OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 1. kolokvij

21. 11. 2018.

1. (10) Nađite točan red veličine relacijom Θ za funkciju $incx(n)$ = broj koliko puta se izvršava naredba `x = x + 1` u svakom od sljedećih dijelova programa:

(a)
```
for i = 1 to n {
  j = i;
  while (j > 0) {
    x = x + 1;
    j = j - 4;
  }
}
```

(b)
```
i = 2;
while (i <= n) {
  for j = 1 to n
    x = x + 1;
  i = i * i * i;   // i = i³;
}
```

Ukratko, ali dovoljno precizno, argumentirajte svaki odgovor!

2. (10) Zadana je rekurzivna relacija

$$T(n) = 3\,T(n/2) + n^2,$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$. Nađite uvjetno asimptotsko ponašanje relacijom Θ za rješenje $T(n)$, ako je n potencija od 2. Može li se dobiveno rješenje proširiti tako da asimptotsko ponašanje vrijedi bezuvjetno, za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$, za rekurziju

$$T(n) = 2\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n^2, \quad \text{za } n \geq 2,$$

uz isti početni uvjet $T(1) = d > 0$?

3. (20) Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, neka je $S_n = \{1, \ldots, n\}$. Zadani su prirodni brojevi n i k, takvi da je $k < n$, i uzlazno sortirano polje A, duljine $n - k$, koje sadrži sve elemente iz S_n, osim k njih. U nastavku gledamo slučajeve kad je $k = 1$ i $k = 2$. Ovisno o k i traženom izlazu, treba sastaviti tri algoritma za nalaženje "falećih" elemenata. Vremenska složenost svakog algoritma **mora** biti u $O(\log n)$. U sva tri slučaja, dokažite korektnost vašeg algoritma i da je njegova vremenska složenost u $O(\log n)$.

(a) Neka je $k = 1$ (jedan element nedostaje), a algoritam treba naći i vratiti taj nedostajući element.

(b) Neka je $k = 2$ (dva elementa nedostaju), a algoritam treba naći i vratiti **jedan** od nedostajućih elemenata (svejedno koji).

(c) Neka je $k = 2$ (dva elementa nedostaju), a algoritam treba naći i vratiti **oba** nedostajuća elementa (svejedno u kojem poretku). Uzmite da algoritam vraća strukturu koja sadrži par prirodnih brojeva. Ako je potrebno, smijete koristiti odgovarajuće pozive algoritama iz (a) i/ili (b).

OKRENITE!

4. (20) U nekom parlamentu s n članova (zastupnika), svaki član ima najviše tri neprijatelja i poznato je tko su mu neprijatelji. Pretpostavljamo da je neprijateljstvo između dva člana uvijek obostrano ("ti mrziš mene, ja mrzim tebe"). Zadatak je podijeliti ovih n članova u dva doma (ili prostorije), zovimo ih A i B, tako da svaki član ima najviše jednog neprijatelja u svojem domu.

Članove indeksiramo brojevima od 1 do n, a pripadnost nekom domu prikazujemo skupom članova tog doma. Na početku, svi članovi su proizvoljno raspodijeljeni u ta dva doma i poznato je koji članovi su u domu A, a koji u domu B, tj. A i B su zadani disjunktni podskupovi indeksa, takvi da je $A \cup B = \{1, \ldots, n\}$. Dozvoljena operacija je prebacivanje jednog člana iz jednog doma u drugi (zapis je `prebaci(i)`, gdje je `i` indeks člana, ili `prebaci(i, odakle, kamo)`, ako želite zadati i pripadne skupove). Zadatak treba riješiti koristeći **najviše** $O(n)$ ovakvih prebacivanja.

Prikaz parova neprijatelja namjerno nije detaljno opisan. U prvom dijelu zadatka, sve potrebne provjere smijete opisati običnim riječima.

(a) Opišite algoritam za postizanje tražene raspodjele članova. Opis smije biti kombinacija pseudo-kôda i običnih rečenica, ali mora biti dovoljno precizan. Pokažite da algoritam radi korektno i da je broj prebacivanja članova zaista u $O(n)$.

U nastavku zadatka, traži se efikasna implementacija svih potrebnih operacija, uključujući i `prebaci`, s ciljem da pripadna implementacija algoritma iz (a) ima što manju vremensku složenost.

(b) Sastavite strukture podataka pogodne za zadavanje parova neprijatelja, prikaz domova (skupova) i praćenje potrebnih informacija o parovima neprijatelja u svakom od domova. Napišite implementaciju svih potrebnih operacija za algoritam iz (a), uključujući i `prebaci`. Analizirajte vremensku složenost tih operacija.

(c) Nađite ukupnu vremensku složenost pripadne implementacije algoritma iz (a).

REZULTATI: ponedjeljak, 26. 11. 2018., navečer (na webu),
utorak, 27. 11. 2018. u 13 sati. Saša Singer