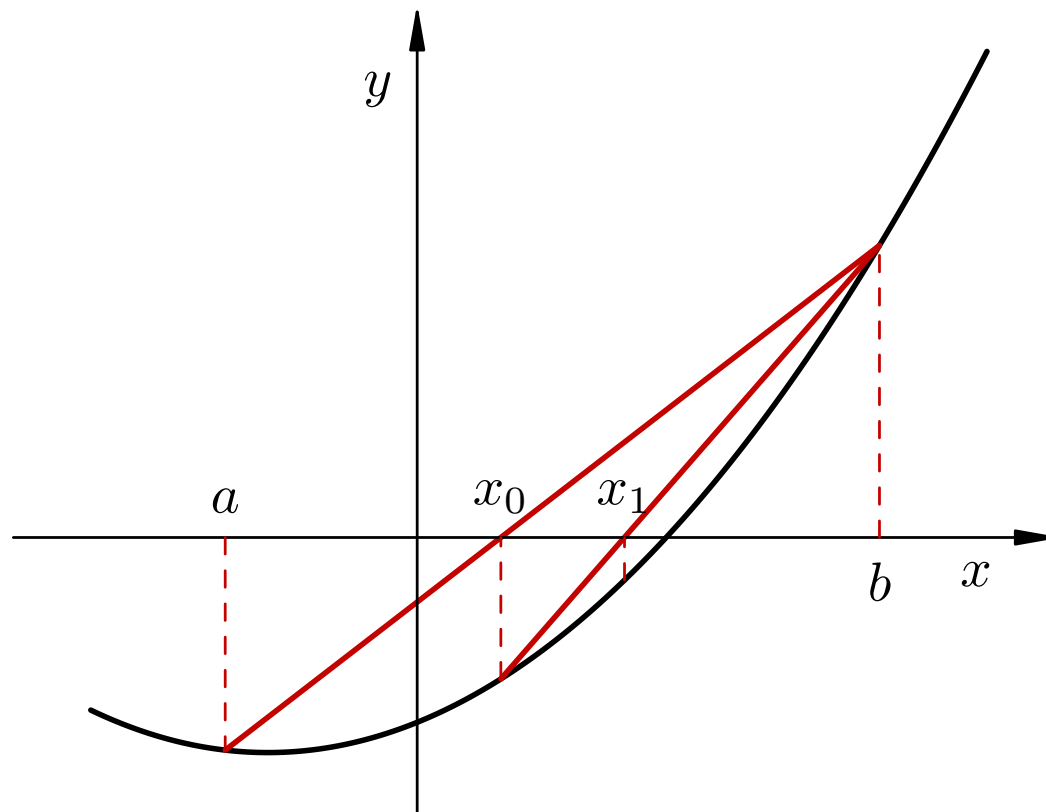
• pomaknemo ili točku a , ili točku b — u točku x_0 ,

• ali tako da je nultočka ostala unutar novodobivenog intervala (test predznaka, kao kod raspolavljanja).

Postupak ponavljamo sve dok nismo postigli željenu točnost.

Metoda pogrešnog položaja — grafički

Grafički, *regula falsi* ili metoda pogrešnog položaja izgleda ovako



Regula falsi — osnovne ideje

Točka x_0 dobiva se jednostavno iz jednadžbe **pravca**, pa je

$$x_0 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Dakle, **osnovne ideje** metode su:

- aproksimacija **pravcem**
- i “**zatvaranje**” nultočke u određeni — **sve manji** interval.

Iz slike zaključujemo da je to sasvim dobra ideja,

- za **monotone** i **konveksne** (ili **konkavne**) funkcije.

Nažalost, postoje ozbiljni **problemi** i s ovom metodom.

- Konvergencija je i dalje **linearna**, kao kod raspolavljanja.
- Može biti vrlo **spora** — sporija nego kod raspolavljanja.

Regula falsi — red konvergencije

Izvedimo **red konvergencije** metode **pogrešnog položaja**.

Uz oznaku za **prvu** podijeljenu razliku

$$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

formula za **prvu** aproksimaciju x_0 glasi

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f[a, b]}.$$

Treba naći izraz za **grešku** $\alpha - x_0$.

Prethodnu relaciju **pomnožimo** s $s - 1$ i **dodamo** α na obje strane, tako da lijeva strana postane upravo $\alpha - x_0$.

Regula falsi — red konvergencije

Dobivamo redom

$$\begin{aligned}\alpha - x_0 &= \alpha - b + \frac{f(b)}{f[a, b]} = (\text{izlučimo } \alpha - b) \\ &= (\alpha - b) \left(1 + \frac{f(b)}{(\alpha - b)f[a, b]} \right) = (\text{uvalimo } f(\alpha) = 0) \\ &= (\alpha - b) \left(1 + \frac{f(b) - f(\alpha)}{(\alpha - b)f[a, b]} \right) = (\text{sredimo u } f[b, \alpha]) \\ &= (\alpha - b) \left(1 - \frac{f[b, \alpha]}{f[a, b]} \right) = (\alpha - b) \frac{f[a, b] - f[b, \alpha]}{f[a, b]} \\ &= -(\alpha - b) (\alpha - a) \frac{f[a, b, \alpha]}{f[a, b]}.\end{aligned}$$

Regula falsi — red konvergencije

Ako je funkcija f dovoljno **glatka**, onda

- **podijeljene razlike** $f[a, b, \alpha]$ i $f[a, b]$ možemo napisati preko **derivacija** funkcije f .

Ako je f klase $C^1[a, b]$, onda po Teoremu srednje vrijednosti imamo

$$f[a, b] = f'(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Na sličan način, ako je f klase $C^2[a, b]$, onda vrijedi

$$f[a, b, \alpha] = \frac{1}{2} f''(\zeta),$$

gdje se ζ nalazi između **minimuma** i **maksimuma** vrijednosti a , b i α . Zbog $\alpha \in [a, b]$ to opet daje $\zeta \in [a, b]$.

Sad ove dvije relacije uvrstimo u izraz za grešku.

Regula falsi — red konvergencije

Za funkciju $f \in C^2[a, b]$, dobivamo sljedeći izraz za **grešku**

$$\alpha - x_0 = -(\alpha - b)(\alpha - a) \frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)}.$$

Uočimo još da, zbog $\alpha \in [a, b]$, vrijedi

$$-(\alpha - b)(\alpha - a) = (b - \alpha)(\alpha - a) > 0.$$

Da bismo **pojednostavnili** analizu, pretpostavimo da

- **prva** derivacija f' i **druga** derivacija f'' imaju **konstantan** predznak na $[a, b]$ (pozitivne ili negativne).

Onda je α **jedina** nultočka funkcije f u intervalu $[a, b]$, jer je f **monotona**.

Regula falsi — red konvergencije

U nastavku gledamo samo **jedan** od **četiri** moguća slučaja za predznake f' i f'' .

Pretpostavimo da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

• f monotono **rastuća** i **konveksna** na $[a, b]$.

U tom slučaju,

• **spojnica** točaka $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ uvijek se nalazi **iznad** grafa funkcije f , kao na prethodnoj slici.

Uvrštavanjem podataka o **predznaku** prve i druge derivacije u

$$\alpha - x_0 = (b - \alpha) (\alpha - a) \frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)},$$

dobivamo da je **desna** strana **veća** od 0, pa je i $\alpha > x_0$.

Regula falsi — red konvergencije

Što sve **slijedi** iz $\alpha > x_0$?

Po pretpostavci, funkcija f monotonno **raste** na $[a, b]$, pa je

$$f(a) < f(x_0) < f(\alpha) = 0 < f(b).$$

To znači da treba “**pomaknuti**” a za **sljedeći** korak metode, jer $f(a)$ i $f(x_0)$ imaju **isti** predznak, tj. $\alpha \in [x_0, b]$. Dakle, imamo

• $a_1 := x_0$, a b ostaje **fiksno**, $b_1 := b$.

Potpuno **isto** će se dogoditi i u **svim** narednim koracima.

Drugim riječima,

• aproksimacije x_n neprestano ostaju **lijevo** od nultočke α ,

• tj. pomiče se **lijevi** rub intervala, $a_n := x_{n-1}$,

• a **desni** rub b ostaje **fiksno**, $b_n := b_{n-1} = \dots = b$.

Regula falsi — red konvergencije

U proizvoljnoj iteraciji — kad računamo x_n , uz $\alpha \in [a_n, b_n]$, relacija za grešku ima oblik

$$\alpha - x_n = (b_n - \alpha)(\alpha - a_n) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}.$$

Kad uvrstimo prethodne zaključke $a_n = x_{n-1}$ i $b_n = b$, izlazi

$$\alpha - x_n = \left((b - \alpha) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)} \right) (\alpha - x_{n-1}).$$

Uzimanjem apsolutnih vrijednosti s lijeva i zdesna, slijedi da

u ovom slučaju, regula falsi konvergira linearno.

Zadatak. Dokažite da je faktor u prvoj zagradi na desnoj strani po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 (\Rightarrow konvergencija).

Regula falsi — red konvergencije

Za metodu bisekcije dobili smo sličnu relaciju za grešku, samo je faktor bio $1/2$. Usporedbom izraza za greške vidimo da

- nije teško konstruirati primjere kad je metoda bisekcije brža no regula falsi.

Probajte naći takav primjer!

Napomena. Sasvim analogno se analiziraju i ostala tri slučaja za predznake f' i f'' na $[a, b]$. Na primjer, ako je f konveksna, ali monotono pada, tj. $f'' > 0$ i $f' < 0$,

- aproksimacija x_n je uvijek desno od α ,
- a uvijek se pomiče desni rub b .

U svim slučajevima izlazi da regula falsi konvergira linearno.

Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočka

Konstrukcija iterativnih metoda

Kod konstrukcije metode **bisekcije** i **regule falsi**, koristili smo **dvije** startne pretpostavke o **funkciji** f i **intervalu** $[a, b]$ na kojem radimo. Te pretpostavke su:

- “**glatkoća**” — funkcija f je **neprekidna** na intervalu $[a, b]$,
- “**lokacija nultočke**” — u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

tj. **funkcijske** vrijednosti u **rubovima** intervala imaju **različit** predznak.

Uz prvu, **druga** pretpostavka **osigurava** da f ima **bar jednu** nultočku u $[a, b]$

- i ove **rubne** točke a, b su **bitne** za **start** iteracija.

Obje metode **sigurno** konvergiraju, ali **sporo** — **linearno**.

Konstrukcija iterativnih metoda

U nastavku, krećemo od **drugačijih** pretpostavki za konstrukciju **iterativnih** metoda.

Ako funkcija f ima **veću glatkoću** na nekoj domeni,

- smijemo koristiti vrijednosti **prve** derivacije f' u točkama,
- može i vrijednosti **viših** derivacija, ako postoje.

Do sada smo veću glatkoću koristili samo kod **ocjene** greške.

Što se **lokacije** tiče, krećemo od **slabijih** pretpostavki.

- Za **konstrukciju** iterativne metode — ne pretpostavljamo **ništa**, tj. **lokacija** nultočke **nije bitna**.

Kod analize **konvergencije** metode — **lokacija** nultočke, naravno, ima **ključnu** ulogu.

Konstrukcija iterativnih metoda

Opće ideje za konstrukciju iterativnih metoda za nalaženje nultočka funkcije su sljedeće.

- Jednu ili više startnih točaka možemo, bar u principu, izabrati bilo gdje.

Zatim, počevši od tih startnih točaka,

- iterativno generiramo neki niz aproksimacija (= metoda).

U svakoj iteraciji, novu aproksimaciju generiramo tako da je

aproksimacija nultočke = nultočka aproksimacije,

s tim da se aproksimacija određuje na osnovu jedne ili više prethodnih točaka — tzv. iteracijskom funkcijom.

Ideja iteracije je slična onoj kod integracijskih formula.

Konstrukcija iterativnih metoda

Na primjer, kod **Newtonove** metode, funkciju **aproksimiramo**

- **tangentom** u **jednoj** (zadnjoj) točki,

a kod metode **sekante**,

- **sekantom** kroz **dvije** (zadnje) točke.

Kod **ovakvog** pristupa, **gubimo sigurnu** konvergenciju, tj.

- **može** se dogoditi da metode **ne konvergiraju**, ovisno o startu iteracija.

Međutim, **ako** konvergiraju,

- konvergencija je **brža** — kad smo dovoljno **blizu** nultočke.

Za pojedine metode, navest ćemo i **neke** uvjete koji **osiguravaju** konvergenciju (slično kao kod regule falsi).

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Pretpostavimo da je funkcija f barem

- neprekidno derivabilna na nekoj domeni,
- idealno — na cijelom \mathbb{R} .

Nadalje, neka je **zadana**, ili nekako **izabrana**,

- **početna** točka x_0 .

Ideja metode **tangente** je

- povući **tangentu** na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,
i definirati **novu aproksimaciju** x_1
- u točki gdje ta **tangenta siječe** os x — ako takva točka x_1 **postoji**. U protivnom, treba uzeti neku drugu točku x_0 .

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Drugim riječima, funkciju f

- aproximiramo pravcem — tangentom u točki $(x_0, f(x_0))$ (to je najbolja linearna aproksimacija funkcije f u okolini točke x_0),

a nepoznatu nultočku funkcije f

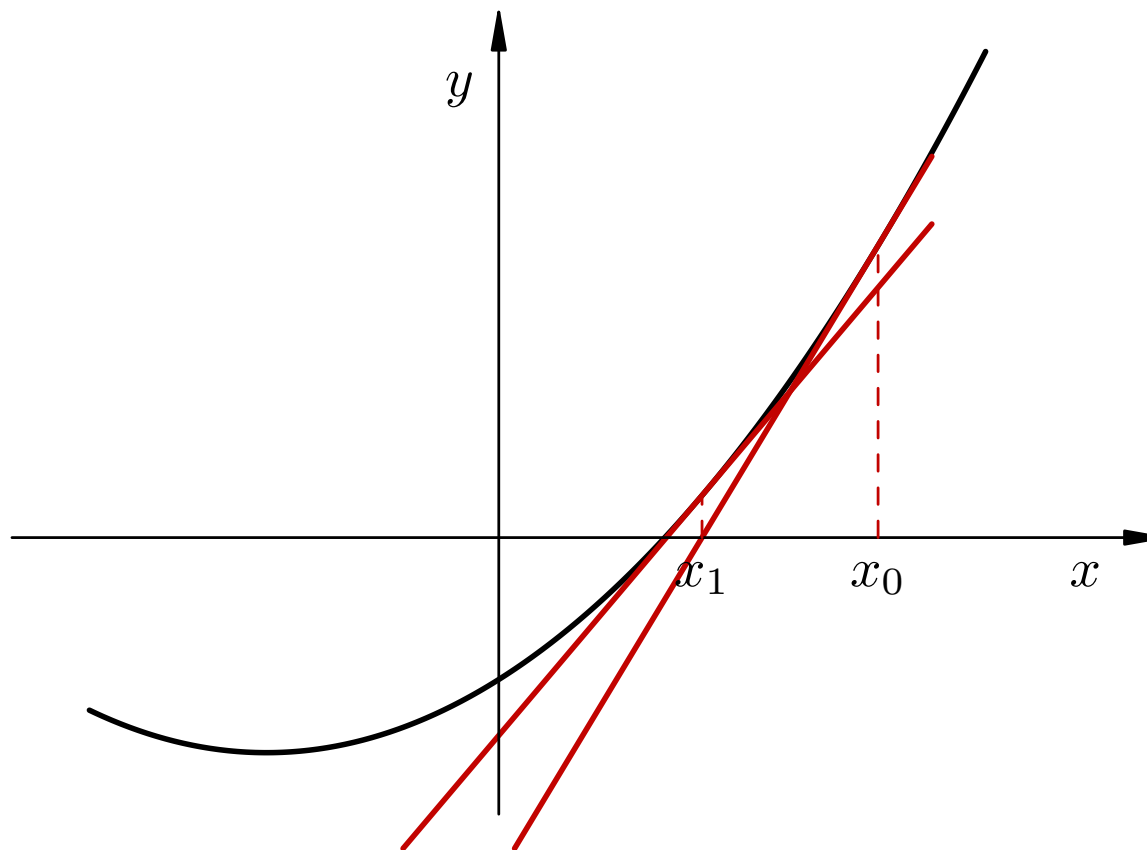
- aproximiramo nultočkom x_1 tog pravca — te tangente na graf funkcije f u zadanoj točki (ako x_1 postoji).

Isti postupak možemo ponoviti u točki x_1 i dobiti sljedeću točku x_2 . Kad ovaj postupak iteriramo — induktivno ponovimo u svakoj sljedećoj točki x_n , za $n \geq 0$, dobivamo

- metodu tangente ili Newtonovu metodu za nalaženje nultočke funkcije f .

Newtonova metoda — grafički

Grafički, **Newtonova** metoda za nalaženje nultočke izgleda ovako



Geometrijski izvod Newtonove metode

Geometrijski izvod metode je **jednostavan**.

- U točki x_n napišemo jednadžbu **tangente** i pogledamo gdje tangenta **siječe** os x .

Jednadžba **tangente** je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Iz **zahtjeva** $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je **nova** aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za **računanje** je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ postoji (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u **svim** točkama x_n .

Analitički izvod Newtonove metode

Do Newtonove metode može se doći i analitički,

- ali uz malo jače pretpostavke,
- iz kojih onda slijedi i izraz za grešku.

Neka je α neka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je

- f dva puta neprekidno derivabilna na nekom intervalu oko α .

Tj. pretpostavljamo da je $f \in C^2(I)$, gdje je I segment takav da je $\alpha \in I$.

Neka je $x_n \in I$ bilo koja točka — neka aproksimacija za α .

Onda funkciju f možemo razviti u Taylorov red oko x_n , do uključivo prvog člana.

Analitički izvod Newtonove metode

Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n , tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem **nultočke** $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2.$$

Uz **pretpostavku** $f'(x_n) \neq 0$, dijeljenjem i premještanjem izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Analitički izvod Newtonove metode

Ako pretpostavimo da je aproksimacija x_n dovoljno blizu α ,

• tj. da je $|\alpha - x_n|$ mali,

• onda očekujemo da je $(\alpha - x_n)^2$ još puno manji.

Zato možemo “zanemariti” zadnji član u relaciji

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

i definirati novu aproksimaciju x_{n+1}

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

s idejom da je $x_{n+1} \approx \alpha$ još bolja aproksimacija.

Relacija za grešku Newtonove metode

Oduzimanjem odmah dobivamo i izraz koji veže greške dviju susjednih iteracija

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Iz ovog “izvoda” samo očekujemo da se greška “smanjuje”, ali to tek treba dokazati, uz odgovarajuće pretpostavke!

Sasvim općenito, to ne mora vrijediti!

Čak i kad startamo u nekom intervalu $I = [a, b]$ koji sadrži nultočku α , bez dodatnih pretpostavki — nema garancije

- da aproksimacije ostaju u tom intervalu I ,
- a kamo li da konvergiraju (v. primjere kasnije).

Napomene o konvergenciji Newtonove metode

Dakle, **Newtonova** metoda **ne mora konvergirati** prema nultočki!

S druge strane, dokazat ćemo da ovaj zaključak **vrijedi**

- kad je x_n , odnosno, **startna** točka x_0 — dovoljno **blizu** α .

Takva **konvergencija** se obično naziva

- **lokalna konvergencija** metode.

Zaključke o **konvergenciji** metode (uz dovoljno **jake** pretpostavke) možemo podijeliti u **tri** grupe:

- **brzina** (lokalne) konvergencije — **ako** niz konvergira,
- **lokalna** konvergencija metode — uz **start** dovoljno **blizu**,
- **globalna** konvergencija metode na nekom intervalu I .

Brzina konvergencije Newtonove metode

Brzina lokalne konvergencije izlazi direktno iz izraza za grešku u susjednim iteracijama.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α .

Ako niz aproksimacija x_n generiran Newtonovom metodom konvergira prema α ,

• onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna, i na limesu vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Brzina konvergencije Newtonove metode

Dokaz. Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α .

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α . Onda mora vrijediti i $\xi_n \rightarrow \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I , pa dobivamo

$$f'(x_n) \rightarrow f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \rightarrow f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Zato smijemo prijeći na limes $x_n \rightarrow \alpha$ u relaciji za grešku.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Prijelazom na limes $x_n \rightarrow \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Oдавде čitamo da je **Newtonova** metoda, kad konvergira,

• (barem) **kvadratno** konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i **brža** od kvadratne!

Ipak, treba biti oprezan, jer prethodni zaključci vrijede

• samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. ako je α **jednostruka** nultočka.

Za **višestruke** nultočke ovo **ne vrijedi**, jer

• konvergencija može biti i samo **linearna** (v. malo kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Sljedeći rezultat o konvergenciji **Newtonove** metode je

• **lokalna konvergencija** za **jednostruke** nultočke α ,
uz pretpostavku da je funkcija $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji **sadrži** nultoku α .

Neformalno rečeno, tvrdnja kaže sljedeće:

- ako je **početna** točka x_0 **dovoljno blizu** nultočke α ,
- onda je **Newtonova** metoda

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

dobro definirana — tj. vrijedi $f'(x_n) \neq 0$ za **sve** $n \geq 0$,

- i ovaj niz **konvergira** prema α , i to (barem) **kvadratno**.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Prava formulacija je malo složenija, jer precizno opisuje što znači “dovoljno blizu”.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α (duljina tog segmenta je 2ε).

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$.
Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Onda postoji $\varepsilon > 0$, toliko mali da vrijedi

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Nadalje, za svaki takav ε , za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda je dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jednoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Dokaz. Ide u 4 koraka i počiva na sljedeće dvije pretpostavke:

- α je jednostruka nultočka, tj. vrijedi $f'(\alpha) \neq 0$,
- po definiciji I_ε , za svaku točku $x \in I_\varepsilon$ vrijedi $|x - \alpha| \leq \varepsilon$.

To ćemo iskoristiti nekoliko puta!

Lokalna konvergencija Newtonove metode

1. korak. Pokažimo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da je

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Iz pretpostavke da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$, slijedi da je

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}$$

rastuća funkcija od ε (za dovoljno male $\varepsilon > 0$), jer se

- $\max |f''(x)|$ u brojniku i $\min |f'(x)|$ u nazivniku,
- uzimaju po sve većim segmentima I_ε oko α ,
- tako da brojnik raste, a nazivnik pada.

Naravno, ako f' ima nultočku u nekom segmentu I_ε , onda je $m_1(\varepsilon) = 0$, odnosno, $M(\varepsilon) = \infty$, i to treba izbjeći!

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Međutim, zbog $f'(\alpha) \neq 0$ i neprekidnosti f' oko α (za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$), sigurno postoji (dovoljno mali) $\varepsilon_0 > 0$,

• takav da je $f'(x) \neq 0$, za svaki $x \in I_{\varepsilon_0}$,

• pa onda vrijedi $m_1(\varepsilon_0) > 0$, odnosno, $M(\varepsilon_0) < \infty$.

No, čim je $M(\varepsilon_0)$ “konačan”, onda postoji i $\varepsilon > 0$, takav da je $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, i vrijedi

$$\varepsilon M(\varepsilon_0) < 1.$$

Zato što $M(\varepsilon)$ raste po ε , onda je i $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Osim toga, iz $m_1(\varepsilon) \geq m_1(\varepsilon_0) > 0$, slijedi da je $f'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I_\varepsilon$. Dodatno, iz neprekidnosti f' , vidimo da

• $f'(x)$ ima isti predznak kao i $f'(\alpha)$, za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

2. korak. Pokažimo da je α jedina nultočka funkcije f u I_ε .

Upravo smo pokazali da je $f'(x) \neq 0$ na I_ε , pa je funkcija f monotona na I_ε , tj. može imati najviše jednu nultocku.

Dakle, α je jedina nultočka od f u I_ε .

Digresija: Isti zaključak se može dobiti i direktno, iz $f'(\alpha) \neq 0$.

Iz Taylorovog razvoja f oko α , za bilo koji $x \in I_\varepsilon$, imamo

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - \alpha)^2,$$

za neki ξ između α i x , pa je i $\xi \in I_\varepsilon$.

Znamo da je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, pa izlučimo $f'(\alpha)$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dobivamo

$$f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) \right).$$

Prvi faktor je, očito, **različit** od nule. Za drugi član u trećem faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} \varepsilon = \varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za treći faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) > 0.$$

Dakle, $f(x) = 0$ za neki $x \in I_\varepsilon$, **ako i samo ako** je drugi faktor jednak nuli, tj. za $x = \alpha$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

3. korak. Neka je $x_0 \in I_\varepsilon$ bilo koja startna točka. Onda je $f'(x_0) \neq 0$, pa je prvi korak Newtonove metode dobro definiran

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Kad je $n = 0$, relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_1 = -(\alpha - x_0)^2 \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)},$$

gdje je ξ_0 između x_0 i α , pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Zatim, imamo redom,

$$\begin{aligned} |\alpha - x_1| &\leq |\alpha - x_0|^2 M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_0| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_0| \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pa je $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$, što **dokazuje** da je $x_1 \in I_\varepsilon$.

Dakle, ako startamo u **bilo kojoj** točki $x_0 \in I_\varepsilon$, onda

- **sljedeća** aproksimacija x_1 po **Newtonovoj** metodi, ostaje **unutar** segmenta I_ε .

Induktivnom primjenom ovog argumenta (x_0 je proizvoljan), dobivamo da **isto** vrijedi i za **svaku** sljedeću aproksimaciju x_n .

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dakle, za **svaki** $n \geq 0$, u točki x_n vrijedi $f'(x_n) \neq 0$, pa je sljedeća aproksimacija **dobro** definirana relacijom

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

i ostaje **unutar** polaznog segmenta, tj. vrijedi $x_{n+1} \in I_\varepsilon$.

4. korak. Preostaje još samo dokazati **konvergenciju** niza x_n prema nultočki α .

Relacija koja veže **greške** dviju **susjednih** iteracija x_n i x_{n+1} je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n **između** x_n i α , pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Slično kao u prethodnom koraku, dobivamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) |\alpha - x_n| \\ &\leq \dots (\text{induktivno spuštamo } n \text{ do nule}) \\ &\leq (\varepsilon M(\varepsilon))^{n+1} |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$, odavde odmah slijedi da $x_n \rightarrow \alpha$ kad $n \rightarrow \infty$ (= “geometrijska” konvergencija s faktorom $c = \varepsilon M(\varepsilon)$). ■

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Ovaj rezultat o lokalnoj konvergenciji teško možemo iskoristiti u praksi — za osiguranje konvergencije Newtonove metode

- bar iz neke startne točke x_0 , koju znamo naći (što bi bilo sasvim dovoljno za nalaženje nultočke).

Problem = traženi ε iz tvrdnje ne znamo i nije ga lako naći!

Pretpostavimo da smo locirali nultočku funkcije f u segmentu $[a, b]$ i znamo da je $f \in C^2[a, b]$. Neka je “globalno” na $[a, b]$

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Pretpostavimo još da je

- f strogo monotona na $[a, b]$, što je ekvivalentno s $m_1 > 0$.

Tada f ima jedinstvenu jednostruku nultočku α u $[a, b]$.

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

To znači da imamo sve osnovne pretpostavke prethodnog teorema o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode

• i još znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$.

Umjesto “lokalnog” $M(\varepsilon)$, izračunamo “globalnu” veličinu

$$M := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Sad možemo pokušati izabrati ε tako da vrijedi

• $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ — pa mora biti $M \geq M(\varepsilon)$, jer $M(\varepsilon)$ raste s ε ,

• i da je $\varepsilon M < 1$ — to onda osigurava i $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Nažalost, prvi uvjet je problem!

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Primjer. Uzmemo ε tako “globalno” vrijedi

$$\varepsilon M < 1.$$

Nažalost, bez **dodatnih** uvjeta, još uvijek se **može** dogoditi da

- pripadni interval I_ε **nije sadržan** u $[a, b]$, već “**viri**” preko ruba intervala $[a, b]$.

To se **sigurno** događa ako je $\varepsilon > (b - a)/2$. Inače, dovoljno je da nultočka α leži **blizu** jednog ruba intervala — **bliže** od ε .

- Tada **ne mora** vrijediti $M \geq M(\varepsilon)$, pa **ni** $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Onda više **nemamo** garanciju **lokalne** konvergencije, tj.

- čak i da uzmemo **početnu** iteraciju $x_0 \in I_\varepsilon \cap [a, b]$,
- već prva **sljedeća** iteracija x_1 može izaći **izvan** $[a, b]$, čak **izvan** I_ε (taj interval ne znamo, jer ne znamo α).

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Naime, 3. korak je ključni dio teorema o lokalnoj konvergenciji!

Poanta. Treba uzeti još manji ε tako da bude $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$, tj. tako da vrijedi još i

$$a + \varepsilon \leq \alpha \leq b - \varepsilon.$$

No, baš to je problem — jer ne znamo gdje je α .

Kad ima neke koristi? Ako nađemo ε takav da je

$$\varepsilon M < 1 \quad \text{i} \quad \varepsilon < \frac{b - a}{2},$$

i još pokažemo da je $\alpha \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ — na primjer,

• provjerom da $f(a)$ i $f(a + \varepsilon)$ imaju isti znak, te $f(b)$ i $f(b - \varepsilon)$ imaju isti znak,

onda znamo da je $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ i da vrijedi $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Problem — “lokalnost” lokalne konvergencije

Tada imamo **sigurnu lokalnu** konvergenciju Newtonove metode

• za bilo koju **startnu** točku $x_0 \in I_\varepsilon$.

Međutim, još uvijek **ne znamo gdje** treba startati, jer ne znamo **gdje** se nalazi “pravi” I_ε unutar $[a, b]$. Što sad?

Možemo napraviti **pretragu** intervala $[a, b]$ s korakom $h \leq 2\varepsilon$, tj. “**testirati**” startne točke oblika

$$x_0 = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Bar **jedna** takva startna točka x_0 daje **sigurnu** konvergenciju Newtonove metode. **Oprez**: za svaku takvu točku x_0 treba

• pažljivo **provjeravati** sve sljedeće iteracije x_n — ostaju li **unutar** $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, ili, barem, **unutar** $[a, b]$.

Finale: ova pretraga je **spora** — **bisekcija** je, vjerojatno, **brža**!

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da **sve** iteracije x_n leže **unutar** intervala $[a, b]$.
Onda možemo dobiti i **ocjenu**

• **lokalne** greške **susjednih** iteracija u **Newtonovoj** metodi,
u terminima veličina M_2 i m_1 (na tom intervalu).

Iz ranije relacije za **grešku**

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} **između** nultočke α i x_{n-1} , odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena **nije** naročito **korisna** za praksu, jer nultočku α **ne znamo**. Tražimo ocjenu preko veličina koje **znamo** izračunati.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Za **dvije susjedne** iteracije x_{n-1} i x_n u **Newtonovoj** metodi, također, vrijedi veza preko **Taylorove** formule

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n .

Po **definiciji** iteracija u **Newtonovoj** metodi, vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Sad iskoristimo pretpostavku da je $x_{n-1}, x_n \in [a, b]$, pa onda **mora** biti i $\xi_{n-1} \in [a, b]$. Dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode **bisekcije**, ako je $m_1 > 0$, onda vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo **ocjenu greške** za svaku iteraciju x_n u **Newtonovoj** metodi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Ova ocjena se može **iskoristiti**. Ako je ε tražena **točnost**, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, do na **greške zaokruživanja**.

Pripadni test **zaustavljanja** iteracija u **Newtonovoj** metodi je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Naravno, uz ovaj, možemo **koristiti** i raniji test **zaustavljanja**

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

Veznik između ova **dva** testa je **ili**, tj. pitamo je li ispunjen **jedan ili drugi**.

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
 - uz odgovarajući izbor startne točke x_0 ,
- slično kao kod regule falsi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je $f \in C^2[a, b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako **prva** i **druga** derivacija f' i f'' **nemaju** nultočku u $[a, b]$, tj.

• ako f' i f'' imaju **konstantan** predznak na $[a, b]$,

onda **Newtonova** metoda **konvergira** prema

• **jedinstvenoj jednostruko**j nultočki α funkcije f u $[a, b]$,

i to za **svaku** startnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo **jedan** od **četiri** moguća slučaja za predznake f' i f'' .

U ostalim slučajevima, dokaz ide potpuno analogno.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Uzmimo, na primjer, da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

• f monotono **rastuća** i **konveksna** na $[a, b]$.

U tom slučaju, jer f **raste**, mora biti $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$.

Zbog $f'' > 0$, **startna** aproksimacija x_0

• **mora** zadovoljavati $f(x_0) > 0$, tj. $a < x_0$, jer f raste.

U praksi možemo uzeti $x_0 = b$, jer je to **jedina** točka za koju **sigurno** znamo da vrijedi $f(x_0) > 0$.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran **Newtonovom** metodom iz bilo koje **startne** točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Globalna konvergencija Newtonove metode

Za početak, znamo da je $x_0 > \alpha$. Tvrđimo da je

$$\alpha < x_n \leq x_0 \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz ide **indukcijom**, a **bazu** već imamo.

Za **korak** indukcije, pretpostavimo da je $\alpha < x_n \leq x_0$. Onda je

$$f(x_n) > f(\alpha) = 0.$$

Osim toga, jer **f raste**, znamo da je $f'(x_n) > 0$, pa dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n \leq x_0,$$

što pokazuje da niz (x_n) **monotono pada**.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Iz Taylorove formule je

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je $\xi_n \in (\alpha, x_n) \subset [a, b]$. Zbog toga je $f''(\xi_n) > 0$, pa je

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Dakle, niz (x_n) je odozdo ograničen s α i monotono pada, pa postoji limes

$$\alpha' := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Odmah znamo i da je $\alpha \leq \alpha' \leq x_0$, tj. $\alpha' \in [a, b]$.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Prijelazom na **limes** u formuli za **Newtonove** iteracije dobivamo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

Zbog $f'(\alpha') \neq 0$, odavde odmah slijedi $f(\alpha') = 0$.

No, znamo da f ima

● **jedinstvenu** nultočku α u intervalu $[a, b]$,

pa **mora** biti $\alpha = \alpha'$.

Preostala **tri** slučaja za predznake **prve** i **druge** derivacije dokazuju se potpuno **analogno**. ■

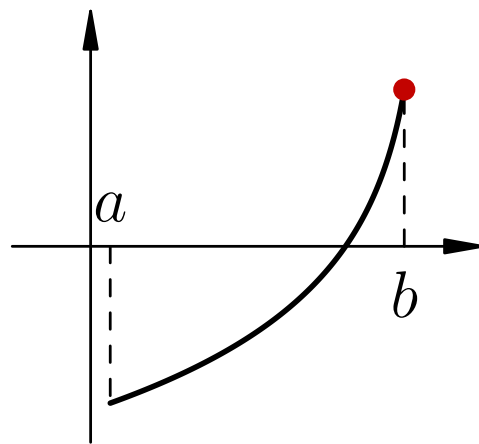
Uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ na izbor **startne** točke u prethodnom teoremu ima vrlo jednostavnu **geometrijsku** interpretaciju.

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

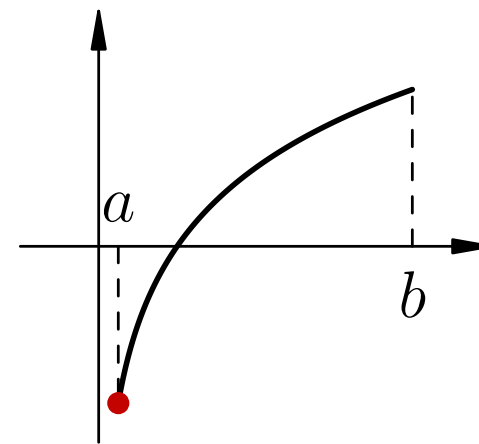
Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

treba odabrati na “strmijoj” strani grafa funkcije.

Izbor startne točke x_0 — ako je $f' > 0$, tj. f raste.



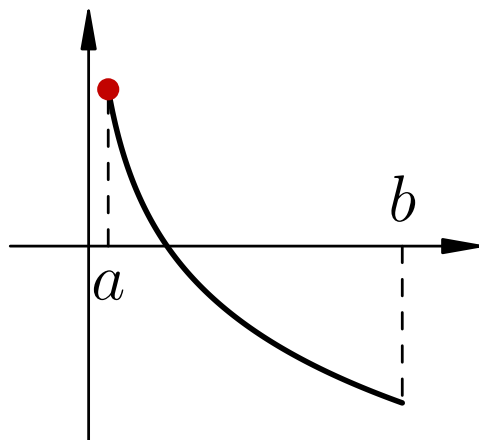
$$f'' > 0$$



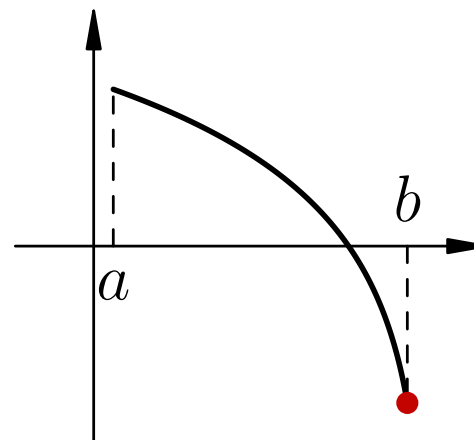
$$f'' < 0$$

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Izbor **startne** točke x_0 — ako je $f' < 0$, tj. f pada



$$f'' > 0$$



$$f'' < 0$$

Newtonova metoda — komentari

Prednosti:

- brza = kvadratna konvergencija.

Potencijalna mana: osim vrijednosti funkcije,

- trebamo i vrijednost prve derivacije u svakoj točki.

Ako se f' komplicirano računa,

- Newtonova metoda može biti sporija od metode sekante,
- iako ima veći red konvergencije (v. malo dalje).

Metoda sekante

Uvodno o metodi sekante

U Newtonovoj metodi koristimo

- tangentu u točki x_0 kao aproksimaciju funkcije f .

Ako ne znamo derivaciju f' funkcije f , ili se ona teško računa, onda možemo

- tangentu u točki x_0 aproksimirati sekantom kroz dvije startne točke x_0 i x_1 ,

što odgovara aproksimaciji derivacije $f'(x_0)$ podijeljenom razlikom

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Tako dobivamo metodu sekante.

Ideja metode sekante

Počinjemo s **dvije početne** točke x_0 i x_1 . Poredak je **bitan!**

Ideja metode **sekante** je

- povući **sekantu** grafa funkcije f kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$,

i definirati **novu aproksimaciju** x_2

- u točki gdje ta **sekanta siječe** os x (ako x_2 postoji).

Postupak nastavljamo povlačenjem **sekante**

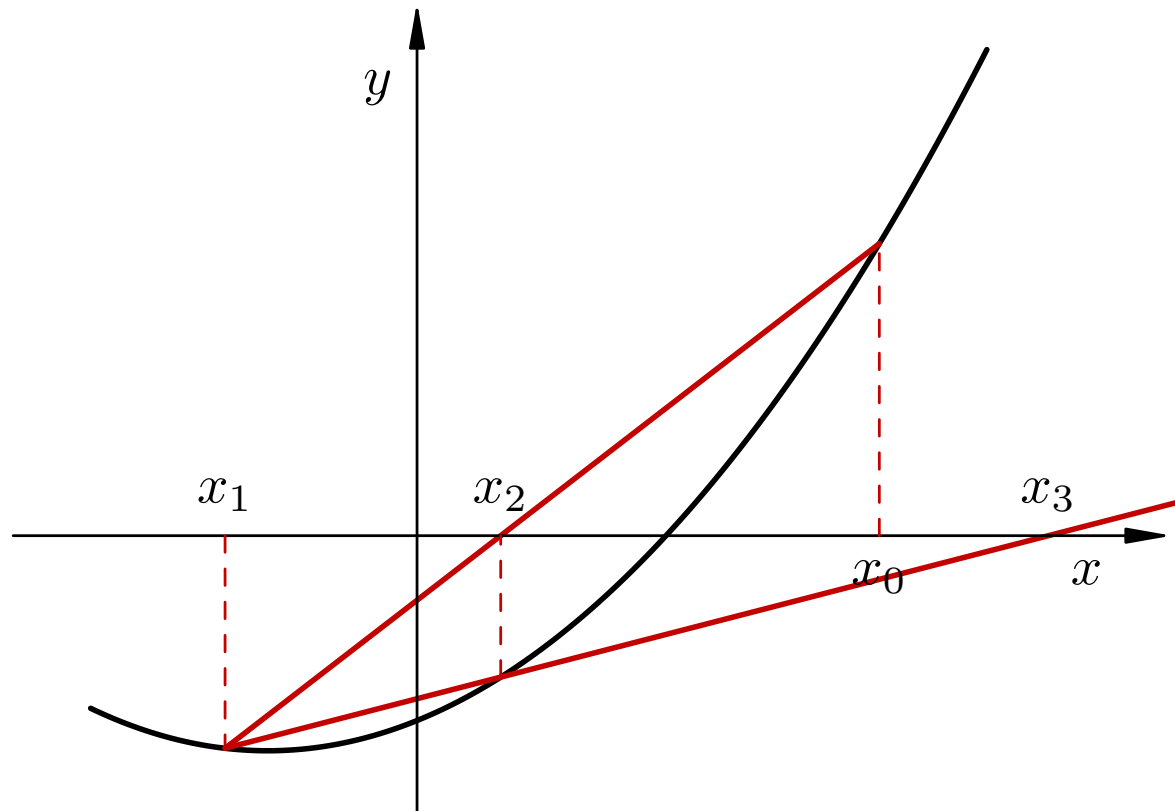
- kroz **posljednje dvije** točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$,

i tako redom.

Napomena. Tu je ključna **razlika** od **regule falsi** — tamo se **jedna** početna točka drži **fiksnom**.

Metoda sekante — grafički

Grafički, metoda **sekante** za nalaženje nultočke izgleda ovako



Primijetite da je **treća** iteracija izašla **izvan** početnog intervala, pa metoda **sekante** ne mora konvergirati.

Geometrijski izvod metode sekante

Geometrijski izvod metode je **jednostavan**.

- Napišemo jednadžbu **sekante** u točkama x_{n-1} i x_n i pogledamo gdje taj pravac **siječe** os x .

Jednadžba **sekante** je (**linearna** interpolacija za f u x_{n-1} i x_n)

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n).$$

Iz **zahtjeva** $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je **nova** aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Za **računanje** je dovoljno pretpostaviti da je $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ u **svim** “susjednim” točkama (iteracijama) x_{n-1} i x_n .

Formula za iteracije u metodi sekanti

Formulu za metodu **sekante** možemo dobiti i iteriranjem početne formule za **regulu falsi**.

Izraz za **novu** aproksimaciju možemo napisati i ovako

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]},$$

za $n \geq 1$.

Relacija koja “veže” **greške susjednih** aproksimacija, izvodi se na **isti** način kao kod **regule falsi**, i ima oblik

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1}) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

gdje je ζ_n između x_{n-1} , x_n i α , a ξ_n između x_{n-1} i x_n .

Red konvergencije metode sekante

Iz ove relacije može se izračunati **red konvergencije** metode **sekante**, uz odgovarajuće pretpostavke. Dobivamo da je

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Dokaz je dosta **kompliciran** (i ima veze s Fibonaccijevim brojevima, a p je **veće** rješenje jednačbe $p^2 = p + 1$).

Napomena. Metoda **sekante** se još naziva i

- metoda (**inverzne**) **linearne interpolacije**,
- jer sljedeću aproksimaciju x_{n+1} dobivamo kao
- **nultočku linearne** interpolacije za f , u prethodne dvije iteracije x_{n-1} i x_n .