

Programiranje 1

9. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Osnovni algoritmi na cijelim brojevima:
 - Uvod — što se hoće.
 - Broj znamenki cijelog broja.
 - Zbroj (suma) i umnožak (produkt) znamenki broja.
 - Najveća (najmanja) znamenka broja.
 - Provjere znamenki broja (postoji, svaka).
 - Palindrom.
 - Najveća zajednička mjera — Euklidov algoritam.
 - Potencija broja 2.
 - Binarni prikaz cijelog broja u računalu.
 - Zadaci i varijacije.

Komentar rezultata 1. kolokvija

Par komentara, malo statistike i bitna pouka.

Ukupan broj na vrijeme prijavljenih studenata je 278.

- Od toga je na kolokvij izašlo 274, ili 98.56%.
- Fale samo 4 “bolesnika”. Zdrava generacija :-)
- Broj bodova na kolokviju je 55.
- 10 bodova je pravi bonus — na “regexu”.
- Program je bio trivijalan (tjedan manjka).

Što kaže statistika?

- Prosjek bodova = 38.15, ili oko 69.36%.

Ako se gleda na “normu” od 45 bodova, rezultat je još i bolji.

Komentar rezultata 1. kolokvija — nastavak

Evo statistike po zadacima:

Zadatak	1	2	3	4	5	ukupno
Uk. bod.	5	10	10	20	10	55
Prosjek	4.07	8.83	7.84	11.25	7.18	38.15
Prosj. (%)	81.39	88.28	78.35	56.25	71.80	69.36

Dakle, onaj “trivijalni” program ima vidljivi pad rezultata (na regexu je bonus). A baš na programima treba skupiti

- još barem 15 bodova na drugom kolokviju.

Gdje je problem?

- Programiranje nije dovoljno “učiti”, treba i vježbati.

Komentar rezultata 1. kolokvija — nastavak

Upozorenje svima koji imaju < 7 bodova na programu:

- **Kasnite** s gradivom programiranja — **hitno** treba **nadoknaditi taj zaostatak!**
- **Zadnji** je trenutak da se ozbiljno **zabrinete** nad stanjem stvari — perspektive na **Prog1** su vam izrazito “**mračne**”.

“Pod hitno” **morate sami** nešto **učiniti** da se stvari **promijene**.

- **Vježbati** ne može netko drugi, **umjesto** vas!

Usput, iskoristite svu raspoloživu pomoć:

- kolege studente, demose, asistente, nastavnike.

Nemojte “**kukati**” kasnije! Upozorenje je stiglo dovoljno **rano**.

Informacije — Praktični kolokvij

Praktični kolokvij — prvi krug kreće dva tjedna nakon kolokvijskog dvotjedna. Preciznije,

- subota, 20. 11. — subota, 27. 11.,
- obje subote su namjerno uključene (prazni praktikumi).

Upisivanje za termine će biti sljedeći tjedan

- u 8. tjednu nastave, 15. 11. — 19. 11.

Popis s terminima će biti na zidu, desno od moje sobe, čim složimo termine.

Zapamtite: Vrijeme za rješenje je 45 minuta.

- Zadaci su objavljeni na webu.
- Korisno je odmah pogledati i početi vježbati.

Praktični kolokvij — upute

Barem dan–dva prije praktičnog kolokvija provjerite:

- da vam account “štima”,
- da se znate “logirati”,
- da znate naći IDE u kojem mislite raditi,

Uz svaki ponuđeni termin piše i praktikum u kojem se radi,

- tj. sami birate termin i praktikum.

Dakle, imate dovoljno vremena za isprobati (na licu mjesta) “je l’ vam sve radi”.

Ako vam account ne radi na praktičnom kolokviju, ili si ne znate password, ili ne znate naći/koristiti compiler, ...

- to je vaš problem. Što se nas tiče — to je pad.

Praktični kolokvij — upute

U **prvi** praktični kolokvij ulaze

- svi zadaci koji **nisu** označeni oznakom “**nizovi**”.

Na kraju, bilo bi **vrlo lijepo** da znate

- **nakucati** nešto, prevesti to (compile), isporbati (run), ...

Dakle, **vježbajte!**

Osnovni algoritmi na cijelim brojevima

Sadržaj predavanja

- Osnovni algoritmi na cijelim brojevima:
 - Uvod — što se hoće.
 - Broj znamenki cijelog broja.
 - Zbroj (suma) i umnožak (produkt) znamenki broja.
 - Najveća (najmanja) znamenka broja.
 - Provjere znamenki broja (postoji, svaka).
 - Palindrom.
 - Najveća zajednička mjera — Euklidov algoritam.
 - Potencija broja 2.
 - Binarni prikaz cijelog broja u računalu.
 - Zadaci i varijacije.

Uvod — što je cilj?

Cilj je, zapravo, vrlo jednostavan:

- konstrukcija, implemenatcija i analiza jednostavnih (osnovnih) algoritama,
- sastavljenih od jedne petlje i nekoliko uvjetnih naredbi,
- na najjednostavnijim podacima — cijelim brojevima.

Kasnije ćemo iste ili slične algoritme koristiti na složenijim podacima:

- nizovi na ulazu, polja, vezane liste i sl.

Danas ćemo pisati cijele programe ili odsječke programa. Kad napravimo funkcije, onda ćemo

- neke od tih algoritama realizirati kao funkcije.

Osnovne pretpostavke i dogovori

Ulazni podaci su:

- nenegativni cijeli brojevi, tj. brojevi iz skupa \mathbb{N}_0 , osim ukoliko nije drugačije rečeno.

Za prikaz podataka standardno koristimo

- tip `unsigned int`.

Može i “obični” `int`, ako nam raspon prikazivih brojeva nije jako bitan.

Katkad ćemo dozvoliti

- i negativne cijele brojeve, tj. brojeve iz skupa \mathbb{Z} .

Tada za prikaz koristimo tip `int`.

Osnovne pretpostavke i dogovori (nastavak)

Dogovor. Sve algoritme realiziramo u cjelobrojnoj aritmetici. Realnu aritmetiku izbjegavamo zbog mogućih grešaka zaokruživanja.

Oprez: Neovisno o tipu kojeg koristimo za prikaz brojeva,

- skup prikazivih brojeva u računalu je konačan,
- a aritmetika je modularna aritmetika!

Na to treba paziti kod konstrukcije i izbora algoritma. Jedan od bitnih ciljeva je:

- algoritam treba raditi korektno za što “veći” skup ulaznih podataka.
- Po mogućnosti — za svaki prikazivi ulazni podatak!

Broj znamenki broja

Primjer. Program treba učitati cijeli broj n (tipa `int`) i naći broj dekadskih znamenki tog broja.

Najlakši algoritam dobivamo jednostavnim

- “brisanjem” znamenki i to “straga” (lakše je).

Usput treba samo

- brojati obrisane znamenke!

Uzmimo da je $n = 123$. Zadnja znamenka je $n \bmod 10 = 3$.

Međutim, sama znamenka nam *ne treba*. Kako ćemo “obrisati” tu znamenku?

- Tako da broj *podijelimo* s bazom 10.
- Odgovarajuća naredba je: $n = n / 10$ ili $n /= 10$.

Broj znamenki broja (nastavak)

Ovo ponavljamo u **petlji**, s tim da

- svaki puta **povećamo** broj obrisanih znamenki za **1**.

Na **početku**, brojač **inicijaliziramo** na **0** — jer još nismo obrisali **niti jednu** znamenku!

Zadnje pitanje je “**kontrola**” petlje — **do kada** ponavljamo ovaj postupak?

- Sve dok broj ima **bar jednu** znamenku (koju još nismo obrisali).

A kad je to? **Sve dok** je $n \neq 0$.

Drugim riječima,

- ponavljanje **prekidamo** kad obrišemo **sve** znamenke, tj. kad **n** postane **nula**.

Broj znamenki broja (nastavak)

U našem primjeru, za $n = 123$, imamo redom:

- $n = n / 10$ daje $n = 12$, a broj obrisanih znamenki je 1.
- $n = n / 10$ daje $n = 1$, a broj obrisanih znamenki je 2.
- $n = n / 10$ daje $n = 0$, a broj obrisanih znamenki je 3.

Dakle, sve radi korektno!

Izbor naredbe za realizaciju petlje u programu:

- Broj znamenki **ne** znamo unaprijed (baš to tražimo), pa je **prirodno** koristiti **while** ili **do-while**.

Uz malo više iskustva u C-u, vidjet ćete da može i **for**.

Dogovorno uzimamo da $n = 0$ ima **nula** znamenki! To ima smisla u **normaliziranom** prikazu broja u bazi.

Onda koristimo **while** petlju, a ne **do-while**.

Broj znamenki broja (nastavak)

```
#include <stdio.h>

/* Broj dekadskih znamenki cijelog broja. */

int main(void)
{
    int n, broj_znam;

    printf(" Upisi cijeli broj n: ");
    scanf("%d", &n);
```

Broj znamenki broja (nastavak)

```
broj_znam = 0;
while (n != 0) {
    ++broj_znam;
    n /= 10; /* brisi zadnju znamenku. */
}

printf(" Broj znamenki = %d\n", broj_znam);

return 0;
}
```

Za ulaz 12345, program ispisuje

Broj znamenki = 5

Broj znamenki broja (nastavak)

Realizacija ključnog dijela programa `for` petljom, bazirana na vezi između `for` i `while` petlji — tipična za `C`:

```
broj_znam = 0;
for (; n != 0; n /= 10)
    ++broj_znam;
```

Uočite da “inicijalizacije” **nema**, a “pomak” je upravo **brisanje** znamenki!

Može i ovako — **kratko**, ali nije baš lako za **pročitati**:

```
for (broj_znam = 0; n != 0; n /= 10)
    ++broj_znam;
```

Broj znamenki broja (nastavak)

Nekoliko pitanja.

- Za koje cijele brojeve n program radi korektno?
 - Odgovor: za sve prikazive, uključivo i negativne!
- Kolika je vrijednost broja n na kraju — nakon završetka algoritma?
 - Odgovor: $n = 0$.

Dakle, algoritam je “destruktivan” — uništava ulazni broj n . Ako to nećemo, treba napraviti kopiju od n u pomoćnu varijablu i nju “uništiti”.

- Kolika je složenost ovog algoritma?
 - Odgovor: Broj prolaza kroz petlju je upravo broj znamenki broja n .

Broj znamenki broja u zadanoj bazi

Zanimljivo je da **isti** algoritam radi korektno i u bilo kojoj drugoj **bazi** $b \geq 2$.

Ako je $n \in \mathbb{N}$, onda prikaz u **bazi** b ima oblik

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0,$$

s tim da je ovaj prikaz **normaliziran**, tj. za znamenke vrijedi

$$a_0, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad \text{i} \quad a_k > 0.$$

Dogovorno smatramo da $n = 0$ **nema** znamenki!

U nastavku prelazimo na **nenegativne** brojeve, da nas **predznak** “ne smeta”.

Broj znamenki broja u zadanoj bazi (nastavak)

Napomena.

- Oznaka konverzije za čitanje i pisanje nenegativnih brojeva tipa `unsigned int` je `%u`.

Broj znamenki broja u zadanoj bazi (nastavak)

```
#include <stdio.h>

/* Broj znamenki broja n u bazi b.
   Unistava n dijeljenjem.
*/

int main(void)
{
    unsigned int b = 10, n, broj_znam;

    printf(" Upisi nenegativni broj n: ");
    scanf("%u", &n);
    printf("\n Broj %u", n);
```

Broj znamenki broja u zadanoj bazi (nastavak)

```
    broj_znam = 0;
    while (n > 0) {
        ++broj_znam;
        n /= b;
    }

    printf(" ima %u znamenki u bazi %u\n",
           broj_znam, b);

    return 0;
}
```

Broj znamenki broja u zadanoj bazi — logaritam

Ako je $n \in \mathbb{N}$ i ako je

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

normalizirani prikaz tog broja u bazi b , tj. vrijedi

$$a_0, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad \text{i} \quad a_k > 0,$$

onda broj znamenki $= k + 1$ možemo izračunati i direktno — preko logaritma

$$k + 1 = \lfloor \log_b n \rfloor + 1.$$

Međutim, to zahtijeva realnu aritmetiku, a ona ima greške zaokruživanja.

Broj znamenki broja — logaritam (nastavak)

U zaglavlju `<math.h>` postoje dvije funkcije za logaritam:

- `log` = `ln`,
- `log10` = `log10`.

Nama treba logaritam u bazi b . To dobijemo ovako

$$\log_b n = \frac{\ln n}{\ln b} = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b}.$$

“Najveće cijelo” možemo dobiti pretvaranjem tipova:

- `cast` operatorom `(int)` ili `(unsigned int)`.

Oprez: izračunati logaritam može imati malu grešku (nadolje)
— koja je dovoljna za pogrešan rezultat!

Obrada znamenki broja — općenito

U nastavku ide hrpa varijacija na temu “obrade” znamenki broja u zadanoj bazi.

Ako redoslijed obrade (poredak znamenki) **nije** bitan, onda obrada može ići na **isti** način kao i **brojanje** znamenki:

- odgovarajuća **inicijalizacija** rezultata;
- **petlja** za obradu znamenki — sve dok “ima znamenki”
 - **izdvoji zadnju** znamenku (tj., straga) = modulo baza;
 - **obradi** ju;
 - **obriši** ju (kao kod brojanja).

I to je to!

Zbroj (suma) znamenki broja

Primjer. Program treba učitati nenegativni cijeli broj n (tipa `unsigned int`) i naći

• zbroj znamenki tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Inicijalizacija za zbrajanje?

Zbroj znamenki broja (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
printf("\n n = %u\n", n);
```

```
suma = 0;
while (n > 0) {
    suma += n % b;
    n /= b;
}
```

```
printf(" Suma znamenki u bazi %u je %d\n",
      b, suma);
```

Umnožak (produkt) znamenki broja

Primjer. Program treba učitati nenegativni cijeli broj n (tipa `unsigned int`) i naći

• produkt znamenki tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Inicijalizacija za množenje?

Produkt znamenki broja (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
printf("\n n = %u\n", n);
```

```
prod = 1;
while (n > 0) {
    prod *= n % b;
    n /= b;
}
```

```
printf(" Produkt znamenki u bazi %u je %u\n",
      b, prod);
```

Najveća znamenka broja

Primjer. Program treba učitati nenegativni cijeli broj n (tipa `unsigned int`) i naći

• najveću znamenku tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Inicijalizacija za maksimum?

Najveća znamenka broja (nastavak)

```
if (n > 0) {
    max_znam = n % b; /* zadnja znamenka */
    n /= b;
    while (n > 0) {
        znam = n % b;
        if (znam > max_znam) max_znam = znam;
        n /= b;
    }
    printf(" Najveca znamenka u bazi %u je"
           " %u\n", b, max_znam);
}
else
    printf(" Nema znamenki\n");
```

Najveća znamenka broja (nastavak)

```
/* Najveća znamenka broja n u bazi b.
   'Lazna' inicijalizacija na -1
   ne može u tipu unsigned, pa stavim 0.
   Unistava n dijeljenjem.
*/
max_znam = 0;
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam > max_znam) max_znam = znam;
    n /= b;
}
printf(" Najveća znamenka u bazi %u je %u\n",
       b, max_znam);
```

Najmanja znamenka broja

Primjer. Program treba učitati nenegativni cijeli broj n (tipa `unsigned int`) i naći

• najmanju znamenku tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Inicijalizacija za minimum?

Najmanja znamenka broja (nastavak)

```
if (n > 0) {
    min_znam = n % b; /* zadnja znamenka */
    n /= b;
    while (n > 0) {
        znam = n % b;
        if (znam < min_znam) min_znam = znam;
        n /= b;
    }
    printf(" Najmanja znamenka u bazi %u je"
           " %u\n", b, min_znam);
}
else
    printf(" Nema znamenki\n");
```

Najmanja znamenka broja (nastavak)

```
/* Najmanja znamenka broja n u bazi b.
   'Lazna' inicijalizacija na b.
   Unistava n dijeljenjem.
*/
min_znam = b;
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam < min_znam) min_znam = znam;
    n /= b;
}

printf(" Najmanja znamenka u bazi %u je %u\n",
       b, min_znam);
```

Provjere znamenki broja

Najjednostavniji primjeri “provjere” odgovaraju standardnim kvatifikatorima u matematici:

- Postoji (\exists) li objekt sa zadanim svojstvom?
- Ima li svaki (\forall) objekt zadano svojstvo?

Rezultat je odgovor na postavljeno pitanje, tj. ima “logički” tip

- DA/NE, ili 1/0.

Postoji znamenka ... ?

Primjer. Program treba učitati nenegativni cijeli broj n (tipa `unsigned int`) i naći odgovor na pitanje

- postoji li znamenka tog broja koja je jednaka 5 (u zadanoj bazi $b = 10$).

Inicijalizacija za postoji? (Prazan skup!)

Postoji znamenka ... ? (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
odgovor = 0;  /* NE, laz */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    odgovor = odgovor || (znam == trazena);
    n /= b;
}

if (odgovor)
    printf(" Odgovor je DA\n");
else
    printf(" Odgovor je NE\n");
```

Postoji znamenka ... ? (nastavak)

Skraćena varijanta koja prekida petlju:

```
odgovor = 0;  /* NE, laz */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam == trazena) {
        odgovor = 1;
        break;
    }
    n /= b;
}
```

Svaka znamenka ... ?

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa **unsigned int**) i naći odgovor na pitanje

• je li **svaka znamenka** tog broja jednaka **5** (u zadanoj bazi $b = 10$).

Inicijalizacija za svaki? (Prazan skup!)

Svaka znamenka ... ? (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
odgovor = 1;  /* DA, istina */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    odgovor = odgovor && (znam == trazena);
    n /= b;
}

if (odgovor)
    printf(" Odgovor je DA\n");
else
    printf(" Odgovor je NE\n");
```

Svaka znamenka ... ? (nastavak)

Skraćena varijanta koja prekida petlju:

```
odgovor = 1;  /* DA, istina */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam != trazena) {
        odgovor = 0;
        break;
    }
    n /= b;
}
```

Palindrom

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa **unsigned int**) i naći odgovor na pitanje

• je li broj **n** **palindrom** (u zadanoj bazi $b = 10$), tj. “čita” li se **n** **jednako** s obje strane?

Na primjer, **14741** je palindrom, a **14743** nije.

Trik: umjesto provjere znamenki,

- **prva = zadnja, druga = predzadnja, ...**
(probajte to napisati),
- napravimo broj s **obratnim** poretком znamenki i usporedimo!

Palindrom (nastavak)

```
#include <stdio.h>

/* Provjera je li prirodni broj palindrom. */

int main(void)
{
    unsigned int b = 10;
    unsigned int n, m1, m2, palindrom;

    printf(" Upisi nenegativni broj n: ");
    scanf("%u", &n);

    printf(" Broj = %u\n", n);
```

Palindrom (nastavak)

```
m1 = n;
m2 = 0;
while (n > 0) {
    m2 = m2 * b + n % b;
    n /= b;
}
palindrom = m1 == m2 ? 1 : 0;

printf(" Palindrom = %u\n", palindrom);

return 0;
}
```

Pitanje. Radi li ovaj program **korektno** za **svaki** prikazivi ulaz? **Probajte!**

Najveća zajednička mjera

Primjer. Jedan od prvih algoritama u povijesti je **Euklidov** algoritam za nalaženje **najveće** zajedničke mjere $M(a, b)$ cijelih brojeva a i b .

Algoritam se bazira na Euklidovom teoremu o dijeljenju

• $a = q \cdot b + r$, za neki $q \in \mathbb{Z}$, gdje je r **ostatak**.

Ključni koraci:

• Ako $d \mid a$ i $d \mid b$, onda $d \mid r$, pa je $M(a, b) = M(b, r)$ (“**smanjujemo**” argumente).

• Ako je $r = 0$, onda je $a = q \cdot b$, pa je $M(a, b) = b$ (**kraj**).

Test-primjeri: $a = 48$, $b = 36$ ili $a = 21$, $b = 13$.

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Dio programa koji računa $M(a, b)$:

```
int a, b, ostatak, mjera;
...
while (1) {
    ostatak = a % b;
    if (ostatak == 0) {
        mjera = b;
        break;
    }
    a = b;
    b = ostatak;
}
```

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Može i ovako — s malo **manje** “teksta”:

```
int a, b, ostatak, mjera;
...
while (b > 0) {
    ostatak = a % b;
    a = b;
    b = ostatak;
}
mjera = a;
```

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Sporija varijanta za istu stvar, bez računanja ostataka, koristeći samo **oduzimanje**:

```
int a, b, mjera;
...
while (a != b)
    if (a > b)
        a -= b;
    else
        b -= a;
mjera = a;    /* moze i b. */
```

Potencija broja 2

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa `unsigned int`) i naći odgovor na pitanje

• je li broj **n** **potencija** broja $d = 2$,

tj. može li se **n** prikazati u obliku

• $n = d^k$, s tim da je eksponent $k > 0$?

Potencija broja 2 (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
unsigned int n, d = 2, k, odgovor;

k = 0;
    /* Sve dok je n djeljiv s d,
       podijeli ga s d. */
while (n % d == 0) {
    ++k;
    n /= d;
}

    /* mora ostati n == 1 */
odgovor = n == 1 && k > 0;
```

Prikaz cijelog broja u računalu

Primjer. Program treba učitati **cijeli** broj **n** (tipa **int**) i napisati **prikaz** tog broja u računalu — kao niz **bitova**.

Broj bitova u prikazu **možemo** izračunati unaprijed, koristeći **sizeof** operator. Zato koristimo **for** petlju.

```
#include <stdio.h>

/* Prikaz cijelog broja u racunalu. */

int main(void)
{
    int nbits, broj, bit, i;
    unsigned mask;
```

Prikaz cijelog broja u računalu (nastavak)

```
    /* Broj bitova u tipu int. */  
    nbits = 8 * sizeof(int);  
  
    /* Pocetna maska ima bit 1  
       na najznacajnijem mjestu. */  
    mask = 0x1 << nbits - 1;  
  
    printf(" Upisi cijeli broj: ");  
    scanf("%d", &broj);  
    printf(" Prikaz broja %d:\n ", broj);
```

Prikaz cijelog broja u računalu (nastavak)

```
for (i = 1; i <= nbits; ++i) {
    /* Maskiranje odgovarajućeg bita. */
    bit = broj & mask ? 1 : 0;
    printf("%d", bit);
    if (i % 4 == 0) printf(" ");
    /* Pomak maske za 1 bit udesno. */
    mask >>= 1;
}
printf("\n");

return 0;
}
```

Prikaz cijelog broja u računalu (nastavak)

Za ulaz 3, dobivamo:

Prikaz broja 3:

0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0011

Za ulaz -3, dobivamo:

Prikaz broja -3:

1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1101
