OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — popravni kolokvij

8. 2. 2010.

1. (10) Neka su $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dvije funkcije. Napišite preciznu definiciju asimptotske relacije ponašanja

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad (n \to \infty).$$

Koja svojstva ima relacija Θ?

2. (10) Između ponuđenih odgovora

$$\Theta(1),\quad \Theta(\lg n),\quad \Theta(n),\quad \Theta(n \lg n),\quad \Theta(n^2),\quad \Theta(n^2 \lg n),\quad \Theta(n^3),\quad \Theta(2^n),$$

nađite točan red veličine za broj koliko puta se izvršava naredba `x = x + 1` u svakom od sljedećih dijelova programa (`/` je operator cjelobrojnog dijeljenja, kao u C-u):

(a)
```
for i = 1 to n
  for j = i to n
    for k = 1 to j / 2
      x = x + 1;
```

(b)
```
for i = 1 to n {
  j = 1;
  while (j <= n) {
    for k = 1 to i
      x = x + 1;
    j = j * 2;
  }
}
```

Ukratko **argumentirajte** odgovore!

3. (40) Neka je $A[1..n]$ polje od n elemenata nekog jednostavnog tipa, poput `int`, tako da vrijednosti tog tipa možemo uspoređivati relacijskim operatorima $\leq$ i/ili $<$. Kažemo je niz vrijednosti $A[1], \ldots, A[n]$ **unimodalan**, ako postoji indeks $p \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je niz vrijednosti $A[1], \ldots, A[p]$ rastući, a niz vrijednosti $A[p], \ldots, A[n]$ padajući. Unaprijed je poznato da vrijednosti u polju A čine unimodalan niz.

(a) Dodatno, pretpostavimo da su sve vrijednosti u polju A međusobno **različite**. Sastavite algoritam koji nalazi indeks p na kojem se nalazi "točka prereza" između rastućeg i padajućeg dijela polja, tj. maksimalna vrijednost u polju. Ulazni argumenti algoritma su polje A i broj elemenata n. Algoritam treba vratiti indeks p. Red veličine složenosti algoritma mora biti $O(\log n)$ u najgorem slučaju. Analizirajte složenost vašeg algoritma i pokažite da ona zadovoljava ovaj uvjet.
Napomena i uputa: pripazite na to da algoritam radi za male duljine polja $n = 1, 2, 3$.

(b) Pretpostavimo sad da u polju A smije biti **jednakih** elemenata, ali još uvijek znamo da postoji točno **jedna** maksimalna vrijednost, tj. indeks p je jedinstven. Može li se algoritam iz (a) jednostavno modificirati tako da radi i u ovom slučaju, a da za složenost i dalje vrijedi ista ocjena $O(\log n)$? Ako da, pokažite kako. U protivnom, argumentirajte primjerom što se može dogoditi.

OKRENITE!

4. (35) Tvrtka za sigurnost treba kupiti licence za razne dijelove kriptografskih programa. Zbog važećih propisa, tvrtka može kupiti najviše jednu licencu mjesečno. Svaka licenca trenutno (na početku cijele kupovine) košta 1000 kn. Međutim, svaki sljedeći mjesec, svaka licenca postaje sve skuplja: cijena licence j raste za faktor $r_j > 1$. To znači da licenca j, kupljena nakon t mjeseci od početka, košta $1000 \cdot r_j^t$ kn. Tvrtka mora kupiti n licenci i treba naći plan kupovine koji **minimizira** ukupnu cijenu, s tim da su zadani faktori rasta cijene $r_1, \ldots, r_n$ za svaku licencu. Pretpostavimo da su svi faktori rasta međusobno **različiti**, tj. vrijedi $r_i \neq r_j$, za $i \neq j$.

(a) Nađite redoslijed u kojem treba kupovati licence, tako da ukupna cijena bude **minimalna**. Dokažite optimalnost tog redoslijeda. Uputa: analizirajte slučaj $n = 2$.

(b) Sastavite algoritam koji nalazi optimalni redoslijed kupovine i nađite njegovu složenost. Ulazni argumenti su broj n i polje faktora rasta r, a izlaz je permutacija brojeva od 1 do n, koja sadrži optimalni redosljed kupovine, i pripadna minimalna cijena c. Složenost algoritma mora biti $O(n^2)$.

5. (25) Definirajte što je problem nalaženja minimalnog razapinjućeg stabla (MST) neusmjerenog povezanog grafa.

(a) Opišite ukratko Kruskalov algoritam za nalaženje MST i objasnite što bi se dogodilo da graf nije povezan. Za opis algoritma smijete koristiti osnovne operacije na strukturi disjunktnih skupova.

(b) Nad kojim objektima se koristi struktura disjunktnih skupova u Kruskalovom algoritmu? Koje su osnovne operacije definirane na toj strukturi (**što** rade te operacije, nije bitno **kako**)?

(c) Kako mjerimo složenost tih operacija? Navedite neku implementaciju tih operacija i komentirajte njihovu složenost.

REZULTATI: srijeda, 10. 2. 2010. u 11:30 sati. Saša Singer