

# *Numerička matematika*

## *13. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Rješavanje nelinearnih jednažbi (nastavak):
  - Metoda jednostavne iteracije.
  - Metode višeg reda konvergencije.
  - Newtonova metoda za višestruke nultočke.
  - Primjeri za jednostruke i višestruke nultočke.
  - Primjeri metoda višeg reda konvergencije.

## Informacije — rezultati 2. kolokvija, uvidi

Bitno: Rezultati 2. kolokvija bit će tek u

● nedjelju, 1. 7., navečer na webu.

Uvidi, upis ocjena/dogovor za usmeni su planirani za

● ponedjeljak, 2. 7.

Razlog = veći dio ekipe je na službenom putu.

# Informacije

## Konzultacije:

- samo za NM: utorak u 15 sati (iza predavanja),
- petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Ne zaboravite, “žive” su i **domaće zadaće** na adresi

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

ili, izravno

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

**Dodatni** bodovi “čekaju na vas”.

# Informacije — kolokviji, rok za zadaće

Numerička matematika je u kolokvijskom razredu **A2**.

- **Drugi** kolokvij: **ponedjeljak**, 18. 6. 2018., u **12** sati.
- **Popravni** kolokvij: **petak**, 31. 8. 2018., u **12** sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

**Rok za predaju** zadaća je

- dan **drugog** kolokvija, do **početka** kolokvija.

Aplikacija se tada “zatvara za javnost” — bodovi su **konačni**.

**Upis ocjene**, odnosno, **dogovor za usmeni** (po želji) je

- **odmah** na “uvidu u kolokvije”.

Nemojte **odgađati** upis ocjene, iako će biti još termina za upis.

# Informacije

Moja web stranica za Numeričku matematiku je

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/](http://web.math.hr/~singer/num_mat/)

Tamo su kompletna predavanja iz prošlih godina, a stizat će i nova (kako nastaju).

Skraćena verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat1.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf)

Skraćena verzija skripte — 2. dio (drugih 6 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat2.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf)

# Metoda jednostavne iteracije

# Uvodno o metodi jednostavne iteracije

**Problem.** Pretpostavimo da tražimo **rješenje** jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Točke  $\alpha$  za koje je  $\alpha = \varphi(\alpha)$  zovu se **fiksne točke** funkcije  $\varphi$ .

**Ideja.** Definiramo **jednostavnu iteracijsku** funkciju (iteracijsku funkciju koja “**pamti**” samo **jednu** prethodnu točku), s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

uz  $x_0$  kao neku **početnu** aproksimaciju za  $\alpha$ .

**Primjer.** **Newtonovu** metodu možemo interpretirati i kao jednostavnu iteraciju, uz

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$



## Reformulacija problema $f(x) = 0$

Uobičajeno, rješavamo jednačbu  $f(x) = 0$ , pa taj problem treba **reformulirati** u problem jednostavne **iteracije**, odnosno, traženja **fiksne točke**. Za to postoji **mного načina**.

**Primjer.** Reformulirajmo problem “**kvadratnog korijena**” iz  $a$

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad \text{za } a > 0,$$

u oblik **jednostavne iteracije**.

Na primjer, to možemo napraviti na sljedeće načine:

1.  $x = x^2 + x - a$  (dodamo  $x$  na obje strane) ili, općenitije,  $x = x + c(x^2 - a)$ , za neki  $c \neq 0$ ,
2.  $x = a/x$ ,
3.  $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$ , što izlazi iz  $x = x + \frac{1}{2}(a/x - x)$ .

# Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Prirodno je pitanje kako se različite jednostavne iteracije ponašaju. Odgovor dobivamo sljedećim nizom tvrdnji.

**Lema.** Neka je funkcija  $\varphi$  neprekidna na  $[a, b]$  i neka je

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b],$$

u oznaci  $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ . Tada jednostavna iteracija  $x = \varphi(x)$  ima bar jedno rješenje — tzv. fiksnu točku  $\alpha$ , na  $[a, b]$ .

**Dokaz.** Za neprekidnu funkciju  $g(x) = \varphi(x) - x$  na  $[a, b]$  vrijedi

$$g(a) = \varphi(a) - a \geq 0, \quad g(b) = \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija  $g(x) = \varphi(x) - x$  mijenja predznak na  $[a, b]$ , a to može samo prolaskom kroz nultočku  $\alpha$  (neprekidna je!). ■

# Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Lema (Kontrakcija). Neka je funkcija  $\varphi$  neprekidna na  $[a, b]$  i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Pretpostavimo da postoji konstanta  $q$ , takva da je  $0 < q < 1$ , i da vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Ovo svojstvo kaže da je  $\varphi$  kontrakcija na  $[a, b]$ .

Onda funkcija  $\varphi$  ima jedinstvenu fiksnu točku  $\alpha$  unutar  $[a, b]$ .

Nadalje, za proizvoljnu startnu točku  $x_0 \in [a, b]$ , niz iteracija

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

konvergira prema  $\alpha$ .

# Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

**Dokaz.** Prema prethodnoj lemi, **postoji bar jedna** fiksna točka  $\alpha \in [a, b]$ . Pokažimo da **ne može** postojati **više** od **jedne**.

Pretpostavimo **suprotno**, tj. da postoje **barem dvije** fiksne točke. Uzmimo **bilo koje dvije** od njih, nazovimo ih  $\alpha$  i  $\beta$ . Budući da su to fiksne točke za  $\varphi$ , vrijedi

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta.$$

Po pretpostavci, funkcija  $\varphi$  je **kontrakcija** na  $[a, b]$ , pa je

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

odakle slijedi

$$(1 - q)|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Zbog  $1 - q > 0$ , mora biti  $\alpha = \beta$ , što dokazuje i **jedinstvenost**.

# Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokažimo još **konvergenciju** niza jednostavnih iteracija  $(x_n = \varphi(x_{n-1}), n \geq 1)$ , za **proizvoljnu** startnu točku  $x_0 \in [a, b]$ .

Uočimo da  $x_{n-1} \in [a, b]$  povlači da je  $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a, b]$ .  
Nadalje, jer je  $\varphi$  **kontrakcija**, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}|.$$

Odavde, **indukcijom** po  $n$ , dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Ako pustimo  $n \rightarrow \infty$ , onda  $q^n \rightarrow 0$ , pa vrijedi  $x_n \rightarrow \alpha$ . ■

Primijetimo da posljednja formula znači da metoda **jednostavne iteracije** konvergira **linearno**, s faktorom  $q$ .

# Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Uz pretpostavke prethodne leme, da je

•  $\varphi$  neprekidna kontrakcija s faktorom  $q < 1$  na  $[a, b]$ ,  
lako se izvodi ocjena greške za metodu jednostavne iteracije.

Za dvije susjedne iteracije  $x_n = \varphi(x_{n-1})$  i  $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$  vrijedi

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

Prethodnu relaciju, induktivno po  $n$ , možemo raspisati kao

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Za ocjenu prave greške trebamo ocjenu vrijednosti  $|\alpha - x_n|$ , za bilo koji  $n \geq 0$ .

# Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Zato, za **fiksni**  $n$ , gledamo ponašanje niza  $|x_{n+p} - x_n|$ , uz  $p > 0$ , s idejom da napravimo limes  $p \rightarrow \infty$ . Izlazi

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq q^p |x_n - x_{n-1}| + \cdots + q |x_n - x_{n-1}| \\ &= q(q^{p-1} + \cdots + 1) |x_n - x_{n-1}| \\ &= q \frac{1 - q^p}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq (\text{vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\ &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

Na limesu kad  $p \rightarrow \infty$ , vrijedi  $x_{n+p} \rightarrow \alpha$ .

## Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Lijeva strana postaje  $|\alpha - x_n|$  i izlazi sljedeća **ocjena pogreške**

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq (\text{iskoristimo ocjenu } |x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1} |x_1 - x_0|) \\ &\leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ako želimo da je  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ , **dovoljno** je tražiti da je **desna** strana **neke** od prethodnih nejednakosti **manja ili jednaka**  $\varepsilon$ .

Za **desnu** stranu možemo uzeti i **prvi** red, koji **ovisi** o  $x_n$  i  $x_{n-1}$ ,

$$\frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

pa ćemo dobiti ...



# Kriteriji zaustavljanja

... **dinamički** kriterij za zaustavljanje procesa **iteracija**

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon(1 - q)}{q}.$$

Ako želimo “**rano**” znati potreban broj **iteracija**  $n$ , onda treba zahtijevati (donji red ovisi samo o **prve dvije** iteracije  $x_0$  i  $x_1$ )

$$\frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon,$$

pa dobivamo

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1 - q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon + \log(1 - q) - \log |x_1 - x_0|}{\log q}.$$

## Kriteriji zaustavljanja

Kriterij zaustavljanja možemo napisati i tako da ovisi **samo** o **rubovima** intervala  $a$  i  $b$ , **neovisno** o iteracijama.

U **drugoj** lemi, kod dokaza konvergencije, pokazali smo da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|.$$

Budući da je  $|\alpha - x_0| \leq b - a$ , dobivamo  $|\alpha - x_n| \leq q^n (b - a)$ .

Iz zahtjeva

$$q^n (b - a) \leq \varepsilon,$$

dobivamo ocjenu “**unaprijed**” za broj **iteracija**  $n$

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{b - a}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon - \log(b - a)}{\log q}.$$

# Opći slučaj — kontrakcija i Banachov teorem

**Napomena.** U općem slučaju metode jednostavnih iteracija (ili sukcesivnih aproksimacija), iteracijska funkcija  $\varphi$  ne mora biti neprekidna — što smo koristili u prvoj lemi (egzistencija  $\alpha$ ).

Dovoljno je pretpostaviti da je

•  $\varphi$  kontrakcija, ali na potpunom metričkom prostoru  $X$ .

To je tzv. Banachov teorem o fiksnoj točki.

**Skica dokaza.** Prvo se dokaže da je niz iteracija Cauchyjev niz (kao u ocjeni greške, uz zamjenu  $|x - y|$  s  $d(x, y) =$  udaljenost)

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Zatim, potpunost prostora  $X \implies$  konvergencija niza  $x_n \rightarrow \alpha$ .  
Na kraju se pokaže da je  $\alpha$  fiksna točka za  $\varphi$  i jedinstvenost. ■

# Derivabilne iteracijske funkcije i metode višeg reda

# Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Pretpostavimo sad da je  $\varphi$  neprekidno derivabilna na  $[a, b]$ .

Po teoremu srednje vrijednosti, za bilo koje  $x, y \in [a, b]$ , vrijedi

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y),$$

gdje je  $\xi$  između  $x$  i  $y$ , tj. vrijedi  $\xi \in [a, b]$ . Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|.$$

Onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Primijetite da  $q$ , općenito, može biti i veći od 1. No, ako je  $q < 1$  i još vrijedi  $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ , onda je  $\varphi$  kontrakcija.

# Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

**Teorem.** Neka je  $\varphi \in C^1[a, b]$ , takva da je  $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ .  
Ako je

$$q := M_1 = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| < 1,$$

onda jednačba  $x = \varphi(x)$  ima **tačno jedno** rješenje  $\alpha \in [a, b]$ .

• Za **proizvoljnu** startnu točku  $x_0 \in [a, b]$  i niz **jednostavnih iteracija** definiran s  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , za  $n \geq 0$ , vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha,$$

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \varphi'(\alpha).$$

# Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

**Dokaz.** Sve tvrdnje teorema su dokazane u prethodne dvije leme, osim zadnje tvrdnje o **linearnoj brzini konvergencije**.

Po teoremu **srednje vrijednosti**, imamo

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \geq 0,$$

gdje je  $\xi_n$  neki broj **između**  $\alpha$  i  $x_n$ .

Budući da  $x_n \rightarrow \alpha$ , onda i  $\xi_n \rightarrow \alpha$ . Zbog **neprekidnosti** derivacije  $\varphi'$  u fiksnoj točki  $\alpha$ , onda vrijedi i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(\alpha). \quad \blacksquare$$

## Bitna pretpostavka $q < 1$

Pretpostavka  $q < 1$  u prethodnom teoremu je **ključna**.

**Kontraprimjer**. Pretpostavimo “samo” da je  $|\varphi'(\alpha)| > 1$ , u fiksnoj točki  $\alpha$  funkcije  $\varphi$ .

Za neku **startnu** točku  $x_0 \in [a, b]$ , generiramo niz **jednostavnih iteracija**  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ . Zbog  $\alpha = \varphi(\alpha)$ , onda vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n).$$

Za bilo koji  $x_n$  **dovoljno blizu**  $\alpha$ , **mora** biti  $|\varphi'(\xi_n)| > 1$ . Ako je  $x_n \neq \alpha$ , onda je

$$|\alpha - x_{n+1}| > |\alpha - x_n|.$$

Dakle, **konvergencija** metode **nije moguća**! Upravo suprotno, imamo **divergenciju**.



## Pojednostavljeni — “lokalni” teorem

Prethodni teorem možemo izreći i u “lokalnoj” formi — oko  $\alpha$ .

**Teorem.** Neka je  $\alpha$  rješenje jednostavne iteracije  $x = \varphi(x)$  i neka je  $\varphi$  neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od  $\alpha$ . Ako je  $|\varphi'(\alpha)| < 1$ , onda vrijede svi rezultati prethodnog teorema — uz pretpostavku da je start  $x_0$  dovoljno blizu  $\alpha$ .

**Dokaz.** Postoji  $\varepsilon > 0$  takav da za interval  $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  vrijedi

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je  $\varphi(I) \subseteq I$  (dovoljno je  $q \leq 1$ ), jer  $|\alpha - x| \leq \varepsilon$  povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)| |\alpha - x| \leq q |\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za  $[a, b] = I$ . ■

## Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

**Primjer.** Za problem  $x^2 - a = 0$ , gdje je  $a > 0$ , definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1.  $x = x^2 + x - a$ , ili općenitije,  $x = x + c(x^2 - a)$ , za  $c \neq 0$ ,
2.  $x = a/x$ ,
3.  $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$ .

Ispitajte **konvergenciju** ovih iteracijskih funkcija oko  $\alpha = \sqrt{a}$ .

1. Za  $\varphi(x) = x^2 + x - a$ , izlazi  $\varphi'(x) = 2x + 1$ . U  $x = \sqrt{a}$  je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

pa ta iteracijska funkcija **neće konvergirati**. Baš suprotno, za **bilo koji** start  $x_0$ , ove iteracije **divergiraju!**

## Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

1. Općenito,  $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$ , pa je  $\varphi'(x) = 1 + 2cx$  i

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$

Da bismo **osigurali** lokalnu **konvergenciju**, mora biti

$$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1,$$

odnosno,

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

2. Za  $\varphi(x) = a/x$ , dobivamo  $\varphi'(x) = -a/x^2$ , pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

što znači da iteracijska funkcija **neće konvergirati**. Niz iteracija je  $x_0, a/x_0, x_0, a/x_0, \dots$  (periodički niz).

## Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

3. Za  $\varphi(x) = \frac{1}{2} (x + a/x)$ , izlazi  $\varphi'(x) = \frac{1}{2} (1 - a/x^2)$ , pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0.$$

Zato ova iteracijska funkcija **konvergira** u okolini  $\alpha = \sqrt{a}$ .

Posljednja iteracijska funkcija je **Newtonova** metoda za jednadžbu  $x^2 - a = 0$ , a poznavali su ju još **Babilonci**. ■

Vidimo da metoda **jednostavne iteracije** može imati

● lokalnu konvergenciju koja je **brža** od **linearne**.

Stvarni “krivac” za **kvadratnu** konvergenciju je  $\varphi'(\alpha) = 0$ .

Slično tome, **jednostavne** iteracijske funkcije mogu poslužiti za konstrukciju iterativnih metoda **proizvoljno visokog reda**  $p$ .

# Iterativne metode višeg reda konvergencije

**Teorem.** Neka je  $\alpha$  rješenje jednačbe  $x = \varphi(x)$  i neka je  $\varphi$

•  $p$  puta neprekidno diferencijabilna za sve  $x$  u okolini  $\alpha$ ,  
za neki  $p \geq 2$ .

Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna točka  $x_0$  dovoljno blizu  $\alpha$ , onda niz iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

konvergira prema  $\alpha$  s redom konvergencije (barem)  $p$  i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

## Iterativne metode višeg reda konvergencije

**Dokaz.** Funkciju  $\varphi$  razvijemo, u okolini od  $\alpha$ , u **Taylorov** polinom stupnja  $p$ , s tim da **najviši** član predstavlja **ostatak**. Zatim uvrstimo  $x = x_n$ , pa dobijemo

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots \\ &\quad + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} (x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p,\end{aligned}$$

za neki  $\xi_n$  između  $x_n$  i  $\alpha$ .

Sad iskoristimo da je  $\varphi(\alpha) = \alpha$ ,  $\varphi(x_n) = x_{n+1}$  i pretpostavku da za **derivacije** vrijedi  $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$ , za  $k = 1, \dots, p-1$ . Izlazi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p,$$

# Iterativne metode višeg reda konvergencije

odnosno,

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p.$$

Zbog  $\varphi'(\alpha) = 0 < 1$ , iz “**lokalnog**” teorema slijedi da

- niz iteracija  $x_n$  **konvergira** prema  $\alpha$ , za svaku **startnu** točku  $x_0$  koja je **dovoljno blizu**  $\alpha$  (lokalna konvergencija).

Iz  $x_n \rightarrow \alpha$  slijedi i  $\xi_n \rightarrow \alpha$ . Na kraju, iz gornje relacije, na limesu  $n \rightarrow \infty$ , koristeći neprekidnost  $\varphi^{(p)}$  u  $\alpha$ , izlazi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}. \quad \blacksquare$$

Za  $p = 1$ , ovaj rezultat odgovara ranijem “**lokalnom**” teoremu!

## Primjer — analiza Newtonove metode

**Primjer.** Primjenom prethodnog teorema, analizirajmo red konvergencije **Newtonove metode** u okolini **jednostruke** nultočke  $\alpha$  funkcije  $f$ . Pripadna iteracijska funkcija  $\varphi$  je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem dobivamo da je

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Nultočka  $\alpha$  je **jednostruka**, pa je  $f(\alpha) = 0$  i  $f'(\alpha) \neq 0$ . Onda je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

tj. **Newtonova** metoda konvergira (barem) **kvadratno** oko  $\alpha$ .



## Primjer — analiza Newtonove metode

Za detaljniju analizu, pogledajmo drugu derivaciju  $\varphi''(\alpha)$ .  
Deriviranjem  $\varphi'(x)$  u produktom obliku, dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \left( f(x) \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)' = f'(x) \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} + f(x) \left( \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)' \\ &= \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x) \left( \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)'\end{aligned}$$

Zbog  $f(\alpha) = 0$  i  $f'(\alpha) \neq 0$ , odmah izlazi

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je  $f''(\alpha) \neq 0$ , red konvergencije Newtonove metode je 2.

Ako je  $f''(\alpha) = 0$ , red konvergencije je barem 3.

# Newtonova metoda za višestruke nultočke

# Multiplicitet nultočke funkcije

**Definicija** (Multiplicitet nultočke). Neka je  $f(\alpha) = 0$ . Ako postoji **prirodni** broj  $m$ , takav da je

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0,$$

gdje je  $g$  **neprekidna** funkcija u okolini od  $\alpha$ , onda nultočka  $\alpha$  ima **multiplicitet** (**višestrukost**, **kratnost** ili **red**)  $m$ . ■

**Teorem**. Pretpostavimo da funkcija  $f$  ima **neprekidnu**  $m$ -tu derivaciju u okolini od  $\alpha$ , tj.  $f$  je **klase**  $C^m$  oko  $\alpha$ . Onda je

●  $\alpha$  nultočka od  $f$  **multipliciteta**  $m$ , ako i samo ako vrijedi

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

**Dokaz** “ $\Leftarrow$ ” ide direktno iz **Taylorovog** razvoja do stupnja  $m$ , za funkciju  $f$  oko  $\alpha$  (slično kao malo prije — u teoremu za  $\varphi$ ).

## Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Obrat “ $\Rightarrow$ ” je nešto složeniji, jer  $g$  ne mora biti derivabilna. Zato ne “ide” Leibnizovo pravilo za derivaciju produkta!

Početak: Za  $k = 0, \dots, m$ , definiramo funkciju  $g_k$  oko  $\alpha$ , kao

$$g_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{(x - \alpha)^{m-k}}, \quad x \neq \alpha.$$

Uočimo da je  $g_0(x) = g(x)$ . Po pretpostavci,  $g_0$  je neprekidna u  $\alpha$  i vrijedi  $f(\alpha) = 0$ ,  $g_0(\alpha) \neq 0$  (baza indukcije, zbog  $m \geq 1$ ).

Korak: Neka je  $k \geq 0$  i  $k < m$ , i uzmimo da za  $k$  vrijedi

$$f^{(k)}(\alpha) = 0, \quad \text{i postoji } \lim_{x \rightarrow \alpha} g_k(x) = g_k(\alpha) \neq 0,$$

gdje je  $g_k(\alpha)$  definiran proširenjem po neprekidnosti, tako da je  $g_k$  neprekidna u  $\alpha$ , pa onda i oko  $\alpha$  (iz definicije za  $x \neq \alpha$ ).

# Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Onda je

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f^{(k)}(x)}{x - \alpha} = (x - \alpha)^{m-k-1} g_k(x).$$

Desna strana je **neprekidna** u  $\alpha$ , pa prijelazom na limes  $x \rightarrow \alpha$  slijedi

$$f^{(k+1)}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{za } k + 1 < m, \\ g_k(\alpha), & \text{za } k + 1 = m. \end{cases}$$

Treba još pokazati da **postoji**  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g_{k+1}(x)$  i da je  $g_{k+1}(\alpha) \neq 0$ .

Ako je  $k + 1 = m$ , onda je (po definiciji)  $g_m(x) = f^{(m)}(x)$ , pa **neprekidnost**  $f^{(m)}$  u  $\alpha$  daje

$$g_m(\alpha) = g_{m-1}(\alpha) \neq 0.$$

## Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Za  $k + 1 < m$ , iz definicije dobivamo neodređeni oblik  $0/0$ , kojeg računamo “**obratnim**” L’Hospitalovim pravilom, tj.

☞ **integriramo** brojnik i nazivnik, a ne deriviramo.

Izlazi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \alpha} g_{k+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^{(k+1)}(x)}{(x - \alpha)^{m-k-1}} = \{ \text{L'Hospital} \} \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^{(k)}(x)}{\frac{1}{m-k} (x - \alpha)^{m-k}} \\ &= (m - k) \lim_{x \rightarrow \alpha} g_k(x) = (m - k)g_k(\alpha) \neq 0.\end{aligned}$$

Na kraju, vidimo da je  $g_k(\alpha) = m(m - 1) \cdots (m - k + 1)g(\alpha)$ , za  $k = 1, \dots, m$ . Posebno, vrijedi  $g_1(\alpha) = mg(\alpha)$ . ■

## Veza nultočke funkcije i derivacije

U nastavku, radi jednostavnosti, pretpostavljamo da je i funkcija  $g$  dovoljno **glatka** oko  $\alpha$ , tako da ju možemo **derivirati** koliko puta treba. Onda prethodni obrat ide puno **lakše**.

Na primjer, uzmimo da je  $g'$  **neprekidna** oko  $\alpha$ . Pokažimo da

- ako funkcija  $f$  ima nultočku **multipliciteta**  $m$  u  $\alpha$ ,
- onda **derivacija**  $f'$  ima nultočku **multipliciteta**  $m - 1$  u  $\alpha$ .

**Dokaz.** Napišimo  $f$  u obliku

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0.$$

Onda je

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x - \alpha)^{m-1} g(x) + (x - \alpha)^m g'(x) \\ &= (x - \alpha)^{m-1} \left( mg(x) + (x - \alpha) g'(x) \right). \end{aligned}$$

## Veza nultočke funkcije i derivacije

Zatim, **definiramo** funkciju  $g_1$  na okolini od  $\alpha$ , kao drugi faktor iz prethodnog produkta

$$g_1(x) := mg(x) + (x - \alpha)g'(x),$$

tako da je

$$f'(x) = (x - \alpha)^{m-1}g_1(x).$$

Iz pretpostavke da je  $g'$  **neprekidna** u okolini od  $\alpha$ , slijedi da su  $f'$  i  $g_1$ , također, **neprekidne** oko  $\alpha$ . U točki  $\alpha$  je

$$g_1(\alpha) = mg(\alpha) + (\alpha - \alpha)g'(\alpha) = mg(\alpha) \neq 0,$$

što pokazuje da  $f'$  ima  $(m - 1)$ -struku nultočku u  $\alpha$ . ■

Ovu formulu za  $g_1(\alpha)$  koristimo **više** puta u nastavku.

**Dodatno**, uzimamo da je  $g$  klase  $C^2$  oko  $\alpha$ , iako ide i bez toga.



# Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Analizirajmo što će se dogoditi s konvergencijom Newtonove metode, ako funkcija  $f$  ima višestruku nultočku u  $\alpha$ .

Newtonovu metodu promatramo kao jednostavnu iteraciju,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Pretpostavimo da

- $f$  ima  $m$ -struku nultočku u  $\alpha$ , za neki  $m \geq 2$ , i da je
- $f$  dovoljno glatka na okolini od  $\alpha$  — barem klase  $C^{m+1}$ , tako da je iteracijska funkcija  $\varphi$  barem klase  $C^m$ .

Onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha)^m g(x), & g(\alpha) &\neq 0, \\ f'(x) &= (x - \alpha)^{m-1} g_1(x), & g_1(\alpha) &\neq 0. \end{aligned}$$

# Konvergenција Newtona za višestruku nultočku

Kad uvrstimo ove relacije za  $f$  i  $f'$ , dobivamo

$$\varphi(x) = x - \frac{(x - \alpha)^m g(x)}{(x - \alpha)^{m-1} g_1(x)} = x - (x - \alpha) \frac{g(x)}{g_1(x)}.$$

Deriviranjem izlazi

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{g(x)}{g_1(x)} - (x - \alpha) \left( \frac{g(x)}{g_1(x)} \right)'$$

U nultočki  $\alpha$  je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - \frac{g(\alpha)}{m g(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Za  $m \geq 2$ , vrijedi  $\varphi'(\alpha) \neq 0$ . Prema ranijem teoremu, to znači

🔴 da **Newtonova** metoda onda konvergira samo **linearno!**

# Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Dodatno, **faktor** linearne konvergencije je  $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/m$ , što je **vrlo sporo**. U prosjeku, to je

- podjednako brzo kao **bisekcija**, za  $m = 2$ ,
- ili čak **lošije** od **bisekcije**, za  $m \geq 3$ .

**Newtonovu** metodu možemo **popraviti** na dva načina:

- ako unaprijed **točno znamo** red  $m$  nultočke,
- ako **ne znamo** red (višestruke) nultočke.

Ako **znamo**  $m$ , onda u okolini  $m$ -struke nultočke definiramo iteracijsku funkciju

$$\varphi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

## Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Na **isti** način kao malo prije, redom, dobivamo

$$\varphi(x) = x - m(x - \alpha) \frac{g(x)}{g_1(x)},$$

$$\varphi'(x) = 1 - m \frac{g(x)}{g_1(x)} - m(x - \alpha) \left( \frac{g(x)}{g_1(x)} \right)',$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - m \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - m \frac{g(\alpha)}{mg(\alpha)} = 1 - m \frac{1}{m} = 0.$$

To pokazuje da ova **modifikacija** Newtonove metode,

- s  **$m$ -strukom** korekcijom,
- osigurava barem **kvadratnu** konvergenciju, za bilo koji  $m$ .

## Newtonova metoda kad **ne znamo red nultočke**

Što ćemo napraviti ako unaprijed **ne znamo**  $m$ ? Primijetimo da funkcija  $u$  — to je **korekcija** u običnoj Newtonovoj metodi,

$$u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - \alpha)^m g(x)}{(x - \alpha)^{m-1} g_1(x)} = (x - \alpha) \frac{g(x)}{g_1(x)},$$

uvijek ima **jednostruku** nultočku u  $\alpha$ , jer je  $g(\alpha)/g_1(\alpha) \neq 0$ .

Dakle, **obična Newtonova** metoda, primijenjena na  $u$  (**ne** na  $f$ )

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)} u(x),$$

konvergira barem **kvadratno**, iako **ne znamo** red nultočke!

## Ostale metode kad **ne** znamo red nultočke

Sasvim **isto** vrijedi i za **sve ostale** metode, koje imaju

- red konvergencije  $p > 1$ , u okolini **jednostruke** nultočke  $\alpha$ .

Ako se metoda “**uspori**” u okolini **višestruke** nultočke,

- treba metodu primijeniti na  $u = f/f'$ , umjesto na  $f$ .

Na primjer, za višestruke nultočke, metodu **sekante** treba primijeniti na funkciju  $u$ ,

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

Dodatna “**cijena**” = računanje još **jedne** derivacije **više**.

Na primjer, u **Newtonovoj** metodi, za  $u'$  treba računati i  $f''$ , a u metodi **sekante**, za  $u$  treba računati i  $f'$ .

# Primjeri za jednostruke nultočke

# Numerički red konvergencije

U praksi se može sasvim dobro **numerički** procijeniti **red konvergencije** iterativne metode.

**Red konvergencije** niza iteracija  $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$  koji konvergira prema nultočki  $\alpha$  je **najveći** eksponent  $p$ , uz  $p \geq 1$ , za koji vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0,$$

gdje je  $x_n$  niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke (ranije su indeksi bili  $n$  i  $n - 1$ ).

Ovako dobiveni  $p$  i  $c$  su “**teorijske**” vrijednosti koje vrijede **asimptotski** — na limesu  $n \rightarrow \infty$ .



# Numerički red konvergencije

Definicijsku relaciju ne možemo **direktno** iskoristiti za računanje  $p$  i  $c$ , jer ne znamo  $\alpha$ .

Ako smo **dovoljno blizu** nultočke  $\alpha$ , onda limes možemo “zaboraviti”, pa je

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

za dovoljno velike  $k$ .

Nadalje, ako smo **dovoljno blizu** nultočke, onda možemo uzeti da je  $\alpha \approx x_n$ , a  $k = n - 1, n - 2$ , pa vrijedi i

$$|x_n - x_{n-1}| = c_n |x_n - x_{n-2}|^{p_n},$$

$$|x_n - x_{n-2}| = c_n |x_n - x_{n-3}|^{p_n},$$

s tim da očekujemo da je  $p_n \approx p$  i  $c_n \approx c$  za dovoljno velike  $n$ .

# Numerički red konvergencije

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left( \frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|} \right)^{p_n},$$

pa logaritmiranjem izlazi tzv. **numerički** red konvergencije

$$p_n = \frac{\log |x_n - x_{n-1}| - \log |x_n - x_{n-2}|}{\log |x_n - x_{n-2}| - \log |x_n - x_{n-3}|}.$$

Nakon toga,  $c_n$  možemo dobiti (recimo) iz prve relacije, kao

$$c_n = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|^{p_n}}.$$

Ovaj račun možemo provesti tek za  $n \geq 3$ , a vrijednosti  $p_n$  i  $c_n$  **ovise** o  $n$  — pa treba **pratiti** njihovo ponašanje **kroz iteracije**.

## Jednostavni primjer

**Primjer.** Za uspoređivanje metoda za nalaženje nultočaka, izračunajmo  $\sqrt[3]{1.5}$ . Problem možemo interpretirati kao traženje **realne**, **pozitivne** nultočke funkcije (polinoma)

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Nije teško locirati nultočku  $\alpha \in [1, 2]$ . Iz **neprekidnosti** funkcije  $f$  i

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0,$$

znamo da **sigurno** postoji nultočka  $\alpha \in [1, 2]$ . To je i **jedina** realna nultočka funkcije  $f$ , jer  $f$  strogo **raste** na  $\langle -\infty, 0 \rangle$  (gdje je svagdje manja od 0) i na  $\langle 0, \infty \rangle$ .

Svo računanje je provedeno u preciznosti **extended**.

# Metoda bisekcije

Pokažimo kako se ponaša metoda **bisekcije** ako je  $[a, b] = [1, 2]$ , a tražena točnost je

- $\varepsilon = 10^{-8}$ ,
- $\varepsilon = 10^{-18}$ .

Na sljedeće dvije folije, sa  $z_n$  je označena veličina

$$z_n := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

Primijetite da **pogrešno** očitani **predznak** od  $z_n$  (umjesto  $< 0$ , očitamo  $> 0$ , ili obratno)

- možemo detektirati samo gledanjem  $f(x_n)$  — uglavnom, tada  $f(x_n) \not\rightarrow 0$ ,
- ali i dalje **ne znamo** točno **mjesto** gdje smo pogriješili.

# Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

$n$	$a_n$	$b_n$	$x_n$	$f(x_n)$	$z_n$
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	-0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	-0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	-0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	-0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

# Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

$n$	$a_n$	$b_n$	$x_n$	$f(x_n)$	$z_n$
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	-0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	-0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	-0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	-0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	-0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	-0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	-0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	-0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	-0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	-0.000000010	

## Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-18}$

Izračunata rješenja su (ispisane sve znamenke):

- za točnost  $10^{-8}$ , rješenje je  $x_{27} = 1.14471423998475075$ ,
- za točnost  $10^{-18}$ , rješenje je  $x_{60} = 1.14471424255333187$ .

Na prethodne dvije folije:

- vidi se **spora** konvergencija metode (broj vodećih nula u  $f(x_n)$  se, uglavnom, **linearno** povećava),
- ponegdje, kao u  $x_{13}$ , dolazi do **čudnog** povećanja broja vodećih nula u  $f(x_n)$ .

**Objašnjenje:** slučajno smo u raspolavljanju stigli **blizu** nultočke, iako je duljina intervala još uvijek **prevelika** za **zaustavljanje** iteracija.

Uočite **broj iteracija** potreban za odgovarajuću točnost!

## Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Nije teško pokazati da će **Newtonova** metoda na  $[1, 2]$  **sigurno konvergirati**, ako krenemo sa **strmijeg** ruba (to je  $x_0 = 2$ ), jer su  $f'$  i  $f''$  fiksnog znaka na  $[1, 2]$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.5416666666666667
1	1.4583333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Nultočka ispisana na **sve** izračunate znamenke je  $x_7 = 1.14471424255333187$ .



# Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li **korekcije** napisane u **znanstvenoj notaciji**, vidimo područje **kvadratne** konvergencije — gdje se broj točnih znamenki u  $x_n$ , u svakom koraku, **udvostručava**.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.458333333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.20732426303854875	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.14790497826656245	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.14472310335773870	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.14471424262191933	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i **bez** znanstvene notacije — pogledajte kako se **povećava** broj **vodećih nula** u **korekciji**.

# Newtonova m., numerički red konvergencije

Prema formuli s početka ovog dijela folija, možemo izračunati i **numerički red** konvergencije za **Newtonovu** metodu.

$n$	$x_n$	$p_n$	$C_n$
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.458333333333333333	—	—
2	1.20732426303854875	—	—
3	1.14790497826656245	1.63738	4.03440E-01
4	1.14472310335773870	1.84894	5.34225E-01
5	1.14471424262191933	1.97750	7.64767E-01
6	1.14471424255333187	1.99937	8.67206E-01
7	1.14471424255333187	—	—

Završne vrijednosti  $p_5$  i  $p_6$  su vrlo **blizu** očekivanog **teorijskog** reda konvergencije  $p = 2!$

## Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu **sekante** potrebne su **dvije** startne točke — to su  $x_0 = 2$  i  $x_1 = 1.5$ . Izračunata nultočka  $x_{10}$  ima **sve** znamenke jednake aproksimaciji  $x_7$  izračunatoj Newtonovom metodom.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	
1	1.5000000000000000	1.8750000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

# Metoda sekante, numerički red konvergenције

Red konvergenције metode **sekante** je  $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180$ , a **numerički red** konvergenције ga **dobro** aproksimira.

$n$	$x_n$	$p_n$	$c_n$
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.500000000000000000	—	—
2	1.29729729729729730	—	—
3	1.18106420650451962	1.07039	3.94966E-01
4	1.14907316189474910	1.77904	9.54986E-01
5	1.14484943968620389	1.49493	6.02649E-01
6	1.14471475602129474	1.63923	9.97717E-01
7	1.14471424261397050	1.60467	8.29830E-01
8	1.14471424255333190	1.62274	9.74858E-01
9	1.14471424255333187	<b>1.61618</b>	8.86501E-01
10	1.14471424255333187	—	—

# Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer. Jedina nultočka funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

je  $x = 0$ , ali Newtonova metoda **neće konvergirati** iz **svake** startne točke  $x_0$ .

- Sigurnu konvergenciju **ne možemo** osigurati, jer  $f''$  **mijenja znak** baš u **nultočki** (infleksija).

Naći ćemo točku  $\beta$  za koju vrijedi

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ "ciklira".} \end{cases}$$

# Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Kako ćemo naći točku “cikliranja”  $\beta$ ?

Funkcija  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  je **neparna**, pa je dovoljno da

• **tangenta** na graf funkcije  $f$  u točki  $(\beta, f(\beta))$  presiječe os  $x$  u točki  $-\beta$ .

Jednadžba tangente na  $\operatorname{arctg}$  u točki  $\beta$  je

$$y - \operatorname{arctg} \beta = \frac{1}{1 + \beta^2} (x - \beta),$$

pa će tangenta sjeći os  $x$  u  $-\beta$  (tada je  $y = 0$ ), ako je

$$\operatorname{arctg} \beta = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

čime smo dobili **nelinearnu jednadžbu** za  $\beta$ .

# Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka. Možemo ih izračunati, na primjer, metodom bisekcije

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako je startna točka jednaka, redom,

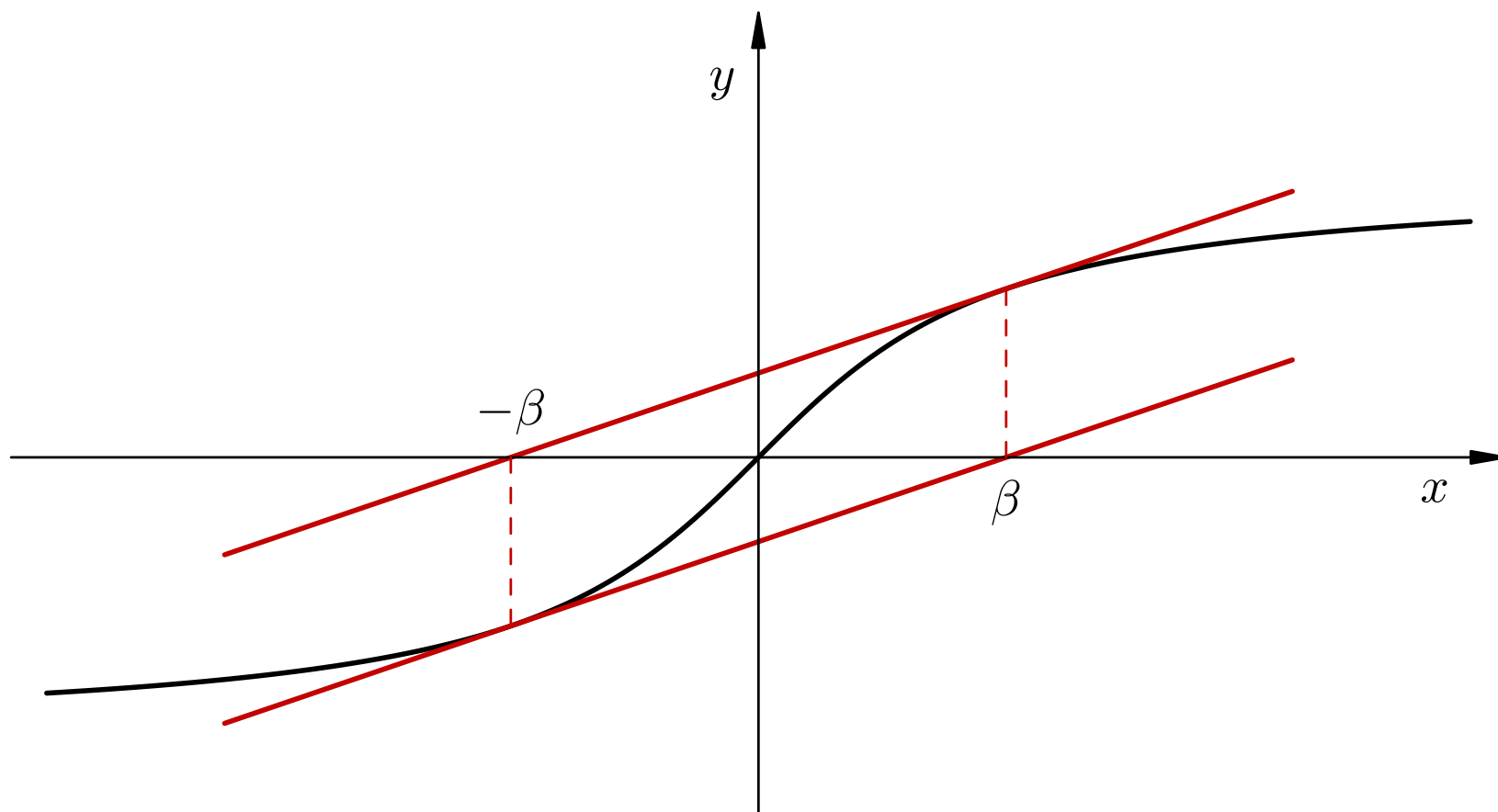
$$x_0 = \beta, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 1.5,$$

a zaustavljamo se,

- ili ako postignemo točnost  $10^{-10}$  za “nultočku”,
- ili nakon najviše 10 iteracija.

# Primjer cikliranja Newtonove metode

Za  $x_0 = \beta$  graf je





## Primjer cikliranja Newtonove metode

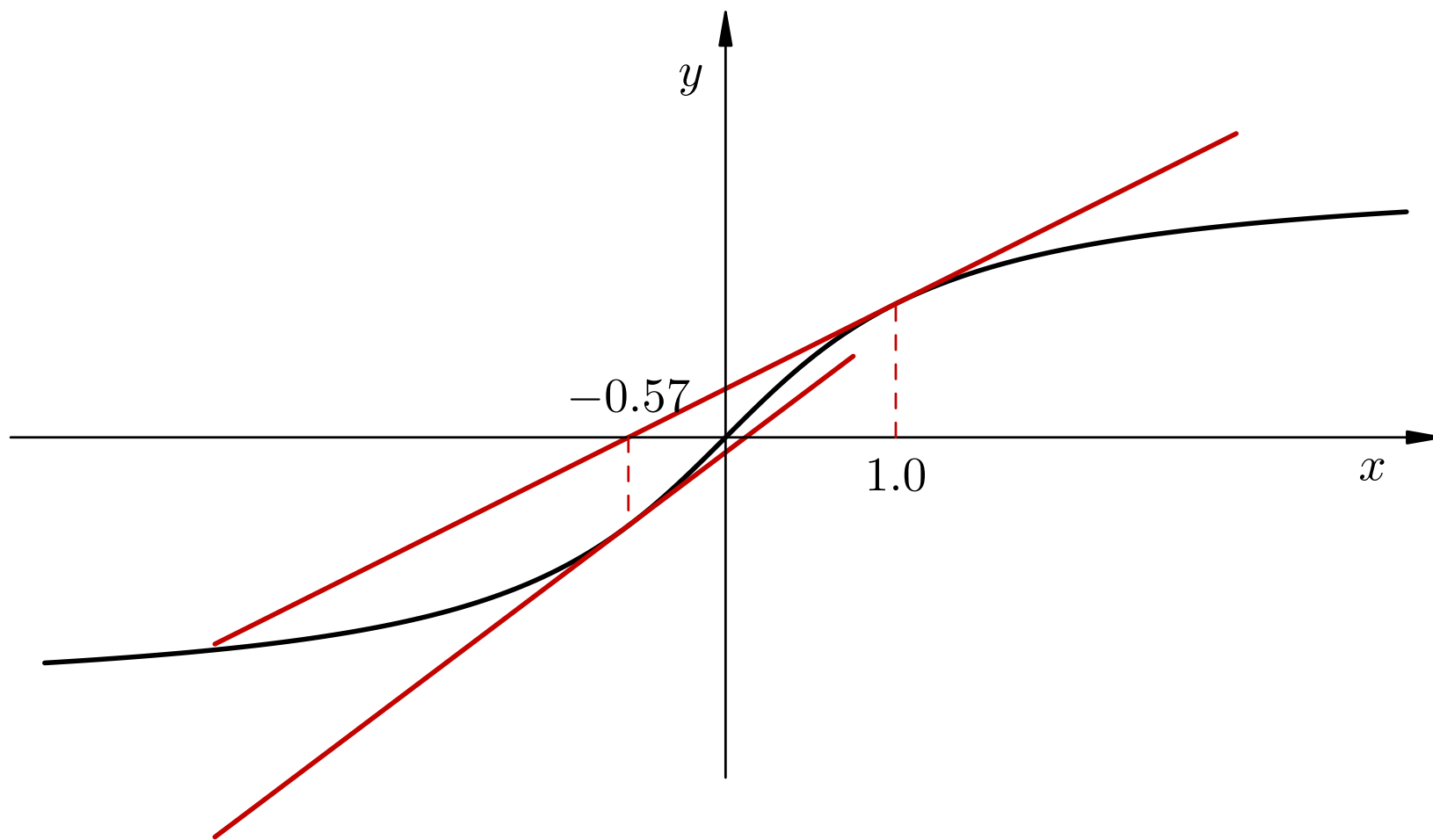
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	-1.391745200270735	-0.947747133516990	-2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	-1.391745200270734	-0.947747133516990	-2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	-1.391745200270732	-0.947747133516989	-2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	-1.391745200270713	-0.947747133516983	-2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	-1.391745200270584	-0.947747133516939	-2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja metoda bi konvergirala.

# Primjer konvergencije Newtonove metode

Za  $x_0 = 1$  graf je



# Primjer konvergencije Newtonove metode

Točnost se postiže nakon 6 iteracija.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.0000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	-0.570796326794897	-0.518669369255017	-0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	-0.001061022117045	-0.001061021718890	-0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	-0.0000000000000000	-0.0000000000000000	-0.0000000000000000
6	0.0000000000000000	-0.0000000000000000	

Metoda **kubno** konvergira (zbog  $f''(0) = 0$ ), ali **ne** konvergira **monotono** prema nultočki  $\alpha = 0$ .

# Newton kvg., numerički red konvergencije

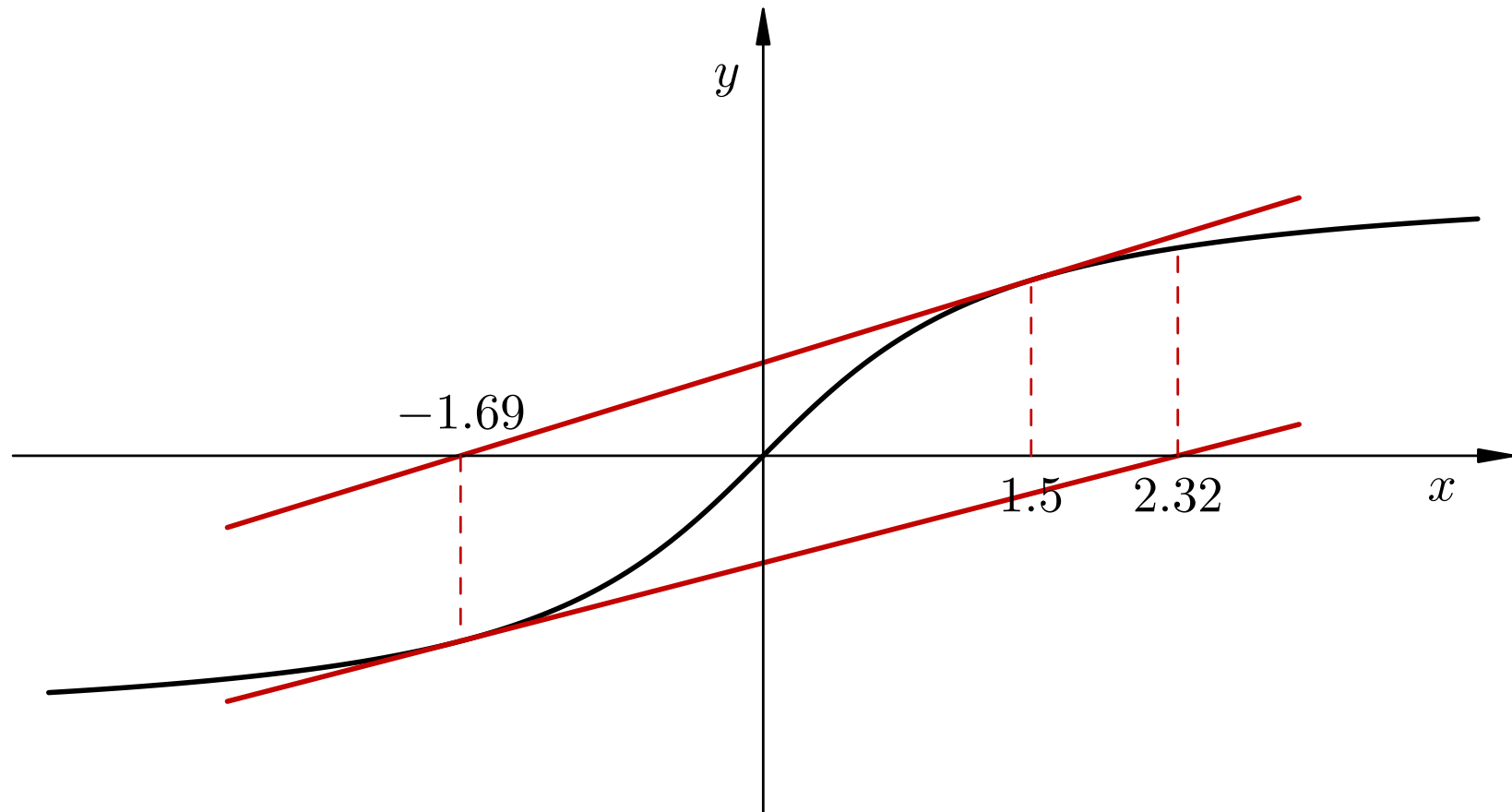
Numerički red konvergencije pokazuje da metoda zaista **kubno** konvergira prema  $\alpha = 0$ .

$n$	$x_n$	$p_n$	$C_n$
0	1.000000000000000000	—	—
1	−0.57079632679489662	—	—
2	0.11685990399891305	—	—
3	−0.00106102211704472	4.02288	1.13367E+00
4	0.00000000079630960	2.97361	6.28237E−01
5	−0.000000000000000000	<b>2.99942</b>	6.64032E−01
6	0.000000000000000000	<b>2.99655</b>	6.51104E−01

Na **kraju** iteracija dolazi do **kraćenja**, zbog **nemonotonosti**.

# Primjer divergencije Newtonove metode

Za  $x_0 = 1.5$  graf je



# Primjer divergencije Newtonove metode

Metoda kvadratno divergira, ali  $f(x)$  “konvergira” prema  $\pm\frac{\pi}{2}$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	-1.6940796006E+000	-1.0375463591379	-4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	-5.1140878368E+000	-1.3776945287028	-3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	-1.5753169508E+003	-1.5701615339901	-3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	-2.3830288974E+013	-1.5707963267949	-8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	-1.2499045994E+054	-1.5707963267949	-2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

# Primjeri za višestruke nultočke

# Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u  $x = 1.23$  (treća nultočka je 3.1).

Pokažimo, redom, ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku, stavljeno  $m = 2$  kao faktor za korekciju,
- obične Newtonove metode, za funkciju  $u = f/f'$ .

Startna točka je  $x_0 = 1.5$ , a tražena točnost je  $\varepsilon = 10^{-15}$ .



## Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

Pažljivo promatrajte kako se ponaša **korekcija**.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000000000	-0.1166400000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	-0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	-0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	-0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	-0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	-0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	-0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	-0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	-0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	-0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	-0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	-0.000000023314476	0.000055832614098

# Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
12	1.230055829280006	-0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	-0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	-0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	-0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	-0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	-0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	-0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	-0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	-0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	-0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	-0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	-0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	-0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	-0.000000000000000	0.000000003389306

## Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
26	1.2300000003419030	-0.0000000000000000	0.0000000001729681
27	1.2300000001689349	-0.0000000000000000	0.000000000823684
28	1.2300000000865665	-0.0000000000000000	0.000000000401855
29	1.230000000463810	0.0000000000000000	-0.0000000000000000
30	1.230000000463810	0.0000000000000000	

Korekcija **sporije** teži u **nulu** nego  $f(x)$ . Razlog:

- 📍 funkcijska vrijednost za **višestruke** nultočke je **relativno mala**, čak i kad smo relativno **daleko** od nultočke, tj.
- 📍 graf funkcije s **višestrukom** nultočkom se, u okolini nultočke  $\alpha$ , **bolje** “**priljubi**” uz os  $x$ , nego graf funkcije koja ima **jednostruku** nultočku.

U ovom primjeru,  $f(x)$  ide **kvadratno** s korekcijom.

## Modificirana Newtonova metoda, $m = 2$

Modificirana metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000000000	-0.1166400000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	-0.001173009833879	-0.024718265674538
2	1.229837719599453	-0.000000049250590	-0.000162273360038
3	1.229999992959491	-0.000000000000000	-0.000000007049176
4	1.2300000000008667	0.000000000000000	-0.000000026758865
5	1.230000026767532	-0.000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.229999999995655	0.000000000000000	

Da smo pogriješili  $m$  — dobili bismo linearnu konvergenciju!

- 🔴 Isto se događa ako pogriješite derivaciju, a tražite jednostruku nultočku.

# Newtonova metoda za funkciju $u = f/f'$

Obična metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju prema jednostrukoj nultočki funkcije  $u = f/f'$ .

Cijena:

- računanje vrijednosti druge derivacije funkcije  $f$  — za  $u'$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	

# Primjeri metoda višeg reda konvergencije

## Uvodno o primjerima

Dosad smo promatrali samo metode do reda konvergencije 2 za jednostruke nultočke.

● Mogu li se napisati i koristiti metode višeg reda?

Navest ćemo (samo kao ilustraciju) neke primjere metoda višeg reda i pokazati kako one rade za jednostavni primjer nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5,$$

na intervalu  $[1, 2]$ , uz traženu točnost  $\varepsilon = 10^{-18}$ .

## Korigirane Newtonove metode — inverzna $f$ -a

Neka je  $f$  funkcija koja je, u okolini izolirane **nultočke**  $\alpha$ ,

- **monotona**, tj.  $f'$  je različita od **nula** ( $\alpha$  je jednostruka), i
- njezina **derivacija**  $f^{(p)}$  je **neprekidna** na toj okolini,  $p \geq 2$ .

Tada postoji **inverzna** funkcija  $\mathcal{F} := f^{-1}$  funkcije  $f$ , i njezina  $p$ -ta derivacija  $\mathcal{F}^{(p)}$  je, također, **neprekidna** u okolini **nule**.

Razvijemo funkciju  $\mathcal{F}$  u **Taylorov polinom** oko točke  $y = f(x)$ , tako da zadnji član ima  $(p - 1)$ -u derivaciju od  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{F}(t) \approx Q_{y,p-1}(t) := \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(y)}{k!} (t - y)^k.$$

Tražimo  $\alpha = \mathcal{F}(0) = f^{-1}(0)$ . Za  $t = 0$ , **desna** strana  $Q_{y,p-1}(0)$  je aproksimacija nultočke  $\alpha$ , s greškom reda veličine  $y^p$ .



# Korigirane Newtonove metode — inverzna $f$ -a

Kad uvrstimo  $y = f(x)$  i sve gledamo kao **funkciju** od  $x$ , onda

$$E_p(x) := Q_{f(x), p-1}(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(f(x))}{k!} (-f(x))^k$$

definira jednostavnu **iteracijsku funkciju**  $\varphi := E_p$ , a pripadna iterativna metoda je  $x_{n+1} = E_p(x_n)$ .

Uz oznaku  $z^{[k]}(x) := \mathcal{F}^{(k)}(f(x))$ , ove funkcije iz **brojnika** možemo **rekurzivno** računati na sljedeći način (**E. Schröder**):

$$z^{[0]}(x) = x, \quad z^{[1]}(x) = \frac{1}{f'(x)},$$

$$z^{[k]}(x) = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} z^{[k-1]}(x), \quad k = (1), 2, \dots$$

# Korigirane Newtonove metode — inverzna $f$ -a

Metoda  $E_p$  ima **red konvergencije** (barem)  $p$ . Ako je

$$z^{[p]}(\alpha) f'(\alpha) = \mathcal{F}^{(p)}(0) f'(\alpha) \neq 0,$$

onda je **red**  $E_p$  metode baš **jednak**  $p$ .

Za male vrijednosti  $p$ , dobivamo sljedeće **iteracijske funkcije**  $\varphi$

$$E_2(x) = x - u, \quad (\text{obična Newtonova m.})$$

$$E_3(x) = E_2 - A_2 u^2, \quad (\text{korigirana Newtonova m. } E_3)$$

$$E_4(x) = E_3 - (2A_2^2 - A_3)u^3, \quad (\text{korigirana Newtonova m. } E_4)$$

pri čemu je

$$u = \frac{f}{f'}, \quad A_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{f^{(k)}}{f'}, \quad k \geq 2.$$

## $E_3$ metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Startna točka je  $x_0 = 2$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.6883680555555556
1	1.3116319444444444	0.756503210473290	0.162957102798705
2	1.148674841645739	0.015623490256523	0.003960520886559
3	1.144714320759180	0.000000307435976	0.000000078205848
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na **sve** znamenke, je  
 $x_5 = 1.14471424255333187$ .

## $E_3$ metoda, kubna konvergencija

Ispišemo li rezultat u znanstvenoj notaciji, vidimo da se broj točnih znamenki u  $x_n$  približno utrostručuje.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.50000000000E+00	6.88368055556E-01
1	1.311631944444444444	7.56503210473E-01	1.62957102799E-01
2	1.14867484164573903	1.56234902565E-02	3.96052088656E-03
3	1.14471432075918001	3.07435976264E-07	7.82058481467E-08
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

## $E_3$ metoda, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije pokazuje da je metoda  $E_3$  zaista kubno konvergentna.

$n$	$x_n$	$p_n$	$C_n$
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.311631944444444444	—	—
2	1.14867484164573903	—	—
3	1.14471432075918001	2.28964	2.38750E-01
4	1.14471424255333187	2.89555	7.06390E-01
5	1.14471424255333187	—	—

# Metode izvedene iz Taylorovih polinoma

Funkciju  $f$  možemo aproksimirati Taylorovim polinomom  $P_s$ , stupnja  $s$ , u okolini točke  $x$ , i naći njegove nultočke.

Ako polinom stupnja 1 izjednačimo s nulom, dobijemo običnu Newtonovu metodu. Kad to napravimo za polinom stupnja 2,

$$P_2(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)(t - x)^2 = 0,$$

i riješimo po  $t$ , onda dobivamo iteracijsku funkciju  $\varphi$  za tzv. Laguerreovu metodu,  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , pri čemu je

$$\varphi(x) = x - \frac{2u}{1 \pm (1 - 4A_2u)^{1/2}}, \quad (\text{kraćenje} \implies + \text{ znak})$$

Za metode viših redova moraju se rješavati polinomne jednačbe sve viših stupnjeva (preko 4 ne ide egzaktno).

## Laguerreova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za početnu točku uzimamo  $x_0 = 1$ , jer za  $x_0 = 2$ , drugi korijen koji javlja u metodi **ne** daje realan broj.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.0000000000000000	-0.5000000000000000	-0.145497224367903
1	1.145497224367903	0.003080095095887	0.000782981936678
2	1.144714242431225	-0.000000000480015	-0.000000000122107
3	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
4	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na **sve** znamenke, je  $x_4 = 1.14471424255333187$ .

## Laguerreova metoda, kubna konvergencija

Ponovno, **korekcija** pokazuje da se broj točnih znamenki u  $x_n$  približno **utrostručava**.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	1.000000000000000000	-5.00000000000E-01	-1.45497224368E-01
1	1.14549722436790281	3.08009509589E-03	7.82981936678E-04
2	1.14471424243122508	-4.80015464226E-10	-1.22106786356E-10
3	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	



## Laguerreova $m$ ., numerički red konvergencije

Kao što i očekujeno, **numerički red** konvergencije je 3.

$n$	$x_n$	$p_n$	$c_n$
0	1.000000000000000000	—	—
1	1.14549722436790281	—	—
2	1.14471424243122508	—	—
3	1.14471424255333187	<b>3.00297</b>	2.59843E-01
4	1.14471424255333187	—	—

## Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Razvijemo li funkciju  $1/f$  u Taylorov polinom, iz koeficijenata tog razvoja, također, možemo dobiti metode bilo kojeg reda konvergenције za nalaženje jednostruke nultočke funkcije  $f$ .

Podloga za konstrukciju ovih metoda je tzv. Königov teorem.

Neka  $f$  ima konvergentan Taylorov razvoj (analitička je) na nekom krugu oko točke  $x$  (općenito, u kompleksnoj ravnini  $\mathbb{C}$ ), koji sadrži točno jednu jednostruku nultočku  $\alpha$  od  $f$ .

Onda i funkcija  $h = 1/f$  ima konvergentan Taylorov razvoj

$$h(t) := \frac{1}{f(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(x)}{k!} (t - x)^k,$$

(tj. analitička je) na krugu  $|t - \alpha| < |x - \alpha|$  (opet, u  $\mathbb{C}$ ).

## Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Za  $p \geq 2$ , neka je  $Q_{p-1}(x)$  omjer **susjednih** koeficijenata u ovom razvoju,

$$Q_{p-1}(x) := \frac{h^{(p-2)}(x) / (p-2)!}{h^{(p-1)}(x) / (p-1)!} = (p-1) \frac{(1/f(x))^{(p-2)}}{(1/f(x))^{(p-1)}}.$$

Onda **iteracijska** funkcija

$$\varphi_p(x) := x + Q_{p-1}(x)$$

**konvergira** prema  $\alpha$ , i to s **redom konvergencije** (barem)  $p$ . ■

Za  $p = 2$ , i ovdje dobivamo **Newtonovu** metodu (provjerite).

Za  $p = 3$ , izlazi **iteracijska** funkcija za tzv. **Halleyevu** metodu

$$\varphi(x) = x - \frac{u}{1 - A_2 u}.$$

## Halleyeva metoda — lakši izvod

Funkciju  $f$ , u okolini točke  $x$ , aproksimiramo **Taylorovim polinomom**  $P_2$ , stupnja 2, kao kod **Laguerreove** metode,

$$P_2(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{f''(x)}{2} (t - x)^2.$$

U **najvišem** članu  $(t - x)^2$ , za **jedan** faktor  $(t - x)$  iskoristimo **Newtonovu** aproksimaciju

$$t - x \approx -u = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Stupanj polinoma **pada** za 1, pa dobivamo **linearni** polinom  $\tilde{P}_1$ ,

$$\tilde{P}_1(t) = f(x) + \left( f'(x) - \frac{f''(x)}{2} u \right) (t - x).$$

Iz  $\tilde{P}_1(t) = 0$ , izlazi upravo **Halleyeva** metoda (**red** je barem 3).

## Halleyeva metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Ponovno startamo iz  $x_0 = 2$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.742857142857143
1	1.257142857142857	0.486798833819242	0.111805016364194
2	1.145337840778664	0.002452770217608	0.000623598102057
3	1.144714242676607	0.000000000484607	0.000000000123275
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na **sve** znamenke, je  
 $x_5 = 1.14471424255333187$ .

# Halleyeva metoda, kubna konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa, vidi se kubna konvergencija.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E-00	7.42857142857E-01
1	1.25714285714285714	4.86798833819E-01	1.11805016364E-01
2	1.14533784077866351	2.45277021761E-03	6.23598102057E-04
3	1.14471424267660666	4.84607030069E-10	1.23274793178E-10
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

# Halleyeva metoda, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije Halleyeve metode je blizu 3.

$n$	$x_n$	$p_n$	$c_n$
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.25714285714285714	—	—
2	1.14533784077866351	—	—
3	1.14471424267660666	2.56001	1.67754E-01
4	1.14471424255333187	2.97168	4.12474E-01
5	1.14471424255333187	—	—

## Metode s pamćenjem

Metode s pamćenjem imaju **barem dvije** startne točke. Takva je, na primjer, metoda **sekante**.

I za metode s pamćenjem možemo konstruirati metode **višeg reda** od 2. Na primjer, metoda  ${}^*E_{1,2}$  definirana **iteracijskom funkcijom**

$${}^*E_{1,2} = x_n - u_n - \frac{u_n^2}{f'_n} \cdot \left[ \frac{1}{x_n - x_{n-1}} (2f'_n + f'_{n-1} - 3f[x_n, x_{n-1}]) \right]$$

ima svojstvo da treba **jednako** izvrednjavanja funkcije kao i Newtonova metoda (pamte se vrijednosti funkcije i derivacije).

Indeksi u formuli znače izvrednjavanje u odgovarajućoj točki!

Njezin **red konvergencije** je  $p = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ .



## Metoda $*E_{1,2}$ , točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Metodu startamo iz  $x_0 = 2$ , tako da  $x_1$  dobijemo po Newtonovoj metodi, pa imamo **dvije** startne točke.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.5416666666666667
1	1.4583333333333333	1.601490162037037	0.294212878320100
2	1.164120455013233	0.077588606715436	0.019397373047930
3	1.144723081965303	0.000034748987607	0.000008839411970
4	1.144714242553333	0.0000000000000003	0.0000000000000001
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
6	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka, ispisana na **sve** znamenke, je  $x_6 = 1.14471424255333187$ .

## Metoda $*E_{1,2}$ , konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa, uočavamo brzu konvergenciju metode.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E+00	5.41666666667E-01
1	1.458333333333333333	1.60149016204E+00	2.94212878320E-01
2	1.16412045501323302	7.75886067154E-02	1.93973730479E-02
3	1.14472308196530270	3.47489876068E-05	8.83941196996E-06
4	1.14471424255333275	3.45318391937E-15	8.78424181034E-16
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800369996E-20
6	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

# Metoda $*E_{1,2}$ , numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije metode  $*E_{1,2}$  ovdje ide prema 3!

$n$	$x_n$	$p_n$	$C_n$
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.458333333333333333	—	—
2	1.16412045501323302	—	—
3	1.14472308196530270	2.77393	4.83862E-01
4	1.14471424255333275	2.76510	4.79113E-01
5	1.14471424255333187	2.99347	1.17873E+00
6	1.14471424255333187	—	—

Napomena. Za kubni polinom  $f(x) = x^3 - 1.5$ , stvarni red konvergencije metode je zaista jednak 3.

Međutim, za polinom višeg stupnja ( $x^4 - 2$ ), ili neku drugu funkciju ( $e^x - 3$ ), numerički red konvergencije je blizu  $1 + \sqrt{3}$ .