Numerička matematika
5. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Interpolacija polinomima:
  - Newtonova baza i podijeljene razlike.
  - Računanje Newtonovog oblika IP.
  - Newton za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
  - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
  - Primjer Runge.
  - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
  - Hermiteova interpolacija i ocjena greške.
  - Newtonov oblik Hermiteovog IP.
- Interpolacija splajnovima:
  - Uvod u polinomnu spline interpolaciju.
  - Linearni spline i ocjena greške.

Informacije

Konzultacije:

- samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i domaće zadaće na adresi

`http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php`

ili, izravno

`http://degiorgi.math.hr/nm/`

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

http://web.math.hr/~singer/num_mat/

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (IP)

- nije pogodan za dodavanje čvorova, tj. za postupno povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji i Newtonova forma interpolacijskog polinoma (IP),

- koja se može izvesti tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije (x_k, f_k), tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Početak konstrukcije = interpolacijski polinom stupnja 0:

Krećemo od čvora x_0 i konstante p_0 koja interpolira funkciju f u čvoru x_0

$$p_0(x) = f_0.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Prvi korak = interpolacijski polinom stupnja 1:

- Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1.

Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Prvo uočimo:

- r_1 mora biti stupnja (najviše) 1.

Zatim, iz uvjeta interpolacije u ranijem čvoru x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$. Dakle, r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Na kraju, iz uvjeta interpolacije u novom čvoru x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$. Iz $r_1(x_1) = a_1(x_1 - x_0)$ izlazi

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Drugi korak = interpolacijski polinom stupnja 2:

- Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2.

Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Opet, korekcija r_2 mora biti stupnja (najviše) 2.

Iz uvjeta interpolacije u ranijim čvorovima x_0 i x_1 imamo

$$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \quad k = 0, 1,$$

tj. mora biti $r_2(x_0) = r_2(x_1) = 0$. Dakle, r_2 mora imati oblik

$$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Na kraju, koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u novom čvoru x_2.

U nastavku konstrukcije, na isti način dobivamo iste zaključke:

- Korekcija mora imati nultočke u svim ranijim čvorovima,
- a koeficijent izlazi iz uvjeta interpolacije u novom čvoru.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nastavimo li postupak do čvora x_n, dobit ćemo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

zapisan u "donjoj trokutastoj" ili Newtonovoj bazi

$$1, \quad (x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

u prostoru $\mathcal{P}_n$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog n.

Sada samo treba odrediti koeficijente a_k. Prethodni postupak odgovara supstituciji unaprijed (probajte). Međutim, može i elegantnije, što otkriva dodatna svojstva koeficijenata a_k!

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da dižemo stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k ovisi samo o funkciji f i "trenutnim" čvorovima $x_0, \ldots, x_k$.

Oznaka i definicija za koeficijente u Newtonovom obliku IP:

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k], \quad k = 0, \ldots, n,$$

a veličinu $f[x_0, \ldots, x_k]$ zovemo

- k-ta podijeljena razlika funkcije f s čvorovima $x_0, \ldots, x_k$.

Katkad se koristi "operatorska" oznaka $[x_0, \ldots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema. Za međusobno različite čvorove $x_0, \ldots, x_n$, podijeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_n]$ ne ovisi o permutaciji čvorova σ, tj.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k — ako je poredak čvorova $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k — ako je poredak čvorova $x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \cdots + b_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Podijeljene razlike

Oba zapisa predstavljaju isti polinom p_n, pa

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije od x moraju biti jednaki.

Uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$. ■

Kasnije ćemo vidjeti da čvorovi ne moraju biti različiti.

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \ldots, x_n]$.

Lema. Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$. Ovdje pretpostavljamo da je $x_0 \neq x_n$.

Podijeljene razlike

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n u odgovarajućem Newtonovom obliku

- s a_k — ako je poredak čvorova $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k — ako je poredak čvorova $x_n, \ldots, x_0$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \cdots + b_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1}.

Podijeljene razlike

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao zbroj dva koeficijenta:

- koeficijent uz pretposljednji član u p_n, što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u posljednjem članu — u produktu faktora $\prod_{k=\cdots}^{\cdots}(x - x_k)$, uzmemo iz jedne zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x.

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Podijeljene razlike

Skratimo iste članove $x_1, \ldots, x_{n-1}$ u obje sume, pa ostaje

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$

Kad uvrstimo da je

$$a_n = f[x_0, \ldots, x_n],$$

$$a_{n-1} = f[x_0, \ldots, x_{n-1}],$$

$$b_{n-1} = f[x_n, \ldots, x_1] = f[x_1, \ldots, x_n],$$

odmah izlazi tražena rekurzija.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz konstantnog interpolacijskog polinoma. ■

Tablica podijeljenih razlika

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & f[x_0, \ldots, x_n] \\
 & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & \iddots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma je

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo "gornji rub". To se može izračunati u jednom jednodimenzionalnom polju.

Algoritam računanja podijeljenih razlika

```
za i = 1 do n radi {
  za j = n do i radi {
    f[j] = (f[j] - f[j - 1])/(x[j] - x[j - i]);
  };
};
```

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nakon završetka algoritma za računanje podijeljenih razlika

- "gornji rub" $f[x_0, \ldots, x_i]$ se nalazi, redom, u polju `f`.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma p_n u nekoj točki x ima oblik Hornerove sheme.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma

```
sum = f[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * (x - x[i]) + f[i];
};
/* Na kraju je p_n(x) = sum. */
```

Složenost je $O(n)$ operacija po svakoj točki x.

Zapis greške interpolacijskog polinoma

Izraz za grešku interpolacijskog polinoma p_n na $[a, b]$ iz ranijeg teorema, možemo pisati korištenjem podijeljenih razlika.

Ideja. U Newtonov oblik polinoma p_n dodajmo još jedan čvor $x_{n+1} \in [a, b]$, s tim da x_{n+1} nije jednak ni jednom od polaznih čvorova $x_0, \ldots, x_n$. Dobivamo polinom p_{n+1} za kojeg vrijedi

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\
&\qquad + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\
&\qquad + f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0) \cdots (x - x_n). \\
&= p_n(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_n)\, f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}] \\
&= p_n(x) + \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}],
\end{aligned}$$

gdje je ω polinom čvorova za polazne čvorove $x_0, \ldots, x_n$.

Zapis greške interpolacijskog polinoma

Uvjet interpolacije za polinom p_{n+1} u dodanom čvoru x_{n+1} je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}).$$

On služi samo tome da dobijemo f, umjesto p_{n+1}, na lijevoj strani. A sad, zaboravimo na p_{n+1} i pogledajmo što to kaže o polinomu p_n od kojeg smo krenuli. Dobivamo

$$f(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}],$$

odakle odmah slijedi izraz za grešku interpolacije u točki x_{n+1}

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}].$$

Ovo je algebarski identitet — tu nema nikakvih "čudesa"!

Obično se piše x, umjesto x_{n+1}, zato da naglasimo da ta točka može varirati, a zadane čvorove $x_0, \ldots, x_n$ smatramo fiksnima.

Greška interpolacijskog polinoma

Teorem. Neka je f funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i

- neka su $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$,
- i neka je p_n interpolacijski polinom za f u tim čvorovima.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, takvu da je $x \neq x_0, \ldots, x_n$, tj. čim x nije čvor interpolacije, za grešku interpolacije vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x]. \qquad \blacksquare$$

Bitno: Ovo vrijedi bez ikakvih dodatnih pretpostavki na f.

- Faktor $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ ovisi samo o zadanim podacima (x_k, f_k), za $k = 0, \ldots, n$, i točki $(x, f(x))$ — gdje gledamo grešku.

Podijeljena razlika s dvostrukim čvorom

Ako želimo da prethodna formula vrijedi i kad je x jednak nekom od čvorova interpolacije, onda treba osigurati da je

- izraz $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ korektno definiran, kad je $x = x_i$.

Pitanje: Što je podijeljena razlika u dvostrukom čvoru?

Definicija ide proširenjem po neprekidnosti. Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo da $h \to 0$. Tada je

$$f[x_0, x_0] = \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Dakle, podijeljena razlika $f[x_0, x_0]$ je korektno definirana ako i samo ako prva derivacija f' postoji u x_0.

Uz to proširenje, podijeljene razlike višeg reda računaju se na uobičajeni način — vrijedi rekurzija.

Proširenje — greška interpolacije u čvorovima

Proširenje. Ako f' postoji u svim čvorovima interpolacije, onda prethodna formula za grešku interpolacije polinomom p_n

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x]$$

vrijedi za sve $x \in [a, b]$, tj. i kad je x jednak nekom čvoru. ■

Velika prednost ovog oblika = može se derivirati i integrirati kao funkcija od x, uz odgovarajuću glatkoću funkcije f. Osim toga, ova formula vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti (v. Hermiteova interpolacija).

Usporedimo to s izrazom za grešku iz ranijeg teorema

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, pazeći na pretpostavke i tvrdnju!

Veza podijeljene razlike i derivacije istog reda

Teorem. Neka su zadani čvorovi $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, i pretpostavimo da $f^{(n+1)}$ postoji na cijelom $[a, b]$. Onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, takva da za podijeljenu razliku vrijedi

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Tvrdnja vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti. ■

Kad stavimo $x = x_{n+1}$, dobijemo

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Za $n = 0$, usporedite ovo s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti, ili odnosom "sekanta" $\leftrightarrow$ "tangenta"!
Gornja formula je generalizacija za $n \geq 1$ (za više derivacije).

Podijeljene razlike visokog reda za polinome

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ polinom stupnja najviše n, onda je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0, \quad \text{za} \quad k \geq n+1,$$

za bilo koji izbor čvorova $x_0, \ldots, x_k$.

Dokaz. Za $k \geq n+1$ vrijedi $f^{(k)}(\xi) = 0$ u svakoj točki ξ. ∎

Podijeljena razlika — kao funkcija argumenata

Za ilustraciju, pogledajmo kako se ponaša podijeljena razlika

$$f[x,y] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

kao funkcija dvije varijable $x, y \in [a,b]$, na kvadratu $S = [a,b] \times [a,b] \subseteq \mathbb{R}^2$, s dijagonalom $D = \{\, (x,x) \mid x \in [a,b] \,\}$.

Ovisno o svojstvima funkcije f na $[a,b]$, za $f[x,y]$ vrijedi:

- f definirana na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ definirana na $S \setminus D$,
- f neprekidna na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ neprekidna na $S \setminus D$,
- f derivabilna na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ definirana na cijelom S,
- f neprekidno derivabilna na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ neprekidna na cijelom S.

Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

- ako su čvorovi ekvidistantni.

Prisjetimo se, Newtonov interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja radi se u

- podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$,
- faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Pojednostavnimo prvo podijeljenu razliku.

Točke su ekvidistantne s "razmakom" (ili korakom) h, ako je

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Konačnu razliku unaprijed definiramo kao

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo operator konačnih razlika unaprijed.

Konačnu razliku reda k, za $k \in \mathbb{N}$, definiramo rekurzivno kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor (definiciju) $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Nađimo vezu podijeljenih i konačnih razlika.

Lema. Ako su točke x_j ekvidistantne, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!\, h^k}\, \Delta^k f_j.$$

Dokaz. Ide indukcijom po redu k.

Za $k = 0$, rezultat je očito istinit — po definiciji.

Baza indukcije. Za $k = 1$ imamo

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h},$$

pa tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Podijeljene i konačne razlike

Korak indukcije. Pretpostavimo da za sve uzastopne točke $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$, za bilo koji "dozvoljeni" j, vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}] = \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}}\, \Delta^{k-1} f_j.$$

Zaključak. Ako je $j + k \le n$, onda je

$$\begin{aligned}
f[x_j, \ldots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \\
&= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{k \cdot h} = (\text{pretp. ind.}) \\
&= \frac{1}{kh} \left(\frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}}\, \Delta^{k-1} f_{j+1} - \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}}\, \Delta^{k-1} f_j \right) \\
&= \frac{1}{k!\, h^k} (\Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j) = \frac{1}{k!\, h^k}\, \Delta^k f_j. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Zapišimo prvo točku x preko početnog čvora x_0 i koraka h,

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

s tim da, ovdje, s može biti i realan broj. Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} \big((s - j)h\big) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Po definiciji binomnih koeficijenata, s tim da i ovdje smije biti $s \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{s}{0} = 1, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Odavde odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

Sada možemo napisati Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s ekvidistantnim čvorovima.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Uočimo da se faktor $h^k k!$ skrati:

- u nazivniku dolazi od podijeljenih razlika $f[x_0, \ldots, x_k]$,
- a u brojniku dolazi od produkta $\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$.

Onda interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\ = \Delta^0 f_0 &+ \binom{s}{1}\Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica svih potrebnih konačnih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f_k & \Delta f_k & \Delta^2 f_k & \cdots & \Delta^n f_k \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \Delta^n f_0 \\
 & & \Delta f_{n-2} & & \iddots & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Ova tablica se računa u jednom jednodimenzionalnom polju, kao i kod podijeljenih razlika.

Koliko je “dobar” interpolacijski polinom?

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera. Legenda:

- crna boja — funkcija f,
- crvena boja — interpolacijski polinom p_n.

Ekvidistantna mreža s $n + 1$ čvorova u intervalu $[a, b]$ ima čvorove $x_k^{(n)} = a + k \cdot h_n$, za $k = 0, \ldots, n$, uz $h_n = (b - a)/n$.

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo grafove interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

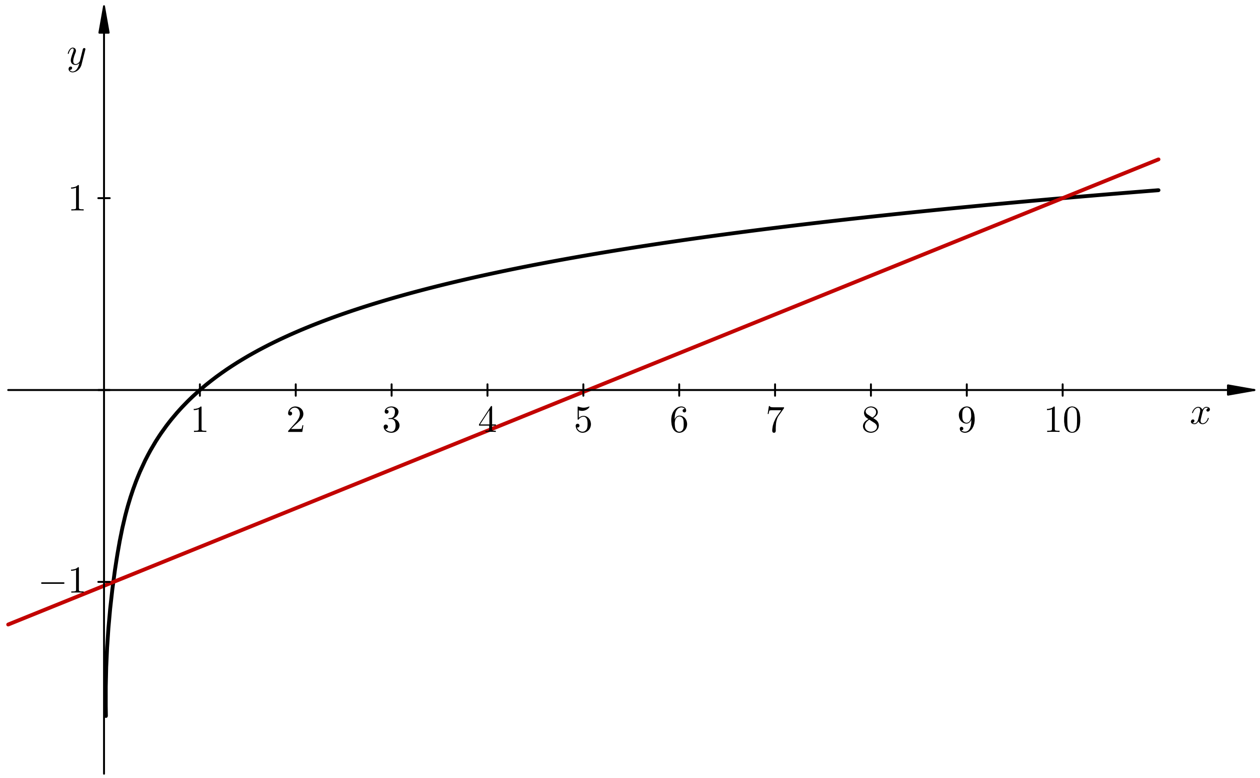
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je vrlo blizu tog singulariteta.

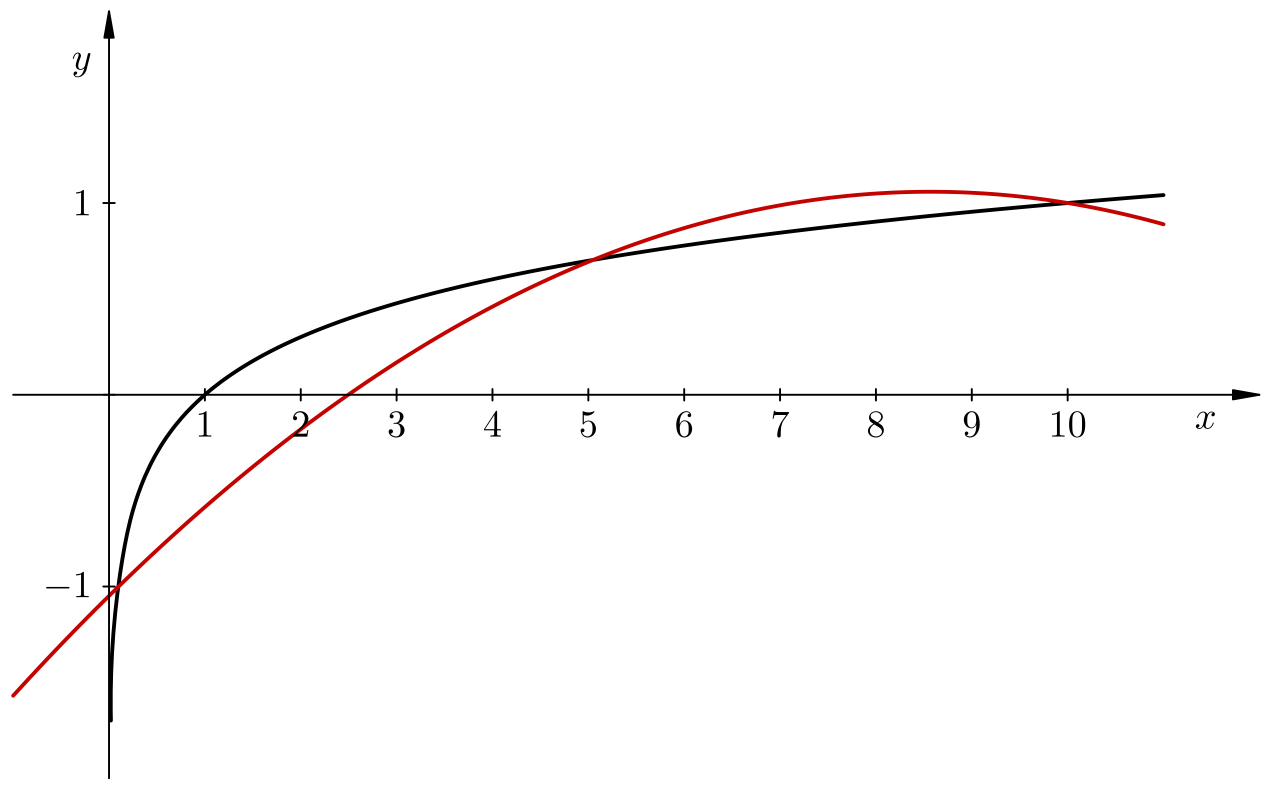
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša izvan intervala interpolacije (tzv. “ekstrapolacija”).

Logaritam — ekvidistantna mreža



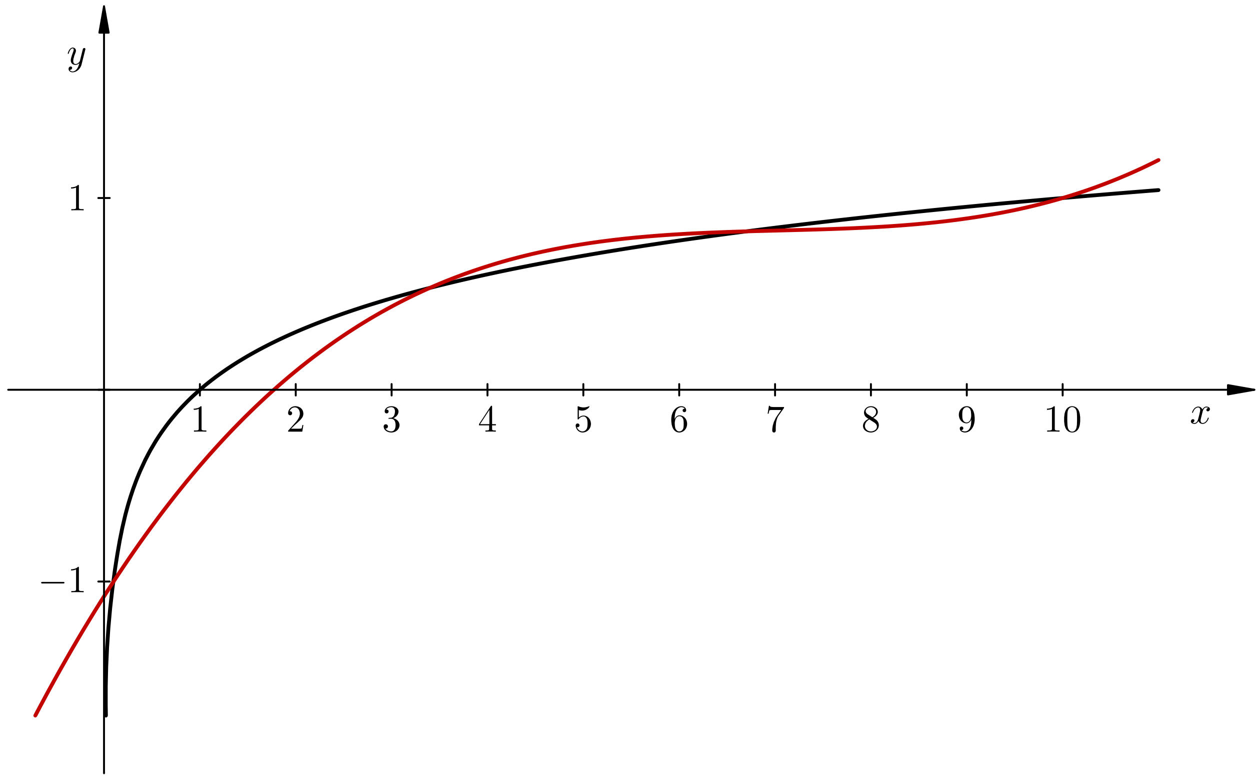
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



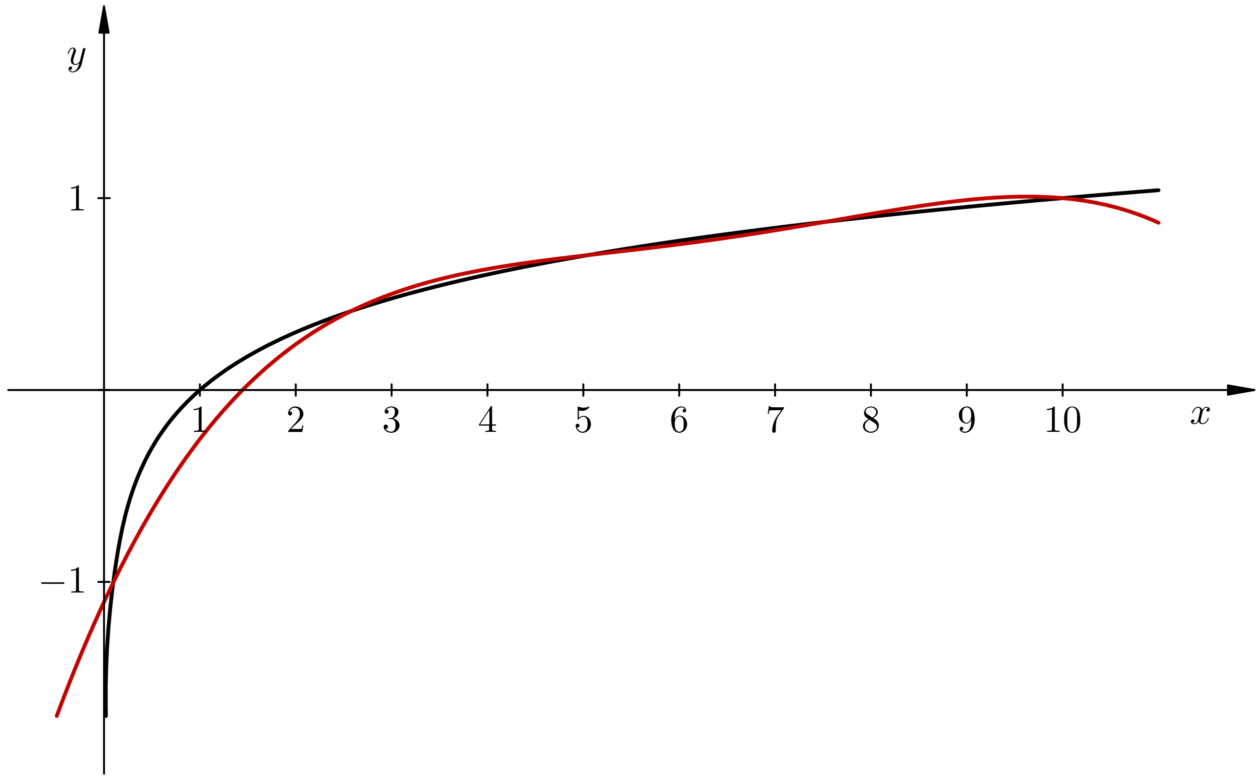
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



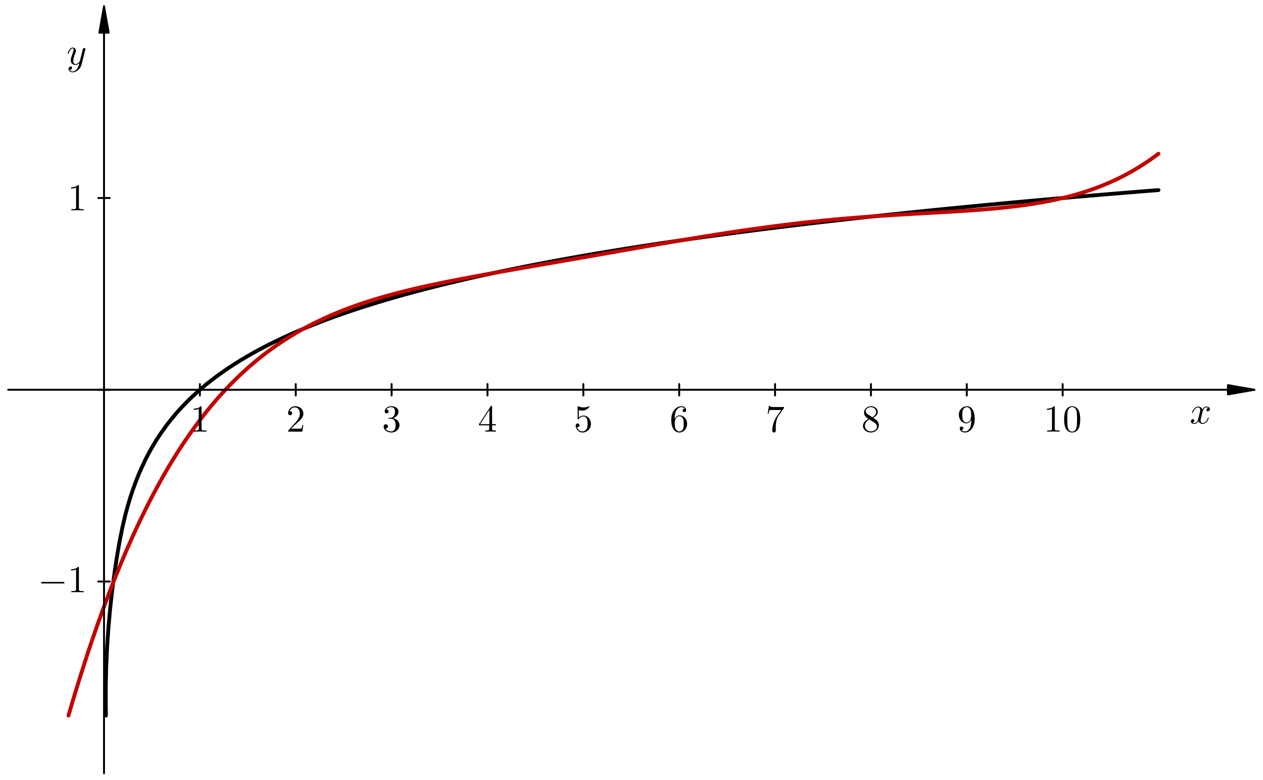
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



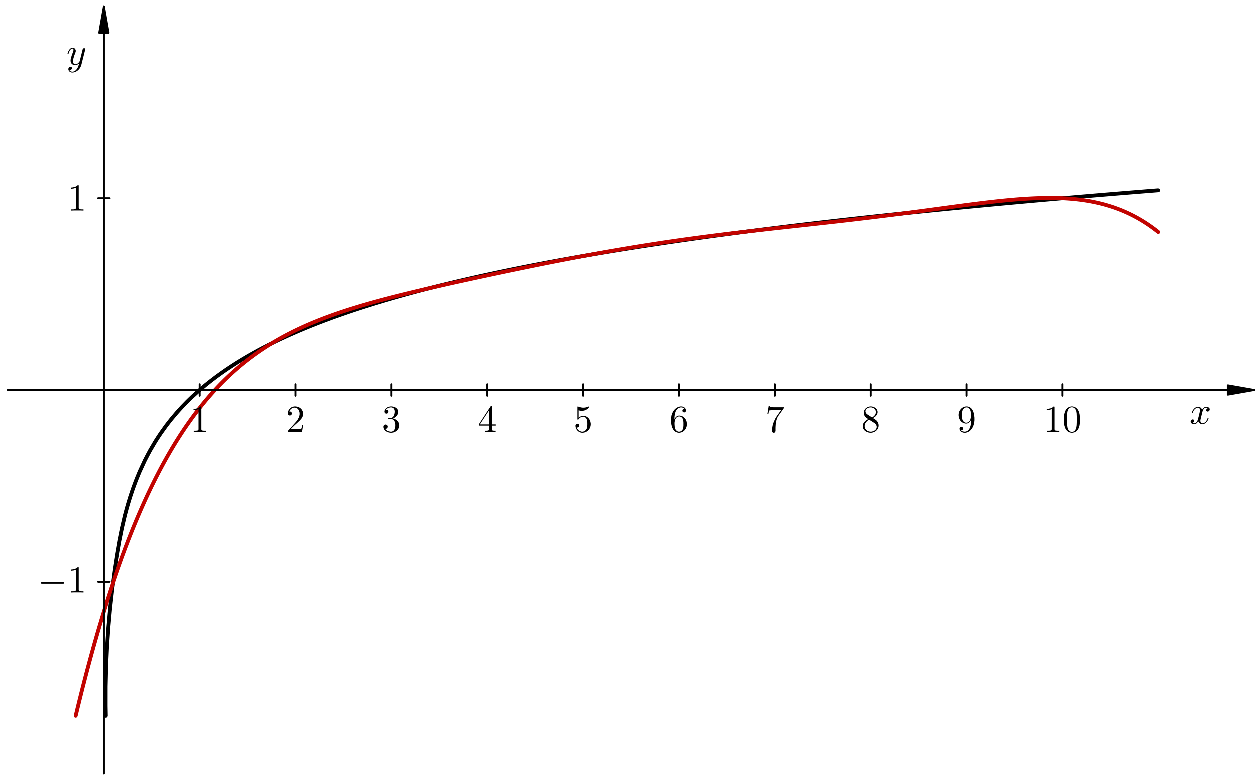
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



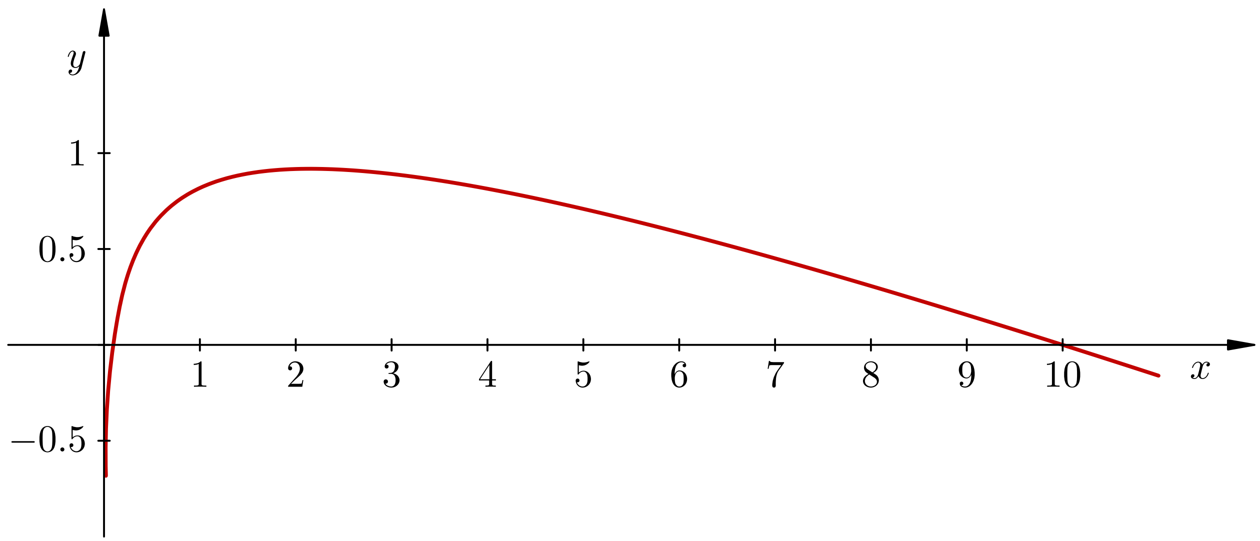
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

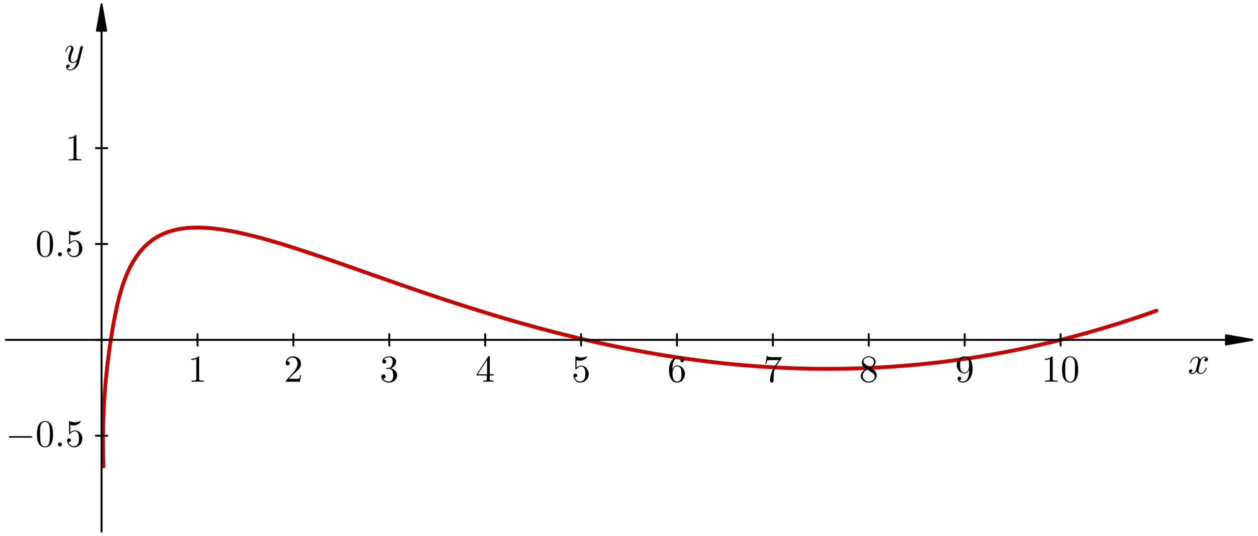
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite skalu na y-osi.

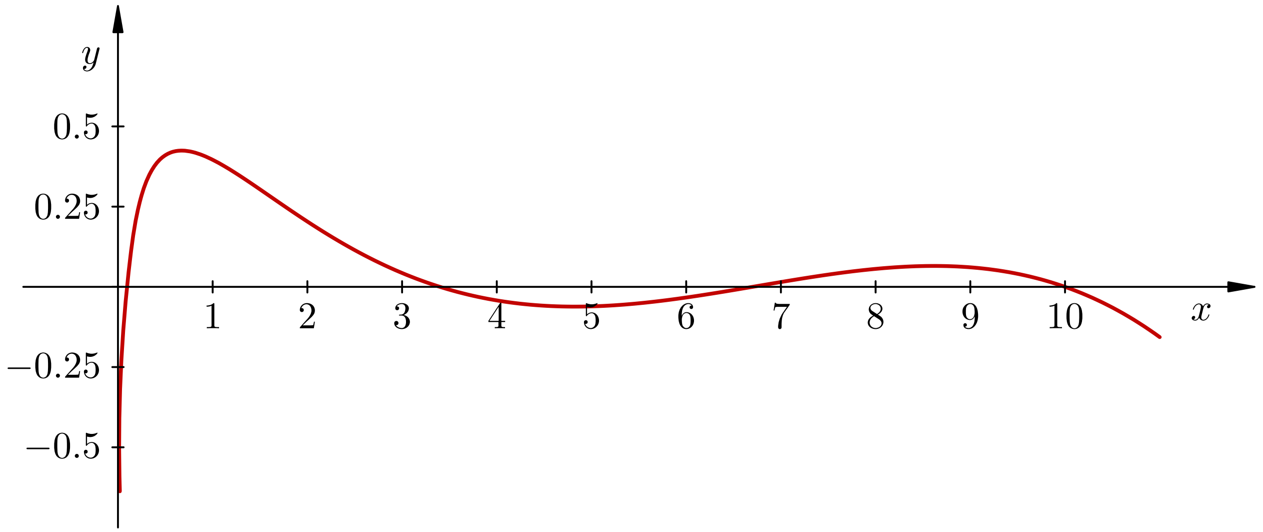
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Pratite skalu na y-osi.

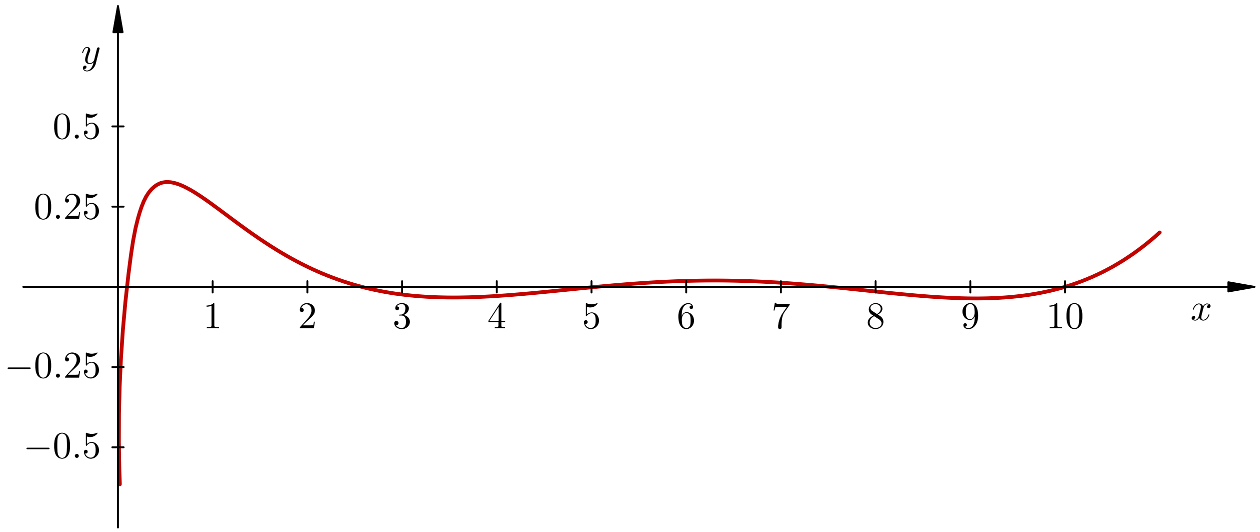
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite skalu na y-osi.

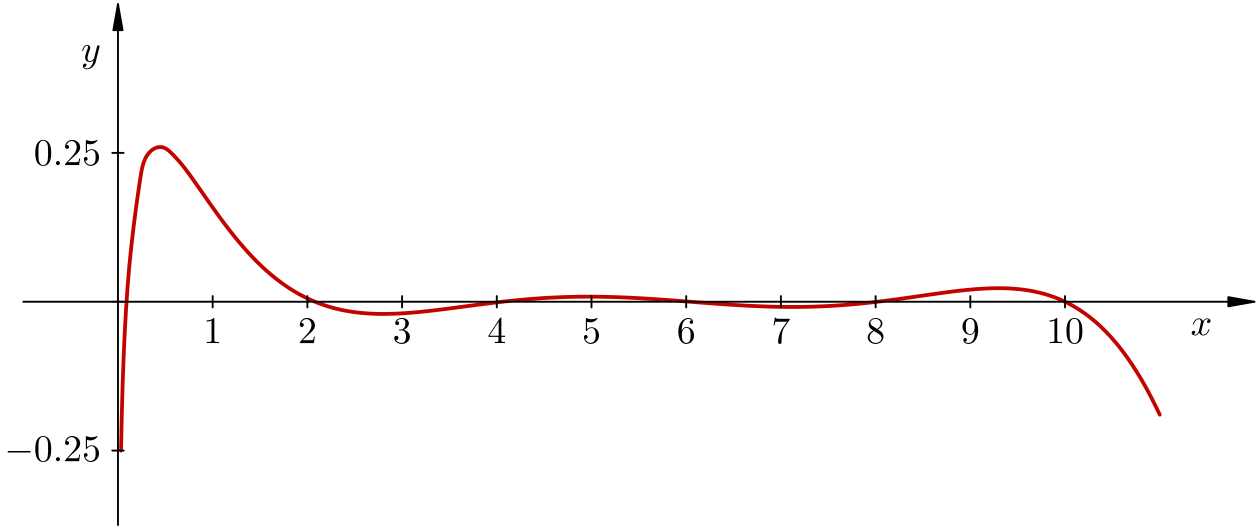
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite skalu na y-osi.

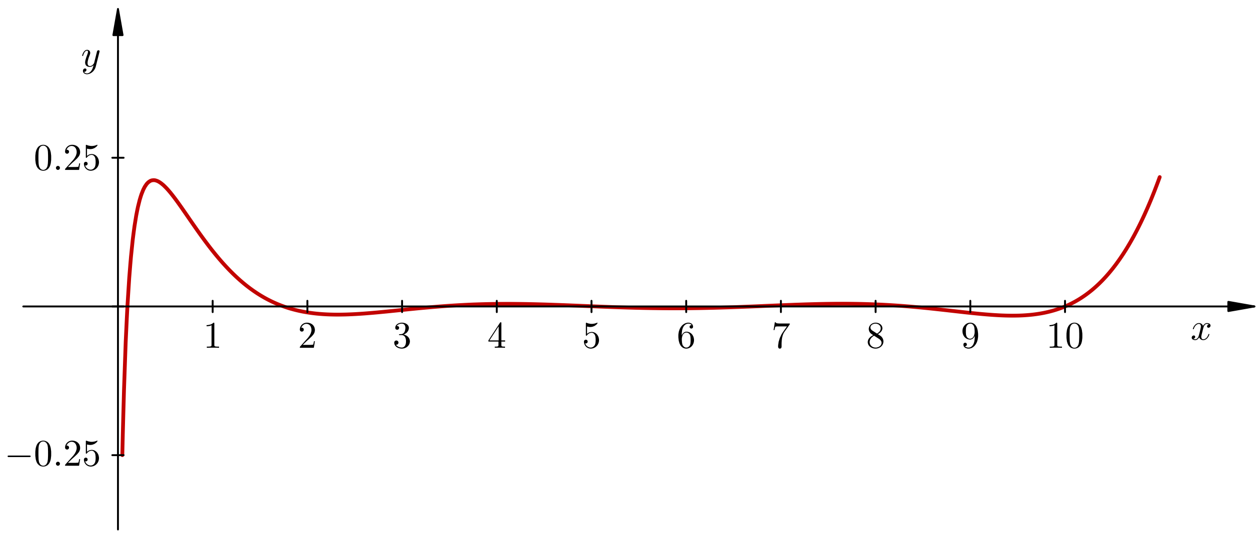
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite skalu na y-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite skalu na y-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar Runge (1901. g.) prvi je uočio

- probleme koji nastupaju kod interpolacije polinomima na ekvidistantnim mrežama čvorova.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao funkcija Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{na} \quad [-5, 5],$$

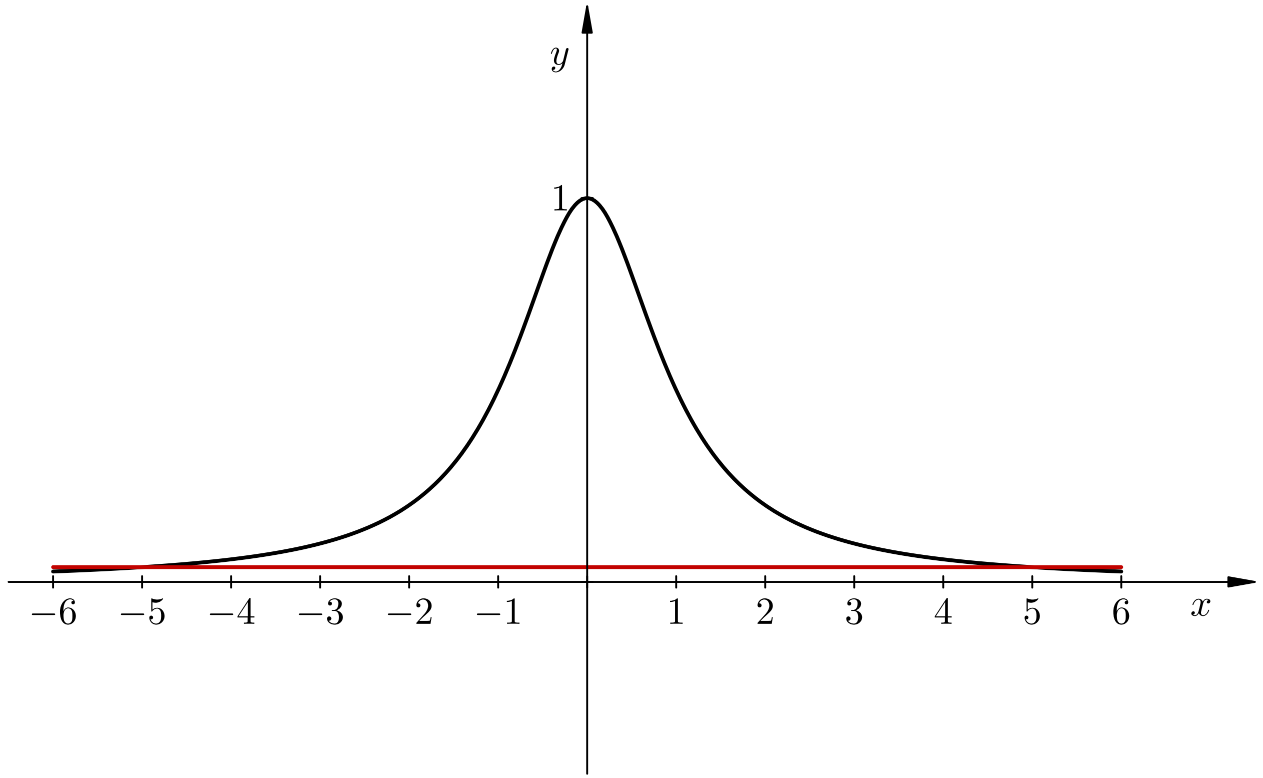
  takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnim mrežama ne konvergira prema toj funkciji.

Promotrimo interpolaciju polinomima stupnjeva

- 1–6, 8, 10, 12, 14 i 16 (parnost funkcije!),

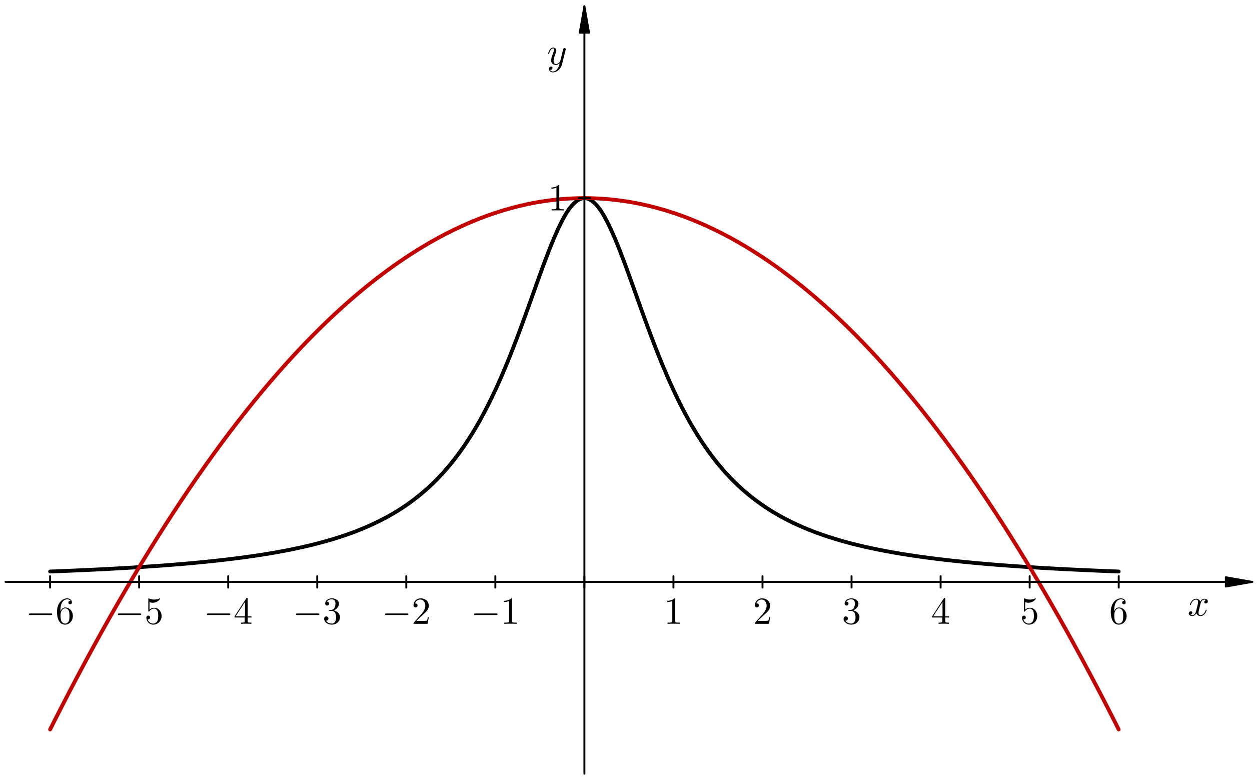
na ekvidistantnim mrežama čvorova u $[-5, 5]$.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



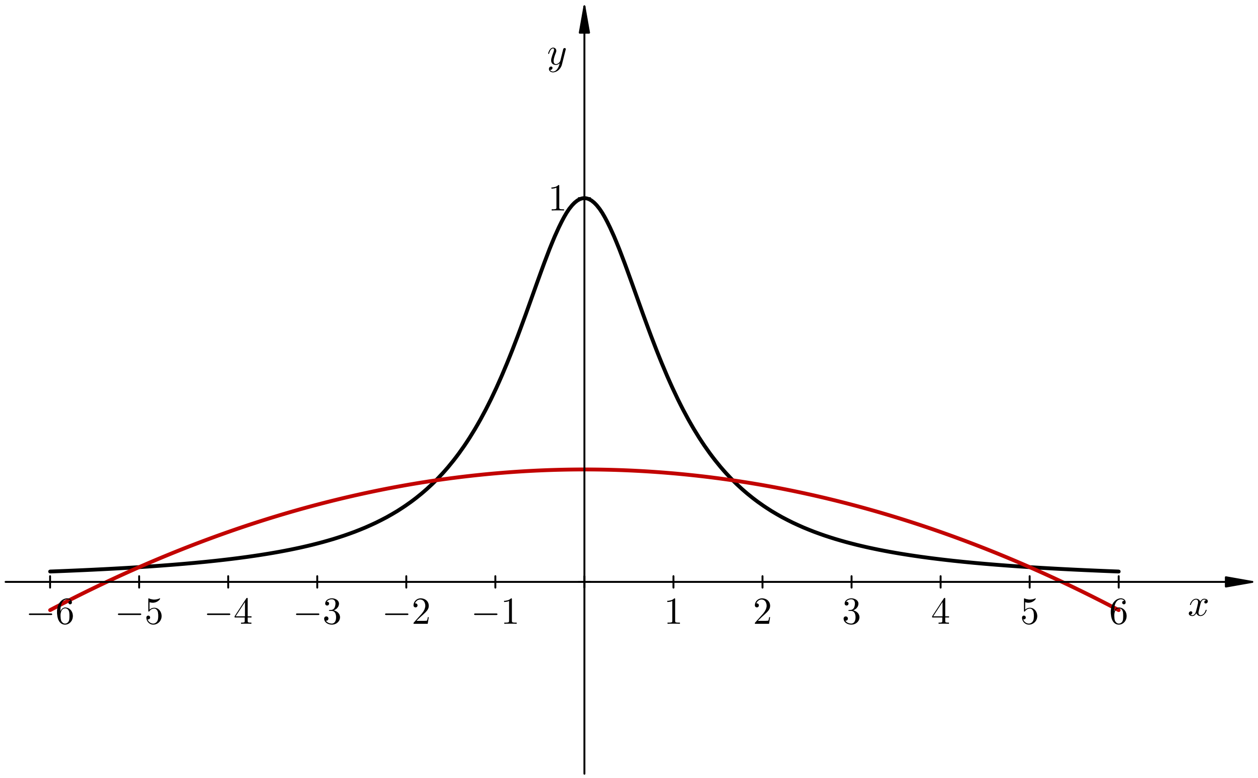
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



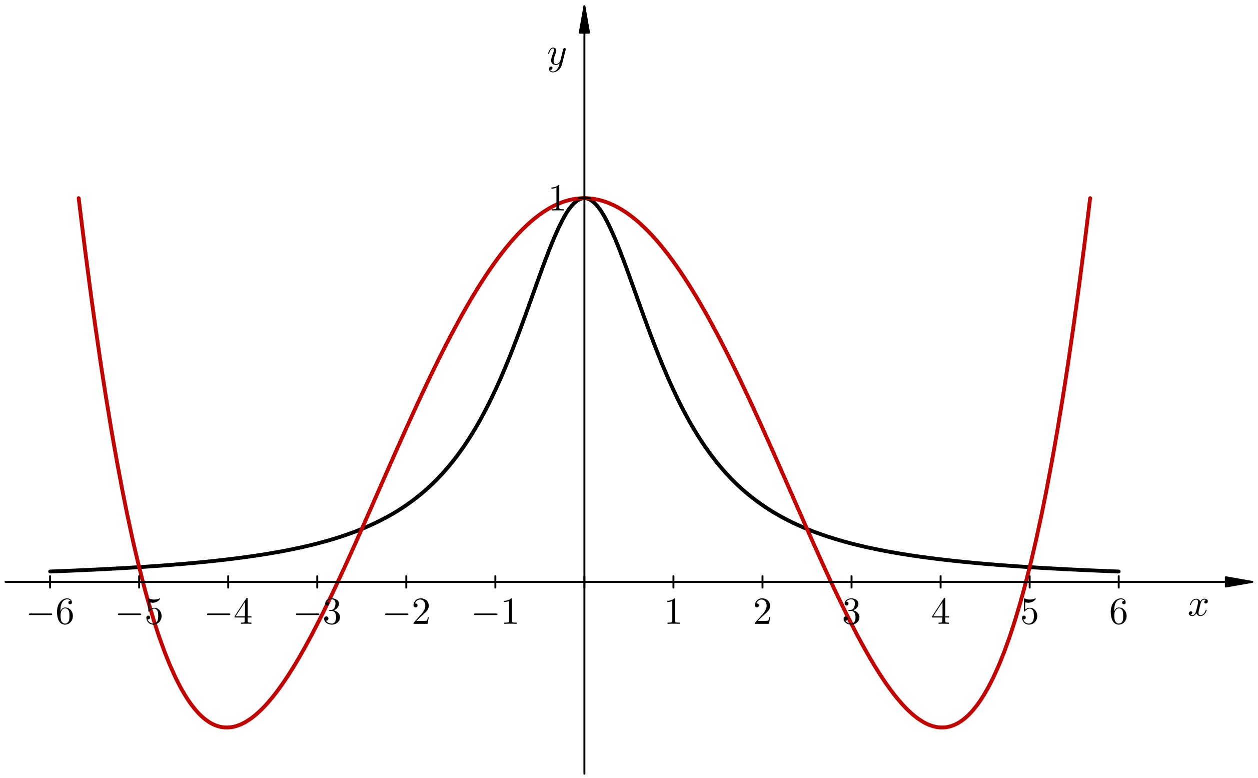
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



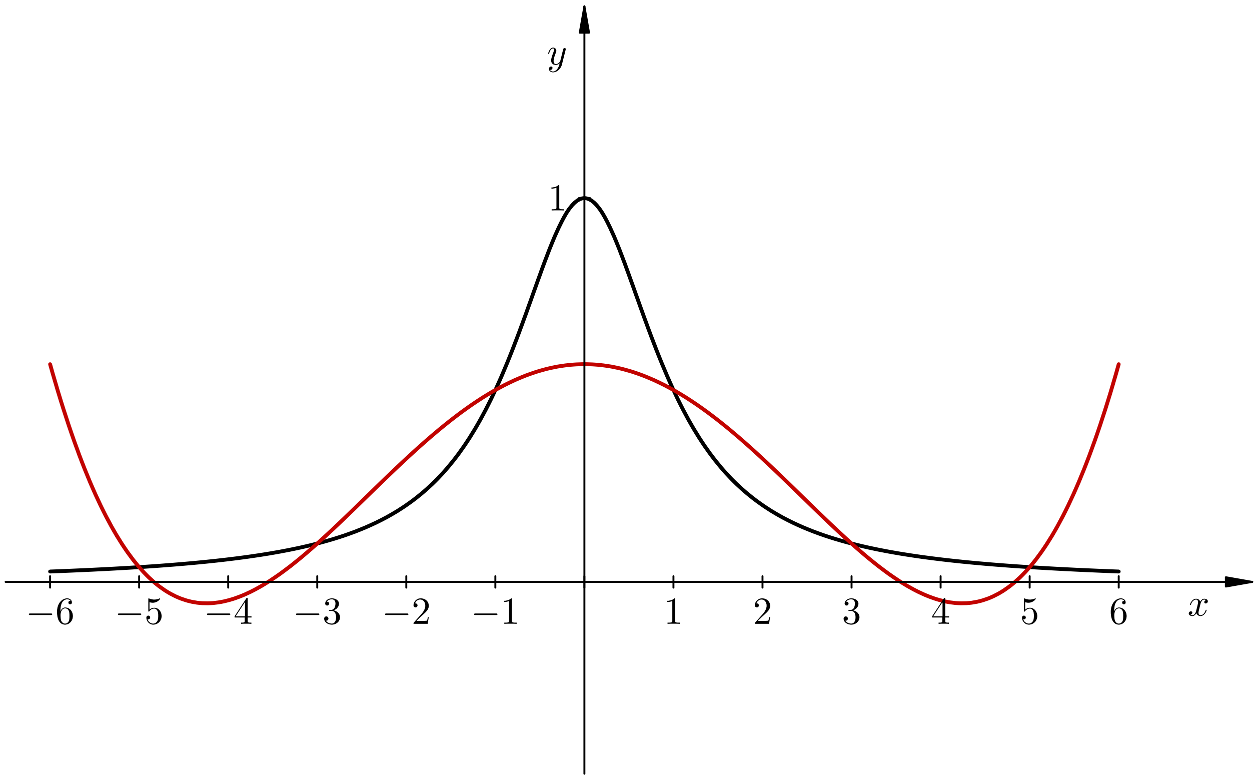
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



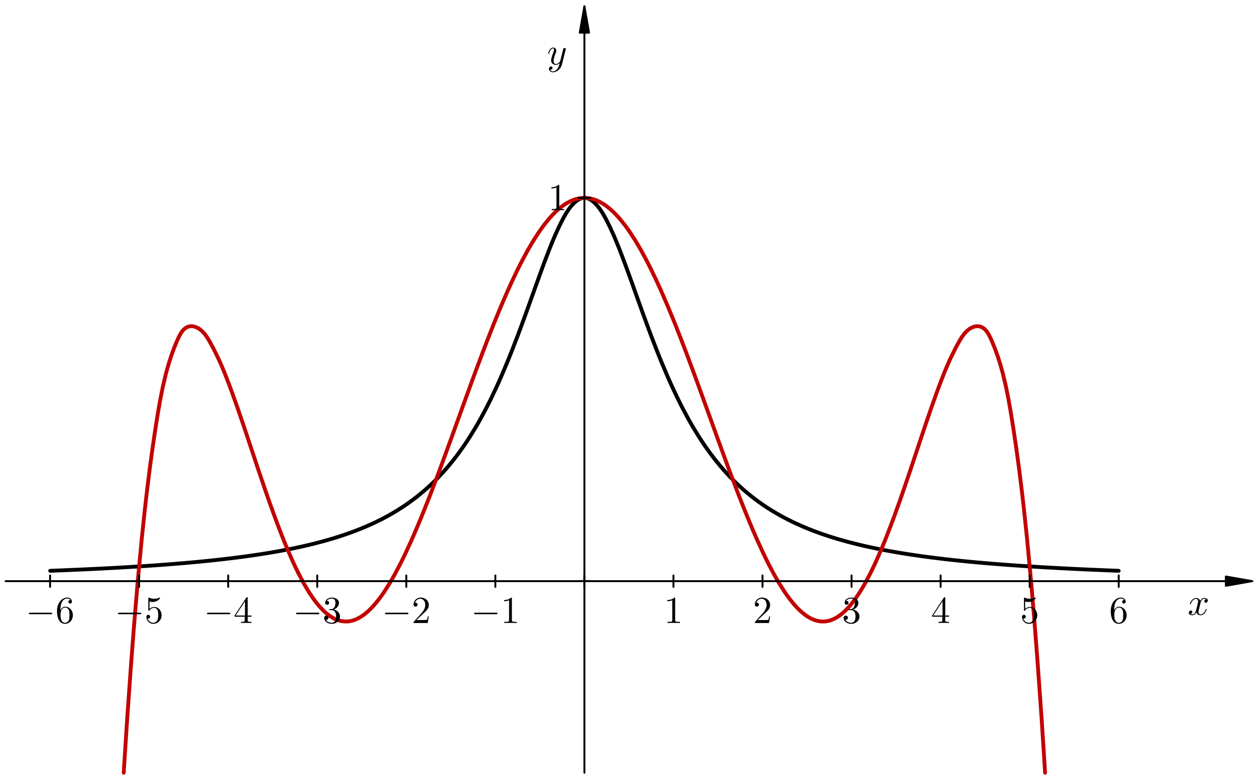
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



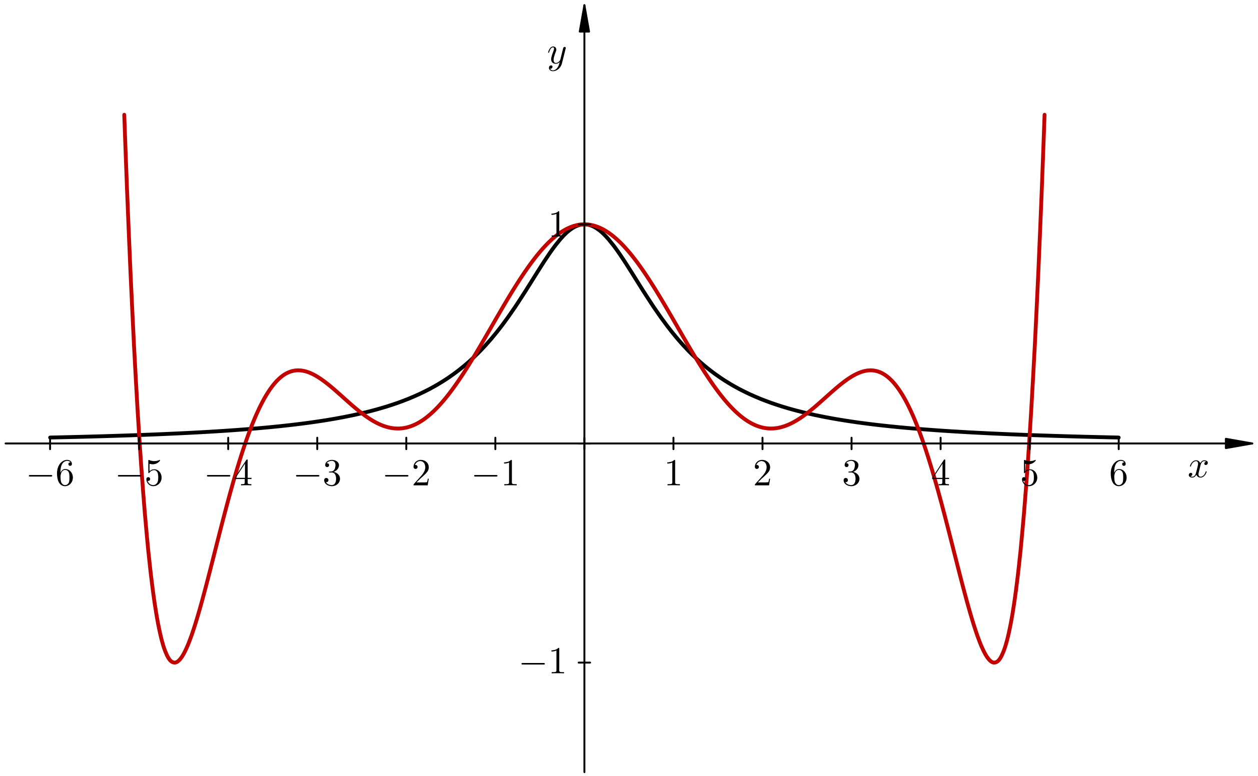
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



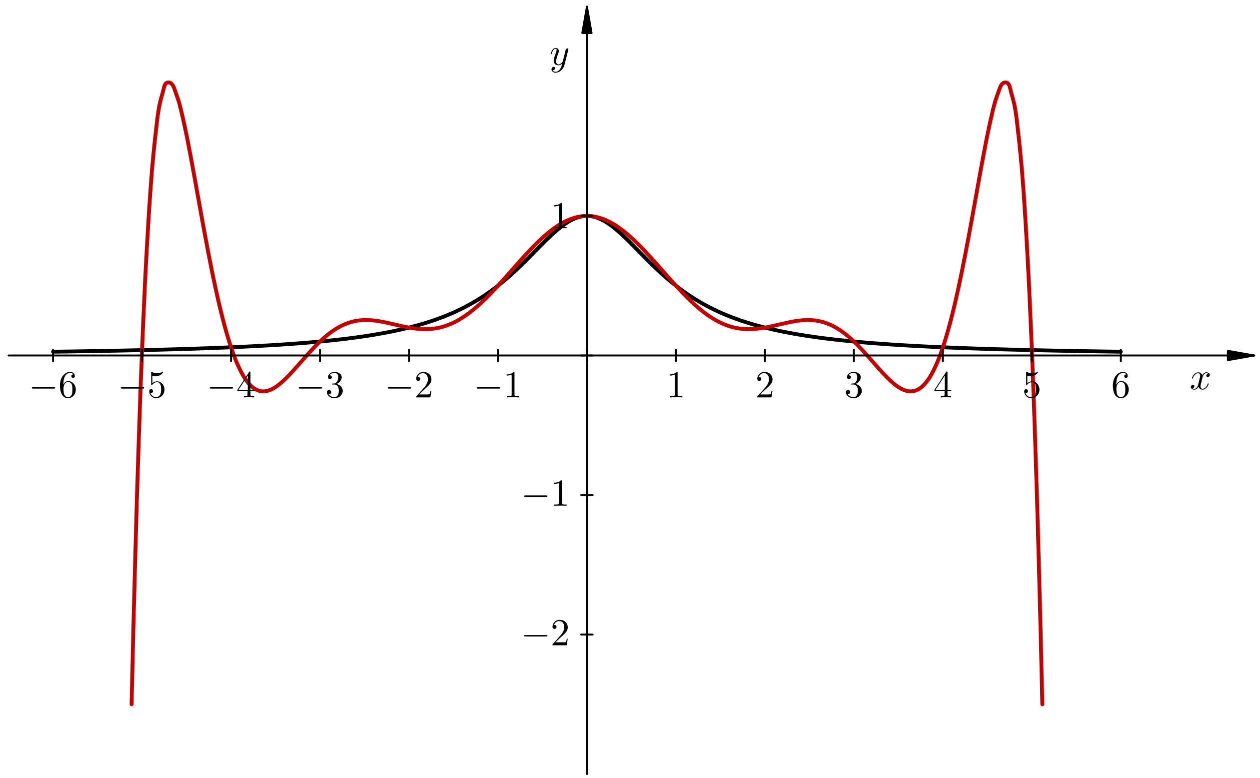
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



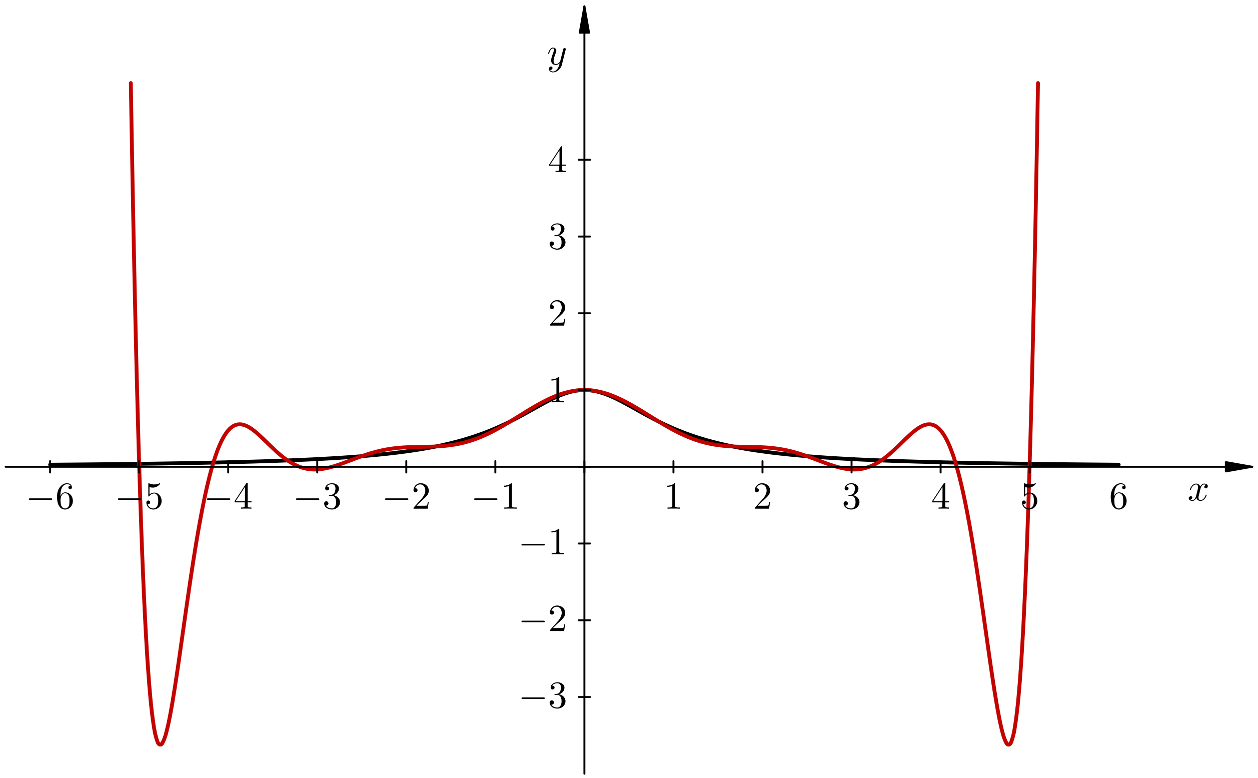
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



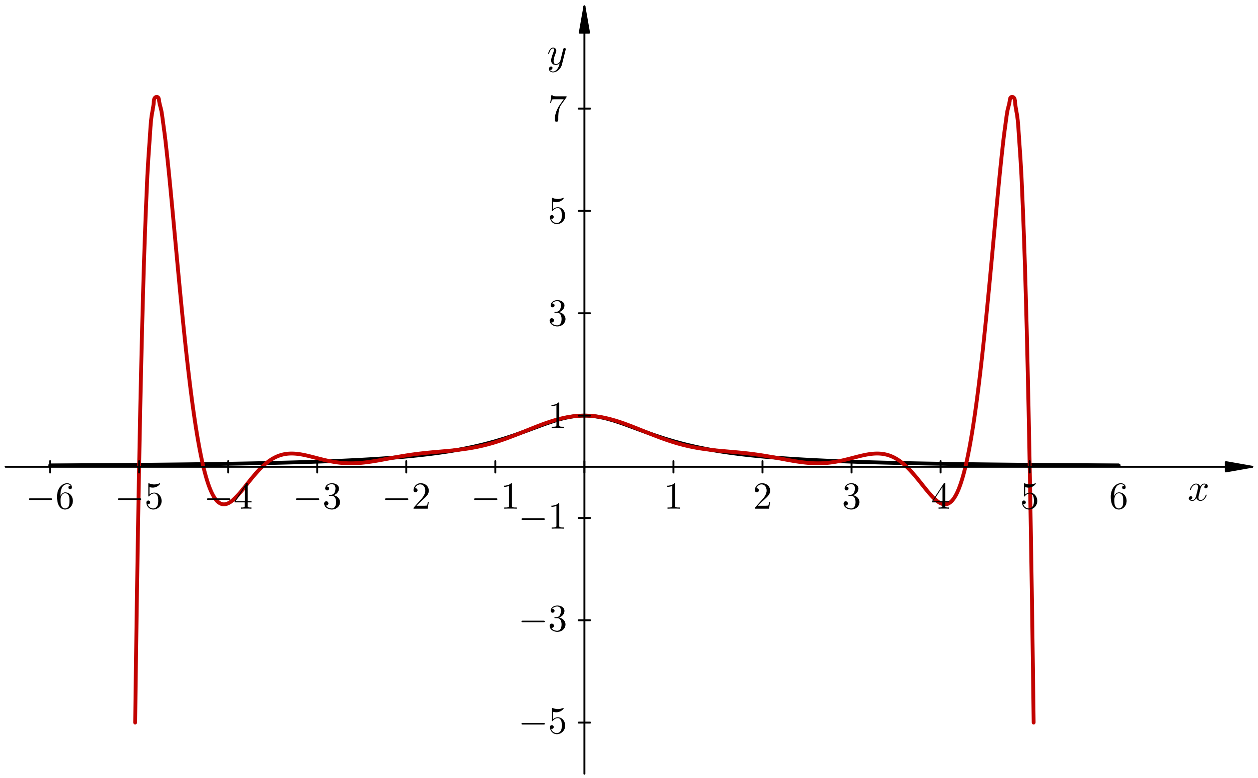
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



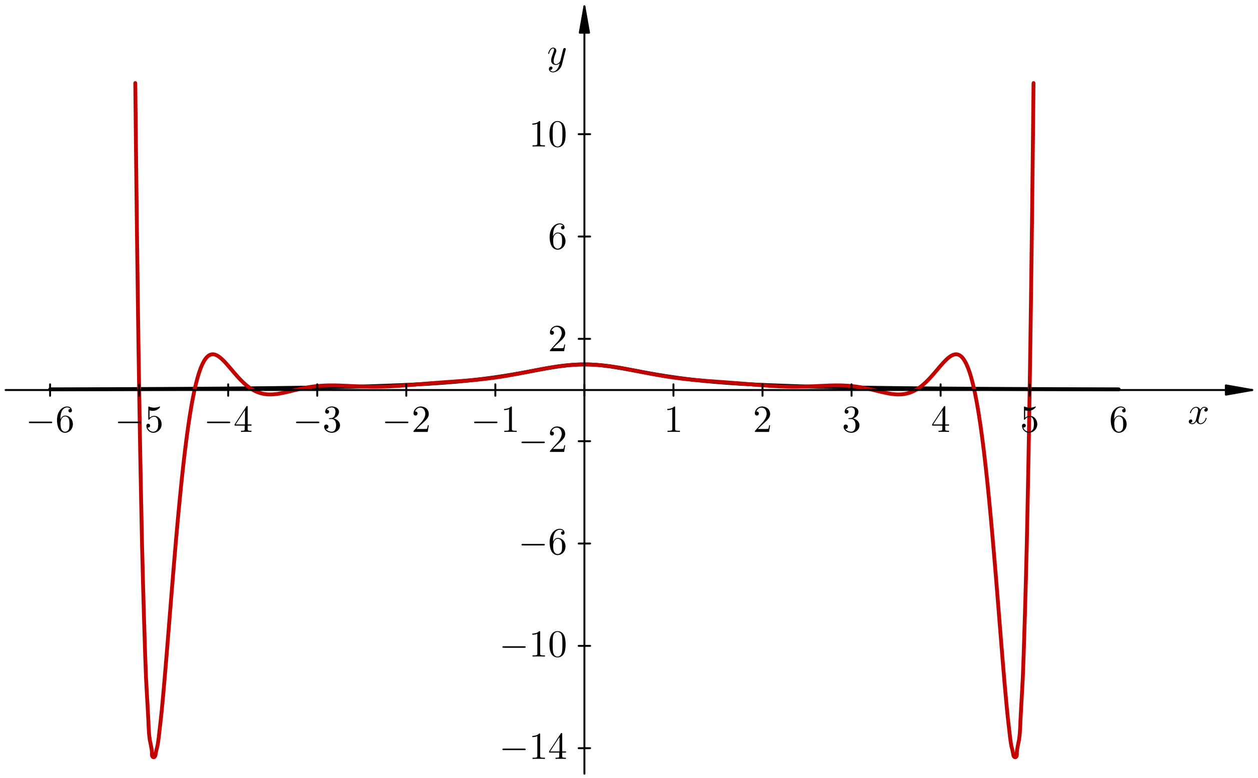
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



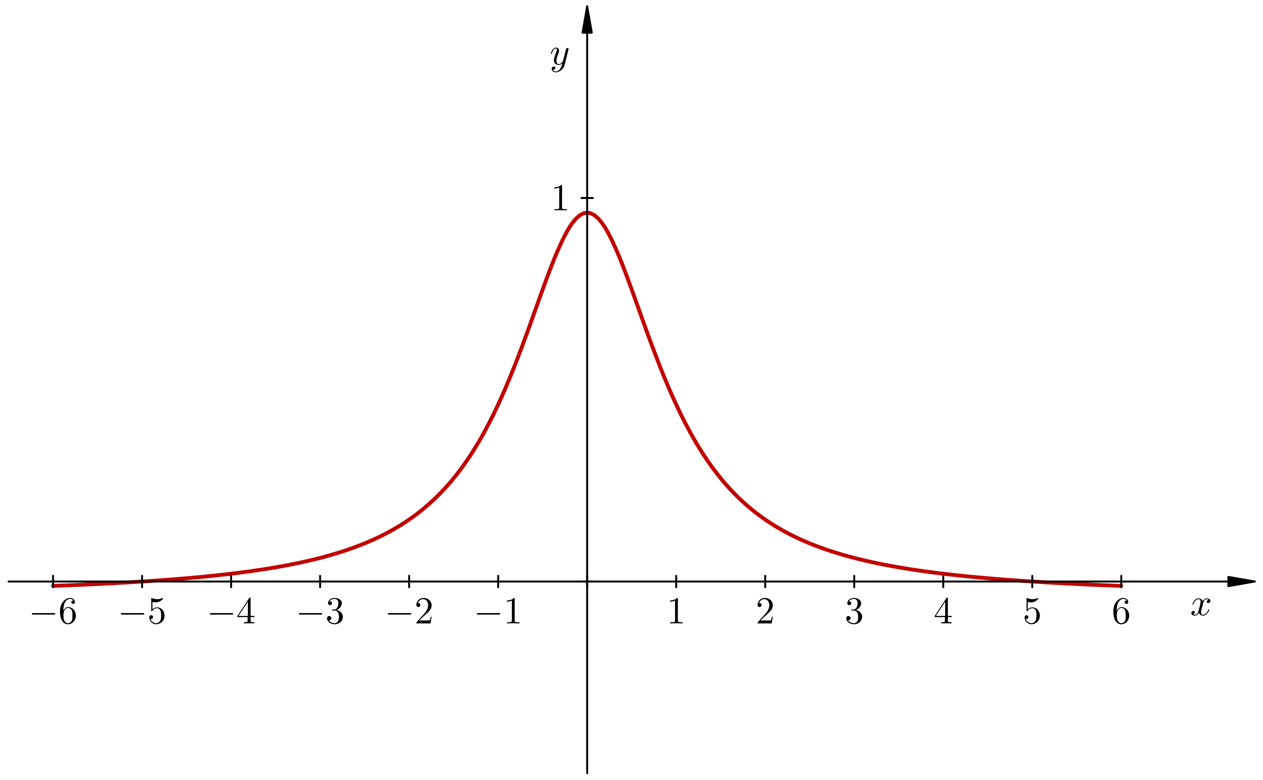
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



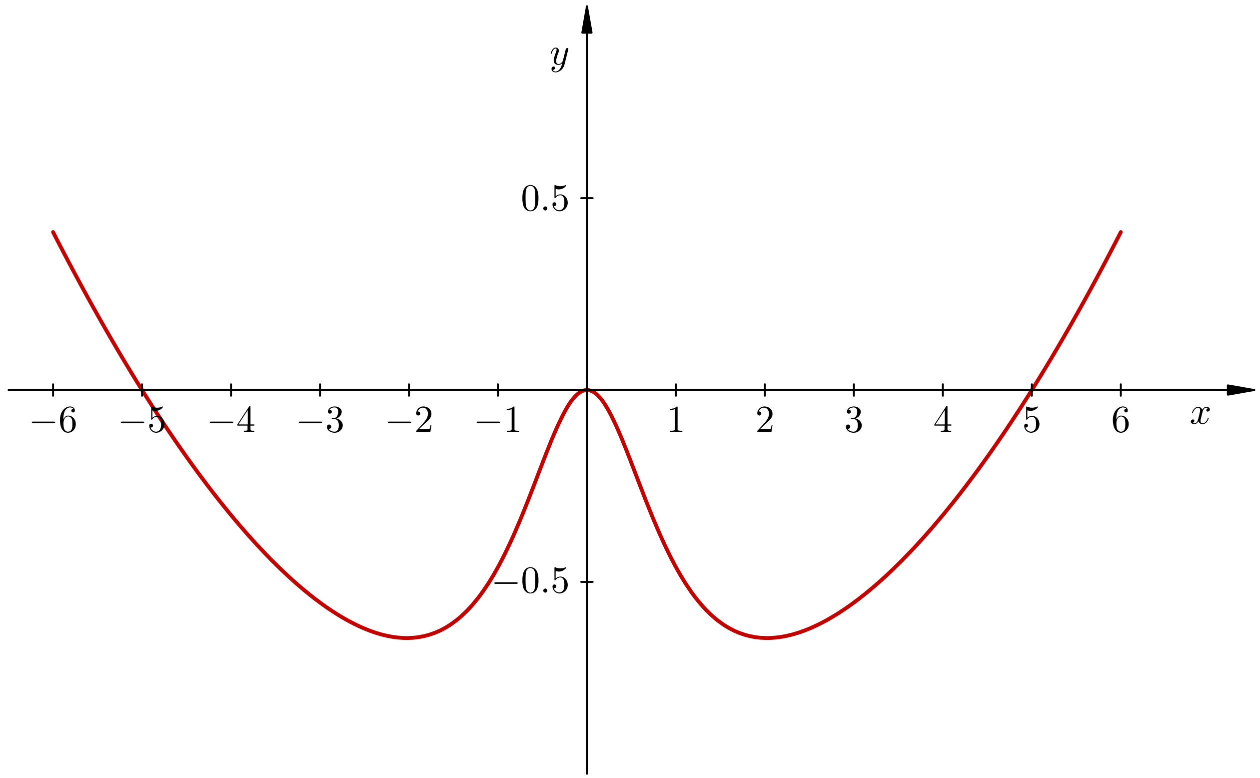
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



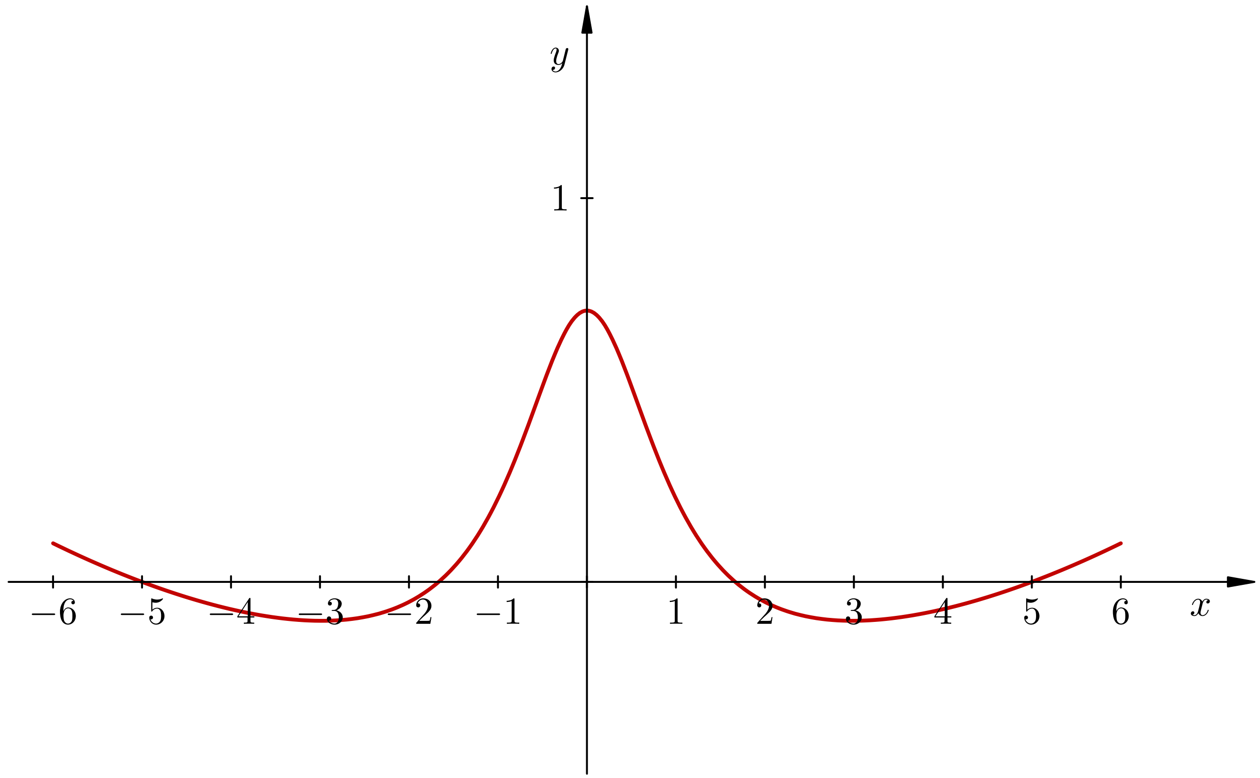
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



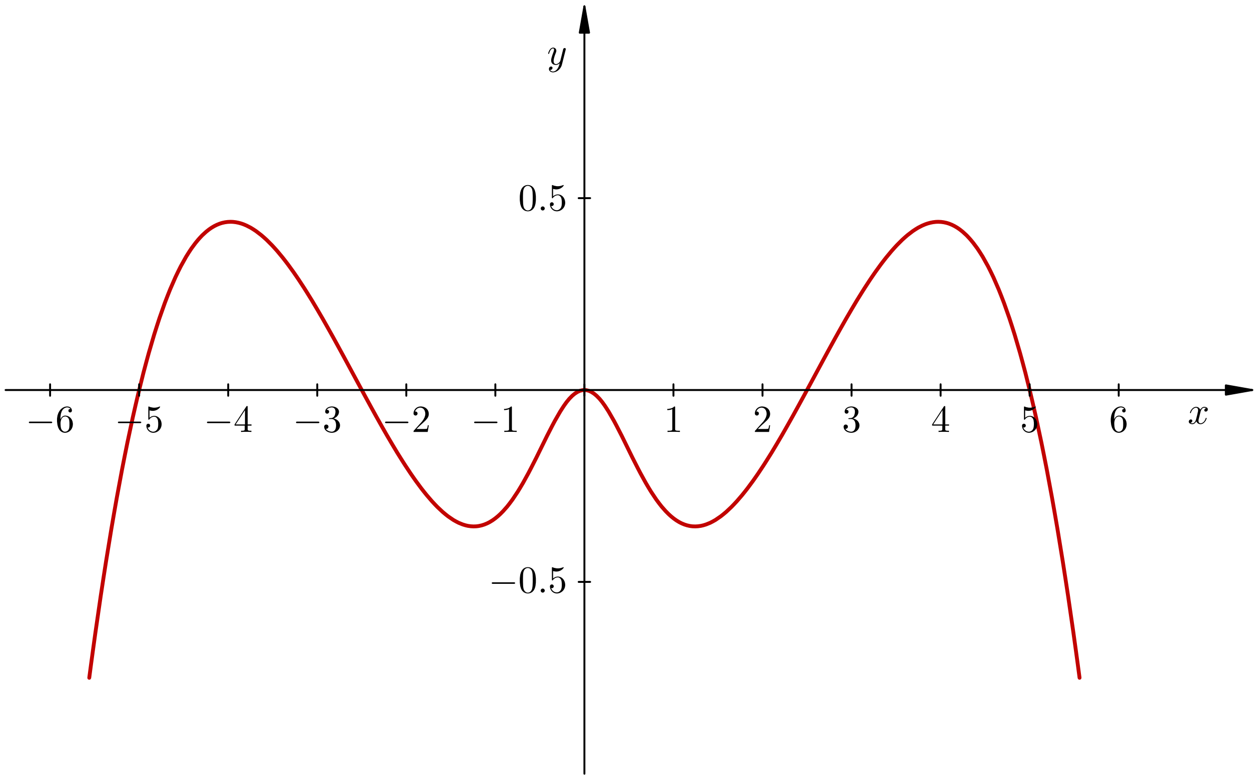
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



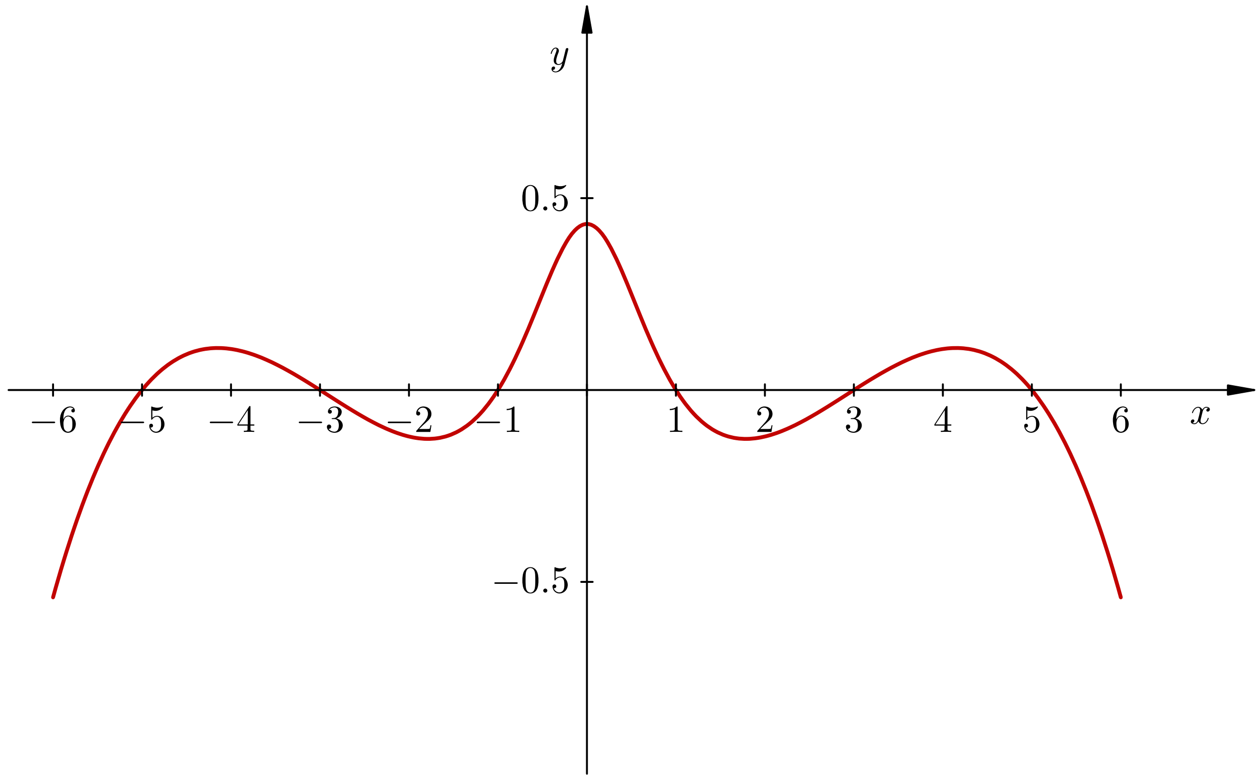
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



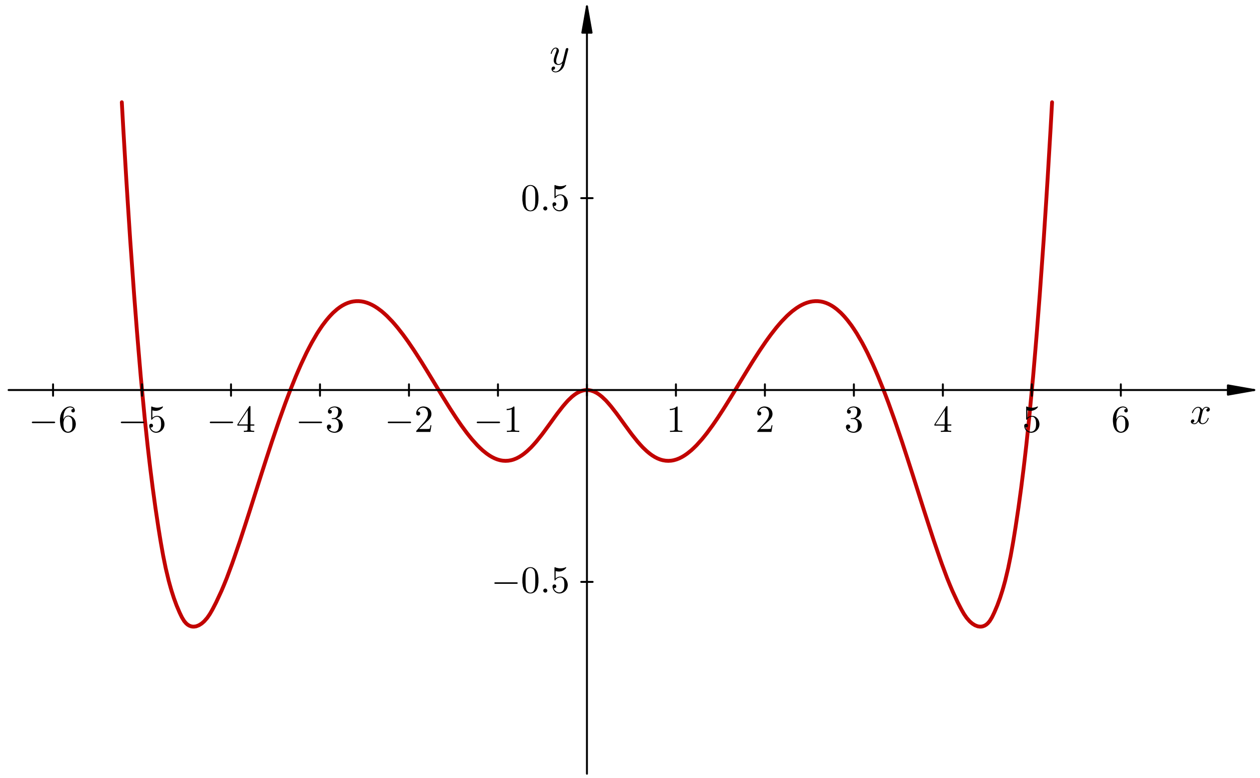
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



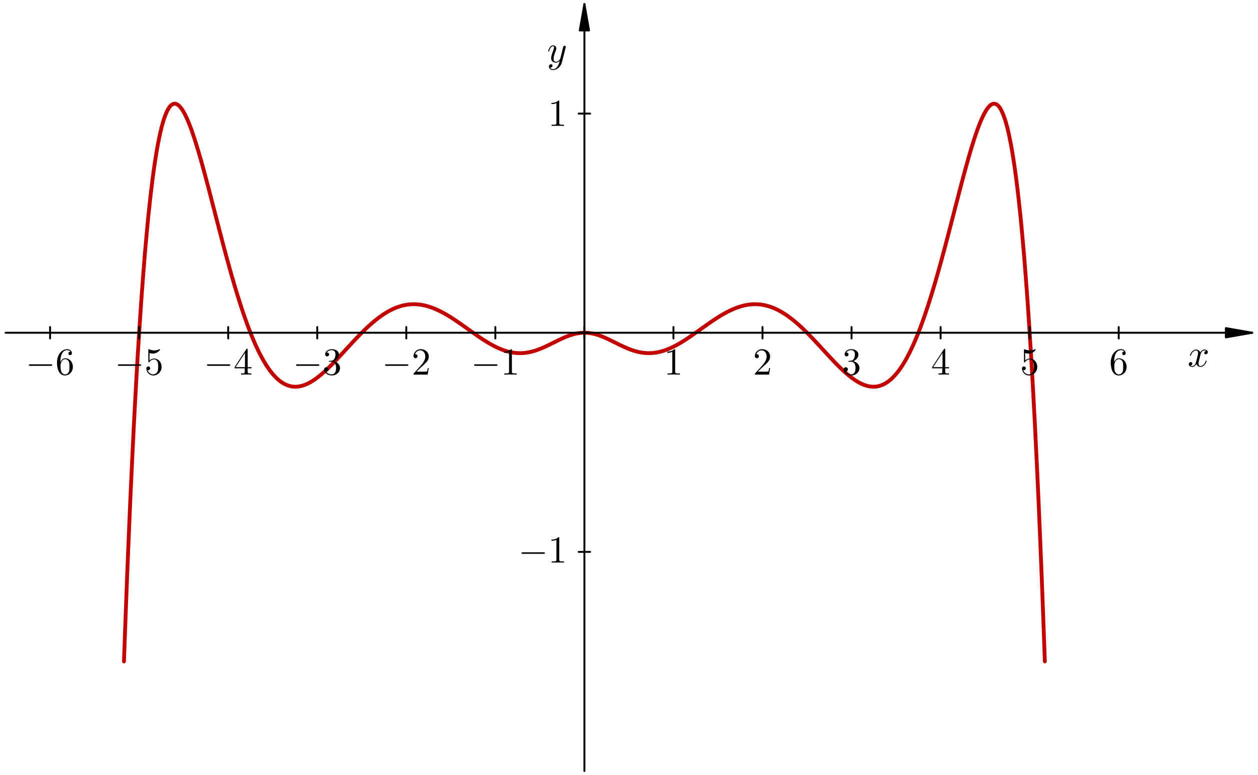
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



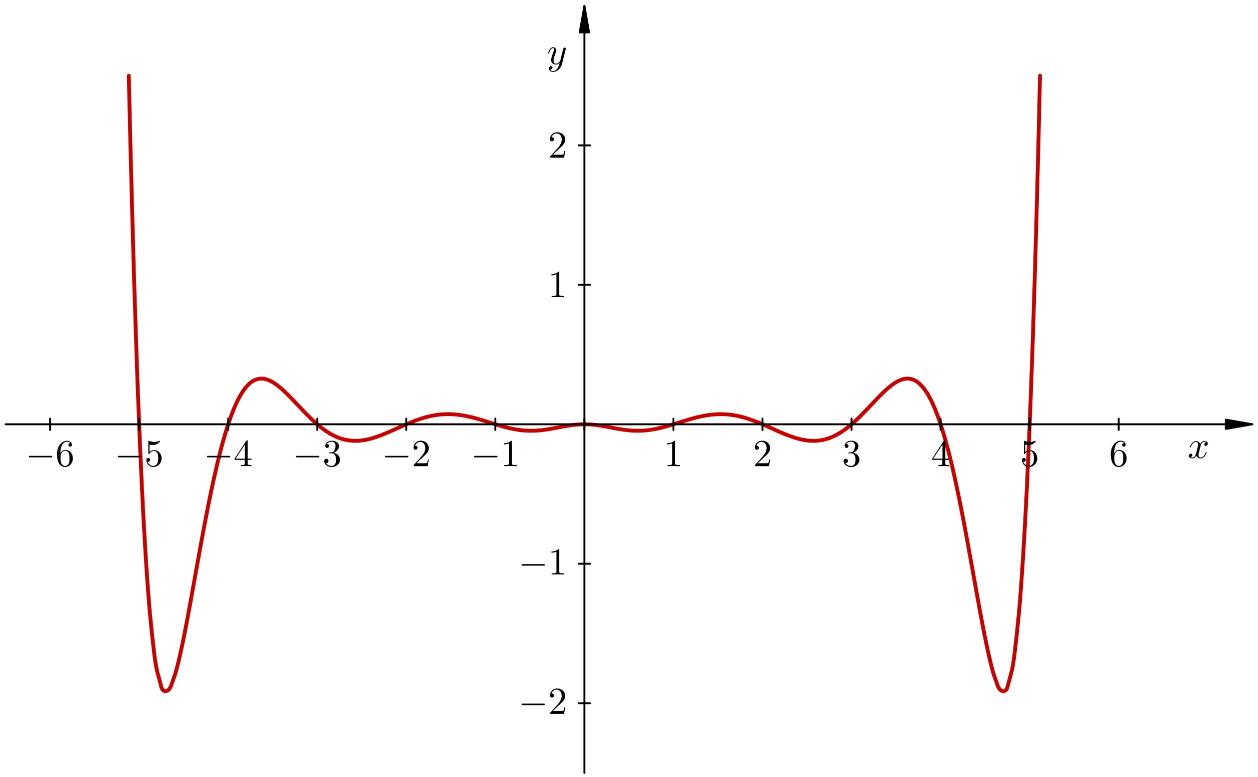
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



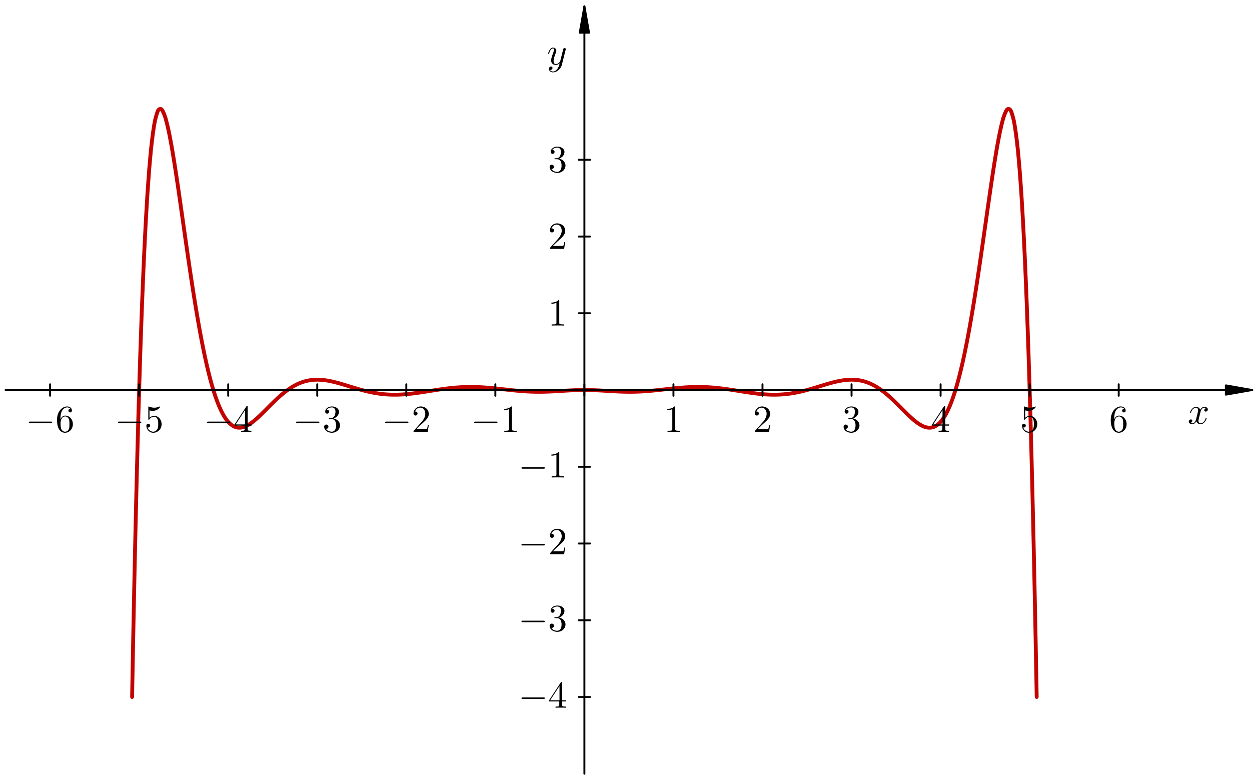
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



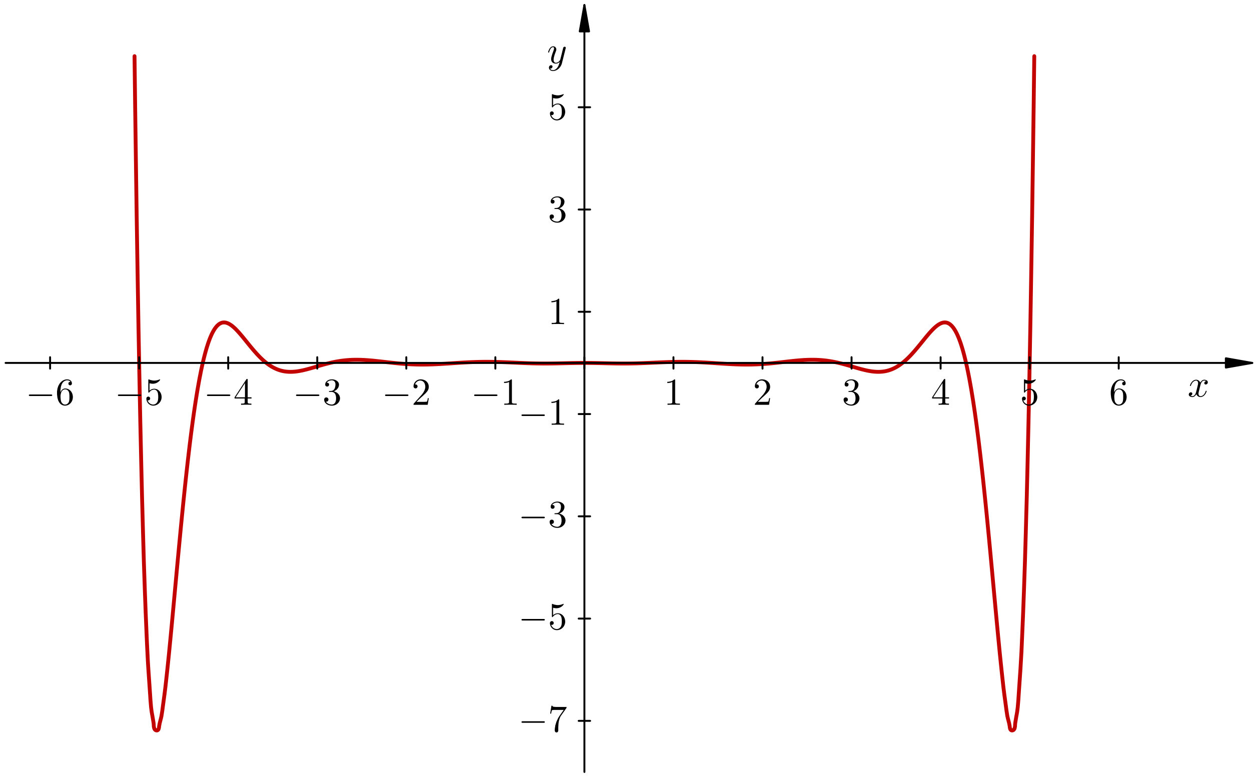
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



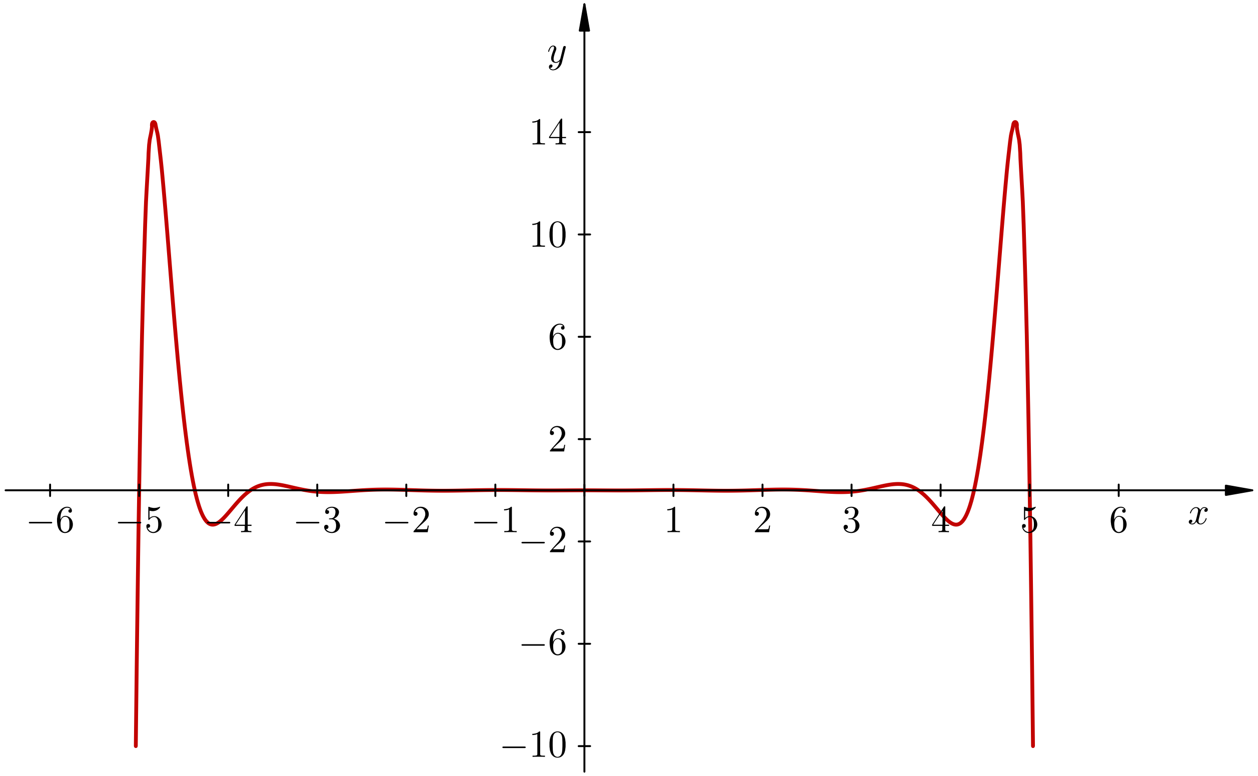
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63\ldots$, a interpolira se u ekvidistantnim čvorovima, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — niz interpolacijskih polinoma konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Bernstein, 1912. g.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n+1$ ekvidistantnih čvorova na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji Runge "pomoći"? Može!

Ako umjesto ekvidistantnih čvorova interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije,

- tzv. Čebiševljeve točke,

onda će, porastom stupnja n, niz interpolacijskih polinoma p_n

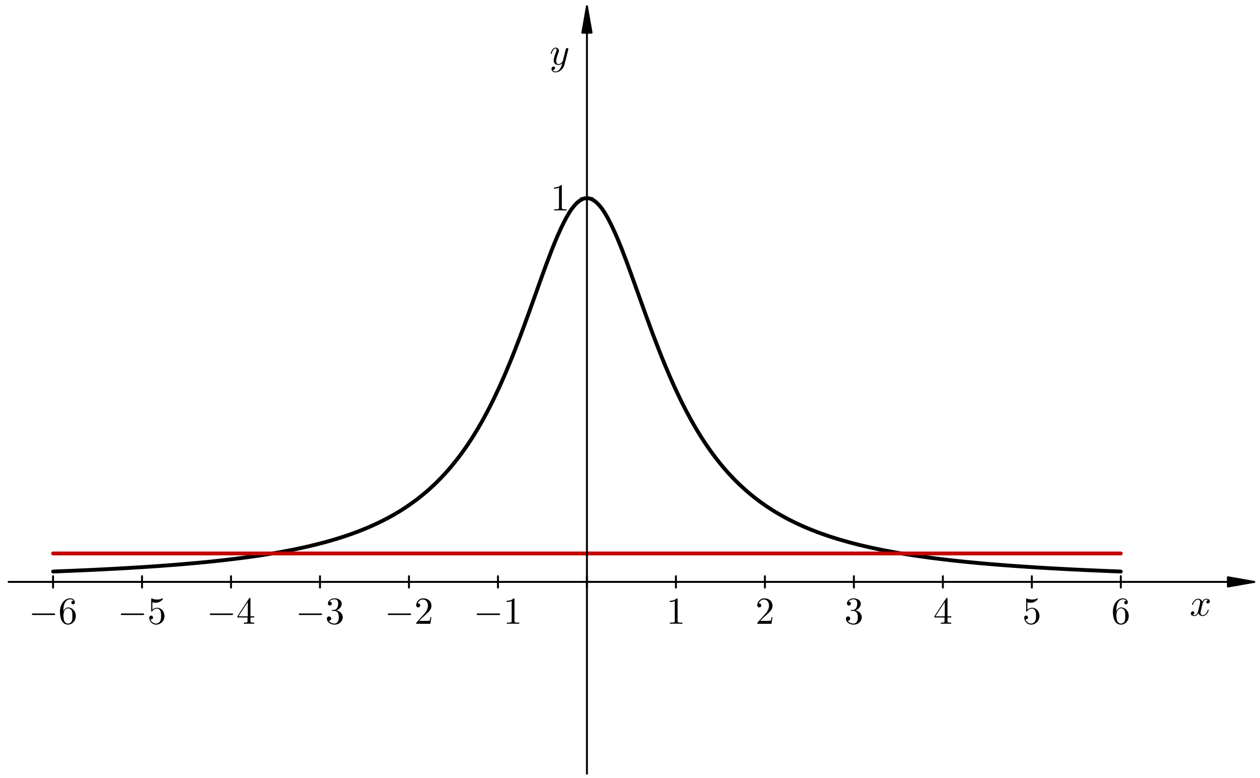
- konvergirati (i to uniformno) prema funkciji f.

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

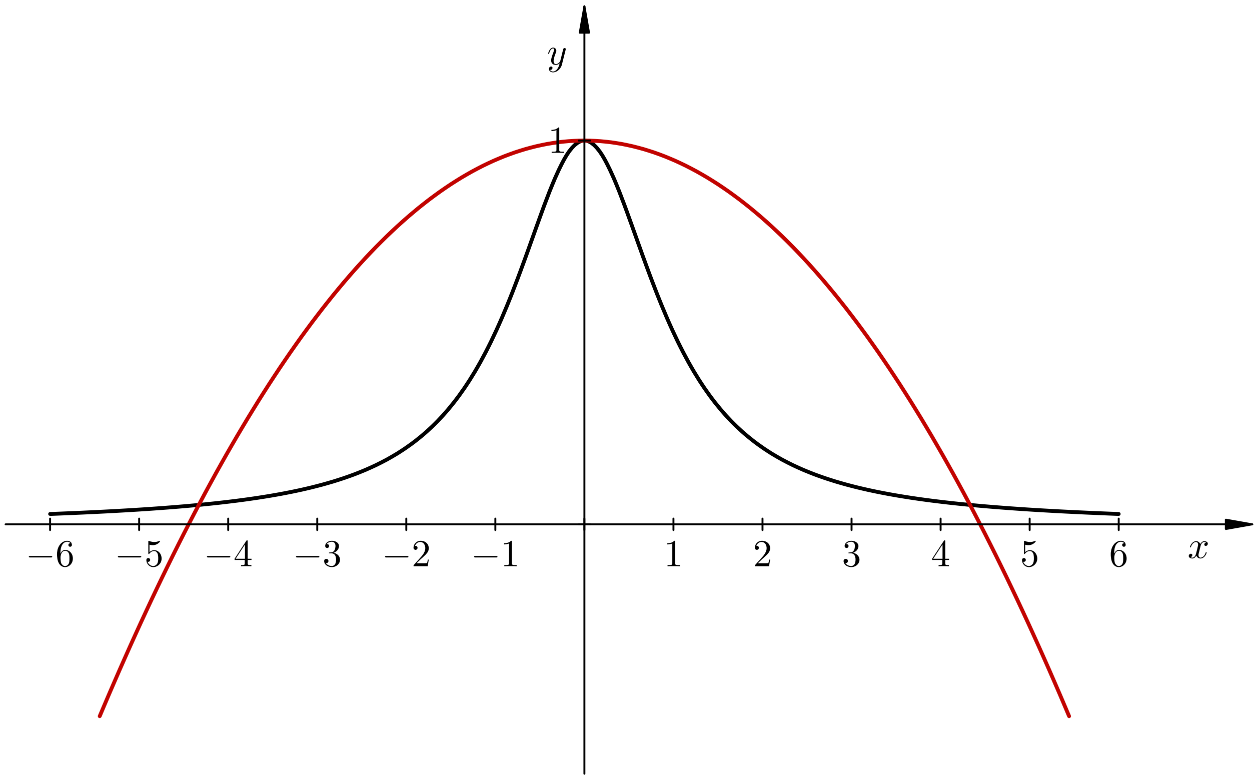
O njima više — malo kasnije. Prvo primjer za funkciju Runge.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



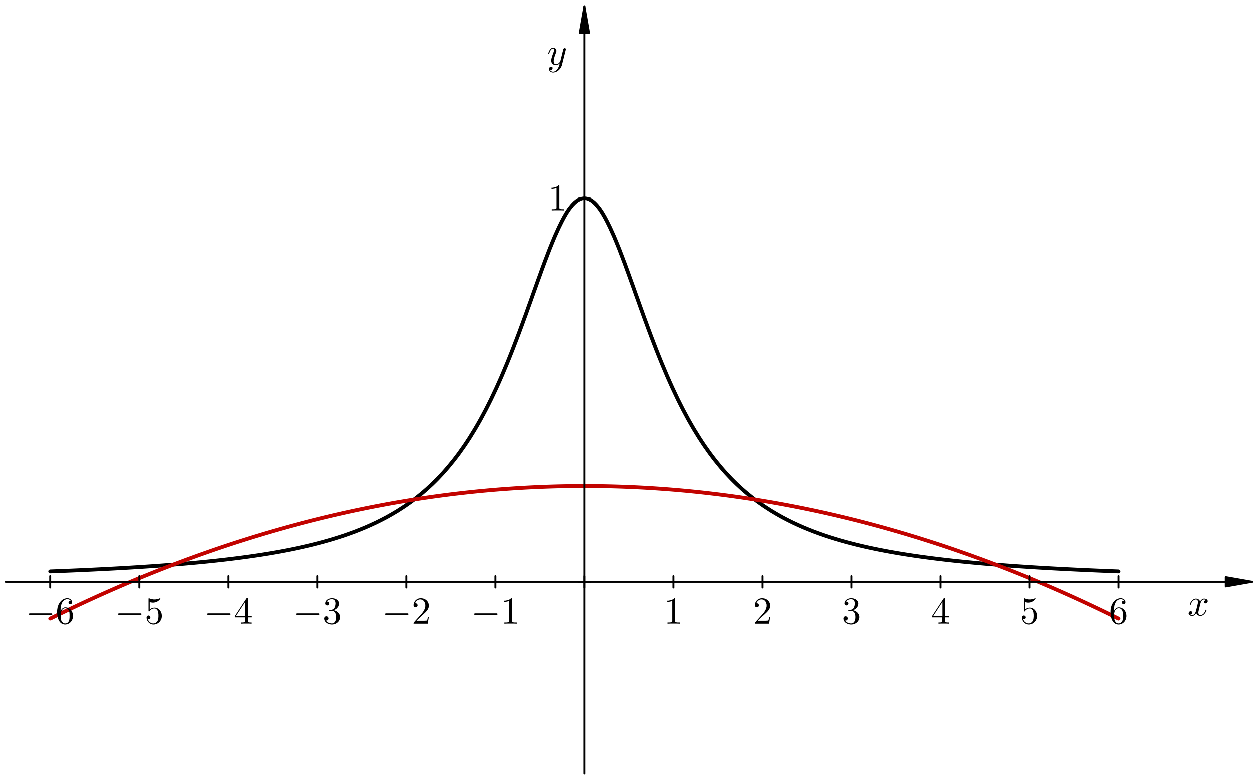
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



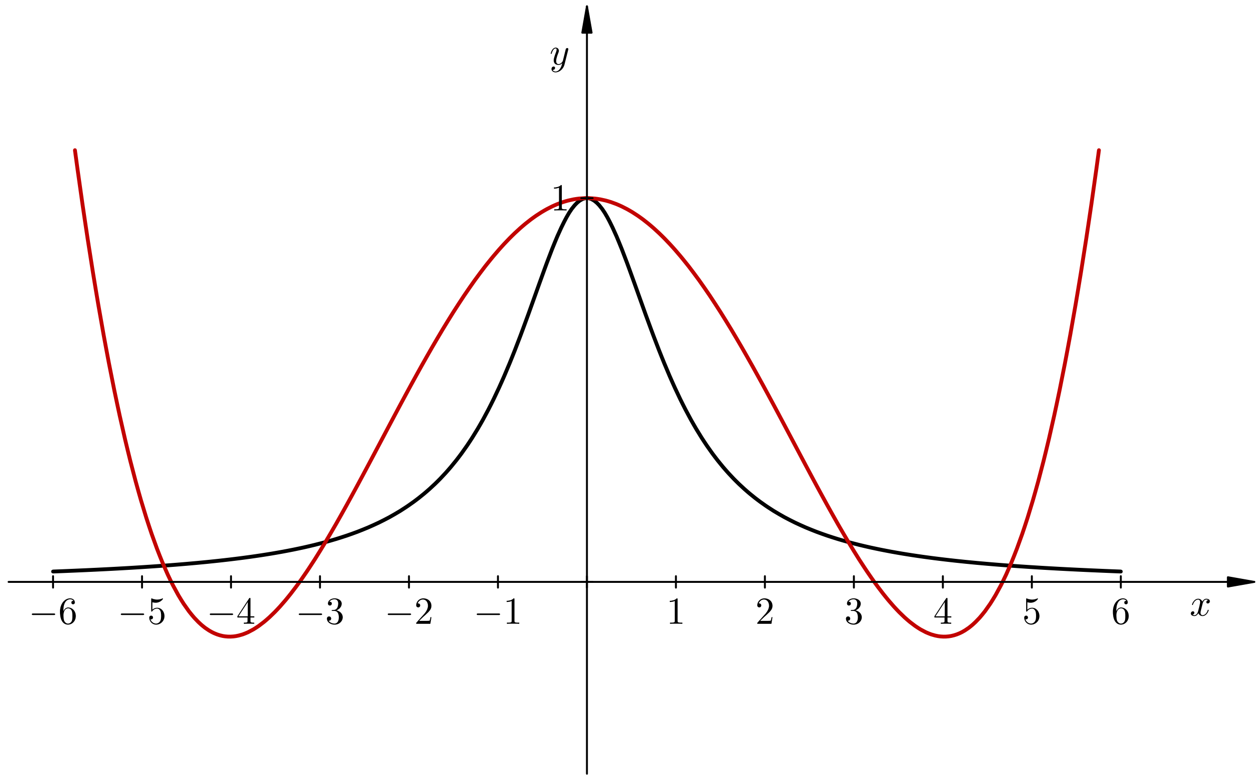
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



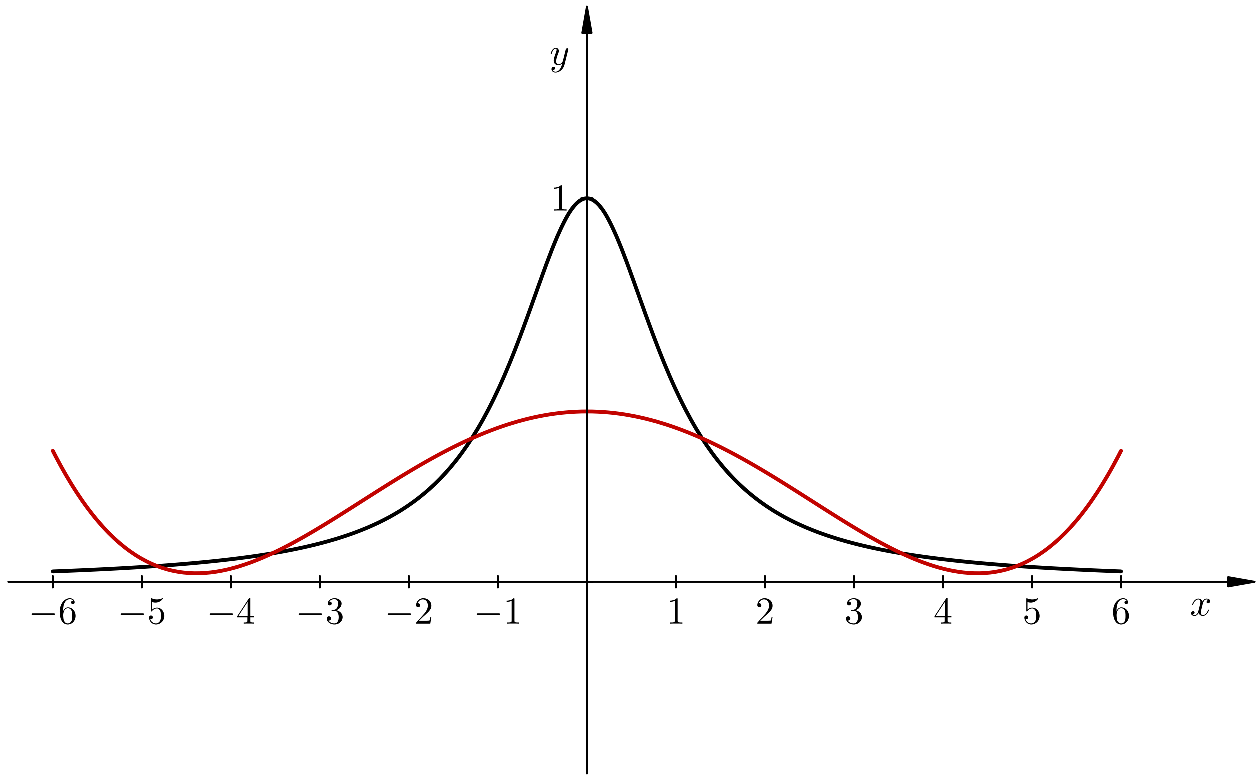
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



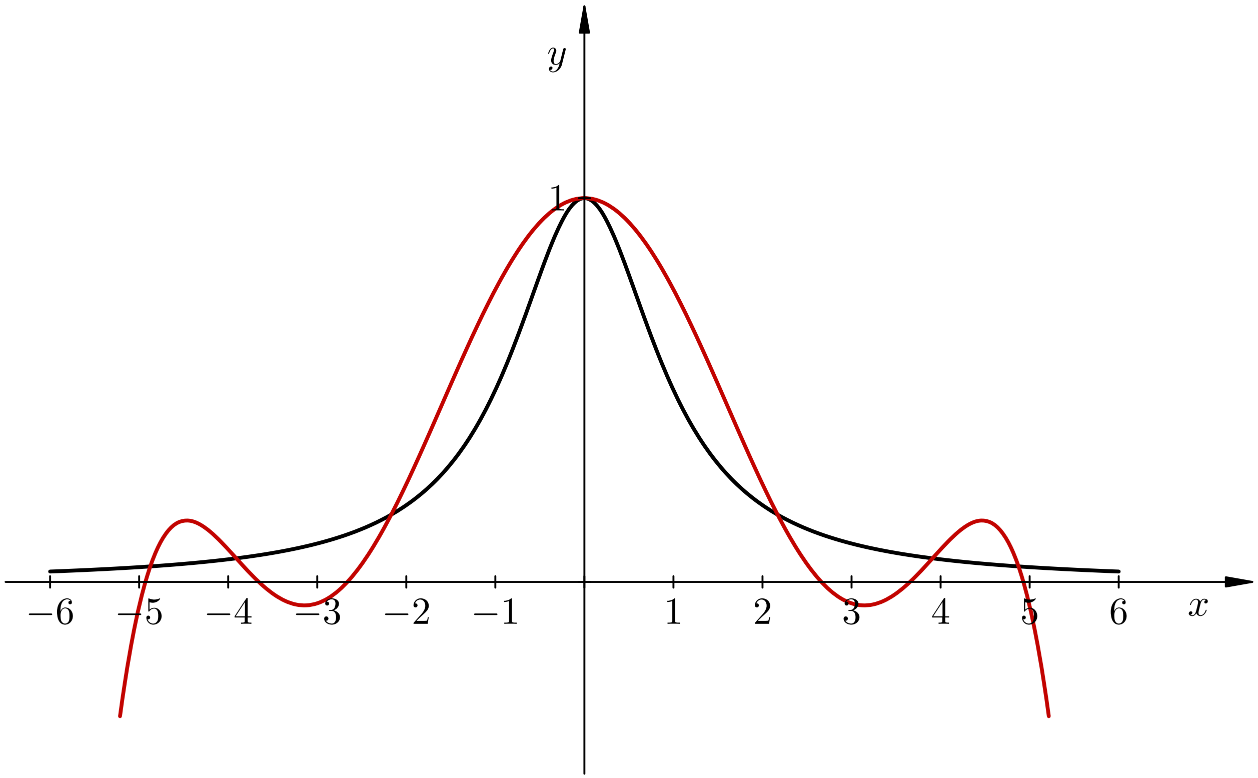
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



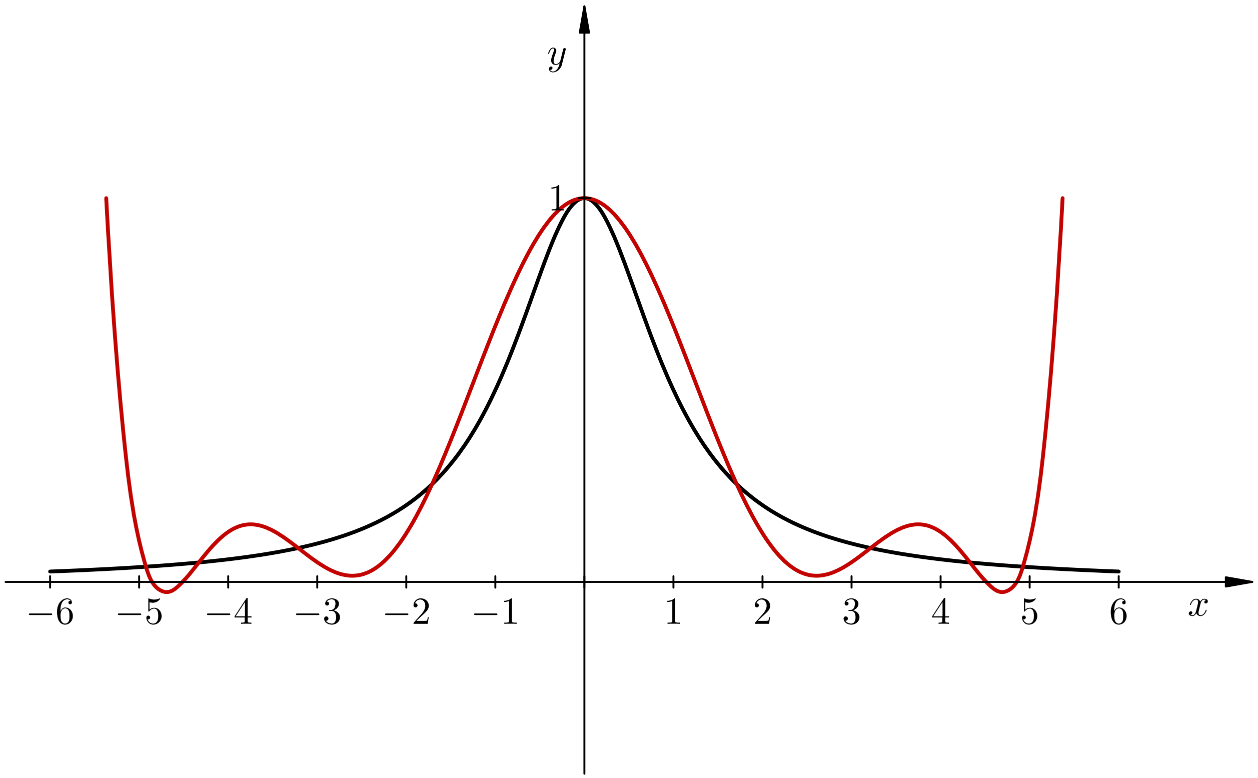
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



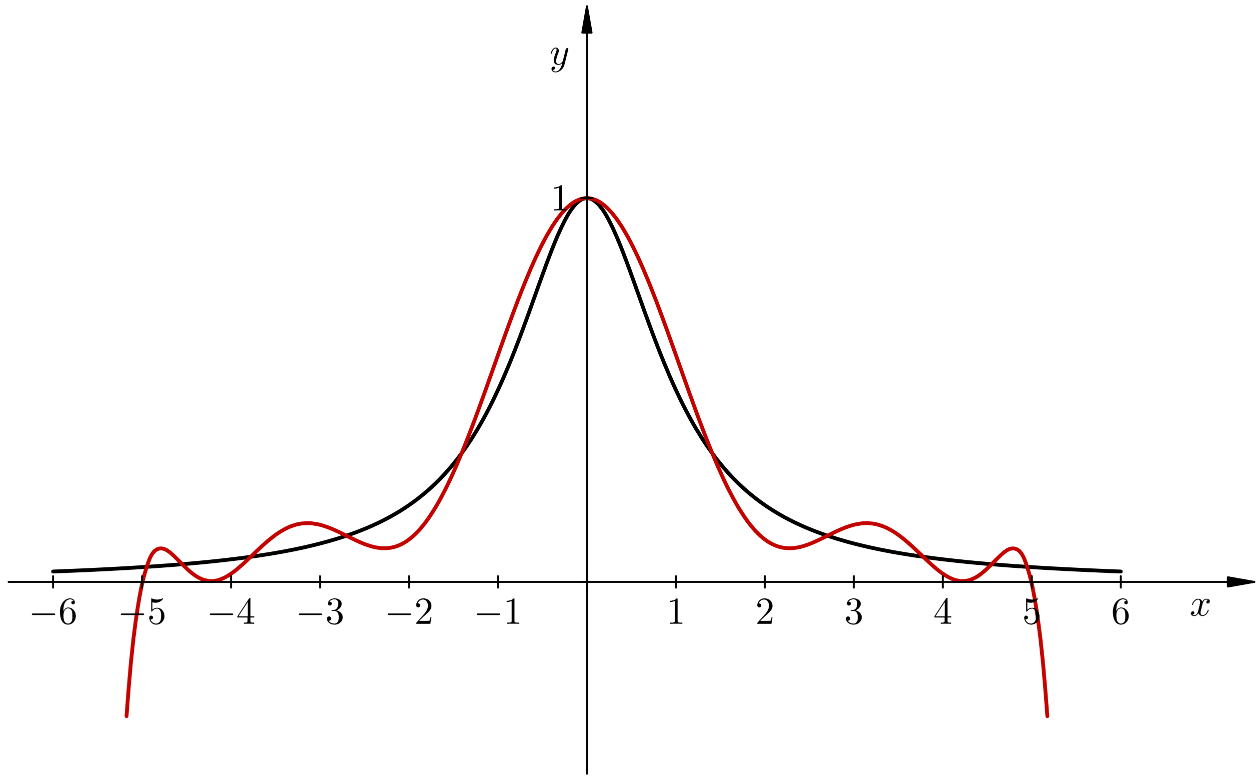
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



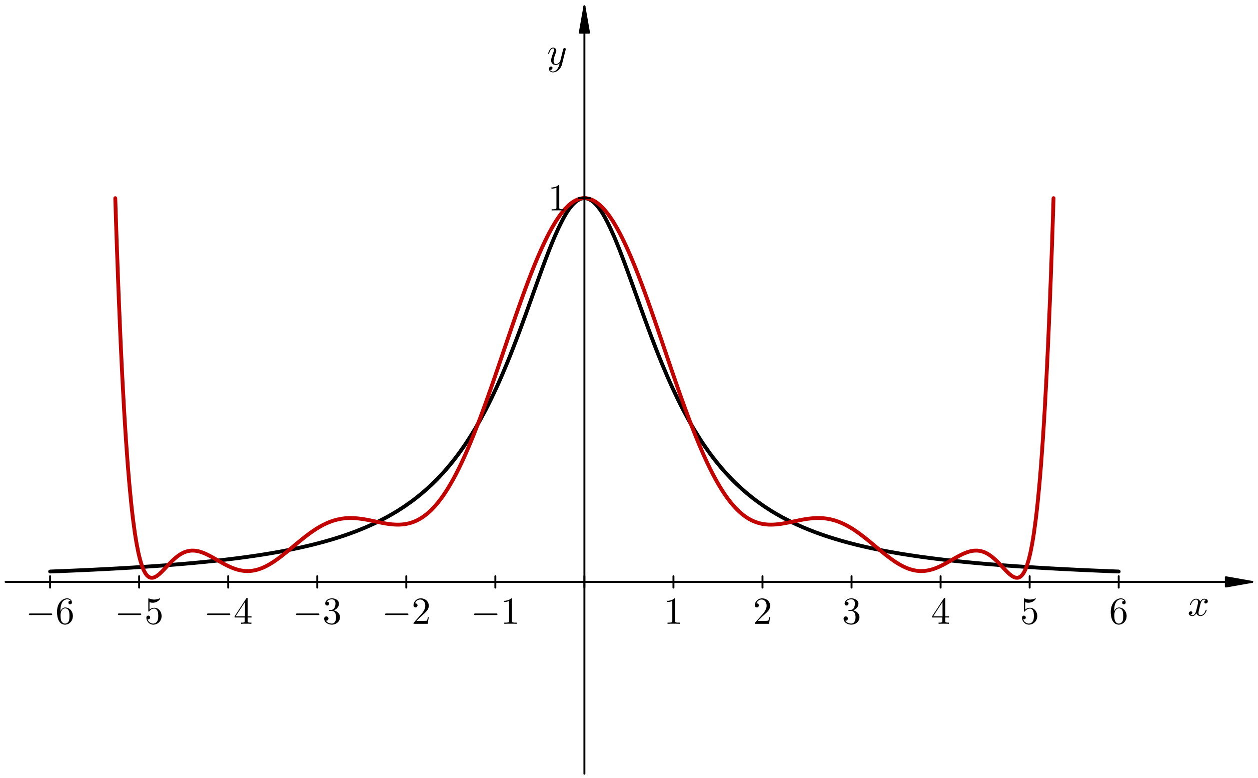
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



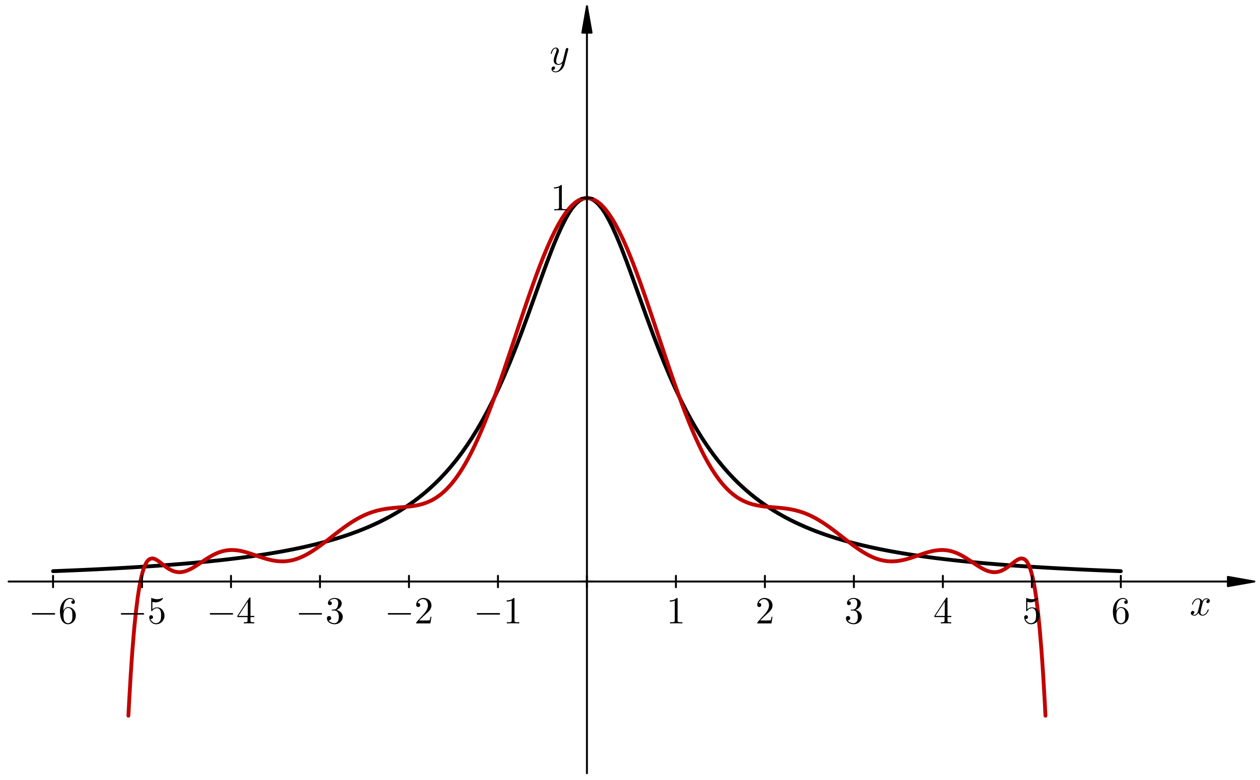
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



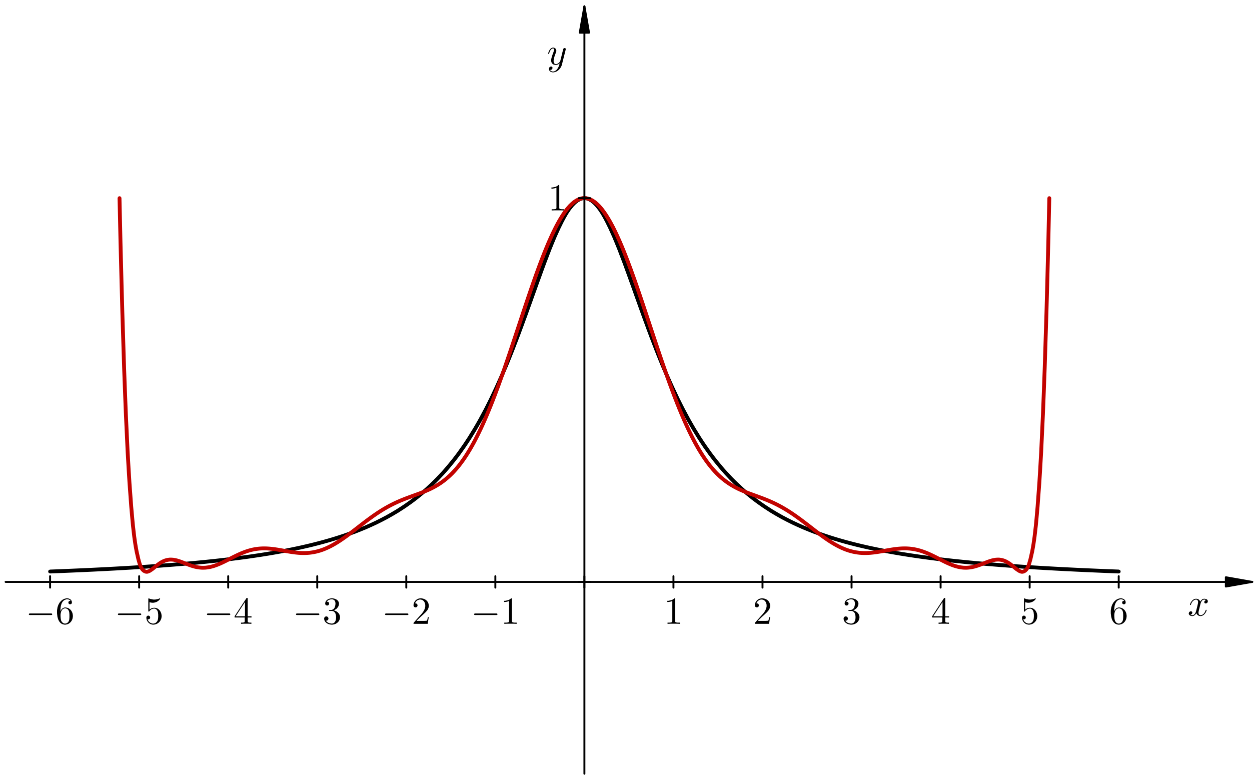
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



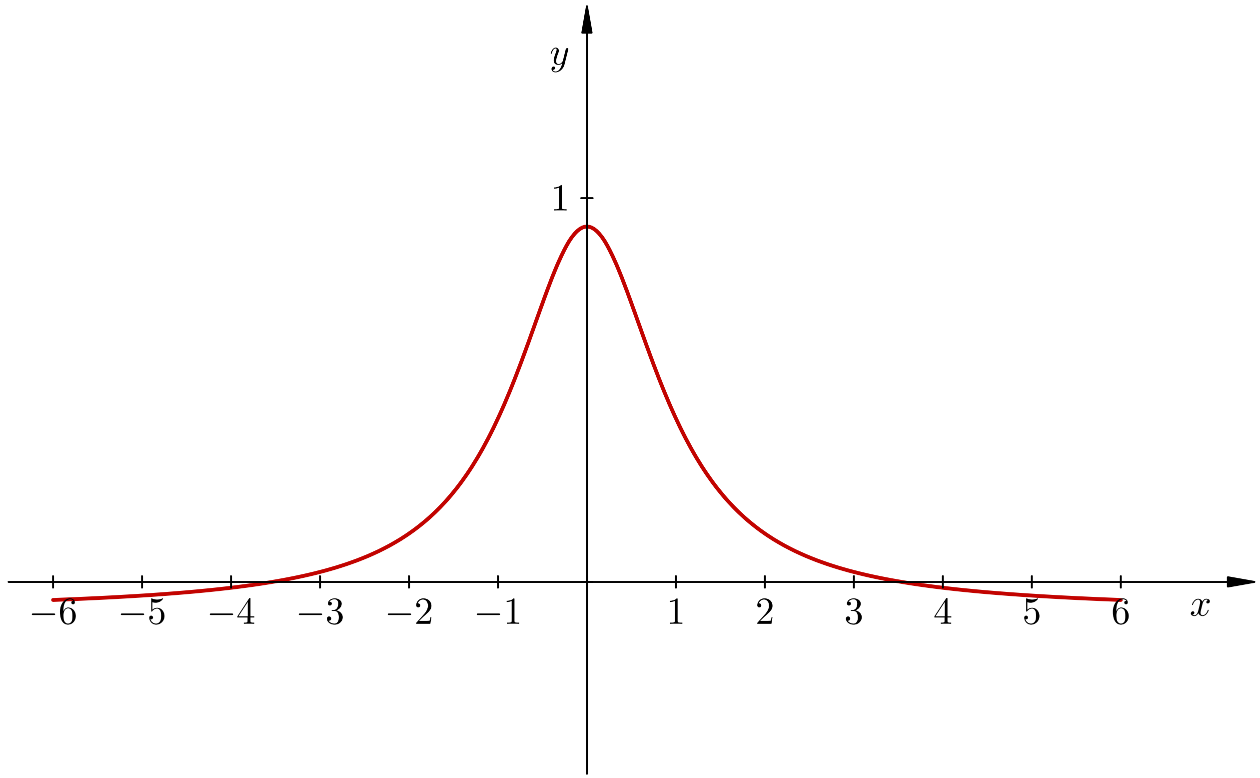
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



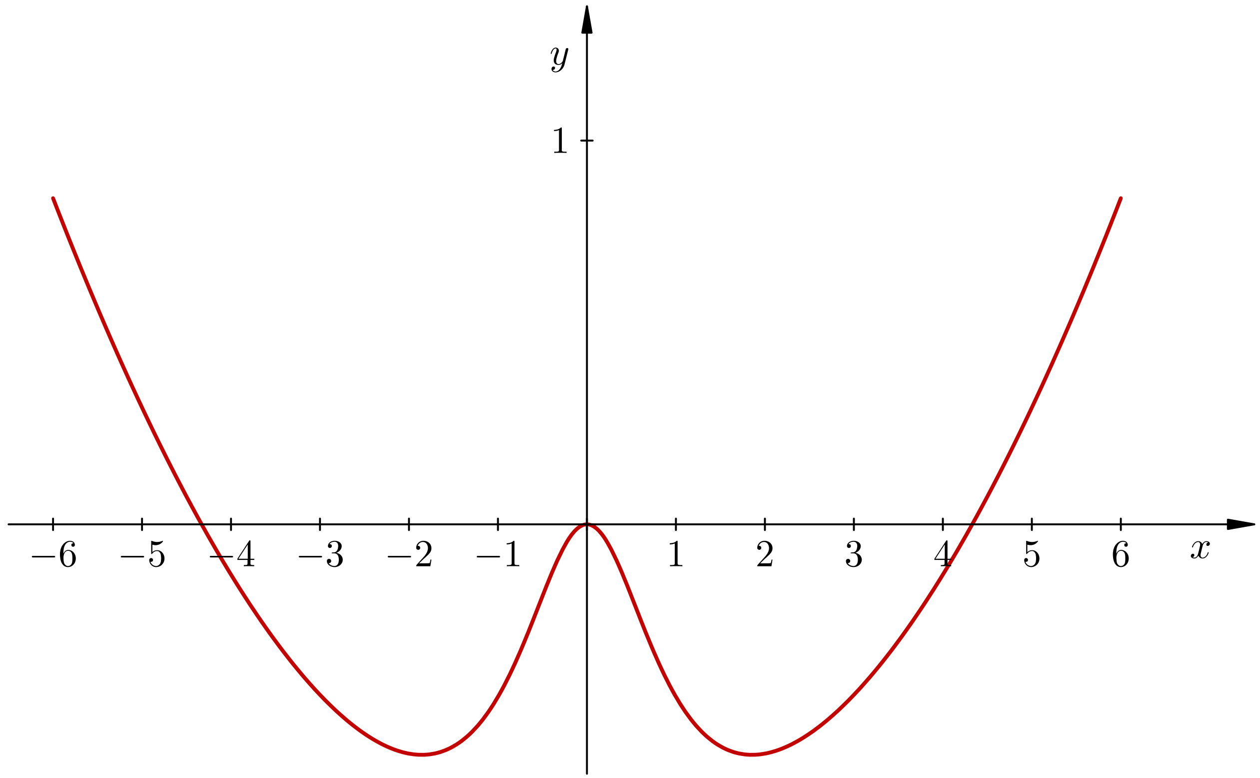
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



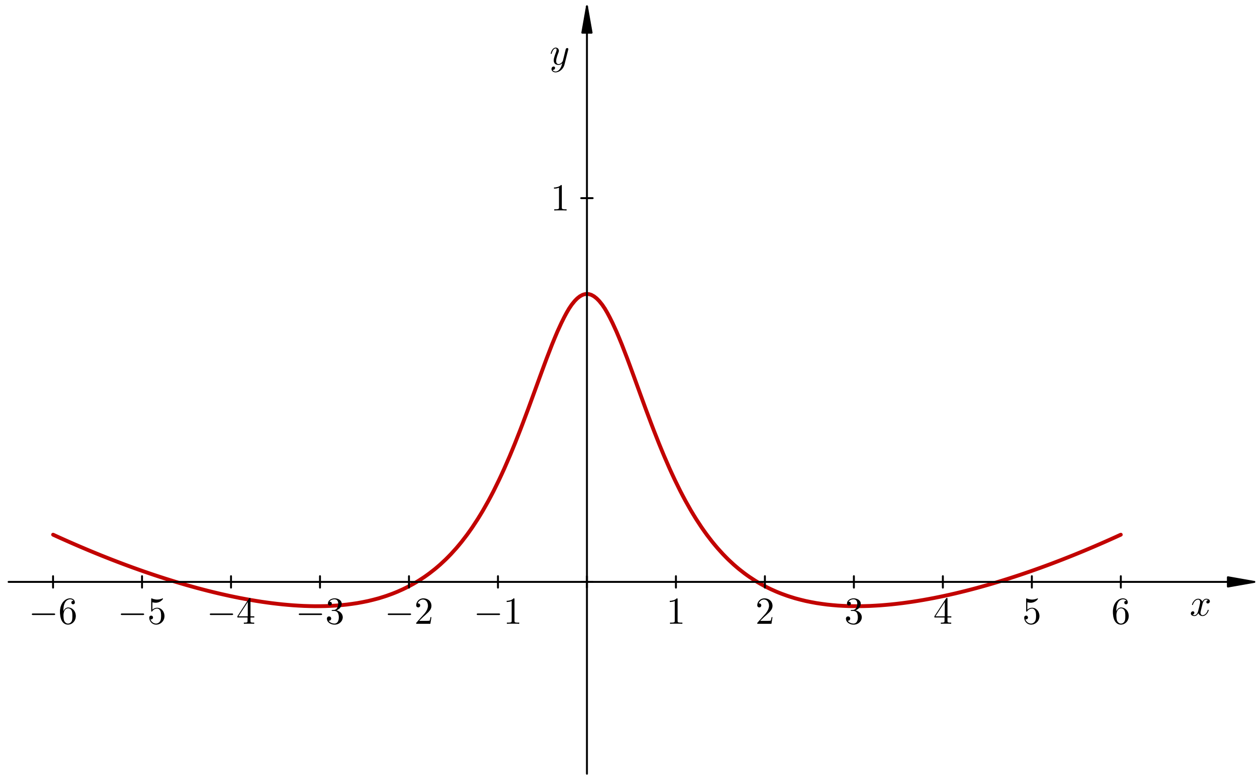
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



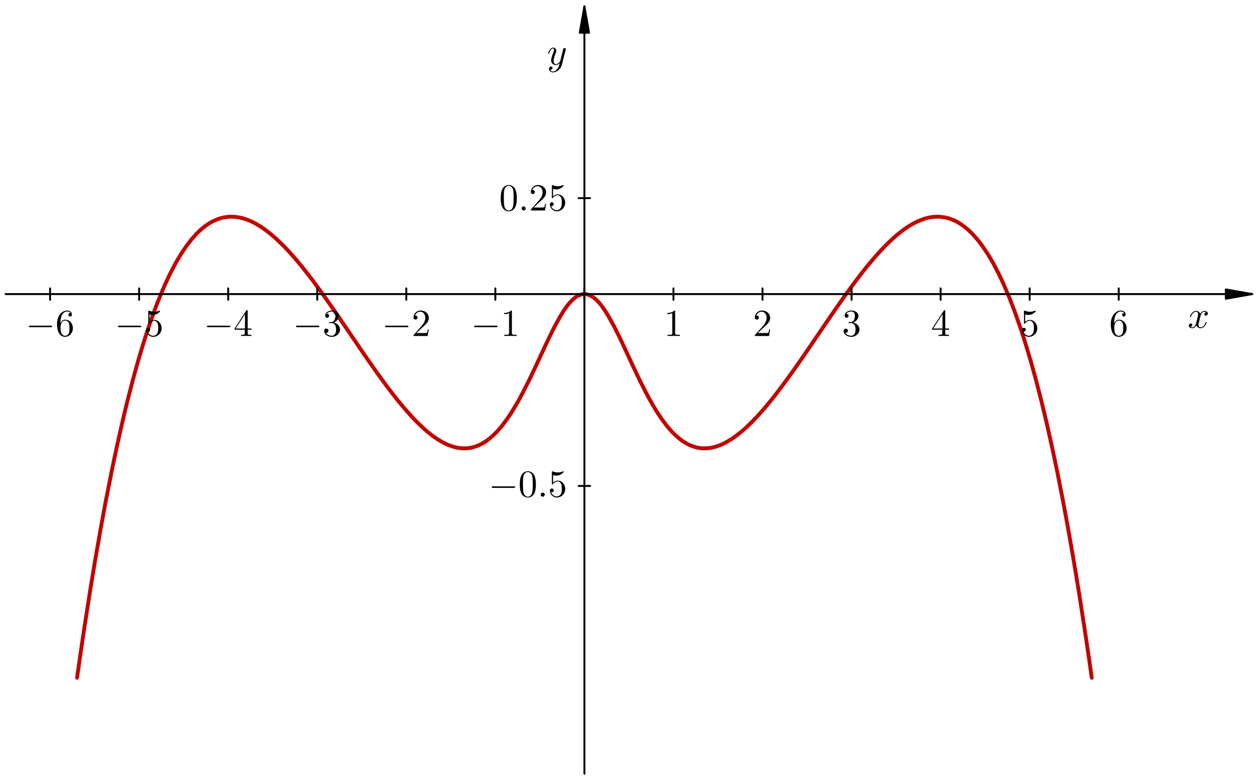
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



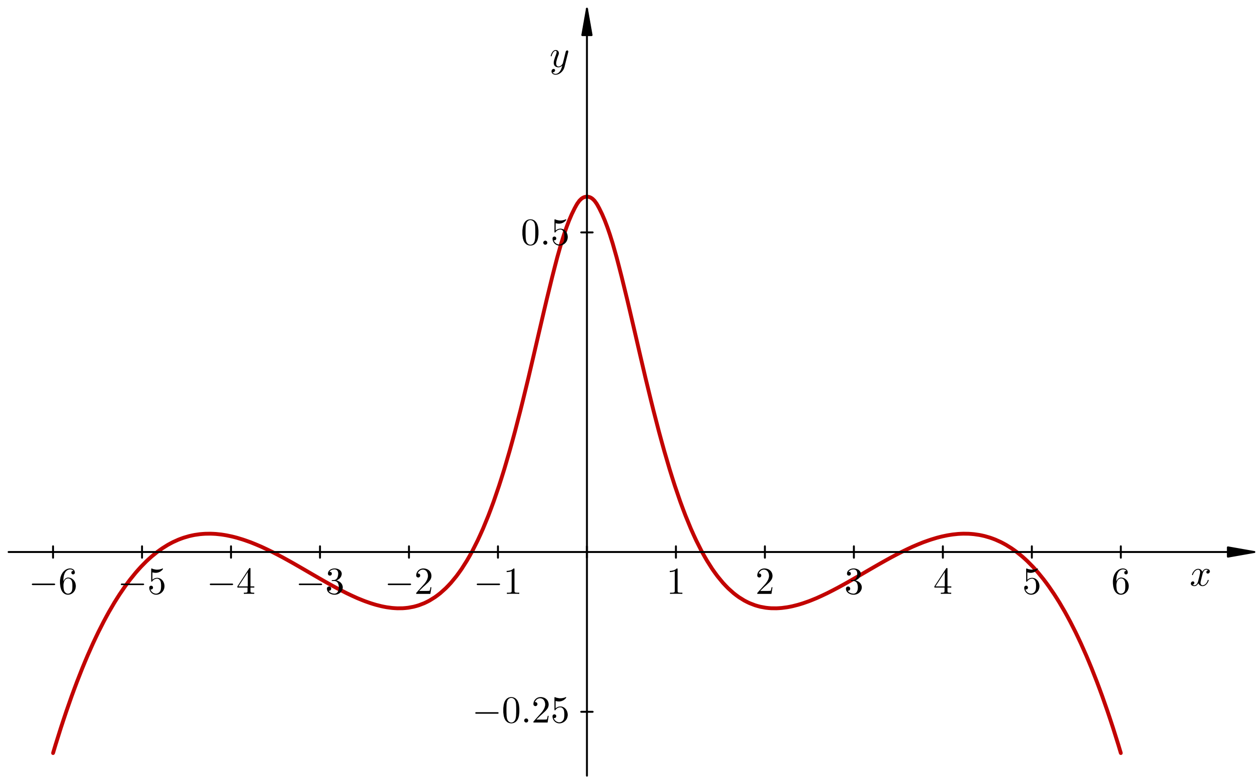
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



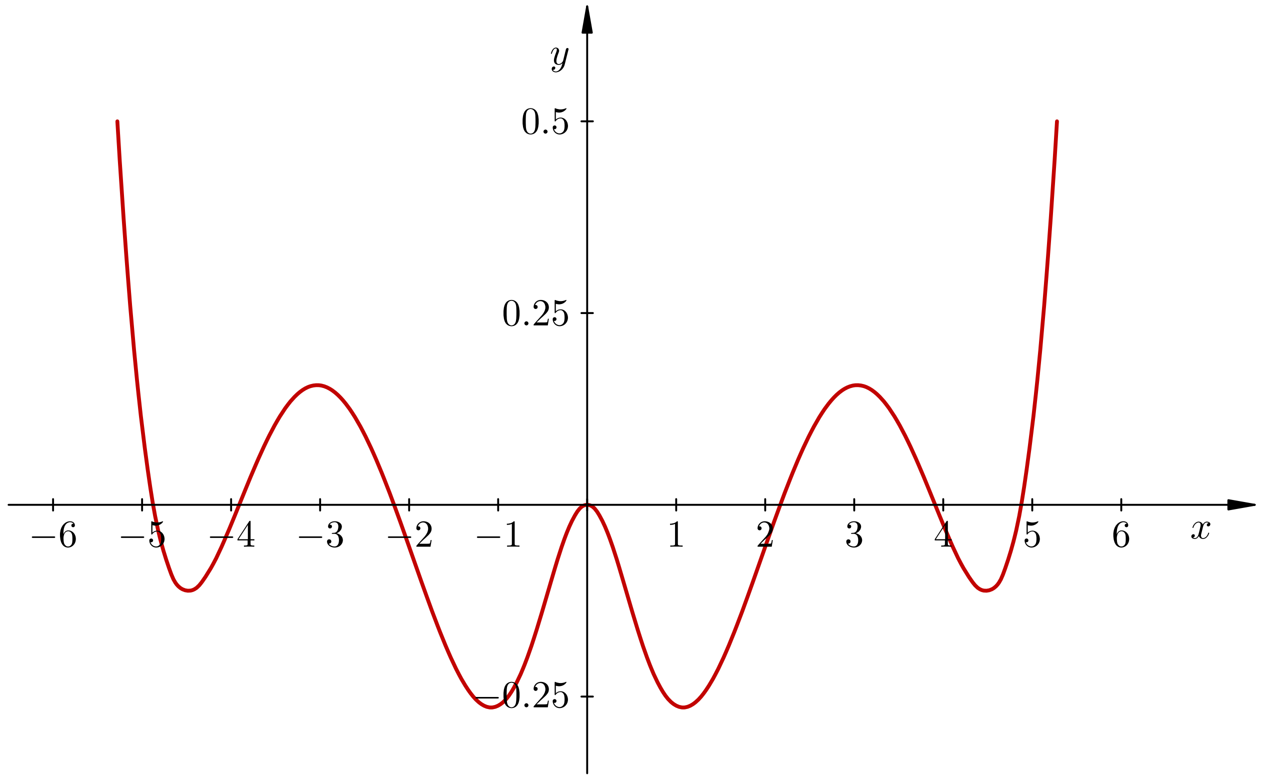
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



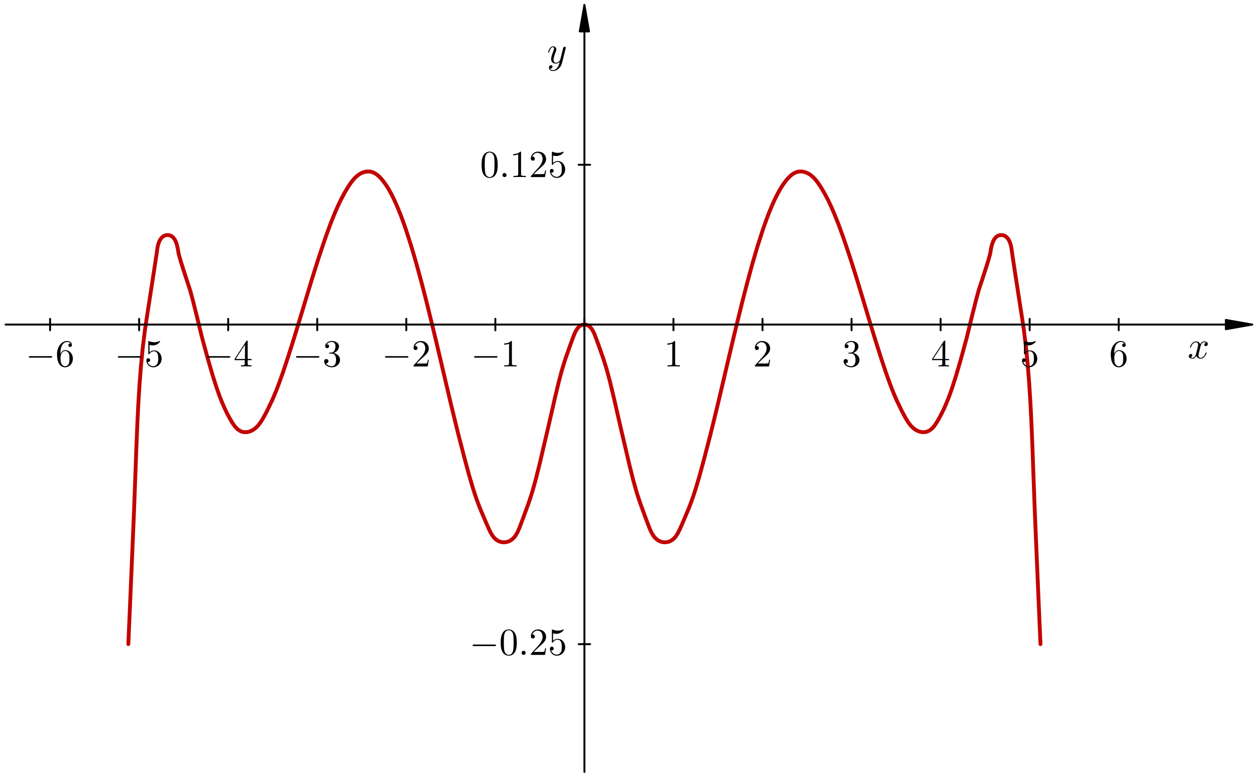
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



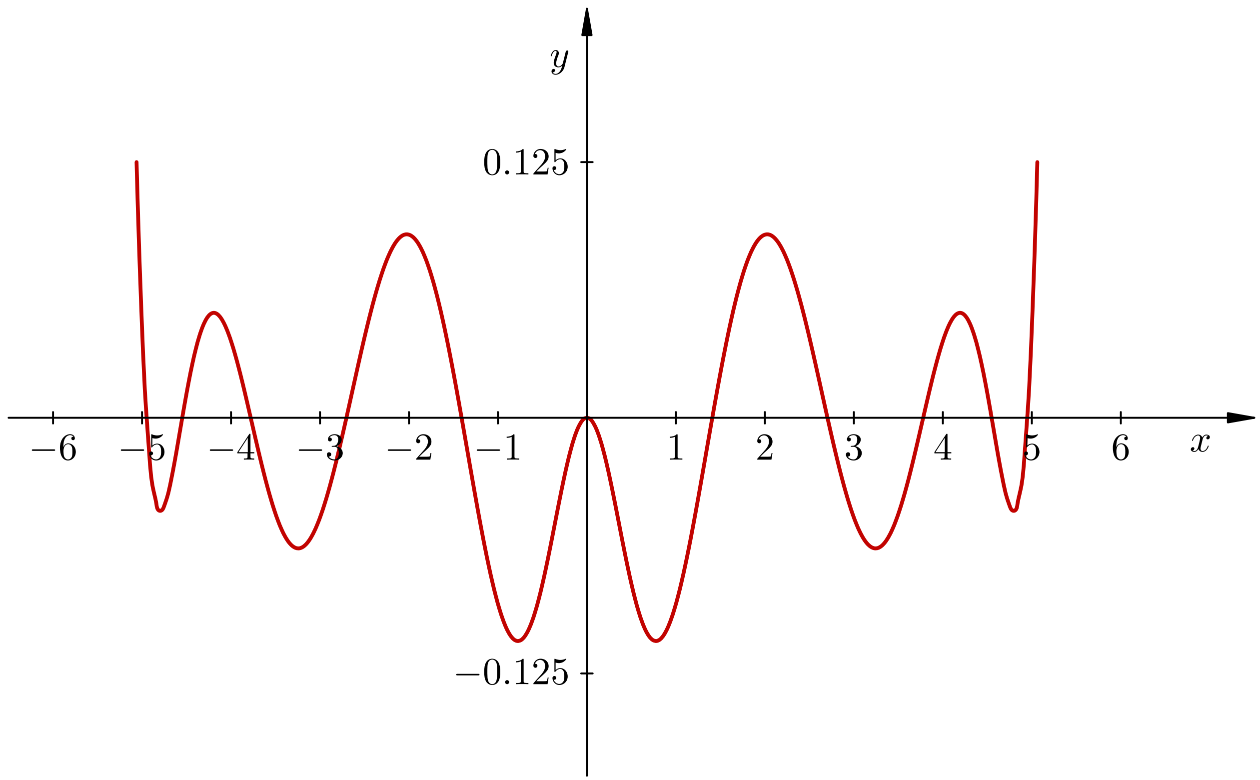
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



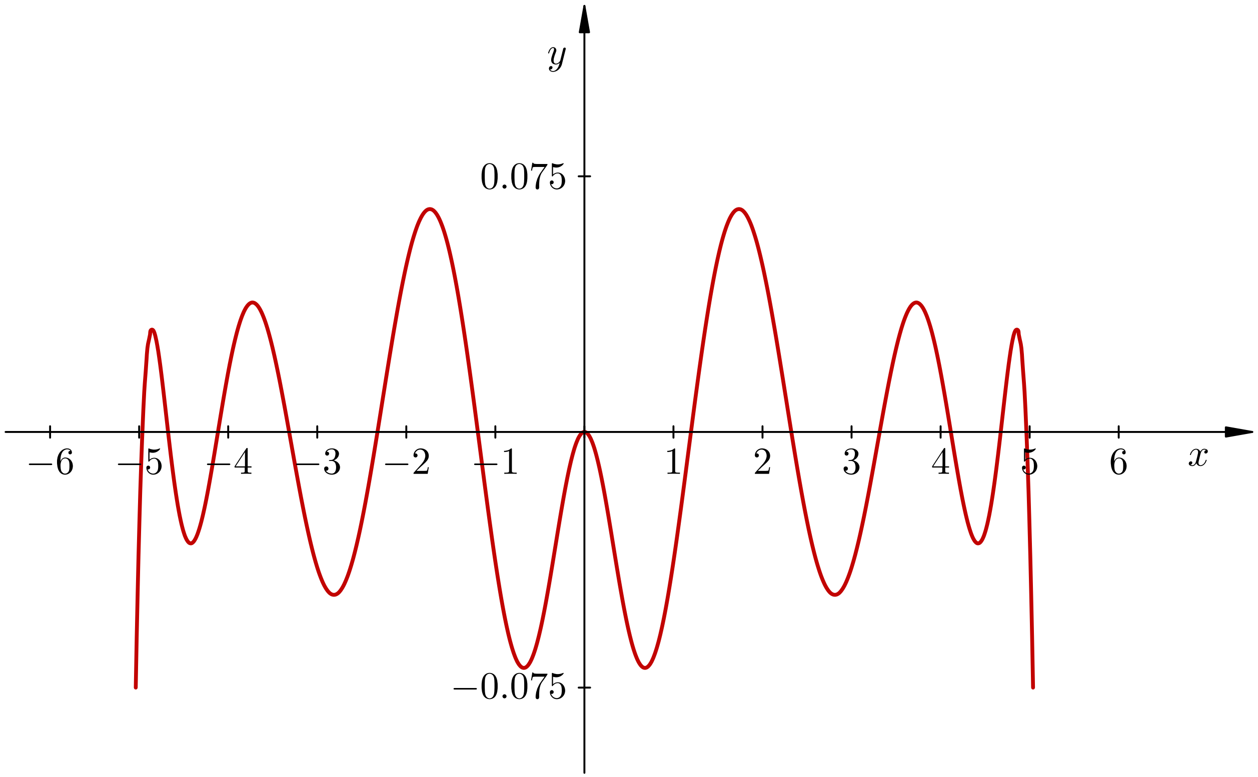
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



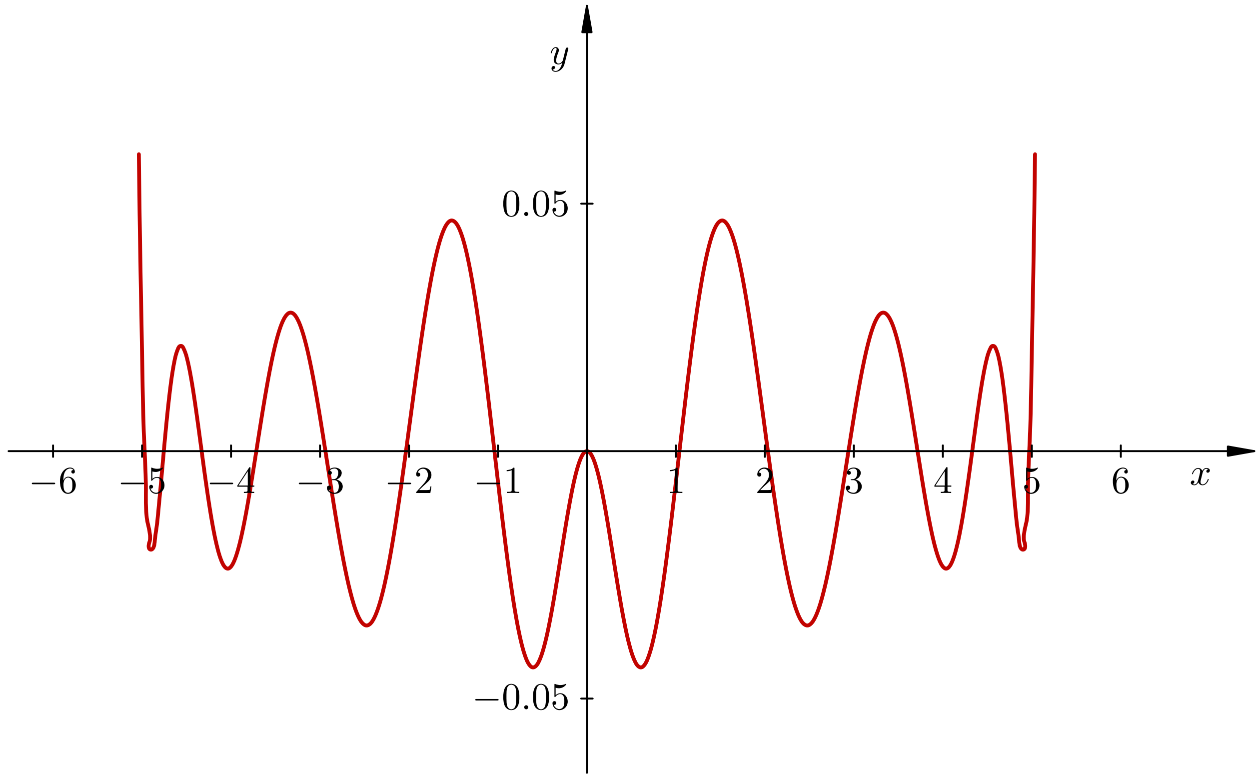
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



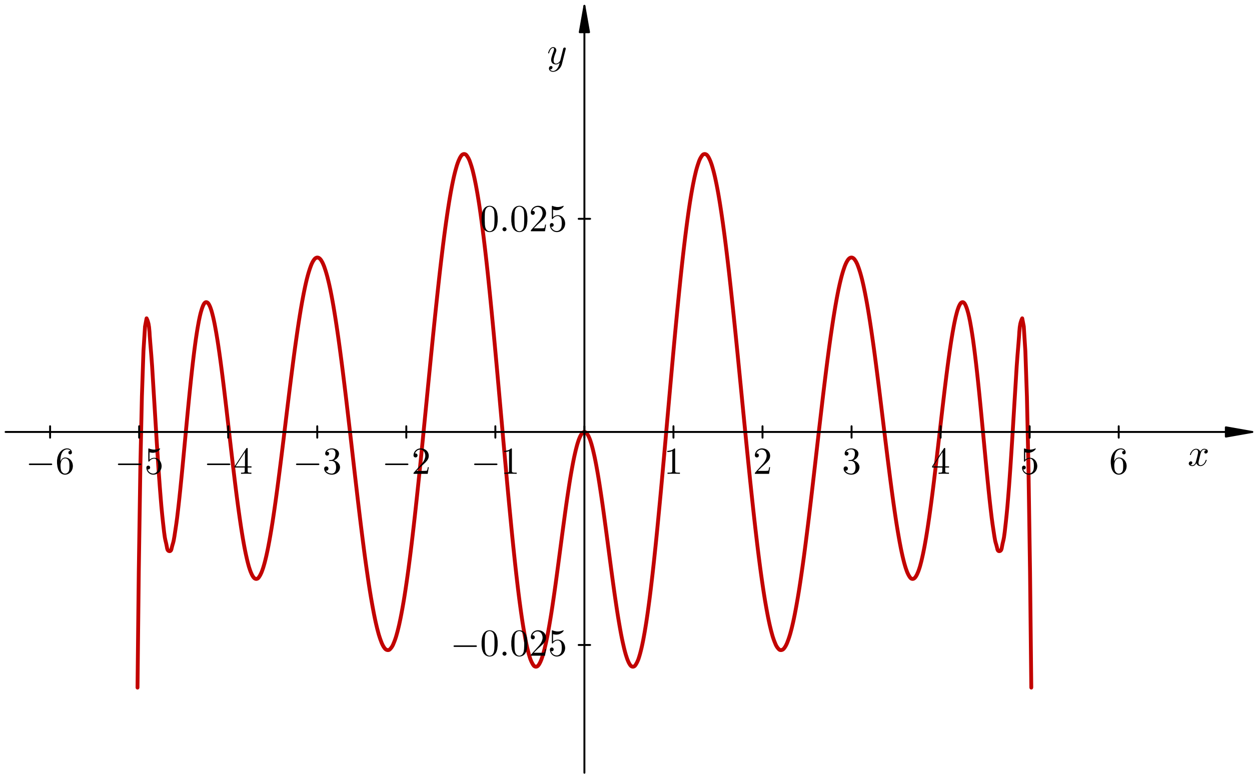
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- nemoguće naći takav izbor točaka interpolacije polinomima, koji bi bio dobar za svaku funkciju.

Teorem. (Faber, 1914. g.) Za svaki mogući izbor točaka interpolacije, tj. za svaki niz skupova čvorova

$$X^{(n)} = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma p_n, stupnja n, s čvorovima iz skupa $X^{(n)}$, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0. \qquad \blacksquare$$

Dakle, nema (uniformne) konvergencije, tj. "nema spasa"!

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo "kontrolirati".

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto egzaktne minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f na intervalu $[a, b]$, zadovoljimo se “skromnijim” ciljem:

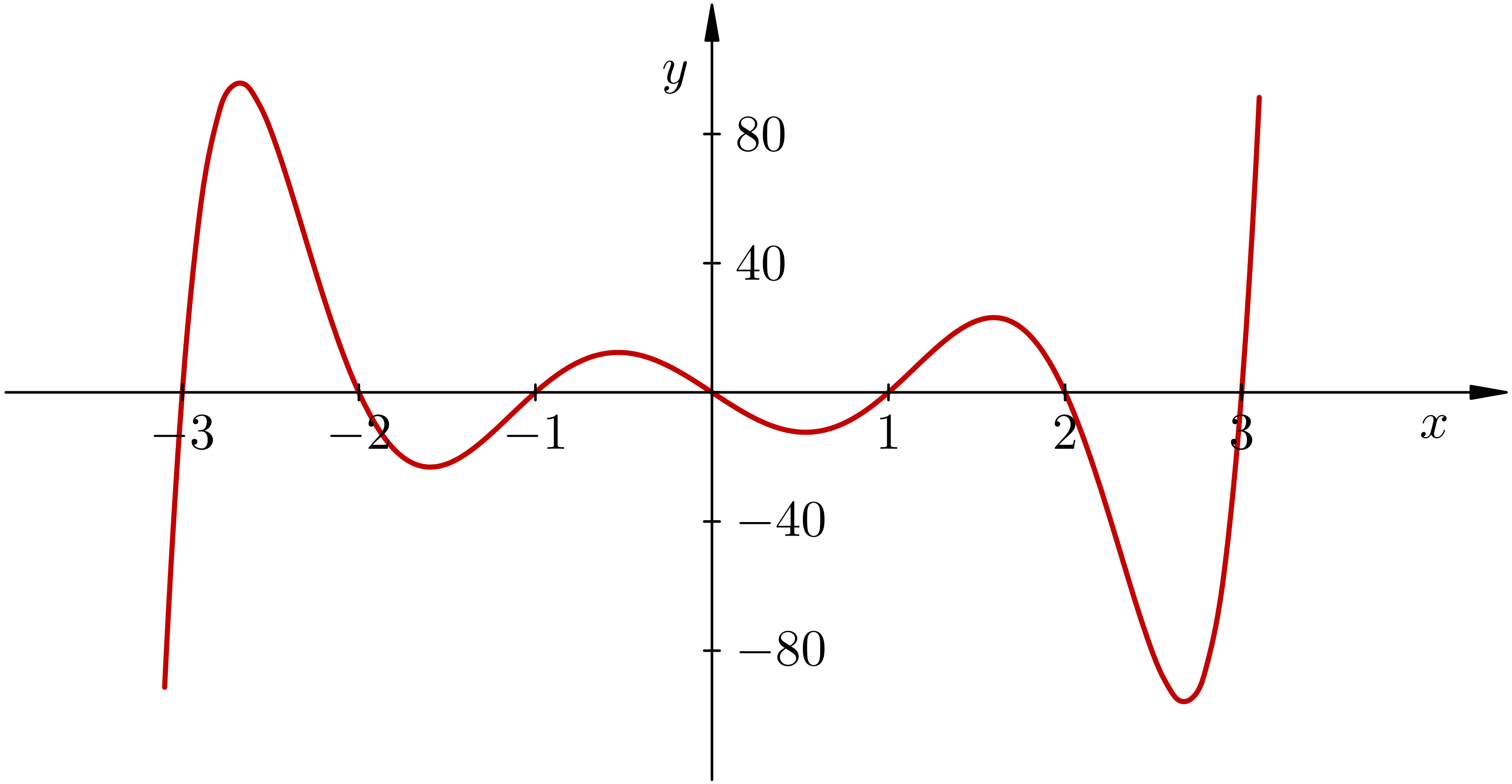
- ako možemo birati čvorove interpolacije $x_0, \ldots, x_n$,
- minimizirajmo maksimalnu apsolutnu vrijednost (grešku) polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

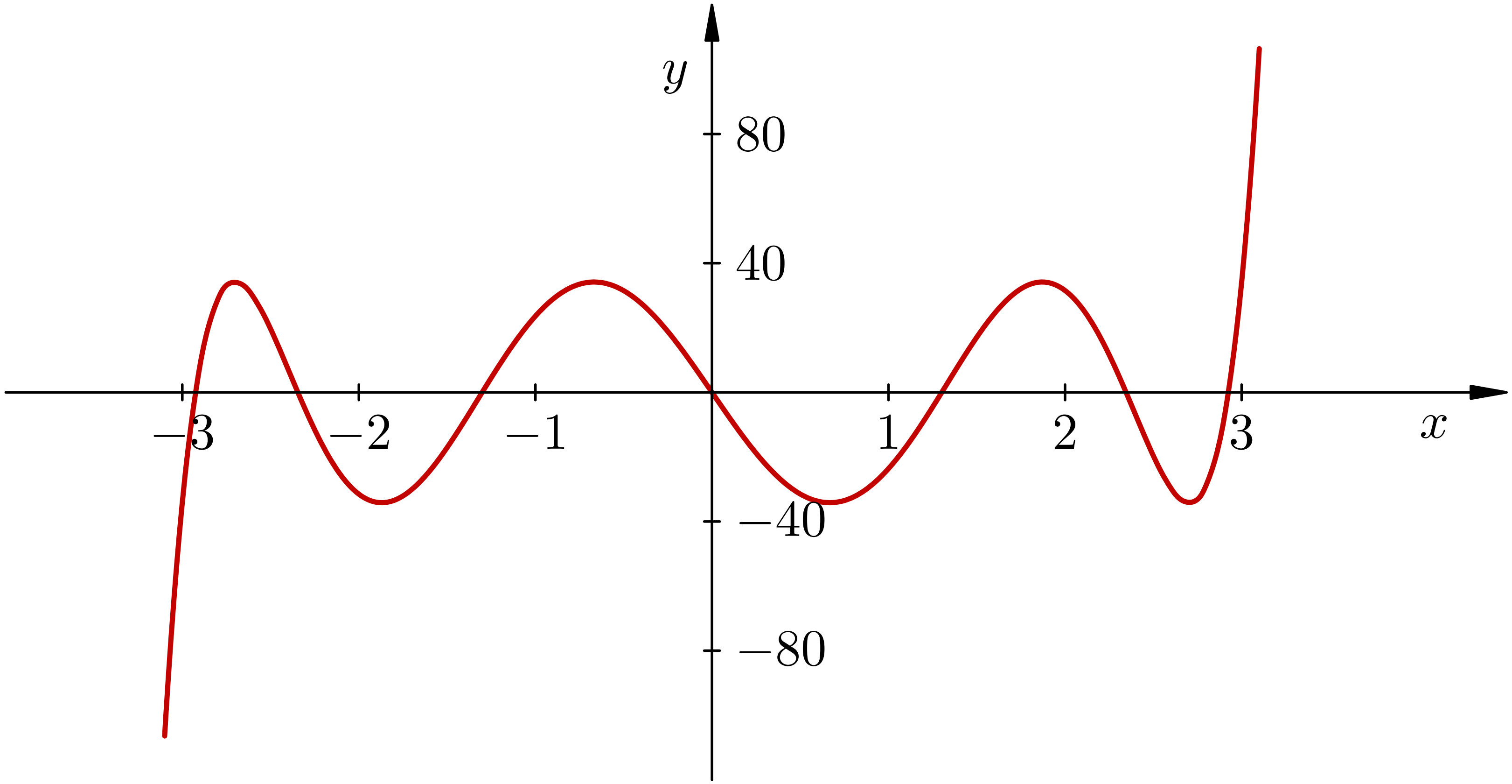
- ekvidistantni — najmanja greška je pri sredini intervala, a raste prema rubu,
- Čebiševljevi — maksimalna greška je jednaka na svakom podintervalu između čvorova, uključivo i rubove a, b.

Polinom čvorova za $n = 6$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 6$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da,

- kad se uzmu Čebiševljevi čvorovi,
- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki (v. primjer Runge).

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na "standardnom" intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda ju linearnom (afinom) transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu apsolutnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Ako je $a = -1$, $b = 1$, onda su Čebiševljeve točke x_k, za $k = 0, \ldots, n$,

- sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1}.

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi prve vrste, oznaka je T_n, za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj cosinusa preko produkta, za $x = \cos\varphi$), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n. Usput, za $|x| \geq 1$ vrijedi $T_n(x) = \mathrm{ch}(n \,\mathrm{Arch}\, x)$.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

dok su ekstremi na segmentu $[-1, 1]$ (opet, silazno indeksirani)

$$x_k' = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 0, \ldots, n+1.$$

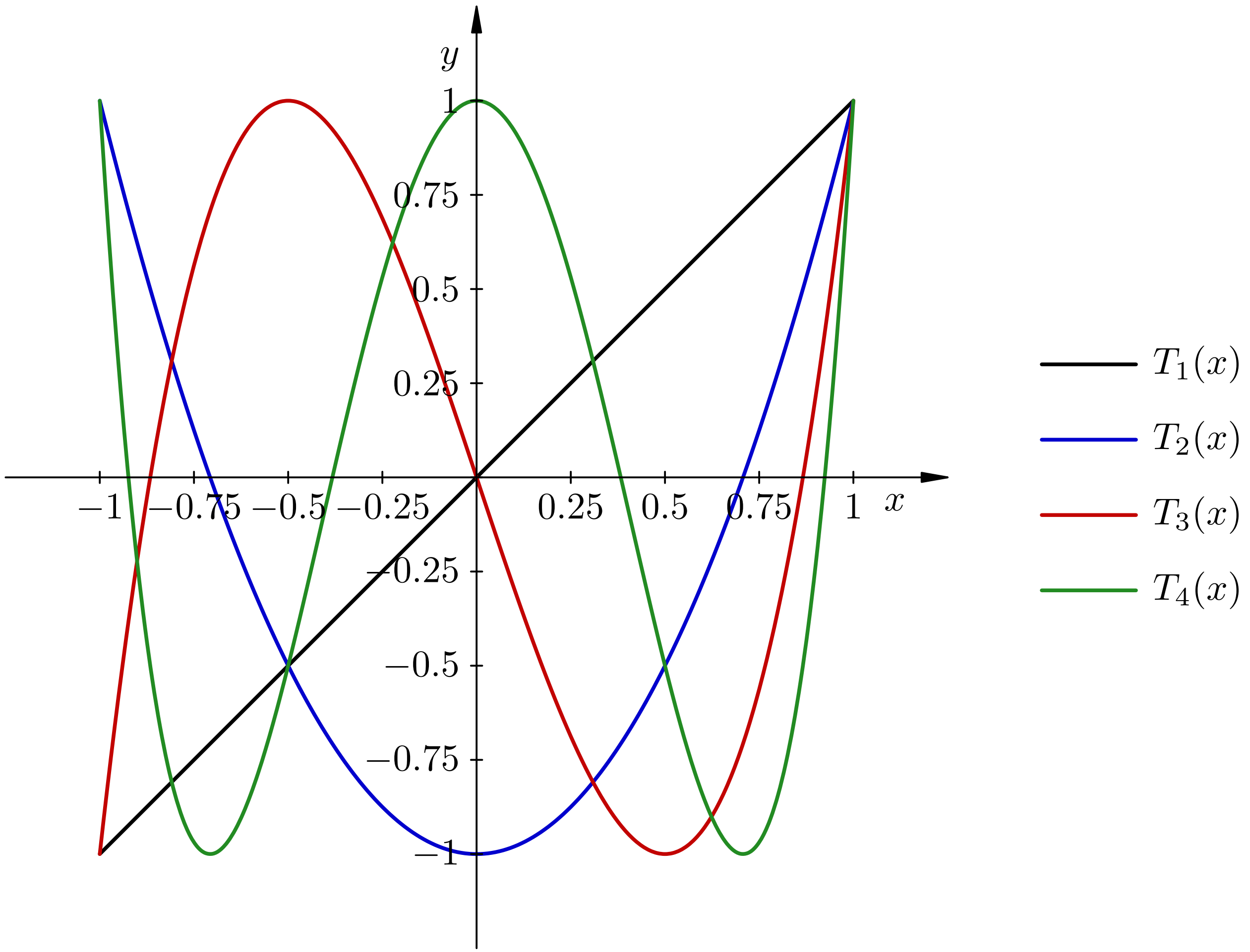
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x_k') = (-1)^k, \qquad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n + 2$ (rubovi -1 i 1 su uključeni) i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule" na segmentu $[-1, 1]$.

Teorem. Za zadani prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \Big\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \Big\},$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n se dostiže samo za polinom

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška ili "otklon od nule" je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1}, tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \qquad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}}\,T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x_k' = \cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n na $[-1, 1]$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Očito je

$$-1 = x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1 < x'_0 = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x'_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Polinom $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju.

Iz definicije τ_n preko infimuma i prethodne pretpostavke, zaključujemo da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \le n-1,$$

za kojeg vrijedi

$$\tau_n \le \max_{-1 \le x \le 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \leq n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima polinoma T_n. Iz gornje ograde za τ_n, redom, izlazi

$$R(x'_0) = R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0,$$

$$R(x'_1) = -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x'_1) < 0, \quad \ldots$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x_k')) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

No, onda je $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| = 1/2^{n-1}$, što je kontradikcija s $<$.

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. Istim argumentom izlazi opet $M(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$. ■

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati čvorove interpolacije $x_k \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom čvorova ω u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1. Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = 1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}. U silaznom poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo zamijenom indeksa $k \mapsto n - k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za Čebiševljeve točke (uzlazno) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Jesmo li bar malo spašeni?

Problem u Bernsteinovom primjeru $f(x) = |x|$ i Faberovom teoremu je preširoka klasa funkcija, odnosno,

- premala glatkoća — samo neprekidnost za f.

Uz samo malo jaču glatkoću, ipak jesmo "spašeni"!

Teorem. Neka je $f \in C^1[-1, 1]$. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži s $n + 1$ čvorova u intervalu $[-1, 1]$.

Niz polinoma p_n uniformno konvergira prema f na $[-1, 1]$, tj. vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty.$$

■

Dakle, imamo uniformnu konvergenciju interpolacije za neprekidno derivabilne funkcije na Čebiševljevim mrežama.

Hermiteova polinomna interpolacija

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k, možemo tražiti i interpolaciju derivacije f',

- tako da derivacija h' interpolacijskog polinoma h interpolira derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Prvo, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji, je li jedinstven;
- ako postoji i jedinstven je, kojeg je stupnja.

Hermiteova polinomna interpolacija

Uvedimo skraćene oznake za vrijednosti f i f' u čvorovima

$$f_k := f(x_k), \quad f_k' = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Problem egzistencije i jedinstvenosti Hermiteove interpolacije konstruktivno rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1}, stupnja najviše $2n+1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h_{2n+1}'(x_k) = f_k', \quad k = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_k međusobno različite točke i f_k, f_k' zadani realni brojevi.

Dokaz. Ideja = konstrukcija baze nalik na Lagrangeovu.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tražimo "bazične polinome" $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, za $k = 0, \ldots, n$, za koje vrijede tzv. "kardinalni" uvjeti interpolacije

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo takve polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x) \big).$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x) \big),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i) \big) = f_k,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i) \big) = f'_k.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu napisati kao

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\,\ell_k^2(x)$$

$$h_{k,1}(x) = (x - x_k)\,\ell_k^2(x),$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h_{k,0}'(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h_{k,1}'(x_i)$ zadovoljavaju tražene uvjete vrši se direktno — uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n,

- onda su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Time smo dokazali egzistenciju. Preostaje još jedinstvenost.

Hermiteova polinomna interpolacija

Primijetite da funkcija pogreške polinoma h

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, jer i funkcija e_h, i njezina derivacija e_h' imaju nultočke u x_i, tj.

$$e_h(x_i) = 0, \quad e_h'(x_i) = 0.$$

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji zadovoljava uvjete interpolacije. Za razliku p tih polinoma onda vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (f(x) - q_{2n+1}(x)) - (f(x) - h_{2n+1}(x)) \\ &= e_q(x) - e_h(x). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Polinom p je stupnja najviše $2n+1$ i

- ima dvostruke nultočke u čvorovima x_i, za $i = 0, \ldots, n$, odnosno, ukupno ima barem $2n+2$ nultočke.

Zaključak. Polinom p je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven. ■

Zato što greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma ima dvostruke nultočke u $x_0, \ldots, x_n$, polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije.

Greška Hermiteove interpolacije

Jedine razlike: ovdje je h_{2n+1} stupnja $2n+1$, a polinom čvorova je $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Neka je f funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i

- neka su $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$,
- neka je e_h greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma h_{2n+1} za funkciju f na mreži čvorova $x_0, \ldots, x_n$.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, takvu da je $x \neq x_0, \ldots, x_n$, tj. čim x nije čvor interpolacije, za grešku interpolacije vrijedi

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x)\, f[x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x].$$

Greška Hermiteove interpolacije — nastavak

Ako $f^{(2n+2)}$ postoji na $[a, b]$, onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, gdje je

$$x_{\min} := \min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x, x_0, \ldots, x_n\},$$

takva da je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x) \, \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}.$$

■

Napomena. Ako želimo da prva formula (s podijeljenom razlikom) vrijedi i u čvorovima interpolacije, onda

- treba pretpostaviti da druga derivacija f'' postoji u svim čvorovima,
- jer dobivamo trostruke čvorove na desnoj strani (v. iza).

Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi — što je zgodnije za računanje.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka od njih je dvostruki čvor.

Pokazali smo da za podijeljene razlike s dvostrukim čvorom vrijedi

$$\begin{aligned} f[x_k, x_k] &= \lim_{h\to 0} f[x_k, x_k + h] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = f'(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, $f[x_k, x_k] = f_k'$ su baš zadani podaci! Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike se računaju na uobičajeni način (rekurzija).

Podijeljene razlike

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0, x_0, x_1] & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \ddots & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_1] & & \\
 & & f'(x_1) & & & \cdots \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
x_n & f[x_n] & & f[x_{n-1}, x_n, x_n] & & \\
 & & f'(x_n) & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi je

$$\begin{aligned} h_{2n+1}(x) &= f[x_0] + f'(x_0)\,(x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1]\,(x-x_0)^2 \\ &\quad + f[x_0,x_0,x_1,x_1]\,(x-x_0)^2\,(x-x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0,x_0,\ldots,x_n,x_n]\,(x-x_0)^2\cdots(x-x_{n-1})^2(x-x_n). \end{aligned}$$

Naziv "Hermiteova interpolacija" koristi se i za općenitiju, tzv. proširenu Hermiteovu (ili Hermite–Birkhoff) interpolaciju.

- Ovdje se mogu interpolirati i više derivacije od prvih.
- Bitno: u svakom čvoru x_i, "redom" se interpoliraju funkcijska vrijednost i prvih nekoliko uzastopnih derivacija, a broj podataka po čvoru može varirati.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše $n =$ broj podataka $- 1$.

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom zadane vrijednosti $f, f', \ldots, f^{(n)}$ u čvoru x_0.

U ovom primjeru, x_0 je $(n+1)$-struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(k+1) \text{ puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

čim $f^{(k)}(x_0)$ postoji, pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n, za funkciju f oko točke x_0.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo "preskakanje" nekih derivacija u nekim točkama, problem interpolacije

- ne mora uvijek imati jedinstveno rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2 \iff$ regularnost matrice sustava za interpolaciju.

Interpolacija splajnovima

Interpolacija polinomima — zaključci

Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva — između čvorova,
- i u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.

Pretpostavka: čvorovi interpolacije su uzlazno numerirani,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

i baš u njima su rubovi podintervala za pojedine polinome. Može i drugačije (čvorovi su različiti od rubova). Međutim, ovo je zgodno za neparne stupnjeve polinoma.

Po dijelovima polinomna interpolacija

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo polinom fiksnog stupnja m, tj. tražimo da je

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_m$.

Svaki polinom p_k (stupnja najviše m)

- određen je s $m + 1$ koeficijenata, i
- moramo odrediti koeficijente n takvih polinoma — na svakom intervalu po jedan.

Dakle, ukupan broj koeficijenata koje treba odrediti je

$$(m + 1) \cdot n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Interpolacijski uvjeti su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

što za svaki polinom p_k daje po 2 uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \qquad \text{za} \quad k = 1, \ldots, n,$$

odnosno, ukupno imamo $2n$ uvjeta interpolacije.

Digresija. Ovi uvjeti interpolacije osiguravaju neprekidnost funkcije φ u svim "unutarnjim" čvorovima mreže $x_1, \ldots, x_{n-1}$, jer je

$$p_k(x_k) = p_{k+1}(x_k) = f_k, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Zaključak.

- Uvjeta interpolacije je $2n$, a
- treba naći $(m+1) \cdot n$ koeficijenata.

Bez dodatnih uvjeta, to je moguće jedinstveno napraviti

- samo za $m = 1$,
- tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

Za $m > 1$,

- dodaju se uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije φ u (unutarnjim) čvorovima mreže za podintervale.

Uz naš dogovor, to su upravo i čvorovi interpolacije.

Po dijelovima linearna interpolacija

Osnovna ideja po dijelovima linearne interpolacije je:

- umjesto jednog polinoma visokog stupnja,
- koristi se više polinoma, ali stupnja 1.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k je stupnja 1

- i jedinstveno je određen iz uvjeta interpolacije.

Zapisujemo ga relativno obzirom na početnu točku intervala (stabilnost) u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}),$$

gdje je $x \in [x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$.

Po dijelovima linearna interpolacija

Interpolacijski polinom p_k zapisujemo u Newtonovoj formi

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}),$$

pa je očito

$$\left.\begin{aligned} c_{0,k} &= f[x_{k-1}] = f_{k-1}, \\ c_{1,k} &= f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \end{aligned}\right. \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Za aproksimaciju vrijednosti funkcije f u jednoj točki $x \in [a, b]$, treba

- prvo pronaći indeks k takav da vrijedi $x \in [x_{k-1}, x_k]$,
- a onda izračunati vrijednost $p_k(x)$ pripadnog linearnog polinoma p_k na tom podintervalu.

Po dijelovima linearna interpolacija

Za traženje tog intervala koristimo binarno pretraživanje.

Binarno pretraživanje

```
low = 0;
high = n;
dok je (high - low) > 1 radi {
  /* U sljedećoj liniji cjelobrojno dijeljenje */
  mid = (low + high) / 2;
  ako je x < x[mid] onda
    high = mid;
  inače
    low = mid;
};
```

Trajanje ovog algoritma je proporcionalno s $\log_2(n)$.

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ako je funkcija f klase $C^2[a,b]$, onda je pogreška takve interpolacije, zapravo,

- maksimalna pogreška od n linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, pogreška je

- greška linearne interpolacije polinomom p_k.

Ocjena lokalne pogreške, ovisna o točki x, je

$$|f(x) - p_k(x)| \leq |\omega_k(x)| \, \frac{M_2^k}{2!},$$

pri čemu je

$$\omega_k(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Nađimo maksimum po apsolutnoj vrijednosti za $\omega_k(x)$ na zatvorenom intervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Funkcija $|\omega_k|$ može imati maksimum samo na otvorenom intervalu (x_{k-1}, x_k) — u rubovima je vrijednost 0.

Deriviranjem dobivamo da se lokalni ekstrem funkcije

$$\omega_k(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k),$$

postiže u polovištu $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ (tjeme parabole).

Vrijednost funkcije ω_k u lokalnom ekstremu je

$$\omega_k(x_e) = (x_e - x_{k-1})(x_e - x_k) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Za bilo koji $x \in (x_{k-1}, x_k)$ je $\omega_k(x) < 0$, pa je x_e

- točka lokalnog minimuma za ω_k, odnosno,
- točka lokalnog maksimuma za $|\omega_k|$, tj. vrijedi

$$|\omega_k(x)| \leq |\omega_k(x_e)| = \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Neka je h maksimalni razmak čvorova po svim podintervalima

$$h := \max_{k=1,\ldots,n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je M_2 maksimum apsolutne vrijednosti f'' na cijelom intervalu $[a, b]$

$$M_2 := \max_{k=1,\ldots,n} \{M_2^k\} = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Na cijelom intervalu $[a, b]$, onda možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^2}{4} \cdot \frac{M_2}{2!} = \frac{1}{8} h^2 M_2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da maksimalni razmak čvorova $h \to 0$,

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

pogreška je reda veličine h^2, odnosno, n^{-2}.

Komentar na po dijelovima linearnu interpolaciju

Mane po dijelovima linearne interpolacije:

- Potrebno je dosta podintervala da se dobije umjerena točnost aproksimacije.
- Na primjer, za $h = 0.01$, tj. za $n = 100$, greška aproksimacije je reda veličine 10^{-4}, do na faktor $M_2/8$.
- Funkcija φ nije dovoljno glatka — samo je neprekidna.

Primjer za linearnu splajn interpolaciju

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Primjer. Funkciju

$$f(x) = \ln x$$

na intervalu $[1, 100]$ aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom, s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, koju tražimo na cijelom intervalu.

Nađite broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne ta točnost ε, uz

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu,

(b) interval $[1, 100]$ podijelimo na tri podintervala $[1, 2]$, $[2, 7]$, $[7, 100]$ i na svakom od njih koristimo posebnu ekvidistantnu mrežu.

Po obje metode nađite aproksimaciju za $\ln 2$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje. Za po dijelovima linearnu interpolaciju φ vrijedi sljedeća ocjena pogreške

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M_2.$$

Ako je mreža ekvidistantna na $[a, b]$, onda je

$$h = \frac{b-a}{n},$$

pri čemu je n broj podintervala interpolacije.

Tražimo li točnost ε, onda mora biti

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Da bi se to postiglo, dovoljno je zatražiti da je

$$\frac{1}{8}\,h^2 M_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M_2 \leq \varepsilon.$$

Odatle odmah slijedi da mora biti

$$n \geq (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{8\varepsilon}}.$$

Sada još samo treba izračunati M_2. Deriviranjem dobivamo

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Budući da je f'' negativna, strogo rastuća funkcija, onda je maksimum njezine apsolutne vrijednosti na lijevom rubu, tj.

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{a^2}.$$

Rješenje za (a). Na intervalu $[1, 100]$ je $M_2 = 1$. Dobivamo

$$n \geq (100 - 1)\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9900}{\sqrt{8}} \approx 3500.1785667,$$

pa je $n = 3501$, dok je broj čvorova $n + 1 = 3502$.

Da bismo odredili aproksimaciju za $\ln 2$, moramo naći u kojem podintervalu se nalazi točka $x_* = 2$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Ako je x_* u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, mora biti

$$a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \leq x_* \leq a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

U našem slučaju je $x_* = 2$. Onda dobivamo

$$1 + (k-1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 2 \leq 1 + k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k-1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 1 \leq k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k-1) \leq \frac{3501}{99} \leq k$$

$$(k-1) \leq 35.\dot{3}\dot{6} \leq k.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Prema tome, $k = 36$, $x_{35} \approx 1.9897172240$, $x_{36} \approx 2.0179948590$, pa imamo tablicu podijeljenih razlika

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
1.9897172240	0.6879925301	
		0.4990461264
2.0179948590	0.7021043744	

Interpolacijski polinom na tom podintervalu onda glasi:

$$p_1(x) = 0.6879925301 + 0.4990461264(x - 1.9897172240),$$

pa je

$$p_1(2) = 0.6931241097, \quad |\ln(2) - p_1(2)| = 0.0000230709.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje za (b). Na intervalu $[1, 2]$ je $M_2 = 1$, odakle dobivamo

$$n_1 \geq (2-1)\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{100}{\sqrt{8}} \approx 35.3535,$$

pa je $n_1 = 36$.

Na intervalu $[2, 7]$ je $M_2 = \dfrac{1}{4}$, odakle dobivamo

$$n_2 \geq (7-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{500}{2\sqrt{8}} \approx 88.388834765,$$

pa je $n_2 = 89$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Na intervalu $[7, 100]$ je $M_2 = \dfrac{1}{49}$, odakle dobivamo

$$n_3 \geq (100 - 7)\sqrt{\frac{\frac{1}{49}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9300}{7\sqrt{8}} \approx 469.7209334,$$

pa je $n_3 = 470$.

Ukupan broj podintervala je $n = n_1 + n_2 + n_3 = 595$, što je skoro 6 puta manje nego u (a). Broj čvorova je 596.

Budući da je 2 čvor interpolacije, onda nemamo što računati, i vrijednost u čvoru je upravo $\ln 2 \approx 0.6931471806$.