Programiranje 1
4. predavanje — 2. dodatak

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja — dodatka

- Cijeli brojevi — binarni prikaz i prikaz u računalu:
  - Prikaz cijelih brojeva u bazi 2.
  - Prikaz brojeva bez predznaka.
  - Prikaz brojeva s predznakom, komplementiraj i dodaj 1.
- Realni brojevi — binarni prikaz i prikaz u računalu:
  - Prikaz realnih brojeva u bazi 2.
  - Greške zaokruživanja u prikazu.
  - Prikaz u tipovima `float` i `double`.

Prikaz cijelih brojeva u računalu — primjeri

Sadržaj

- Cijeli brojevi — binarni prikaz i prikaz u računalu:
  - Prikaz cijelih brojeva u bazi 2.
  - Prikaz brojeva bez predznaka.
  - Prikaz brojeva s predznakom, komplementiraj i dodaj 1.

Zapis prirodnog broja u bazi 2

Neka je $B \in \mathbb{N}$ neki prirodan broj.

Tzv. pozicioni zapis broja B u bazi $b = 2$ ima sljedeći oblik:

$$B = b_k \cdot 2^k + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0, \quad b_i \in \{0, 1\},$$

gdje su b_i binarne znamenke ili bitovi broja B.

Da bismo dobili jednoznačnost prikaza, koristimo da je $B > 0$ i

- ne dozvoljavamo da vodeće znamenke budu nule,

tj. zahtijevamo da vodeća znamenka b_k mora biti pozitivna

$$b_k > 0.$$

Normalizirani zapis prirodnog broja u bazi 2

Prikaz oblika

$$B = b_k \cdot 2^k + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0, \quad b_i \in \{0, 1\}, \quad b_k > 0,$$

zovemo normalizirani pozicioni prikaz broja B u bazi $b = 2$.
Skraćeni zapis ovog prikaza je

$$B = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2.$$

Broj $k \in \mathbb{N}_0$ jednoznačno je određen zahtjevom $b_k > 0$ i vrijedi

$$k = \lfloor \log_2 B \rfloor.$$

Broj binarnih znamenki ("duljina") broja B je

$$k + 1 = \lfloor \log_2 B \rfloor + 1.$$

Računanje znamenki broja u bazi 2

Binarne znamenke b_i zadanog broja B

$$B = b_k \cdot 2^k + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0 = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2,$$

dobivamo dijeljenjem s bazom 2.

- Preciznije, koristimo cjelobrojni kvocijent i ostatak.

Kako to ide? Direktno iz Euklidovog teorema, zapisom

$$B = (b_k \cdot 2^{k-1} + \cdots + b_1) \cdot 2 + b_0 = \text{oznaka} = B_1 \cdot 2 + b_0.$$

Zadnju znamenku b_0 dobivamo kao ostatak pri dijeljenju broja B s bazom 2

$$b_0 = B \bmod 2.$$

Računanje znamenki broja u bazi 2 (nastavak)

Cjelobrojni kvocijent broja B s bazom 2 je "novi" broj

$$B_1 = B \text{ div } 2 = b_k \cdot 2^{k-1} + \cdots + b_1.$$

Njegov zapis u bazi 2 je

$$B_1 = (b_k b_{k-1} \ldots b_1)_2,$$

tj. dobiva se "brisanjem" znamenke b_0 iz zapisa broja B.

Znamenku b_0 smo upravo našli, pa je dovoljno naći binarni zapis broja B_1, a taj broj ima jednu znamenku manje.

Naravno, njegovu zadnju znamenku b_1 nalazimo

- ponavljanjem opisanog postupka, ali na broju B_1.

Računanje znamenki broja u bazi 2 (nastavak)

Čitav postupak možemo zapisati na sljedeći način.

Neka je, na početku, $B_0 := B$.

U općem — i–tom koraku, krećemo s brojem B_i i računamo:

- ostatak — izdvoji (trenutnu) zadnju znamenku u B_i

$$b_i = B_i \bmod 2,$$

- cjelobrojni kvocijent — "obriši" (trenutnu) zadnju znamenku u B_i

$$B_{i+1} = B_i \operatorname{div} 2,$$

tako da uvijek vrijedi

$$B_i = B_{i+1} \cdot 2 + b_i, \quad i = 0, 1, \ldots \ .$$

Računanje znamenki broja u bazi 2 (nastavak)

Pitanje je samo — kad treba stati (jer k ne znamo unaprijed)?

Odgovor: kad "obrišemo" sve znamenke iz broja B, ostaje nam nula.

Uočite da je

$$B_i = b_k \cdot 2^{k-i} + \cdots + b_i = (b_k b_{k-1} \ldots b_i)_2.$$

Za $i = k$ imamo $B_k = b_k > 0$. Nakon dijeljenja dobivamo

$$B_k = B_{k+1} \cdot 2 + b_k, \quad B_{k+1} = 0.$$

Dakle, postupak staje kad prvi put dobijemo kvocijent nula,

$$B_{k+1} = B_k \text{ div } 2 = 0.$$

Prikaz broja 1717 *u bazi* 2

Primjer. Prikaz broja 1717 u bazi 2 dobivamo ovako:

i	B_i	$B_{i+1} = B_i \text{ div } 2$	$b_i = B_i \bmod 2$
0	$1717 = 858 \cdot 2 + 1$	$1717 \text{ div } 2 = 858$	$1717 \bmod 2 = 1$
1	$858 = 429 \cdot 2 + 0$	$858 \text{ div } 2 = 429$	$858 \bmod 2 = 0$
2	$429 = 214 \cdot 2 + 1$	$429 \text{ div } 2 = 214$	$429 \bmod 2 = 1$
3	$214 = 107 \cdot 2 + 0$	$214 \text{ div } 2 = 107$	$214 \bmod 2 = 0$
4	$107 = 53 \cdot 2 + 1$	$107 \text{ div } 2 = 53$	$107 \bmod 2 = 1$
5	$53 = 26 \cdot 2 + 1$	$53 \text{ div } 2 = 26$	$53 \bmod 2 = 1$
6	$26 = 13 \cdot 2 + 0$	$26 \text{ div } 2 = 13$	$26 \bmod 2 = 0$
7	$13 = 6 \cdot 2 + 1$	$13 \text{ div } 2 = 6$	$13 \bmod 2 = 1$
8	$6 = 3 \cdot 2 + 0$	$6 \text{ div } 2 = 3$	$6 \bmod 2 = 0$
9	$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$3 \text{ div } 2 = 1$	$3 \bmod 2 = 1$
10	$1 = 0 \cdot 2 + 1$	$1 \text{ div } 2 = 0$	$1 \bmod 2 = 1$

Prikaz broja 1717 *u bazi* 2 *(nastavak)*

Dobili smo da je $B_{11} = 0$, pa je $k = 10$.

Vodeća znamenka b_{10} je na dnu tablice, tj. znamenke treba pisati odozdo prema gore, da ih dobijemo u standardnom poretku $b_{10}, \ldots, b_0$.

Rješenje. Prikaz broja 1717 u bazi 2 je

$$(1717)_{10} = (11010110101)_2$$

i ima 11 binarnih znamenki.

Prikaz broja 1717 *kao* `int`

Primjer. Prikaz broja 1717 kao `int` i `unsigned int`.

- Za tipove `int` i `unsigned int`, broj bitova za prikaz brojeva je $n = 32$.

Rješenje. Za početak, jer je $k + 1 = 11 < n = 32$, broj 1717 je prikaziv u oba tipa.

Prikazu broja 1717 u bazi 2 samo treba dodati potreban broj vodećih nula, do broja bitova predviđenog za prikaz u odgovarajućem tipu.

Dakle, prikaz broja 1717 u tim tipovima je

0000 0000 0000 0000 0000 0110 1011 0101

Prikaz broja -1717 *kao* `int`

Primjer. Prikaz broja -1717 kao `int`.

Krećemo od prikaza broja 1717 kao `int`:

```
 0000 0000 0000 0000 0000 0110 1011 0101
```

Komplementiramo (bit–po–bit) i dodamo 1 (modulo 2^{32}):

```
 1111 1111 1111 1111 1111 1001 0100 1010
+                                       1
```

Rezultat je prikaz broja -1717 kao `int`:

```
 1111 1111 1111 1111 1111 1001 0100 1011
```

Prikaz realnih brojeva u računalu — primjeri

Sadržaj

- Realni brojevi — binarni prikaz i prikaz u računalu:
  - Prikaz realnih brojeva u bazi 2.
  - Greške zaokruživanja u prikazu.
  - Prikaz u tipovima `float` i `double`.

Binarni zapis broja 0.1

Primjer. Binarni zapis broja 0.1 je beskonačan

$$
\begin{aligned}
(0.1)_{10} &= (0.0\ 0011\ 0011\ 0011\ldots)_2 \\
&= (1.1001\ 1001\ 1001\ldots)_2 \cdot 2^{-4}.
\end{aligned}
$$

Prikaz broja 0.1 *kao* `float`

Primjer. Prikaz broja 0.1 kao `float`.

$$(0.1)_{10} = (1.1001\ 1001\ \ldots\ 1001\ 1001\ldots)_2 \cdot 2^{-4}.$$

Zaokruživanje iza 23 bita razlomljenog dijela daje

$$s = 0$$

$$k = e + 127 = -4 + 127 = (123)_{10} = 0111\ 1011$$

$$m = 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 101$$

```
Prikaz broja      0.100 [float] u racunalu:
            0 01111011 10011001100110011001101
  1. rijec: 0011 1101 1100 1100 1100 1100 1100 1101
```

Prikaz broja 0.1 *kao* `double`

Primjer. Prikaz broja 0.1 kao `double`.

$$(0.1)_{10} = (1.1001\ 1001\ \ldots\ 1001\ 1001\ldots)_2 \cdot 2^{-4}.$$

Zaokruživanje iza 52 bita razlomljenog dijela daje

$$s = 0$$

$$k = e + 1023 = -4 + 1023 = (1019)_{10} = 011\ 1111\ 1011$$

$$m = 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001$$
$$1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1010$$

```
Prikaz broja      0.100 u racunalu:
  1. rijec: 1001 1001 1001 1001 1001 1001 1001 1010
  2. rijec: 0011 1111 1011 1001 1001 1001 1001 1001
```