# OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 2. kolokvij

1. 2. 2017.

1. (25) Imamo $n$ video–poruka koje treba poslati, jednu za drugom, preko jednog komunikacijskog kanala. Poruka $i$ sadrži ukupno $b_i$ bitova koje treba poslati, a slanje poruke traje $t_i$ sekundi, uz konstantnu brzinu slanja ($= b_i/t_i$, za tu poruku). Pretpostavljamo da su $b_i$ i $t_i$ zadani prirodni brojevi, za $i = 1, \ldots, n$. Nije moguće slati više poruka istovremeno i sve poruke treba poslati u jednom bloku, bez prekida između poruka. Uzmimo da slanje počinje u trenutku 0. Ako nema dodatnih ograničenja, ukupno trajanje slanja svih poruka je zbroj svih vremena $t_i$, bez obzira na poredak poruka. Međutim, komunikacijski kanal postavlja sljedeće **ograničenje** na korištenje kapaciteta:

> Za svaki prirodni broj $t$, ukupan broj poslanih bitova u vremenu od $t$ sekundi od **početka** slanja bloka ne smije premašiti $rt$, gdje je $r$ zadana konstantna vrijednost (prirodan broj).

Drugim riječima, prosječna brzina slanja, gledano od početka, ni u kojem trenutku $t$ ne smije premašiti zadani $r$. Uočite da ovo ograničenje vrijedi samo za vremenske intervale koji počinju od 0, a **ne** i za intervale koji imaju kasniji početak.

Treba naći poredak (raspored) slanja poruka, tako da se pošalje najveći mogući **broj** poruka, uz zadano ograničenje.

(a) Dokažite ili opovrgnite primjerom sljedeću tvrdnju: "Svih $n$ poruka je moguće poslati ako i samo ako za svaku poruku vrijedi da je $b_i \leq rt_i$, za $i = 1, \ldots, n$."

(b) Sastavite algoritam koji nalazi optimalni poredak slanja poruka za zadane $n$, $r$ i polja $b$ i $t$. Algoritam treba vratiti broj $k =$ najveći broj poruka koje možemo poslati uz zadano ograničenje. Ako je $k > 0$, onda treba vratiti i polje $p$, gdje $p_i = j$ označava da poruku opisanu polaznim indeksom $j$ treba poslati kao $i$-tu po redu, za $i = 1, \ldots, k$. Pretpostavljamo da polje $p$ ima $n$ elemenata i dozvoljeno je koristiti svih $n$ vrijednosti. Nađite složenost tog algoritma u ovisnosti o $n$.
Napomena: algoritam mora imati složenost $O(n^2)$ u ovisnosti o $n$.

(c) Dokažite optimalnost algoritma, tj. precizno argumentirajte da algoritam zaista nalazi poredak s najvećim brojem poruka koje je moguće poslati.

**OKRENITE!**

2. (25) Zadano je polje $a$ od $n$ elemenata. Svaki element je jedna od tri moguće boje: *crvena*, *bijela* ili *plava*, tj. u polju se mogu pojaviti najviše tri različite vrijednosti elemenata. Napišite algoritam koji sortira zadano polje $a$ tako da polje dobije oblik "nizozemske zastave" — prvo dolaze svi crveni, pa onda svi bijeli, a na kraju svi plavi elementi. Kod sortiranja, jedine dozvoljene operacije na elementima polja su:

(a) točno **jedna** provjera vrijednosti svakog pojedinog elementa, tj. najviše **dvije usporedbe** za fiksni indeks $i$ — "je li $a[i]$ = neka boja" i "je li $a[i]$ = neka druga boja" (inače mora biti preostale boje),

(b) najviše **jedna zamjena** neka dva elementa u polju, po svakoj opisanoj provjeri vrijednosti (zamjena smije biti različita za razne rezultate usporedbe).

To znači da sortiranje treba napraviti u **jednom** prolazu kroz polje. Na primjer, zabranjeno je izbrojati koliko ima boja svake vrste i onda postaviti željeni oblik polja (dva prolaza kroz polje).

Ovo je poznati "Problem nizozemske zastave" — autor je W. H. J. Feijen, a popularizirao ga je Edsger Dijkstra (obojca Nizozemci).

Ako ne znate riješiti ovaj problem, probajte riješiti problem "poljske zastave", sa samo dvije boje — crvenom i bijelom (bez plave), a onda je dozvoljena samo **jedna** usporedba (a ne dvije). Rješenje ovog problema donosi najviše 10 bodova.

3. (20) Ukratko opišite što je struktura **disjunktnih skupova** i koje osnovne **operacije** su definirane na toj strukturi (**što** rade te operacije, nije bitno **kako**).

(a) Što je polazno stanje strukture i kako mjerimo složenost osnovnih operacija?

(b) Opišite neku reprezentaciju strukture disjunktnih skupova i pripadne **efikasne** implementacije osnovnih operacija. Komentirajte njihovu složenost.

(c) Opišite kako se koristi struktura disjunktnih skupova u Kruskalovom algoritmu za nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla (MST) zadanog povezanog neusmjerenog grafa $G = (V, E)$. Koliko osnovnih operacija svake vrste je potrebno u takvoj implementaciji Kruskalovog algoritma?

**REZULTATI:** nedjelja, 5. 2. 2017., navečer (na webu),
ponedjeljak, 6. 2. 2017. u 12 sati.

Saša Singer