OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 1. kolokvij

7. 11. 2011.

1. (10) Između ponuđenih odgovora

$$\Theta(1), \quad \Theta(\lg n), \quad \Theta(n), \quad \Theta(n \lg n), \quad \Theta(n^2), \quad \Theta(n^2 \lg n), \quad \Theta(n^3), \quad \Theta(2^n),$$

nađite točan red veličine za broj koliko puta se izvršava naredba `x = x + 1` u svakom od sljedećih dijelova programa (`/` je operator cjelobrojnog dijeljenja, kao u C-u):

(a)
```
i = 1;
while (i <= n) {
  for j = 1 to n
    x = x + 1;
  i = i * 2;
}
```

(b)
```
i = n;
while (i >= 1) {
  for j = 1 to i
    for k = 1 to i
      x = x + 1;
  i = i / 4;
}
```

Ukratko **argumentirajte** odgovore!

2. (10) Zadana je rekurzivna relacija

$$T(n) = 4\,T(n/2) + f(n), \quad f(n) = n^2,$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$. Nađite uvjetno asimptotsko ponašanje relacijom Θ za rješenje $T(n)$, ako je n potencija od 2. Može li se dobiveno rješenje proširiti tako da asimptotsko ponašanje vrijedi bezuvjetno, za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbf{N}$, za rekurziju

$$T(n) = 2\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + n^2, \quad \text{za } n \geq 2,$$

uz isti početni uvjet $T(1) = d > 0$?

3. (20) Zadani su prirodni broj n i polje $x[1..n]$ realnih brojeva x_i, $i = 1, \ldots, n$. Treba naći jedinstveni monični polinom stupnja n koji ima **nultočke** u zadanim točkama x_i, za $i = 1, \ldots, n$. Polinom je moničan ako mu je vodeći koeficijent (uz najvišu potenciju) jednak 1. Traženi interpolacijski polinom P ima oblik

$$P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j x^j,$$

a prikazujemo ga tipom `polinom` koji sadrži stupanj n i polje koeficijenata $p[0..n-1]$.

Sastavite sljedeća dva algoritma za nalaženje polinoma P i usporedite njihovu složenost. Mjera složenosti algoritma je **broj** aritmetičkih operacija na skalarima (realnim brojevima), u ovisnosti o n.

(a) Algoritam `zero1` računa P **iterativnim** množenjem linearnih faktora $(x - x_i)$, za $i = 1, \ldots, n$.

OKRENITE!

Na raspolaganju je (ne trebate ga pisati) algoritam

```
polinom mul( polinom Q, polinom R )
```

za množenje bilo koja dva monična polinoma Q i R. Ako je Q stupnja n, a stupanj od R se razlikuje od n za najviše 1, složenost ovog algoritma je poznata funkcija $M(n)$.

(b) Algoritam `zero2` računa P po principu "podijeli, pa vladaj", **rekurzivnim** množenjem **dva** polinoma približno jednakog stupnja (razlika stupnjeva je najviše jednaka 1). Algoritam treba raditi za svaki n, bez obzira na parnost, a kod računanja složenosti smijete pretpostaviti da je n potencija od 2.

Za usporedbu složenosti ova dva algoritma, razmotrite slučajeve $M(n) = \Theta(n^2)$ (standardni algoritam za množenje polinoma) i $M(n) = \Theta(n \log n)$ (brzi algoritam).

4. (20) Zadane su dvije odvojene baze podataka. Svaka baza sadrži točno n cijelih brojeva, gdje je n zadani prirodni broj. Ukupno imamo $2n$ vrijednosti i unaprijed je poznato da su sve međusobno **različite**, tj. da ne postoje dvije iste vrijednosti. Treba naći **median** ovog skupa od $2n$ vrijednosti, s tim da za median uzimamo n-tu po veličini najmanju vrijednost.

Nažalost, vrijednostima u bazama možemo pristupiti samo kroz upite. Jedan **upit** realiziran je kao funkcija oblika

```
upit(baza, k).
```

Prvi argument `baza` je redni broj baze (1 ili 2), a drugi argument `k` je broj između 1 i n. Funkcija vraća k-tu najmanju vrijednost u toj bazi. Ovakvi upiti su skupi i odgovor treba naći koristeći što je manje moguće upita.

Sastavite algoritam koji nalazi i vraća vrijednost mediana za zadani broj n. Složenost algoritma mjerimo brojem upita. Red veličine složenosti algoritma mora biti $O(n)$. Analizirajte složenost vašeg algoritma i pokažite da ona zadovoljava ovaj uvjet.

Algoritam **ne smije** koristiti polja i dinamičko rezerviranje memorije, tj. **zabranjeno** je "iskopirati" baze u polja ili liste!

Napomena: Broj bodova ovisi o složenosti algoritma. Složenost $O(n)$ vrijedi najviše 10 bodova. **Bonus**: složenost $O(\log n)$ vrijedi 10 bodova više!

REZULTATI: petak, 11. 11. 2011. u 14 sati. Saša Singer