

# *Numerička matematika*

## *12. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Numerička integracija (nastavak):
  - Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula.
- Rješavanje nelinearnih jednažbi:
  - Općenito o iterativnim metodama.
  - Brzina konvergencije i pojam reda konvergencije.
  - Metoda raspolavljanja — bisekcije.
  - Regula falsi — metoda pogrešnog položaja.
  - Konstrukcija iterativnih metoda za nultočke.
  - Metoda tangente — Newtonova metoda.
  - Metoda sekante.

## Informacije — rezultati 2. kolokvija, uvidi

Bitno: Rezultati 2. kolokvija bit će tek u

● nedjelju, 1. 7., navečer na webu.

Uvidi, upis ocjena/dogovor za usmeni su planirani za

● ponedjeljak, 2. 7.

Razlog = veći dio ekipe je na službenom putu.

# Informacije

## Konzultacije:

- samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

**Dodatni** bodovi “čekaju na vas”.

# Informacije — kolokviji, rok za zadaće

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu **A2**.

- **Drugi** kolokvij: **ponedjeljak**, **18. 6. 2018.**, u **12** sati.
- **Popravni** kolokvij: **petak**, **31. 8. 2018.**, u **12** sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

**Rok za predaju** zadaća je

- dan **drugog** kolokvija, do **početka** kolokvija.

Aplikacija se tada “zatvara za javnost” — bodovi su **konačni**.

**Upis ocjene**, odnosno, **dogovor za usmeni** (po želji) je

- **odmah** na “uvidu u kolokvije”.

Nemojte **odgađati** upis ocjene, iako će biti još termina za upis.

# Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/](http://web.math.hr/~singer/num_mat/)

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat1.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf)

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat2.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf)

# Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula

# Gauss–Legendreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Legendreove** formule ( $w(x) = 1$ ).

Čvorovi integracije su **nultočke Legendreovih** polinoma  $P_n$ .

Za njih vrijedi tzv. Rodriguesova formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0.$$

Za  $P_n$  je

$$\gamma_n = \frac{2}{2n+1}, \quad A_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$



## Gauss–Legendreove formule

**Težine** u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2(1 - x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2}{nP'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = -\frac{2}{(n+1)P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

**Greška** kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

# Gauss–Laguerreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Laguerreove** formule.

Čvorovi integracije su **nultočke Laguerreovih** polinoma  $\tilde{L}_n$ .  
Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$\tilde{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0.$$

Za  $\tilde{L}_n$  je

$$\gamma_n = (n!)^2, \quad A_n = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

# Gauss–Laguerreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{[(n-1)!]^2 x_k}{[n\tilde{L}_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{(n!)^2 x_k}{[\tilde{L}_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= -\frac{[(n-1)!]^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n-1}(x_k)} = \frac{(n!)^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{(n!)^2}{x_k[\tilde{L}'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty).$$

# Gauss–Hermiteove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Hermiteove** formule.

Čvorovi integracije su **nultočke Hermiteovih** polinoma  $H_n$ .

Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n \geq 0.$$

Za  $H_n$  je

$$\gamma_n = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad A_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

## Gauss–Hermiteove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}}{n[H_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2^n(n-1)! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n-1}(x_k)} = -\frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

# Gauss–Čebiševljeve formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule.

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma prve vrste  $T_n$ . Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \sqrt{1-x^2}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n-1/2}), \quad n \geq 0.$$

Za  $T_n$  je

$$\gamma_0 = \pi, \quad A_0 = 1, \quad \gamma_n = \frac{\pi}{2}, \quad A_n = 2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

# Gauss–Čebiševljeve formule

Za  $x = \cos \varphi$ , znamo da je  $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$ , pa se čvorovi integracije **lako** računaju — vrijedi formula

$$x_k = \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Sve **težine** u Gaussovoj formuli su **jednake** i vrijedi

$$w_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

**Greška** kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

# Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste.

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma druge vrste  $U_n$ . Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2}) \sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n+1/2}), \quad n \geq 0.$$

Za  $U_n$  je

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2}, \quad A_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$



## Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste

Za  $x = \cos \varphi$ , znamo da je  $U_n(\cos \varphi) = \sin((n+1)\varphi) / \sin(\varphi)$ , pa se **čvorovi** integracije **lako** računaju — vrijedi formula

$$x_k = \cos \left( \frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

**Težine** u Gaussovoj formuli se, također, **lako** računaju i vrijedi

$$w_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left( \frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

**Greška** kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

# Rješavanje nelinearnih jednadžbi

# Općenito o iterativnim metodama

Neka je zadana **nelinearna funkcija**

$$f : I \rightarrow \mathbb{R},$$

gdje je  $I$  neki interval. Tražimo sve one točke  $x \in I$  za koje je

$$f(x) = 0.$$

Takve točke  $x$  zovu se

- **rješenja** ili **korijeni** pripadne jednačbe,
- ili **nultočke** funkcije  $f$ .

U pravilu, pretpostavljamo da je

- $f$  **neprekidna** na  $I$  i
- da su joj nultočke **izolirane**.

## Neprekidnost funkcije $f$

Neprekidnost funkcije  $f$  obično se koristi pri određivanju intervala gdje se nalazi nultočka. Naime, ako je

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

na nekom intervalu  $[a, b]$ , to znači da funkcija je promijenila znak na  $[a, b]$ . To se može dogoditi na dva načina:

- ili  $f$  ima nultočku na  $[a, b]$ ,
- ili  $f$  ima prekid na  $[a, b]$ .

Ako je  $f$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$

• i u rubovima vrijedi  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,  
onda  $f$  sigurno ima nultočku na  $[a, b]$  — čak unutar  $(a, b)$ .

# Izoliranost nultočka

**Definicija (Izolirana nultočka).** Za nultočku  $\alpha$  reći ćemo da je **izolirana**, ako **postoji** krug nekog **pozitivnog** radijusa oko  $\alpha$ ,

• takav da je  $\alpha$  **jedina** nultočka od  $f$  **unutar** tog kruga.

U protivnom, kažemo da je nultočka **neizolirana**. ■

Kod **neizoliranih** nultočaka postoji problem **konvergencije** metoda za nalaženje nultočaka (lokalna nejedinstvenost).

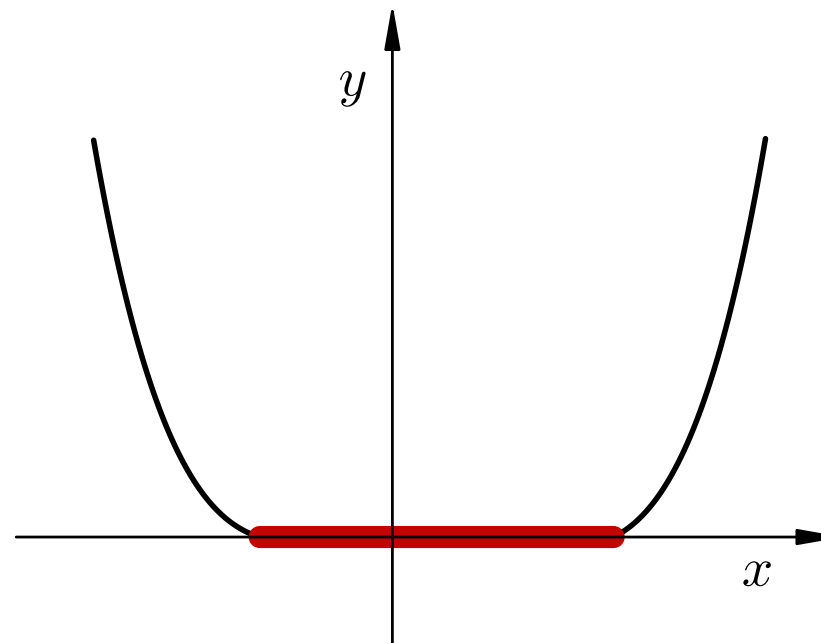
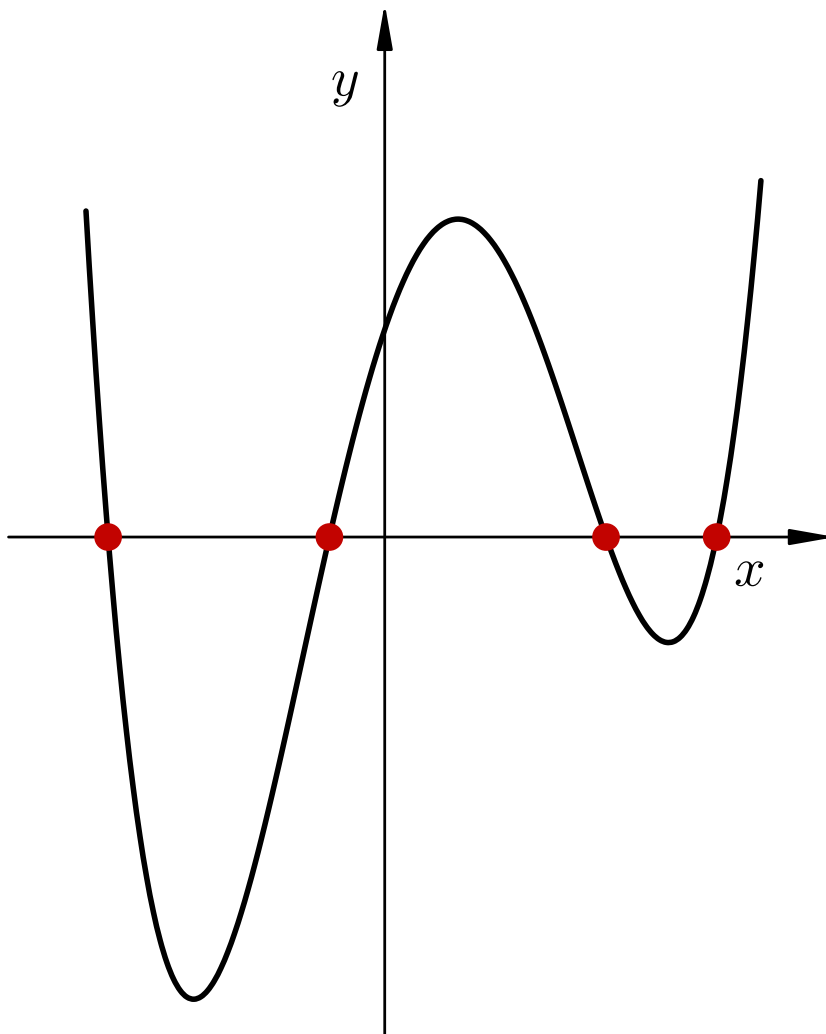
Odsad nadalje, pretpostavljamo da  $f$  ima samo **izolirane** nultočke.

Na sljedećoj stranici su primjeri funkcije s

• **izoliranim** nultočkama (lijevo),

• **neizoliranim** nultočkama (desno).

# Izoliranost nultočka



# Računanje nultočke na zadanu točnost

Traženje nultočki na zadanu točnost sastoji se od dvije faze:

1. Izolacija jedne ili više nultočki, tj. nalaženje intervala  $I$  unutar kojeg se nalazi barem jedna nultočka. Ovo je teži dio posla i obavlja se na temelju analize toka funkcije.
2. Iterativno nalaženje nultočke na traženu točnost.

Postoji mnogo metoda za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija na zadanu točnost. One se bitno razlikuju po tome


- imamo li sigurnu konvergenciju ili ne,
- i po brzini konvergencije (ako/kad konvergiraju).

Uobičajeno:

- brze metode nemaju sigurnu konvergenciju,
- dok je sporije metode imaju.


# Brzina konvergencije

Definirajmo sada **brzinu konvergencije** nekog niza “iteracija”. Te iteracije **mogu**, ali **ne moraju** biti iteracije za računanje nultočke funkcije.

**Definicija.** Niz iteracija  $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$  **konvergira** prema točki  $\alpha$   s **redom konvergencije**  $p$ , gdje je  $p \geq 1$ , ako je  $p$  **najveći** broj takav da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq c |\alpha - x_{n-1}|^p, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

za neki  $c > 0$ .

Ako je  $p = 1$ , kažemo da niz konvergira **linearno** prema  $\alpha$ . U tom je slučaju **nužno** da je  $c < 1$  (za konvergenciju niza), i obično se  $c$  naziva **faktor linearne konvergencije**. 



# Brzina konvergencije

Prethodna definicija, katkad, nije zgodna za linearne iterativne algoritme.

Ako u prethodnoj formuli upotrijebimo indukciju za  $p = 1$ ,  $c < 1$ , onda dobivamo da je

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Katkad će biti mnogo lakše pokazati ovu relaciju, nego onu iz definicije. I u ovom slučaju reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom  $c$ .

# Metoda bisekcije (raspolavljanja)

# Uvodno o metodi raspolavljanja

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočka funkcije je **metoda bisekcije** ili **raspolavljanja**.

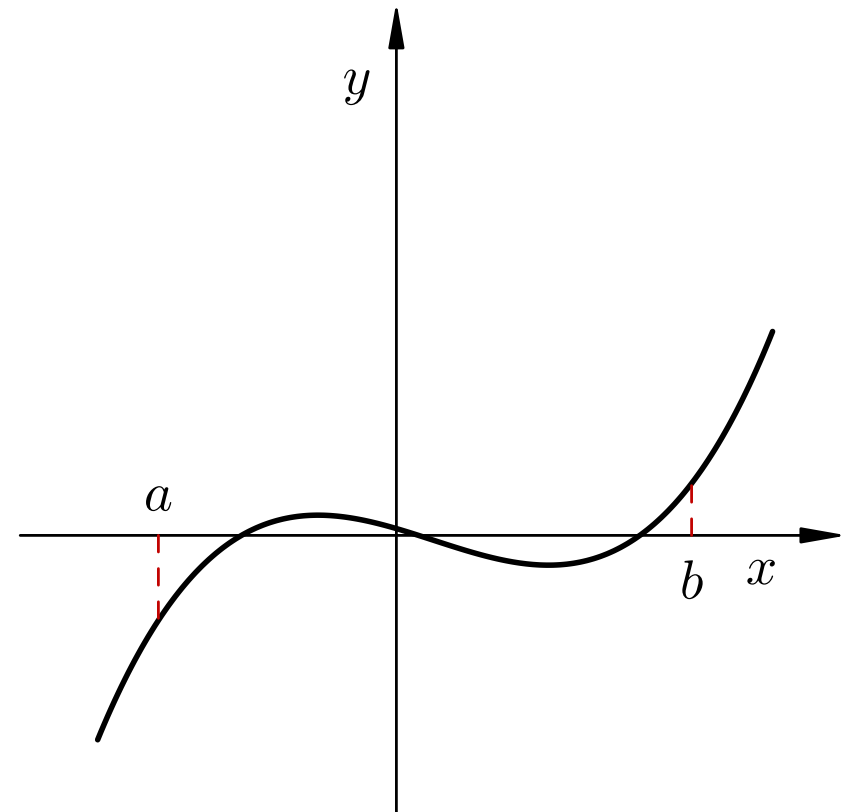
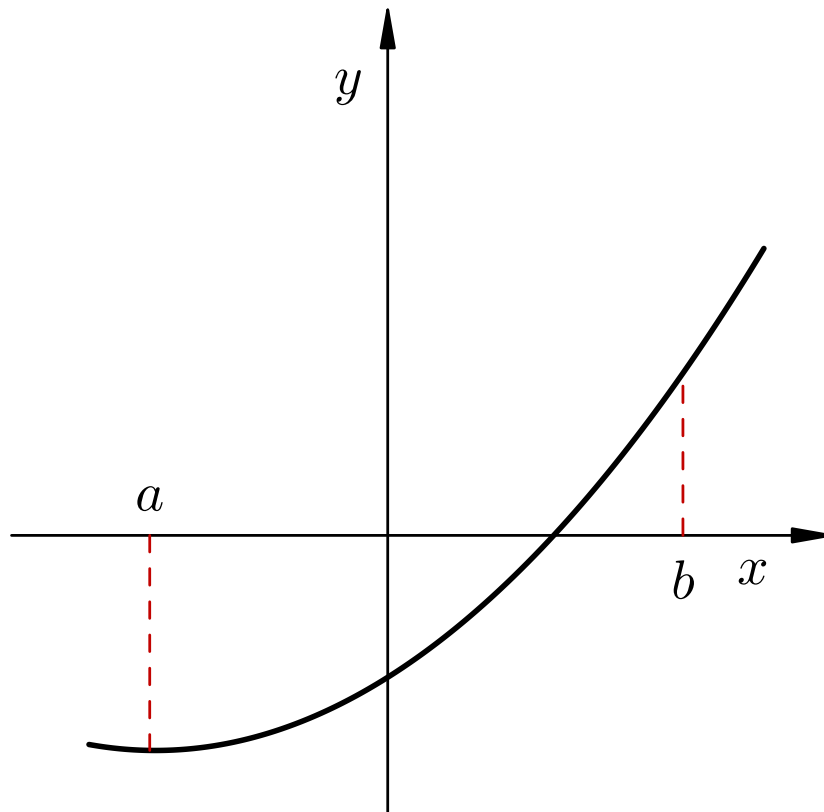
- Osnovna ili **startna** pretpostavka za **početak** algoritma raspolavljanja je **neprekidnost** funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ , s tim da u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

To znači da  $f$  ima **barem jednu** nultocku u intervalu  $[a, b]$ . Međutim,  $f$  može imati i **više** nultočka u intervalu  $[a, b]$ . Na sljedećoj stranici su primjeri kad

- $f$  ima **točno jednu** nultocku (lijevo),
- **više nultočka**, točnije, **neparan** broj njih, brojeći kratnost (desno).

# Uvodno o metodi raspolavljanja



## Uvodno o metodi raspolavljanja

Naravno, ako je  $f(a) \cdot f(b) = 0$ , onda  $f$  sigurno **ima** nultočku u (barem) jednom **rubu** intervala —  $a$  ili  $b$ . Provjerom  $f(a) = 0$ , odnosno,  $f(b) = 0$ , otkrivamo nultočke u **rubovima**.

Na kraju, ako je

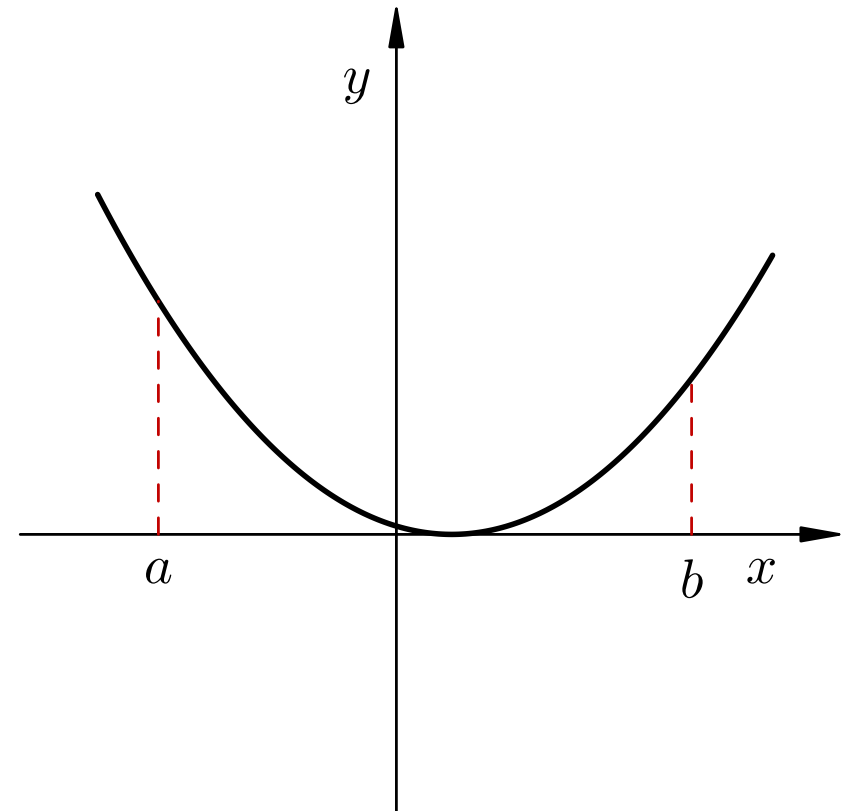
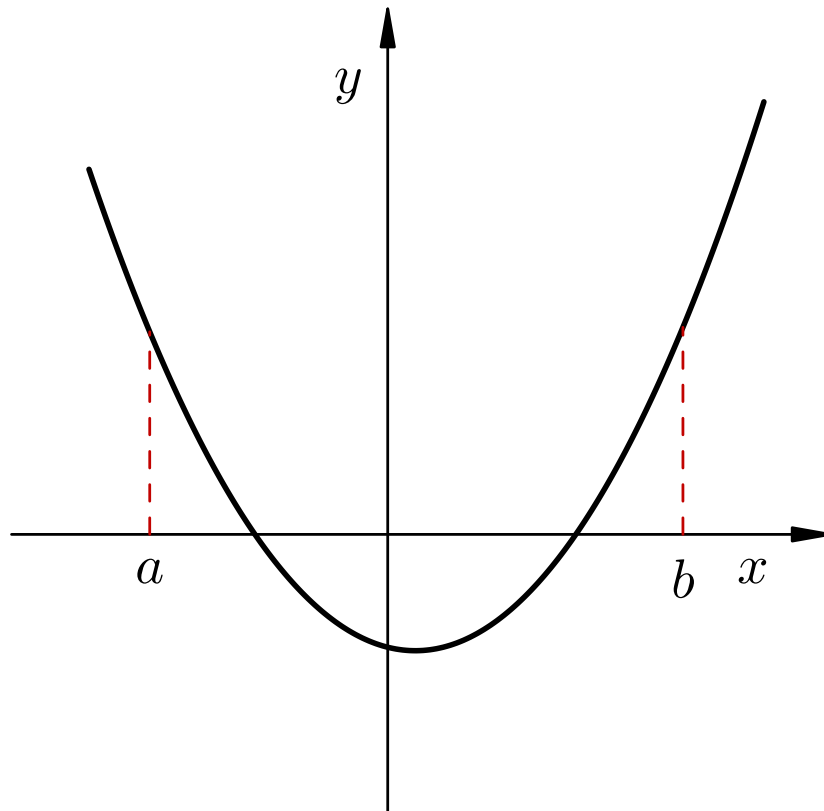
$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$

to **ne mora** značiti da  $f$  **nema** nultočku unutar  $[a, b]$ .

Na primjer, moglo se dogoditi da smo **loše separirali** nultočke i da  $f$ , unutar intervala  $[a, b]$ , ima

- **paran** broj nultočaka (slika lijevo),
- ili nultočku **parnog** reda (slika desno).

# Uvodno o metodi raspolavljanja



# Uvodno o metodi raspolavljanja

## Zaključak.

- Boljom separacijom nultočaka na lijevoj slici, lako ćemo postići da je  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
- Nultočke **parnog** reda **nemoguće** je **direktno** naći metodom bisekcije (nema promjene predznaka).

Kad ćemo govoriti o nultočkama **višeg** reda, onda ćemo pokazati kako treba **modificirati funkciju**, tako da i metodom bisekcije možemo naći **višestruku** nultočku.

- Umjesto  $f$ , treba raditi s funkcijom  $f/f'$ .

# Algoritam

Označimo s  $\alpha$  pravu nultočku funkcije (nju tražimo), a zatim s

•  $a_0 := a,$

•  $b_0 := b$  i

•  $x_0 :=$  polovište intervala  $[a_0, b_0]$ , tj.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ideja metode: u  $n$ -tom koraku algoritma, počev od intervala  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$  koji sigurno sadrži neku nultočku  $\alpha$ ,

• konstruiramo interval  $[a_n, b_n]$  kojemu je

• duljina = polovina duljine prethodnog intervala,

• ali tako da je nultočka  $\alpha$  ostala unutar intervala  $[a_n, b_n]$ .



# Algoritam

Konstrukcija intervala  $[a_n, b_n]$  sastoji se u **raspolavljanju** intervala  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$  točkom  $x_{n-1}$ , i to tako da je

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = x_{n-1}, \quad \text{ako je } f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0,$$

$$a_n = x_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \text{ako je } f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0.$$

Uočimo da je **dovoljno** ispitivati koji predznak imamo za  $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$ . Imamo **tri** mogućnosti:

- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) = 0$  znači da je nultočka **upravo**  $x_{n-1}$ ,
- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0$  znači da je **barem jedna** nultočka **unutar**  $[a_{n-1}, x_{n-1}]$  — **lijeva** polovina,
- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$  znači da je **barem jedna** nultočka **unutar**  $[x_{n-1}, b_{n-1}]$  — **desna** polovina.

# Algoritam

Objasnimo **posljednju** činjenicu. Množenjem lijevih strana nejednakosti

$$f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$$

$$f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$$

dobivamo

$$(f(a_{n-1}))^2 \cdot f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0,$$

pa mora biti

$$f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0.$$

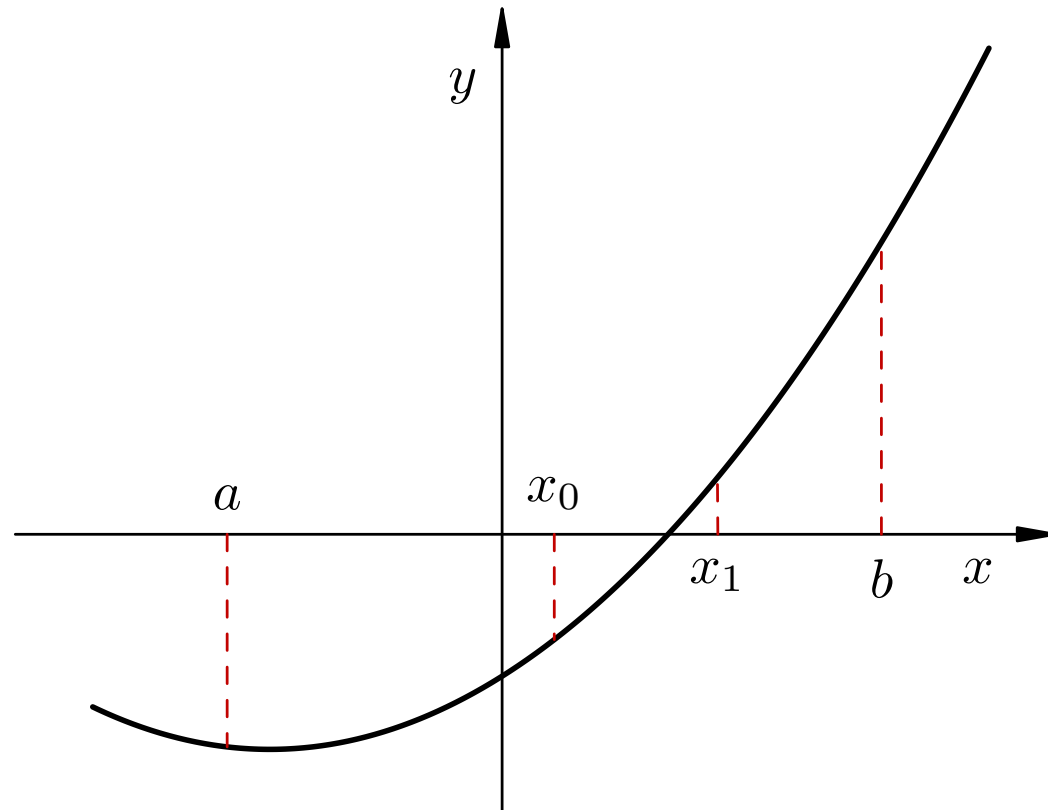
Dakle, nultočka se onda **mora** nalaziti u intervalu  $[x_{n-1}, b_{n-1}]$ .

Za **svaki** korak metode raspolavljanja, očito, vrijedi zaključak

$$\alpha \in [a_{n-1}, b_{n-1}] \implies \alpha \in [a_n, b_n].$$

# Metoda raspolavljanja — grafički

Grafički, metoda **raspolavljanja** izgleda ovako



# Algoritam

Metoda raspolavljanja — za zadanu točnost  $\varepsilon$ :

```
x := (a + b) / 2;
dok je b - x > epsilon radi { // ili x - a > ...
    ako je f(a) * f(x) <= 0.0 onda {
        b := x
    };
    inače {
        a := x;
    };
    x := (a + b) / 2;
};
/* Na kraju je x ≈ alpha. */
```

Pedantni algoritam “čuva” i stare vrijednosti funkcije.

# Konvergenција i zaustavljanje algoritma

**Tvrdnja.** Ako vrijede **startne** pretpostavke na  $f$  za metodu raspolavljanja, dobiveni niz  $x_n$  će **konvergirati** prema **nekoj** nultočki  $\alpha$  iz intervala  $[a, b]$ .

Nultočku  $\alpha$  smo našli sa zadanom **točnošću**  $\varepsilon$  ako je

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

Kako ćemo znati da je to **ispunjeno**, ako **ne znamo**  $\alpha$ ?

- Budući da je  $x_n$  **polovište** intervala  $[a_n, b_n]$  i  $\alpha \in [a_n, b_n]$ , onda je

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = x_n - a_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n),$$

- pa je dovoljno zahtijevati

$$b_n - x_n \leq \varepsilon \quad \text{ili} \quad x_n - a_n \leq \varepsilon.$$

## Ocjena greške

Iz konstrukcije metode raspolavljanja, lako se izvodi **ocjena pogreške**  $n$ -te aproksimacije  $x_n$  nultočke  $\alpha$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq b_n - x_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \dots = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a). \end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi  $(b - a)/2 = b - x_0 = x_0 - a$ , pa slijedi da je

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^n} (b - x_0) = \frac{1}{2^n} (x_0 - a). \quad \blacksquare$$

Ova relacija podsjeća na **linearnu konvergenciju** s  $c = 1/2$ , ali se zdesna **ne** pojavljuje  $|\alpha - x_0|$ . Ipak, **desna** strana daje naslutiti da će konvergencija biti **dosta spora** (bit po iteraciji).

# Ocjena greške i broj koraka

Relacija

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (b - a)$$

omogućava da se **unaprijed** odredi koliko je **koraka** raspolavljanja potrebno da bismo postigli zadanu **točnost**  $\varepsilon$ .

Da osiguramo  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ , dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \leq \varepsilon.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s  $2^{n+1}$  i dijeljenjem s  $\varepsilon$  dobivamo

$$\frac{b - a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1},$$

...

## Ocjena greške i broj koraka

a zatim, logaritmiranje daje

$$\log(b - a) - \log \varepsilon \leq (n + 1) \log 2,$$

odnosno,

$$n \geq \frac{\log(b - a) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je funkcija  $f$  još i klase  $C^1[a, b]$ , tj. ako  $f$  ima neprekidnu prvu derivaciju, može se dobiti i tzv. dinamička ocjena greške.

Po Teoremu srednje vrijednosti za funkciju  $f$  oko  $\alpha$ , imamo

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je  $\xi$  između  $x_n$  i  $\alpha$ .



## Dinamička ocjena greške

Prvo iskoristimo da je  $\alpha$  **nultočka**, tj. da je  $f(\alpha) = 0$ , a zatim uzmemo apsolutne vrijednosti obje strane. Dobivamo

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)| |\alpha - x_n|.$$

Primijetite da je

$$|f'(\xi)| \geq m_1, \quad m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

**Ako** je  $m_1 > 0$ , uvrštavanjem ove ocjene izlazi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

## Dinamička ocjena greške

Drugim riječima, ako želimo da je  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ , dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

odnosno, da vrijedi

$$|f(x_n)| \leq m_1 \varepsilon.$$

Ovaj uvjet možemo provjeriti u **svakoj** iteraciji.

- Iteracije smijemo “**prekinuti**” čim je ovaj uvjet **ispunjen**,
- **neovisno** o **unaprijed** izračunatom potrebnom broju iteracija.

**Napomena.** Pretpostavka  $m_1 > 0$  znači da  $f'$  **nema** nultočku na  $[a, b]$ , tj. da je funkcija  $f$  **monotona** na  $[a, b]$ .

# Regula falsi

(metoda pogrešnog položaja)

# Uvodno o metodi pogrešnog položaja

Znamo da metoda **raspolavljanja** ima

- **sigurnu** konvergenciju, ali je vrlo **spora**.

**Regula falsi** ili metoda **pogrešnog položaja** je **prirodan** pokušaj **ubrzavanja** metode raspolavljanja. I ova metoda ima

- **sigurnu** konvergenciju,

uz **iste** pretpostavke kao u metodi raspolavljanja.

Pretpostavimo da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- **neprekidna** na intervalu  $[a, b]$
- **i** da u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

# Ideja i skica algoritma

Ideja metode: Aproksimirajmo funkciju  $f$  pravcem koji prolazi točkama  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$ .

Traženu nultočku  $\alpha$  tada možemo aproksimirati

• nultočkom tog pravca — označimo ju s  $x_0$ .

Uočite da pravac sigurno siječe os  $x$ , zbog  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Nakon toga,

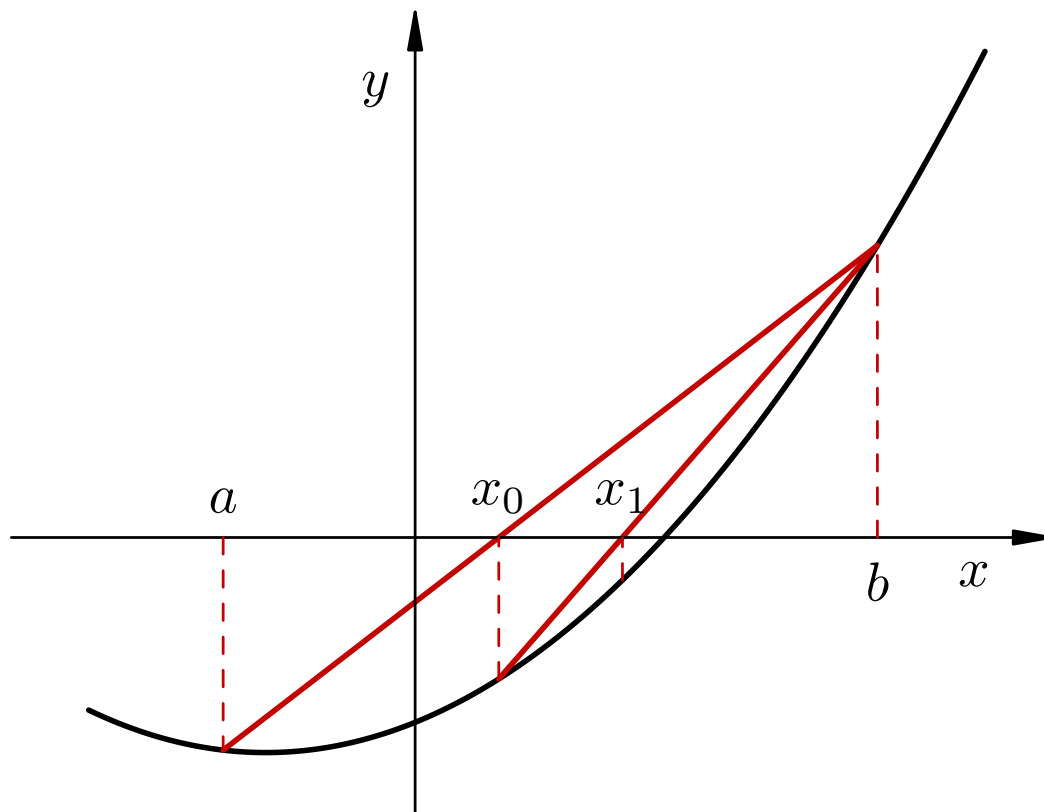
• pomaknemo ili točku  $a$ , ili točku  $b$  — u točku  $x_0$ ,

• ali tako da je nultočka ostala unutar novodobivenog intervala (test predznaka, kao kod raspolavljanja).

Postupak ponavljamo sve dok nismo postigli željenu točnost.

# Metoda pogrešnog položaja — grafički

Grafički, **regula falsi** ili metoda **pogrešnog položaja** izgleda ovako



## Regula falsi — osnovne ideje

Točka  $x_0$  dobiva se jednostavno iz jednadžbe **pravca**, pa je

$$x_0 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Dakle, **osnovne ideje** metode su:

- 🔴 aproksimacija **pravcem**
- 🔴 i “**zatvaranje**” nultočke u određeni — **sve manji** interval.

Iz slike zaključujemo da je to sasvim dobra ideja,

- 🔴 za **monotone** i **konveksne** (ili **konkavne**) funkcije.

Nažalost, postoje ozbiljni **problemi** i s ovom metodom.

- 🔴 Konvergencija je i dalje **linearna**, kao kod raspolavljanja.
- 🔴 Može biti vrlo **spora** — sporija nego kod raspolavljanja.

# Regula falsi — red konvergencije

Izvedimo **red konvergencije** metode **pogrešnog položaja**.

Uz oznaku za **prvu** podijeljenu razliku

$$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

formula za **prvu** aproksimaciju  $x_0$  glasi

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f[a, b]}.$$

Treba naći izraz za **grešku**  $\alpha - x_0$ .

Prethodnu relaciju **pomnožimo** s  $s - 1$  i **dodamo**  $\alpha$  na obje strane, tako da lijeva strana postane upravo  $\alpha - x_0$ .



# Regula falsi — red konvergenције

Dobivamo redom

$$\begin{aligned}\alpha - x_0 &= \alpha - b + \frac{f(b)}{f[a, b]} = (\text{izlučimo } \alpha - b) \\ &= (\alpha - b) \left( 1 + \frac{f(b)}{(\alpha - b)f[a, b]} \right) = (\text{uvalimo } f(\alpha) = 0) \\ &= (\alpha - b) \left( 1 + \frac{f(b) - f(\alpha)}{(\alpha - b)f[a, b]} \right) = (\text{sredimo u } f[b, \alpha]) \\ &= (\alpha - b) \left( 1 - \frac{f[b, \alpha]}{f[a, b]} \right) = (\alpha - b) \frac{f[a, b] - f[b, \alpha]}{f[a, b]} \\ &= -(\alpha - b) (\alpha - a) \frac{f[a, b, \alpha]}{f[a, b]}.\end{aligned}$$

# Regula falsi — red konvergencije

Ako je funkcija  $f$  dovoljno **glatka**, onda

- **podijeljene razlike**  $f[a, b, \alpha]$  i  $f[a, b]$  možemo napisati preko **derivacija** funkcije  $f$ .

Ako je  $f$  klase  $C^1[a, b]$ , onda po Teoremu srednje vrijednosti imamo

$$f[a, b] = f'(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Na sličan način, ako je  $f$  klase  $C^2[a, b]$ , onda vrijedi

$$f[a, b, \alpha] = \frac{1}{2} f''(\zeta),$$

gdje se  $\zeta$  nalazi između **minimuma** i **maksimuma** vrijednosti  $a$ ,  $b$  i  $\alpha$ . Zbog  $\alpha \in [a, b]$  to opet daje  $\zeta \in [a, b]$ .

Sad ove dvije relacije uvrstimo u izraz za grešku.

## Regula falsi — red konvergencije

Za funkciju  $f \in C^2[a, b]$ , dobivamo sljedeći izraz za **grešku**

$$\alpha - x_0 = -(\alpha - b)(\alpha - a) \frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)}.$$

Uočimo još da, zbog  $\alpha \in [a, b]$ , vrijedi

$$-(\alpha - b)(\alpha - a) = (b - \alpha)(\alpha - a) > 0.$$

Da bismo **pojednostavnili** analizu, pretpostavimo da

- **prva** derivacija  $f'$  i **druga** derivacija  $f''$  imaju **konstantan** predznak na  $[a, b]$  (pozitivne ili negativne).

Onda je  $\alpha$  **jedina** nultočka funkcije  $f$  u intervalu  $[a, b]$ , jer je  $f$  **monotona**.

## Regula falsi — red konvergencije

U nastavku gledamo samo **jedan** od **četiri** moguća slučaja za predznake  $f'$  i  $f''$ .

Pretpostavimo da je  $f' > 0$  i  $f'' > 0$  na  $[a, b]$ , tj. da je

•  $f$  monotono **rastuća** i **konveksna** na  $[a, b]$ .

U tom slučaju,

• **spojnica** točaka  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  uvijek se nalazi **iznad** grafa funkcije  $f$ , kao na prethodnoj slici.

Uvrštavanjem podataka o **predznaku** prve i druge derivacije u

$$\alpha - x_0 = (b - \alpha) (\alpha - a) \frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)},$$

dobivamo da je **desna** strana **veća** od 0, pa je i  $\alpha > x_0$ .

## Regula falsi — red konvergencije

Što sve **slijedi** iz  $\alpha > x_0$ ?

Po pretpostavci, funkcija  $f$  monotonno **raste** na  $[a, b]$ , pa je

$$f(a) < f(x_0) < f(\alpha) = 0 < f(b).$$

To znači da treba “**pomaknuti**”  $a$  za **sljedeći** korak metode, jer  $f(a)$  i  $f(x_0)$  imaju **isti** predznak, tj.  $\alpha \in [x_0, b]$ . Dakle, imamo

•  $a_1 := x_0$ , a  $b$  ostaje **fiksna**,  $b_1 := b$ .

Potpuno **isto** će se dogoditi i u **svim** narednim koracima.

Drugim riječima,

• aproksimacije  $x_n$  neprestano ostaju **lijevo** od nultočke  $\alpha$ ,

• tj. pomiče se **lijevi** rub intervala,  $a_n := x_{n-1}$ ,

• a **desni** rub  $b$  ostaje **fiksna**,  $b_n := b_{n-1} = \dots = b$ .

## Regula falsi — red konvergencije

U proizvoljnoj iteraciji — kad računamo  $x_n$ , uz  $\alpha \in [a_n, b_n]$ , relacija za grešku ima oblik

$$\alpha - x_n = (b_n - \alpha)(\alpha - a_n) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}.$$

Kad uvrstimo prethodne zaključke  $a_n = x_{n-1}$  i  $b_n = b$ , izlazi

$$\alpha - x_n = \left( (b - \alpha) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)} \right) (\alpha - x_{n-1}).$$

Uzimanjem apsolutnih vrijednosti s lijeva i zdesna, slijedi da

u ovom slučaju, regula falsi konvergira linearno.

**Zadatak.** Dokažite da je faktor u prvoj zagradi na desnoj strani po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $\Rightarrow$  konvergencija).

## Regula falsi — red konvergencije

Za metodu bisekcije dobili smo sličnu relaciju za grešku, samo je faktor bio  $1/2$ . Usporedbom izraza za greške vidimo da

- nije teško konstruirati primjere kad je metoda bisekcije brža no regula falsi.

Probajte naći takav primjer!

**Napomena.** Sasvim analogno se analiziraju i ostala tri slučaja za predznake  $f'$  i  $f''$  na  $[a, b]$ . Na primjer, ako je  $f$  konveksna, ali monotono pada, tj.  $f'' > 0$  i  $f' < 0$ ,

- aproksimacija  $x_n$  je uvijek desno od  $\alpha$ ,
- a uvijek se pomiče desni rub  $b$ .

U svim slučajevima izlazi da regula falsi konvergira linearno.

# Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka



# Konstrukcija iterativnih metoda

Kod konstrukcije metode **bisekcije** i **regule falsi**, koristili smo **dvije** startne pretpostavke o **funkciji**  $f$  i **intervalu**  $[a, b]$  na kojem radimo. Te pretpostavke su:

- “**glatkoća**” — funkcija  $f$  je **neprekidna** na intervalu  $[a, b]$ ,
- “**lokacija nultočke**” — u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

tj. **funkcijske** vrijednosti u **rubovima** intervala imaju **različit** predznak.

Uz prvu, **druga** pretpostavka **osigurava** da  $f$  ima **bar jednu** nultočku u  $[a, b]$

- i ove **rubne** točke  $a, b$  su **bitne** za **start** iteracija.

Obje metode **sigurno** konvergiraju, ali **sporo** — **linearno**.

# Konstrukcija iterativnih metoda

U nastavku, krećemo od **drugačijih** pretpostavki za konstrukciju **iterativnih** metoda.

Ako funkcija  $f$  ima **veću glatkoću** na nekoj domeni,

- smijemo koristiti vrijednosti **prve** derivacije  $f'$  u točkama,
- može i vrijednosti **viših** derivacija, ako postoje.

Do sada smo veću glatkoću koristili samo kod **ocjene** greške.

Što se **lokacije** tiče, krećemo od **slabijih** pretpostavki.

- Za **konstrukciju** iterativne metode — ne pretpostavljamo **ništa**, tj. **lokacija** nultočke **nije bitna**.

Kod analize **konvergencije** metode — **lokacija** nultočke, naravno, ima **ključnu** ulogu.

# Konstrukcija iterativnih metoda

Opće ideje za konstrukciju iterativnih metoda za nalaženje nultočka funkcije su sljedeće.

- Jednu ili više startnih točaka možemo, bar u principu, izabrati bilo gdje.

Zatim, počevši od tih startnih točaka,

- iterativno generiramo neki niz aproksimacija (= metoda).

U svakoj iteraciji, novu aproksimaciju generiramo tako da je

aproksimacija nultočke = nultočka aproksimacije,

s tim da se aproksimacija određuje na osnovu jedne ili više prethodnih točaka — tzv. iteracijskom funkcijom.

Ideja iteracije je slična onoj kod integracijskih formula.

# Konstrukcija iterativnih metoda

Na primjer, kod **Newtonove** metode, funkciju **aproksimiramo**

- **tangentom** u **jednoj** (zadnjoj) točki,

a kod metode **sekante**,

- **sekantom** kroz **dvije** (zadnje) točke.

Kod **ovakvog** pristupa, **gubimo sigurnu** konvergenciju, tj.

- **može** se dogoditi da metode **ne konvergiraju**, ovisno o startu iteracija.

Međutim, **ako** konvergiraju,

- konvergencija je **brža** — kad smo dovoljno **blizu** nultočke.

Za pojedine metode, navest ćemo i **neke** uvjete koji **osiguravaju** konvergenciju (slično kao kod regule falsi).

# Metoda tangente (Newtonova metoda)

# Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Pretpostavimo da je funkcija  $f$  barem

- neprekidno derivabilna na nekoj domeni,
- idealno — na cijelom  $\mathbb{R}$ .

Nadalje, neka je **zadana**, ili nekako **izabrana**,

- **početna** točka  $x_0$ .

Ideja metode **tangente** je

- povući **tangentu** na graf funkcije  $f$  u točki  $(x_0, f(x_0))$ ,  
i definirati **novu aproksimaciju**  $x_1$
- u točki gdje ta **tangenta siječe** os  $x$  — ako takva točka  $x_1$  **postoji**. U protivnom, treba uzeti neku drugu točku  $x_0$ .

# Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Drugim riječima, funkciju  $f$

- aproximiramo pravcem — tangentom u točki  $(x_0, f(x_0))$  (to je najbolja linearna aproksimacija funkcije  $f$  u okolini točke  $x_0$ ),

a nepoznatu nultočku funkcije  $f$

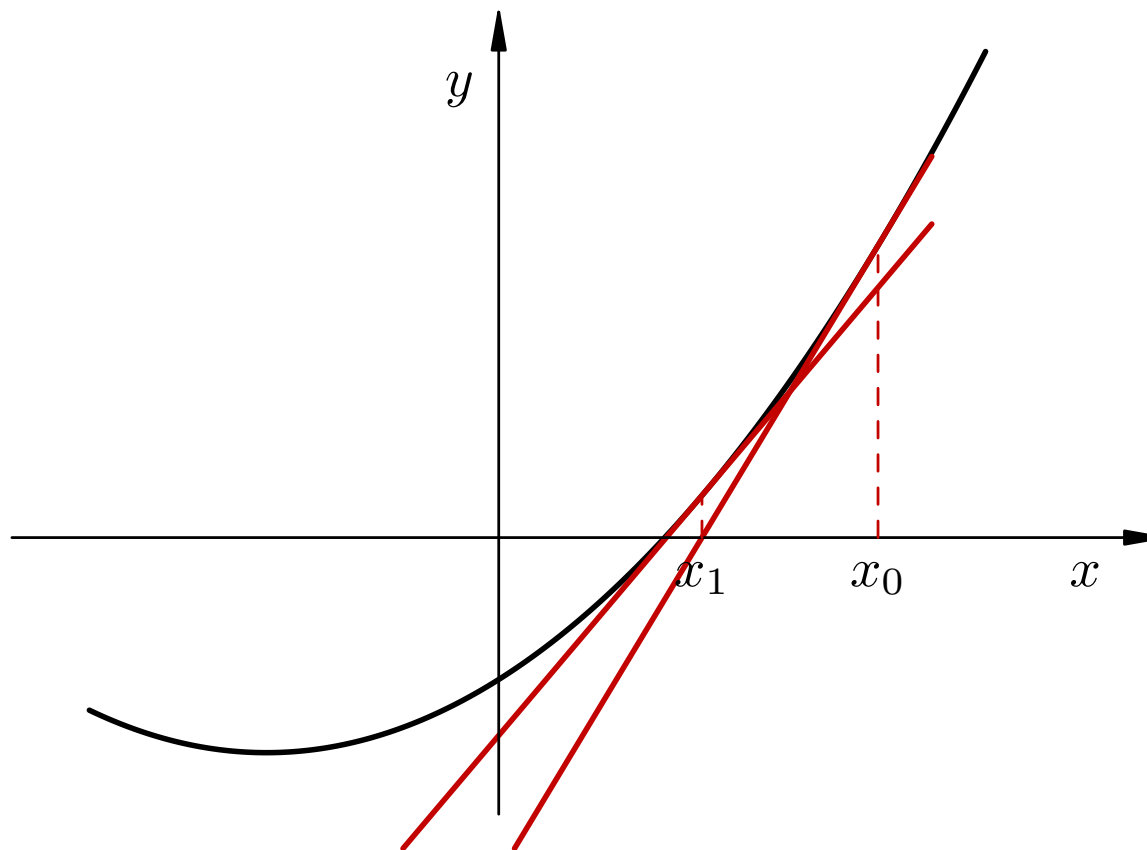
- aproximiramo nultočkom  $x_1$  tog pravca — te tangente na graf funkcije  $f$  u zadanoj točki (ako  $x_1$  postoji).

Isti postupak možemo ponoviti u točki  $x_1$  i dobiti sljedeću točku  $x_2$ . Kad ovaj postupak iteriramo — induktivno ponovimo u svakoj sljedećoj točki  $x_n$ , za  $n \geq 0$ , dobivamo

- metodu tangente ili Newtonovu metodu za nalaženje nultočke funkcije  $f$ .

# Newtonova metoda — grafički

Grafički, **Newtonova** metoda za nalaženje nultočke izgleda ovako





# Geometrijski izvod Newtonove metode

Geometrijski izvod metode je **jednostavan**.

- U točki  $x_n$  napišemo jednadžbu **tangente** i pogledamo gdje tangenta **siječe** os  $x$ .

Jednadžba **tangente** je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Iz **zahtjeva**  $y = 0$  za  $x = x_{n+1}$ , izlazi da je **nova** aproksimacija  $x_{n+1}$  dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za **računanje** je dovoljno pretpostaviti da  $f'(x_n)$  postoji (neprekidnost nije bitna) i da je  $f'(x_n) \neq 0$  u **svim** točkama  $x_n$ .

# Analitički izvod Newtonove metode

Do Newtonove metode može se doći i analitički,

- ali uz malo jače pretpostavke,
- iz kojih onda slijedi i izraz za grešku.

Neka je  $\alpha$  neka nultočka funkcije  $f$  i pretpostavimo da je

- $f$  dva puta neprekidno derivabilna na nekom intervalu oko  $\alpha$ .

Tj. pretpostavljamo da je  $f \in C^2(I)$ , gdje je  $I$  segment takav da je  $\alpha \in I$ .

Neka je  $x_n \in I$  bilo koja točka — neka aproksimacija za  $\alpha$ .

Onda funkciju  $f$  možemo razviti u Taylorov red oko  $x_n$ , do uključivo prvog člana, a kvadratni član je greška.

## Analitički izvod Newtonove metode

Za  $x \in I$ , dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (x - x_n)^2,$$

pri čemu je  $\xi_n$  između  $x$  i  $x_n$ , tj.  $\xi_n \in I$ .

Uvrštavanjem **nultočke**  $x = \alpha \in I$ , dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2.$$

Uz pretpostavku  $f'(x_n) \neq 0$ , dijeljenjem i premještanjem izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

# Analitički izvod Newtonove metode

Ako pretpostavimo da je aproksimacija  $x_n$  dovoljno blizu  $\alpha$ ,

• tj. da je  $|\alpha - x_n|$  mali,

• onda očekujemo da je  $(\alpha - x_n)^2$  još puno manji.

Zato možemo “zanemariti” zadnji član u relaciji

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

i definirati novu aproksimaciju  $x_{n+1}$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

s idejom da je  $x_{n+1} \approx \alpha$  još bolja aproksimacija.

## Relacija za grešku Newtonove metode

Oduzimanjem odmah dobivamo i izraz koji veže greške dviju susjednih iteracija

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Iz ovog “izvoda” samo očekujemo da se greška “smanjuje”, ali to tek treba dokazati, uz odgovarajuće pretpostavke!

Sasvim općenito, to ne mora vrijediti!

Čak i kad startamo u nekom intervalu  $I = [a, b]$  koji sadrži nultočku  $\alpha$ , bez dodatnih pretpostavki — nema garancije

- da aproksimacije ostaju u tom intervalu  $I$ ,
- a kamo li da konvergiraju (v. primjere kasnije).

# Napomene o konvergenciji Newtonove metode

Dakle, **Newtonova** metoda **ne mora konvergirati** prema nultočki!

S druge strane, dokazat ćemo da ovaj zaključak **vrijedi**

- kad je  $x_n$ , odnosno, **startna** točka  $x_0$  — dovoljno **blizu**  $\alpha$ .

Takva **konvergencija** se obično naziva

- **lokalna konvergencija** metode.

Općenito, zaključke o **konvergenciji** metode (uz dovoljno **jake** pretpostavke) možemo podijeliti u **tri** grupe:

- **brzina** (lokalne) konvergencije — **ako** niz konvergira,
- **lokalna** konvergencija metode — uz **start** dovoljno **blizu**,
- **globalna** konvergencija metode na nekom intervalu  $I$ .

# Brzina konvergencije Newtonove metode

Brzina lokalne konvergencije izlazi direktno iz izraza za grešku u susjednim iteracijama.

**Teorem.** Neka je  $\alpha$  jednostruka nultočka funkcije  $f$  i pretpostavimo da je  $f \in C^2(I)$  na nekom segmentu  $I$  koji sadrži nultočku  $\alpha$ .

Ako niz aproksimacija  $x_n$  generiran Newtonovom metodom konvergira prema  $\alpha$ ,

• onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna, i na limesu vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

# Brzina konvergencije Newtonove metode

Dokaz. Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je  $\xi_n$  između  $x_n$  i  $\alpha$ .

Po pretpostavci, niz  $x_n$  konvergira prema  $\alpha$ . Onda mora vrijediti i  $\xi_n \rightarrow \alpha$ .

Iz  $f \in C^2(I)$  slijedi da su  $f'$  i  $f''$  neprekidne na  $I$ , pa dobivamo

$$f'(x_n) \rightarrow f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \rightarrow f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je  $\alpha$  jednostruka nultočka, slijedi  $f'(\alpha) \neq 0$ .

Zato smijemo prijeći na limes  $x_n \rightarrow \alpha$  u relaciji za grešku.



# Brzina konvergencije Newtonove metode

Prijelazom na limes  $x_n \rightarrow \alpha$  dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Oдавде čitamo da je **Newtonova** metoda, kad konvergira,

• (barem) **kvadratno** konvergentna.

Ako je  $f''(\alpha) = 0$ , konvergencija može biti i **brža** od kvadratne!

Ipak, treba biti oprezan, jer prethodni zaključci vrijede

• samo ako je  $f'(\alpha) \neq 0$ , tj. ako je  $\alpha$  **jednostruka** nultočka.

Za **višestruke** nultočke ovo **ne vrijedi**, jer

• konvergencija može biti i samo **linearna** (v. malo kasnije).

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Sljedeći rezultat o konvergenciji **Newtonove** metode je

• **lokalna konvergencija** za **jednostruke** nultočke  $\alpha$ ,  
uz pretpostavku da je funkcija  $f \in C^2(I)$  na nekom segmentu  $I$  koji **sadrži** nultocku  $\alpha$ .

**Neformalno** rečeno, tvrdnja kaže sljedeće:

- ako je **početna** točka  $x_0$  **dovoljno blizu** nultočke  $\alpha$ ,
- onda je **Newtonova** metoda

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

**dobro** definirana — tj. vrijedi  $f'(x_n) \neq 0$  za **sve**  $n \geq 0$ ,

- i ovaj niz **konvergira** prema  $\alpha$ , i to (barem) **kvadratno**.

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Prava formulacija je malo složenija, jer precizno opisuje što znači “dovoljno blizu”.

**Teorem.** Neka je  $\alpha$  jednostruka nultočka funkcije  $f$  i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa  $\varepsilon$  oko  $\alpha$  (duljina tog segmenta je  $2\varepsilon$ ).

Pretpostavimo da je  $f \in C^2(I_\varepsilon)$  za sve dovoljno male  $\varepsilon > 0$ .  
Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Onda postoji  $\varepsilon > 0$ , toliko mali da vrijedi

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Nadalje, za svaki takav  $\varepsilon$ , za bilo koju startnu točku  $x_0 \in I_\varepsilon$ ,

- Newtonova metoda je dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jednoj nultočki  $\alpha \in I_\varepsilon$ .

Dokaz. Ide u 4 koraka i počiva na sljedeće dvije pretpostavke:

- $\alpha$  je jednostruka nultočka, tj. vrijedi  $f'(\alpha) \neq 0$ ,
- po definiciji  $I_\varepsilon$ , za svaku točku  $x \in I_\varepsilon$  vrijedi  $|x - \alpha| \leq \varepsilon$ .

To ćemo iskoristiti nekoliko puta!

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

1. korak. Pokažimo da postoji  $\varepsilon > 0$ , takav da je

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Iz pretpostavke da je  $f \in C^2(I_\varepsilon)$  za sve dovoljno male  $\varepsilon > 0$ , slijedi da je

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}$$

rastuća funkcija od  $\varepsilon$  (za dovoljno male  $\varepsilon > 0$ ), jer se

- $\max |f''(x)|$  u brojniku i  $\min |f'(x)|$  u nazivniku,
- uzimaju po sve većim segmentima  $I_\varepsilon$  oko  $\alpha$ ,
- tako da brojnik raste, a nazivnik pada.

Naravno, ako  $f'$  ima nultočku u nekom segmentu  $I_\varepsilon$ , onda je  $m_1(\varepsilon) = 0$ , odnosno,  $M(\varepsilon) = \infty$ , i to treba izbjeći!

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Međutim, zbog  $f'(\alpha) \neq 0$  i neprekidnosti  $f'$  oko  $\alpha$  (za sve dovoljno male  $\varepsilon > 0$ ), sigurno postoji (dovoljno mali)  $\varepsilon_0 > 0$ ,

• takav da je  $f'(x) \neq 0$ , za svaki  $x \in I_{\varepsilon_0}$ ,

• pa onda vrijedi  $m_1(\varepsilon_0) > 0$ , odnosno,  $M(\varepsilon_0) < \infty$ .

No, čim je  $M(\varepsilon_0)$  “konačan”, onda postoji i  $\varepsilon > 0$ , takav da je  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , i vrijedi

$$\varepsilon M(\varepsilon_0) < 1.$$

Zato što  $M(\varepsilon)$  raste po  $\varepsilon$ , iz  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  izlazi da je i  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ .

Osim toga, iz  $m_1(\varepsilon) \geq m_1(\varepsilon_0) > 0$ , slijedi da je  $f'(x) \neq 0$  za svaki  $x \in I_\varepsilon$ . Dodatno, iz neprekidnosti  $f'$ , vidimo da

•  $f'(x)$  ima isti predznak kao i  $f'(\alpha)$ , za svaki  $x \in I_\varepsilon$ .

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

2. korak. Pokažimo da je  $\alpha$  **jedina** nultočka funkcije  $f$  u  $I_\varepsilon$ .

Upravo smo pokazali da je  $f'(x) \neq 0$  na  $I_\varepsilon$ , pa je funkcija  $f$  **monotona** na  $I_\varepsilon$ , tj. može imati **najviše** jednu nultočku.

Dakle,  $\alpha$  je **jedina** nultočka od  $f$  u  $I_\varepsilon$ .

**Digresija:** Isti zaključak se može dobiti i direktno, iz  $f'(\alpha) \neq 0$ .

Iz **Taylorovog** razvoja  $f$  oko  $\alpha$ , za bilo koji  $x \in I_\varepsilon$ , imamo

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - \alpha)^2,$$

za neki  $\xi$  **između**  $\alpha$  i  $x$ , pa je i  $\xi \in I_\varepsilon$ .

Znamo da je  $f(\alpha) = 0$  i  $f'(\alpha) \neq 0$ , pa **izlučimo**  $f'(\alpha)$ .

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dobivamo

$$f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) \cdot \left( 1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) \right).$$

Prvi faktor je, očito, **različit** od nule. Za drugi član u trećem faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} \varepsilon = \varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za treći faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) > 0.$$

Dakle,  $f(x) = 0$  za neki  $x \in I_\varepsilon$ , **ako i samo ako** je drugi faktor jednak nuli, tj. za  $x = \alpha$ .



# Lokalna konvergencija Newtonove metode

3. korak. Neka je  $x_0 \in I_\varepsilon$  bilo koja startna točka. Onda je  $f'(x_0) \neq 0$ , pa je prvi korak Newtonove metode dobro definiran

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Kad je  $n = 0$ , relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_1 = -(\alpha - x_0)^2 \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)},$$

gdje je  $\xi_0$  između  $x_0$  i  $\alpha$ , pa vrijedi i  $\xi_0 \in I_\varepsilon$ .

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Zatim, imamo redom,

$$\begin{aligned} |\alpha - x_1| &\leq |\alpha - x_0|^2 M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_0| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_0| \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pa je  $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$ , što **dokazuje** da je  $x_1 \in I_\varepsilon$ .

Dakle, ako startamo u **bilo kojoj** točki  $x_0 \in I_\varepsilon$ , onda

- **sljedeća** aproksimacija  $x_1$  po **Newtonovoj** metodi, ostaje **unutar** segmenta  $I_\varepsilon$ .

**Induktivnom** primjenom ovog argumenta ( $x_0$  je proizvoljan), dobivamo da **isto** vrijedi i za **svaku** sljedeću aproksimaciju  $x_n$ .

# Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dakle, za **svaki**  $n \geq 0$ , u točki  $x_n$  vrijedi  $f'(x_n) \neq 0$ , pa je sljedeća aproksimacija **dobro** definirana relacijom

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

i ostaje **unutar** polaznog segmenta, tj. vrijedi  $x_{n+1} \in I_\varepsilon$ .

**4. korak.** Preostaje još samo dokazati **konvergenciju** niza  $x_n$  prema nultočki  $\alpha$ .

Relacija koja veže **greške** dviju **susjednih** iteracija  $x_n$  i  $x_{n+1}$  je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je  $\xi_n$  **između**  $x_n$  i  $\alpha$ , pa je  $\xi_n \in I_\varepsilon$ .

## Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Slično kao u prethodnom koraku, dobivamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) |\alpha - x_n| \\ &\leq \dots (\text{induktivno spuštamo } n \text{ do nule}) \\ &\leq (\varepsilon M(\varepsilon))^{n+1} |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ , odavde odmah slijedi da  $x_n \rightarrow \alpha$  kad  $n \rightarrow \infty$  ( = “geometrijska” konvergencija s faktorom  $c = \varepsilon M(\varepsilon)$  ). ■

# Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Ovaj rezultat o lokalnoj konvergenciji teško možemo iskoristiti u praksi — za osiguranje konvergencije Newtonove metode

- bar iz neke startne točke  $x_0$ , koju znamo naći (što bi bilo sasvim dovoljno za nalaženje nultočke).

**Problem** = traženi  $\varepsilon$  iz tvrdnje ne znamo i nije ga lako naći!

Pretpostavimo da smo locirali nultočku funkcije  $f$  u segmentu  $[a, b]$  i znamo da je  $f \in C^2[a, b]$ . Neka je “globalno” na  $[a, b]$

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Pretpostavimo još da je

- $f$  strogo monotona na  $[a, b]$ , što je ekvivalentno s  $m_1 > 0$ .

Tada  $f$  ima jedinstvenu jednostruku nultočku  $\alpha$  u  $[a, b]$ .

# Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

To znači da imamo sve osnovne pretpostavke prethodnog teorema o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode

• i još znamo da je  $f' \neq 0$  na  $[a, b]$ .

Umjesto “lokalnog”  $M(\varepsilon)$ , izračunamo “globalnu” veličinu

$$M := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Sad možemo pokušati izabrati  $\varepsilon$  tako da vrijedi

•  $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$  — pa mora biti  $M \geq M(\varepsilon)$ , jer  $M(\varepsilon)$  raste s  $\varepsilon$ ,

• i da je  $\varepsilon M < 1$  — to onda osigurava i  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ .

Nažalost, prvi uvjet je problem!

# Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Primjer. Uzmemo  $\varepsilon$  tako “globalno” vrijedi

$$\varepsilon M < 1.$$

Nažalost, bez **dodatnih** uvjeta, još uvijek se **može** dogoditi da

- pripadni interval  $I_\varepsilon$  **nije sadržan** u  $[a, b]$ , već “**viri**” preko ruba intervala  $[a, b]$ .

To se **sigurno** događa ako je  $\varepsilon > (b - a)/2$ . Inače, dovoljno je da nultočka  $\alpha$  leži **blizu** jednog ruba intervala — **bliže** od  $\varepsilon$ .

- Tada **ne mora** vrijediti  $M \geq M(\varepsilon)$ , pa **ni**  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ .

Onda više **nemamo** garanciju **lokalne** konvergencije, tj.

- čak i da uzmemo **početnu** iteraciju  $x_0 \in I_\varepsilon \cap [a, b]$ ,
- već prva **sljedeća** iteracija  $x_1$  može izaći **izvan**  $[a, b]$ , čak **izvan**  $I_\varepsilon$  (taj interval ne znamo, jer ne znamo  $\alpha$ ).

## Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Naime, 3. korak je ključni dio teorema o lokalnoj konvergenciji!

Poanta. Treba uzeti još manji  $\varepsilon$  tako da bude  $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ , tj. tako da vrijedi još i

$$a + \varepsilon \leq \alpha \leq b - \varepsilon.$$

No, baš to je problem — jer ne znamo gdje je  $\alpha$ .

Kad ima neke koristi? Ako nađemo  $\varepsilon$  takav da je

$$\varepsilon M < 1 \quad \text{i} \quad \varepsilon < \frac{b - a}{2},$$

i još pokažemo da je  $\alpha \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$  — na primjer,

🔴 provjerom da  $f(a)$  i  $f(a + \varepsilon)$  imaju isti znak, te  $f(b)$  i  $f(b - \varepsilon)$  imaju isti znak,

onda znamo da je  $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$  i da vrijedi  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ .



## Problem — “lokalnost” lokalne konvergenције

Tada imamo **sigurnu lokalnu** konvergenciju Newtonove metode

• za bilo koju **startnu** točku  $x_0 \in I_\varepsilon$ .

Međutim, još uvijek **ne znamo gdje** treba startati, jer ne znamo **gdje** se nalazi “pravi”  $I_\varepsilon$  unutar  $[a, b]$ . Što sad?

Možemo napraviti **pretragu** intervala  $[a, b]$  s korakom  $h \leq 2\varepsilon$ , tj. “**testirati**” startne točke oblika

$$x_0 = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Bar **jedna** takva startna točka  $x_0$  daje **sigurnu** konvergenciju Newtonove metode. **Oprez**: za svaku takvu točku  $x_0$  treba

• pažljivo **provjeravati** sve sljedeće iteracije  $x_n$  — ostaju li **unutar**  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ , ili, barem, **unutar**  $[a, b]$ .

**Finale**: ova pretraga je **spora** — **bisekcija** je, vjerojatno, **brža**!

# Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da sve iteracije  $x_n$  leže unutar intervala  $[a, b]$ . Onda možemo dobiti i ocjenu

• lokalne greške susjednih iteracija u Newtonovoj metodi, u terminima veličina  $M_2$  i  $m_1$  (na tom intervalu).

Iz ranije relacije za grešku

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je  $\xi_{n-1}$  između nultočke  $\alpha$  i  $x_{n-1}$ , odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer nultočku  $\alpha$  ne znamo. Tražimo ocjenu preko veličina koje znamo izračunati.

## Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Za **dvije susjedne** iteracije  $x_{n-1}$  i  $x_n$  u **Newtonovoj** metodi, također, vrijedi veza preko **Taylorove** formule

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je  $\xi_{n-1}$  između  $x_{n-1}$  i  $x_n$ .

Po **definiciji** iteracija u **Newtonovoj** metodi, vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

## Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Sad iskoristimo pretpostavku da je  $x_{n-1}, x_n \in [a, b]$ , pa onda **mora** biti i  $\xi_{n-1} \in [a, b]$ . Dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode **bisekcije**, ako je  $m_1 > 0$ , onda vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo **ocjenu greške** za svaku iteraciju  $x_n$  u **Newtonovoj** metodi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2.$$

# Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Ova ocjena se može **iskoristiti**. Ako je  $\varepsilon$  tražena **točnost**, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

**garantira** da je  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ , do na **greške zaokruživanja**.

Pripadni test **zaustavljanja** iteracija u **Newtonovoj** metodi je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Naravno, uz ovaj, možemo **koristiti** i raniji test **zaustavljanja**

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

**Veznik** između ova **dva** testa je **ili**, tj. pitamo je li ispunjen **jedan ili drugi**.

# Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- $f$  strogo monotona na  $[a, b]$ ,
- tj. da prva derivacija  $f'$  ima fiksni predznak na  $[a, b]$ .

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
  - uz odgovarajući izbor startne točke  $x_0$ ,
- slično kao kod regule falsi.

# Globalna konvergencija Newtonove metode

**Teorem.** Neka je  $f \in C^2[a, b]$  i neka je  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Ako **prva** i **druga** derivacija  $f'$  i  $f''$  **nemaju** nultočku u  $[a, b]$ , tj.

• ako  $f'$  i  $f''$  imaju **konstantan** predznak na  $[a, b]$ ,

onda **Newtonova** metoda **konvergira** prema

• **jedinstvenoj jednostruko**j nultočki  $\alpha$  funkcije  $f$  u  $[a, b]$ ,

i to za **svaku** startnu aproksimaciju  $x_0 \in [a, b]$ , za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

**Dokaz.** Gledamo samo **jedan** od **četiri** moguća slučaja za predznake  $f'$  i  $f''$ .

U ostalim slučajevima, dokaz ide potpuno analogno.

# Globalna konvergencija Newtonove metode

Uzmimo, na primjer, da je  $f' > 0$  i  $f'' > 0$  na  $[a, b]$ , tj. da je

•  $f$  monotono **rastuća** i **konveksna** na  $[a, b]$ .

U tom slučaju, jer  $f$  **raste**, mora biti  $f(a) < 0$  i  $f(b) > 0$ .

Zbog  $f'' > 0$ , **startna** aproksimacija  $x_0$

• **mora** zadovoljavati  $f(x_0) > 0$ , tj.  $a < x_0$ , jer  $f$  raste.

U praksi možemo uzeti  $x_0 = b$ , jer je to **jedina** točka za koju **sigurno** znamo da vrijedi  $f(x_0) > 0$ .

Neka je  $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$  niz iteracija generiran **Newtonovom** metodom iz bilo koje **startne** točke  $x_0$  za koju je  $f(x_0) > 0$ ,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



# Globalna konvergencija Newtonove metode

Za početak, znamo da je  $x_0 > \alpha$ . Tvrđimo da je

$$\alpha < x_n \leq x_0 \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz ide **indukcijom**, a **bazu** već imamo.

Za **korak** indukcije, pretpostavimo da je  $\alpha < x_n \leq x_0$ . Onda je

$$f(x_n) > f(\alpha) = 0.$$

Osim toga, jer  $f$  **raste**, znamo da je  $f'(x_n) > 0$ , pa dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n \leq x_0,$$

što pokazuje da niz  $(x_n)$  **monotono pada**.

# Globalna konvergencija Newtonove metode

Iz Taylorove formule je

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je  $\xi_n \in (\alpha, x_n) \subset [a, b]$ . Zbog toga je  $f''(\xi_n) > 0$ , pa je

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Dakle, niz  $(x_n)$  je odozdo ograničen s  $\alpha$  i monotono pada, pa postoji limes

$$\alpha' := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Odmah znamo i da je  $\alpha \leq \alpha' \leq x_0$ , tj.  $\alpha' \in [a, b]$ .

# Globalna konvergencija Newtonove metode

Prijelazom na **limes** u formuli za **Newtonove** iteracije dobivamo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

Zbog  $f'(\alpha') \neq 0$ , odavde odmah slijedi  $f(\alpha') = 0$ .

No, znamo da  $f$  ima

● **jedinstvenu** nultočku  $\alpha$  u intervalu  $[a, b]$ ,

pa **mora** biti  $\alpha = \alpha'$ .

Preostala **tri** slučaja za predznake **prve** i **druge** derivacije dokazuju se potpuno **analogno**. ■

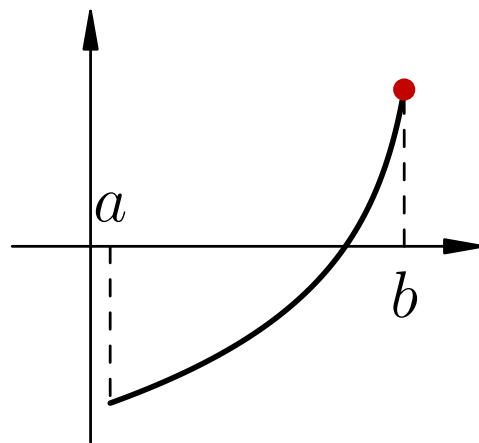
Uvjet  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  na izbor **startne** točke u prethodnom teoremu ima vrlo jednostavnu **geometrijsku** interpretaciju.

## Izbor startne točke za Newtonovu metodu

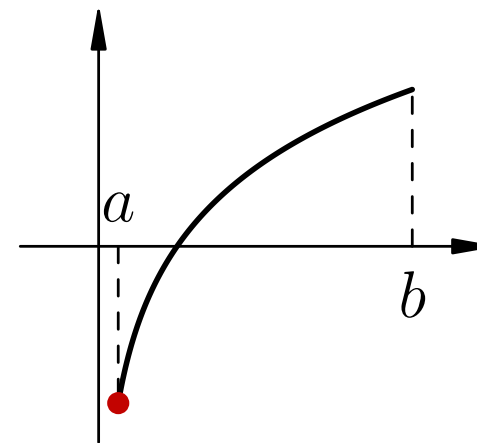
Ako pogledamo graf funkcije  $f$  na  $[a, b]$ , startnu točku  $x_0$

treba odabrati na “strmijoj” strani grafa funkcije.

Izbor startne točke  $x_0$  — ako je  $f' > 0$ , tj.  $f$  raste.



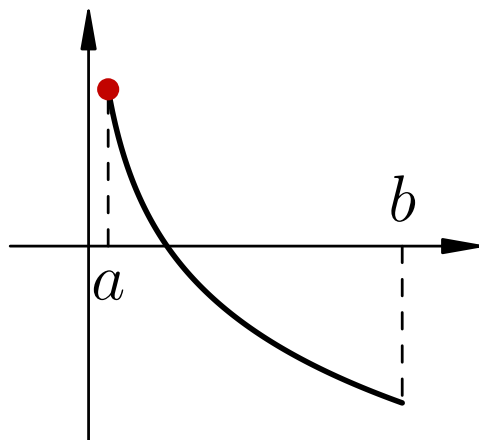
$$f'' > 0$$



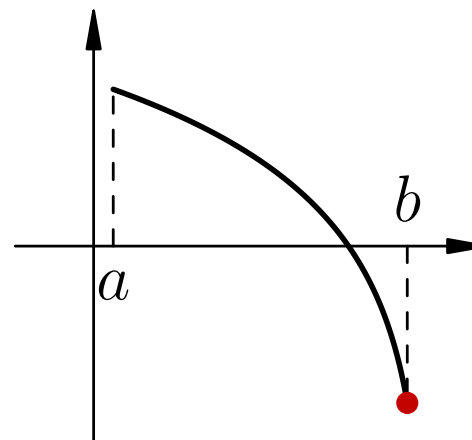
$$f'' < 0$$

# Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Izbor **startne** točke  $x_0$  — ako je  $f' < 0$ , tj.  $f$  pada



$$f'' > 0$$



$$f'' < 0$$

# Newtonova metoda — komentari

Prednosti:

- brza = kvadratna konvergencija.

Potencijalna mana: osim vrijednosti funkcije,

- trebamo i vrijednost prve derivacije u svakoj točki.

Ako se  $f'$  komplicirano računa,

- Newtonova metoda može biti sporija od metode sekante,
- iako ima veći red konvergencije (v. malo dalje).

# Metoda sekante

## Uvodno o metodi sekante

U Newtonovoj metodi koristimo

- tangentu u točki  $x_0$  kao aproksimaciju funkcije  $f$ .

Ako ne znamo derivaciju  $f'$  funkcije  $f$ , ili se ona teško računa, onda možemo

- tangentu u točki  $x_0$  aproksimirati sekantom kroz dvije startne točke  $x_0$  i  $x_1$ ,

što odgovara aproksimaciji derivacije  $f'(x_0)$  podijeljenom razlikom

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Tako dobivamo metodu sekante.



# Ideja metode sekante

Počinjemo s **dvije početne** točke  $x_0$  i  $x_1$ . Poredak je **bitan!**

Ideja metode **sekante** je

- povući **sekantu** grafa funkcije  $f$  kroz točke  $(x_0, f(x_0))$  i  $(x_1, f(x_1))$ ,

i definirati **novu aproksimaciju**  $x_2$

- u točki gdje ta **sekanta siječe** os  $x$  (ako  $x_2$  postoji).

Postupak nastavljamo povlačenjem **sekante**

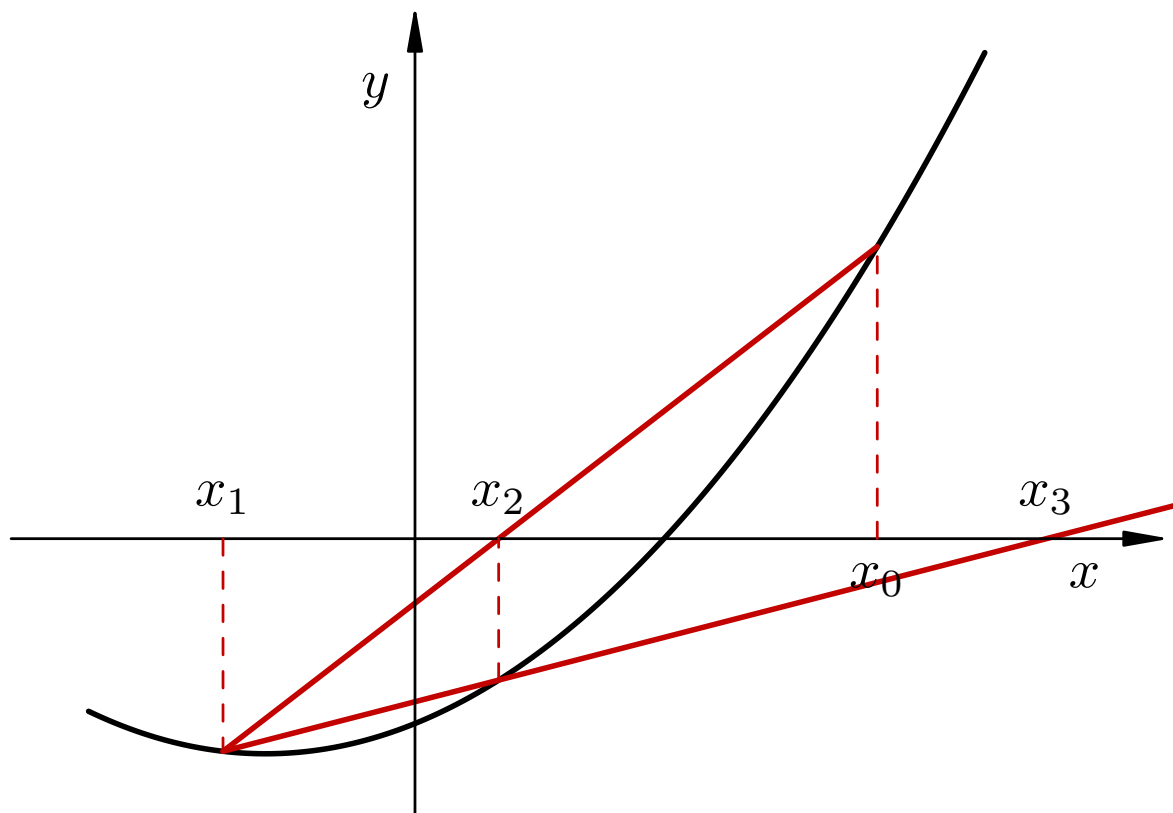
- kroz **posljednje dvije** točke  $(x_1, f(x_1))$  i  $(x_2, f(x_2))$ ,

i tako redom.

**Napomena.** Tu je ključna **razlika** od **regule falsi** — tamo se **jedna** početna točka drži **fiksnom**.

## Metoda sekante — grafički

Grafički, metoda **sekante** za nalaženje nultočke izgleda ovako



Primijetite da je **treća** iteracija izašla **izvan** početnog intervala, pa metoda **sekante** ne mora konvergirati. Za **obrnute**  $x_0$  i  $x_1$ ?

# Geometrijski izvod metode sekante

Geometrijski izvod metode je **jednostavan**.

- Napišemo jednadžbu **sekante** u točkama  $x_{n-1}$  i  $x_n$  i pogledamo gdje taj pravac **siječe** os  $x$ .

Jednadžba **sekante** je (**linearna** interpolacija za  $f$  u  $x_{n-1}$  i  $x_n$ )

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n).$$

Iz **zahtjeva**  $y = 0$  za  $x = x_{n+1}$ , izlazi da je **nova** aproksimacija  $x_{n+1}$  dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Za **računanje** je dovoljno pretpostaviti da je  $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$  u **svim** “susjednim” točkama (iteracijama)  $x_{n-1}$  i  $x_n$ .

## Formula za iteracije u metodi sekanti

Formulu za metodu **sekante** možemo dobiti i iteriranjem početne formule za **regulu falsi**.

Izraz za **novu** aproksimaciju možemo napisati i ovako

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]},$$

za  $n \geq 1$ .

Relacija koja “veže” **greške susjednih** aproksimacija, izvodi se na **isti** način kao kod **regule falsi**, i ima oblik

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1}) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

gdje je  $\zeta_n$  između  $x_{n-1}$ ,  $x_n$  i  $\alpha$ , a  $\xi_n$  između  $x_{n-1}$  i  $x_n$ .

# Red konvergencije metode sekante

Iz ove relacije može se izračunati **red konvergencije metode sekante**, uz odgovarajuće pretpostavke. Dobivamo da je

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Dokaz je dosta **kompliciran** (i ima veze s Fibonaccijevim brojevima, a  $p$  je **veće** rješenje jednačbe  $p^2 = p + 1$ ).

**Napomena.** Metoda **sekante** se još naziva i

- metoda (**inverzne**) **linearne interpolacije**,
- jer sljedeću aproksimaciju  $x_{n+1}$  dobivamo kao
- **nultočku linearne** interpolacije za  $f$ , u prethodne dvije iteracije  $x_{n-1}$  i  $x_n$ .