

Programiranje 1

13. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Pretraživanje i sortiranje nizova (nastavak):
 - Pretraživanje — sekvencijalno i binarno (ponavlj.).
 - Sortiranje izborom ekstrema — Selection sort.
 - Razne varijante Selection sorta.
 - Složenost sortiranja — općenito.
 - Složenost Selection sorta.
 - Sortiranje zamjenama susj. elemenata — Bubble sort.
 - Poboljšana varijanta Bubble sorta.
 - Složenost Bubble sorta.
- Završni primjeri (ponavljanje za kolokvij):
 - Zadatak 1.
 - Zadatak 2.

Informacije — kolokviji

Programiranje 1 je u kolokvijskom razredu **F3**.

Službeni termini sljedećih kolokvija su:

- **Drugi:** petak, 20. 1. 2012., u **15** sati.
- **Popravni:** petak, 3. 2. 2012., u **15** sati.

Informacije — upis ocjena i usmeni

Upisi **ocjena** i **usmeni** (po želji/ “kazni”):

- 🕒 pogledati **obavijest** na **rezultatima** kolokvija!

Lijepo molim:

- 🕒 **doći** u nekom od **navedenih** termina, bit će ih dovoljno!

Ako ne možete (bolesni i sl.) — **javite** se (mailom).

- 🕒 **Nemojte** dolaziti **izvan** termina, i
- 🕒 **nemojte** “**zaboraviti**” na ocjenu.

Naknadni upis ocjene = naknadni potpis = **molba**, a to **košta!**

Informacije — bodovi za zadaće

Bitno: Aplikacija za “zadaće” se

- zaključava s početkom drugog kolokvija.

Nakon toga,

- nema više novih “računa” (prijava),
- ni predaje zadataka.

U tom trenu vrijedi:

- Tko je “unutra” i koliko je predao/la ... , to je to, i nema iznimaka!

Informacije — Praktični kolokvij

Na PK2 prošlo je još 50 studenata (od 84 izašla, ili 59.52%).

● Zasad, ukupno prošlo: 231 student.

Treći krug PK3 ide

● u ponedjeljak, 19. 12., poslije podne.

Napomena: Nedolazak na bilo koji PK treba opravdati,

● inače gubite pravo na popravak!

Rok za predaju ispričnica za nedolazak na PK i sl.:

● danas — petak, 16. 12., do 14 sati.

Sve nakon toga rješava se molbama u referadi!

Pretraživanje nizova (ponavljanje)

Sadržaj

- Pretraživanje nizova (ponavljanje):
 - Sekvencijalno pretraživanje.
 - Složenost sekvencijalnog pretraživanja.
 - Binarno pretraživanje sortiranog niza.
 - Složenost binarnog pretraživanja.

Pretraživanje nizova (ponavljanje)

Problem **pretraživanja** — opća formulacija:

- Treba **provjeriti** **nalazi** li se zadani element **elt** među članovima zadanog niza

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}.$$

Drugim riječima, **pitanje** glasi:

- postoji li indeks $i \in \{0, \dots, n-1\}$ takav da je $\text{elt} = x_i$.

Ako niz **nije** sortiran, tj. u nizu vlada “**nered**”, koristimo

- **sekvencijalno** pretraživanje (“jedan po jedan”).

Sekvencijalno pretraživanje — funkcija

Funkcija koja vraća odgovor:

```
int seq_search(int x[], int n, int elt)
{
    int i;

    for (i = 0; i < n; ++i)
        if (x[i] == elt)
            return 1;

    return 0;
}
```

Koristimo “skraćenu” pretragu, bez varijable *nasli*.

Sekvencijalno pretraživanje — složenost

Složenost pretraživanja mjerimo brojem usporedbi

• “jednak”, odnosno, “različit” (jer *nema* uređaja),

i to samo u tipu za članove niza. Operacije na indeksima ne brojimo — njih ima podjednako kao i usporedbi.

U najgorem slučaju, moramo provjeriti sve članove niza, tj.

$$\text{broj usporedbi} \leq n.$$

Ova mjera složenosti je dobra procjena za trajanje izvršavanja, algoritma sekvencijalnog pretraživanja — oznaka $T(n)$.

Zapis za trajanje:

$$T(n) \in O(n).$$

Značenje: trajanje, u najgorem slučaju, linearno ovisi o n .

Točno značenje zapisa složenosti

Točno matematičko značenje zapisa

$$T(n) \in O(f(n))$$

za neke funkcije T i f (sa skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{R}):

Postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ i postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takvi da, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi implikacija

$$n \geq n_0 \implies T(n) \leq c \cdot f(n).$$

Prijevod: T raste sporije od “neka konstanta puta f ”, za sve dovoljno velike n .

Napomena. Često se piše $T(n) = O(f(n))$, što nije korektno, jer ova “jednakost” nije simetrična!

Binarno pretraživanje

Ako je niz **uzlazno** ili **silazno sortiran**,

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \quad \text{ili} \quad x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_{n-1},$$

potraga se može drastično **ubrzati**, tako da koristimo tzv.

📍 **binarno** pretraživanje — pretraživanje “**raspolavljanjem**”.

Binarno pretraživanje — funkcija

Funkcija koja vraća odgovor (“skraćeni” oblik):

```
int binary_search(int x[], int n, int elt) {
    int l = 0, d = n - 1, i;
    while (l <= d) {
        i = (l + d) / 2;
        if (elt < x[i])
            d = i - 1;
        else if (elt > x[i])
            l = i + 1;
        else
            return 1;
    }
    return 0; }
```

Binarno pretraživanje — složenost

Koliko traje **najdulja** potraga (ako element **nismo** našli)?

- nakon 1. podjele — duljina niza za potragu je $\leq \frac{n}{2}$
- nakon 2. podjele — duljina niza za potragu je $\leq \frac{n}{4}$
- nakon k -te podjele — duljina niza za potragu je $\leq \frac{n}{2^k}$.

Zadnji smo prolaz napravili kad je

$$\frac{n}{2^k} < 1,$$

dakle, $n < 2^k$, odnosno, $k > \log_2 n$. Pritom, stajemo za **najmanji** takav k — tj., kad je $2^{k-1} \leq n < 2^k$.

Binarno pretraživanje — složenost (nastavak)

Složenost opet mjerimo brojem usporedbi, ali sada koristimo

● “manji (ili jednak)”, odnosno, “veći (ili jednak)”,

jer imamo uređaj među elementima i niz je sortiran po tom uređaju. Operacije na indeksima, opet, ne brojimo.

U najgorem slučaju, za broj raspolavljanja k vrijedi

$$2^{k-1} \leq n < 2^k,$$

ili

$$k \leq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Svako raspolavljanje ima najviše 2 usporedbe, pa je

$$\text{broj usporedbi} \leq 2 \cdot (1 + \lfloor \log_2 n \rfloor).$$

Binarno pretraživanje — složenost (nastavak)

Zapis za trajanje:

$$T(n) \in O(\log n).$$

Značenje: trajanje, u najgorem slučaju, **logaritamski** ovisi o n .

Primjer. U sortiranom telefonskom imeniku s 10^6 osoba, dovoljno je **samo 20** raspolavljanja!

Zaključak: **Sortiramo** zato da bismo **brže** tražili!

Sortiranje nizova

Sadržaj

- Sortiranje nizova (polja):
 - Sortiranje izborom ekstrema — Selection sort.
 - Razne varijante Selection sorta.
 - Složenost sortiranja — općenito.
 - Složenost Selection sorta.
 - Sortiranje zamjenama susjednih elemenata — Bubble sort.
 - Poboľšana varijanta Bubble sorta.
 - Složenost Bubble sorta.

Problem sortiranja nizova

Zadan je niz od n objekata

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1},$$

koje možemo uspoređivati relacijom uređaja \leq ili \geq .

Problem sortiranja niza:

- Treba preurediti zadani niz — tako da članovi budu
 - uzlazno (\nearrow) poredani: $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1}$, ili
 - silazno (\searrow) poredani: $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_{n-1}$.

Za “preuređivanje” niza spremljenog kao polje koristimo

- zamjene članova niza, tj. njihovih vrijednosti: $x_i \leftrightarrow x_j$.

U nastavku, ako nije drugačije rečeno, pretpostavljamo da niz treba uzlazno sortirati.

Sortiranje nizova izborom ekstrema

Ideja: Koristimo **usporedbe** i **zamjene** elemenata u nizu.

- Dovedi **najmanji** element niza x_0, x_1, \dots, x_{n-1} na **njegovo** pravo mjesto.
- To mjesto je **prvo** u cijelom nizu, pa je (nakon **zamjene**), **nova** vrijednost elementa x_0 , upravo, **najmanji** element niza.
- Postupak **ponovi** na **skraćenom** (nesređenom) nizu x_1, \dots, x_{n-1} (duljine za jedan manje, tj. $n - 1$).
- Niz se “**skraćuje**” **sprijeda**.
- To **ponavljamo** sve dok ne “stignemo” na niz sa samo **jednim** elementom (x_{n-1}) — taj je sigurno **sortiran!**

Naziv algoritma: “**izbor**” ekstrema \longrightarrow **Selection sort**.

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

Na početku algoritma imamo nesređeni niz, tj. indeks prvog elementa u nesređenom dijelu je 0.

Algoritam uzlaznog sortiranja izborom ekstrema ima dva “građevna bloka”:

- Za $i = 0$, sve dok je $i < n - 1$, ponavljaj:
 - U nesređenom dijelu niza (indeksi od i do $n - 1$) nađi najmanji element.
 - Najmanji element zamijeni s prvim elementom x_i nesređenog dijela niza.

Nakon ovog koraka nesređeni dio niza se smanjio za 1, tj. prvi element nesređenog dijela sad ima indeks $i + 1$.

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

“Građevni blok”: u nesređenom dijelu niza (od i do $n - 1$) nađi najmanji element (pogledati prošlo predavanje).

- Inicijalizacija: trenutno najmanji element u nesređenom dijelu je prvi element. Njegov indeks je $\text{ind_min} = i$, a vrijednost $\text{x_min} = x_i$.
- Za elemente s indeksima od $j = i + 1$ do $j = n - 1$ ispitaj je li $x_j < \text{x_min}$.
- Ako je, zapamti novu minimalnu vrijednost $\text{x_min} = x_j$ i novi indeks minimalnog elementa $\text{ind_min} = j$.

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

“Građevni blok”: ako nađeni minimalni element nije na prvom mjestu, tj. ako je $\text{ind_min} \neq i$, vrši se

- zamjena prvog elementa nesređenog dijela i minimalnog elementa, $x_i \leftrightarrow x_{\text{ind_min}}$,

korištenjem pomoćne varijable `temp` — u tri koraka:

- $\text{temp} = x_i$
- $x_i = x_{\text{ind_min}}$
- $x_{\text{ind_min}} = \text{temp}$.

Sortiranje izborom ekstrema — funkcija

```
void selection_sort(int x[], int n)
{
    int i, j, ind_min, x_min, temp;

    for (i = 0; i < n - 1; ++i) {
        ind_min = i;
        x_min = x[i];
        for (j = i + 1; j < n; ++j) {
            if (x[j] < x_min) {
                ind_min = j;
                x_min = x[j];
            }
        }
    }
}
```

Sortiranje izborom ekstrema — funkcija (nast.)

```
        if (i != ind_min) {
            temp = x[i];
            x[i] = x[ind_min];
            x[ind_min] = temp;
        }
    }
    return;
}
```

Zbog `x_min = x[ind_min]`, zamjena se može napraviti i **bez** pomoćne varijable `temp`, sa samo **dvije** naredbe

```
    x[ind_min] = x[i];
    x[i] = x_min;        // x_min glumi temp.
```

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 0`

`x_min = x[0] = 42`

`ind_min = 0`

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$
 $j = 1$

$x_{\min} = x[1] = 12$

$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 2$

$x_{\min} < x[2] = 55$


$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer


Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$



$j = 3$



$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 4$

$x_{\min} < x[4] = 18$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 6$

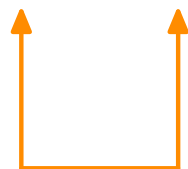
$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 1`

`x_min = x[1] = 42`

`ind_min = 1`

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$
 $j = 2$

$x_{\min} < x[2] = 55$

$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 18$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind_min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 2`

`x_min = x[2] = 55`

`ind_min = 2`

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$
 $j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind}_{\min} = 2$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 42$

$\text{ind}_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind_min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$\text{ind_min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```


Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$x_{\min} = x[3] = 94$

$ind_{\min} = 3$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$
 $j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 55$

$\text{ind}_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$j = 5$

$x_{\min} = x[5] = 44$

$ind_{\min} = 5$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$\text{ind}_{\min} = 5$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 4`

`x_min = x[4] = 55`

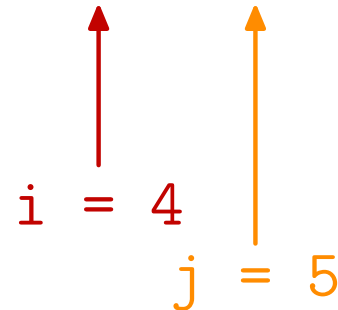
`ind_min = 4`

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 4$
 $j = 5$



$x_{\min} < x[5] = 94$

$\text{ind_min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 4$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 5`

`x_min = x[5] = 94`

`ind_min = 5`

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 5$
 $j = 6$

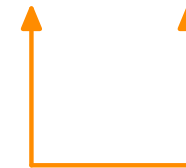
$x_{\min} = x[6] = 67$

$ind_{\min} = 6$

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```


```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

$i = 6$



Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

Sortiranje izborom ekstrema — glavni program

```
int main(void) {
    int i, n;
    int x[] = {42, 12, 55, 94, 18, 44, 67};

    n = 7;
    selection_sort(x, n);

    printf("\n sortirano polje x\n");
    for (i = 0; i < n; ++i) {
        printf(" x[%d] = %d\n", i, x[i]);
    }
    return 0;
}
```

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

Prva varijanta — prošla funkcija:

- kod traženja **ekstrema** pamtimo:
 - vrijednost ekstrema (minimuma) **x_min**,
 - indeks elementa na kojem se ekstrem **dostiže**, **ind_min**.

Skraćena varijanta — po **duljini** kôda, ali **ne mora** biti i **brža**:

- očito je **dovoljno** pamtiti samo
 - **indeks** elementa na kojem se ekstrem **dostiže**,
i to **iskoristiti** kod usporedbi, za **indeksiranje** članova niza.
- Trenutna **vrijednost** ekstrema je uvijek **x[ind_min]**.

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

```
void selection_sort(int x[], int n) {
    int i, j, ind_min, temp;
    for (i = 0; i < n - 1; ++i) {
        ind_min = i;
        for (j = i + 1; j < n; ++j)
            if (x[j] < x[ind_min])
                ind_min = j;
        if (i != ind_min) {
            temp = x[i];
            x[i] = x[ind_min];
            x[ind_min] = temp; }
    }
    return; }
```


Složenost sortiranja nizova

Kako ćemo uspoređivati koliko je brzo sortiranje niza raznim algoritmima?

- Možemo mjeriti vrijeme — teško i neprecizno, posebno za “kratke” nizove.
- Možemo uspoređivati broj operacija koje algoritam ili program obavlja.

Taj broj operacija je jedna od mjera složenosti algoritma.

Primijetite da kod sortiranja imamo dvije bitno različite elementarne operacije (koje ne moraju jednako trajati):

- uspoređivanje elemenata,
- zamjene elemenata.

Složenost sortiranja izborom ekstrema

Kod sortiranja izborom ekstrema vrijedi:

- broj usporedbi u svakom koraku jednak je duljini trenutnog niza umanjenoj za 1, jer se svaki element (osim prvog) uspoređuje s trenutno najmanjim.

Za sve korake zajedno, broj usporedbi je zbroj

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Dakle, broj usporedbi (sigurno) kvadratno ovisi o n .

To je loše — postoje i bolji algoritmi, s manje usporedbi.

Složenost sortiranja izborom ekstrema (nast.)

Nadalje,

- u svakom koraku vrši se **najviše jedna zamjena** nekog para elemenata (može je i **ne biti**, ako je najmanji na pravom mjestu).

Ukupan **broj zamjena** je **najviše**

$$n - 1.$$

Dakle, broj **zamjena** (najviše) **linearno** ovisi o n . To je **dobro!**

Zaključak: za **trajanje** algoritma vrijedi

$$T(n) \in O(n^2).$$

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

Dosad smo uvijek **uzlazno** sortirali

- dovođenjem **najmanjeg** elementa na **početak**.

Isti efekt imat će i

- dovođenje **najvećeg** na **kraj** nesređenog dijela niza.

Ideja:

- Dovedi **najveći** element niza x_0, x_1, \dots, x_{n-1} na **njegovo** pravo mjesto (to je **zadnje** u cijelom nizu).
- Postupak ponovi na **skraćenom** (nesređenom) nizu x_0, \dots, x_{n-2} (duljine za jedan manje, tj. $n - 1$).
- Niz se “**skraćuje**” **straga**.

Indeks i vanjske petlje sad “drži” **zadnji** nesređeni element, a petlja ide **unatrag**.

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

```
void selection_sort(int x[], int n) {
    int i, j, ind_max, temp;
    for (i = n - 1; i > 0; --i) {
        ind_max = i;
        for (j = 0; j < i; ++j)
            if (x[j] > x[ind_max])
                ind_max = j;
        if (i != ind_max) {
            temp = x[i];
            x[i] = x[ind_max];
            x[ind_max] = temp; }
    }
    return; }
```

Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

Složenost — ista kao kod dovođenja najmanjeg na početak.

- Broj usporedbi je jednak

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \in O(n^2).$$

- Broj zamjena je manji ili jednak

$$n - 1 \in O(n).$$

Napomena. Za silazno sortiranje niza treba okrenuti

- uloge ekstrema — najmanji \leftrightarrow najveći, ili (ne oboje!)
- mjesto dovođenja — početak \leftrightarrow kraj,
odnosno, smjer “skraćivanja” — sprijeda \leftrightarrow straga.

Sortiranje zamjenama susjeda

Bubble sort

Uvod — provjera je li niz sortiran

Problem. Kako bismo **provjerili** je li zadani niz

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$$

već **sortiran** — na primjer, **uzlazno**?

Matematički rečeno, niz mora biti **monotono rastući**, gledano po indeksima, tj. za **svaki par** indeksa $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ mora vrijediti

$$j < k \implies x_j \leq x_k.$$

Međutim, algoritamski gledano, **ne treba** provjeriti sve **parove** indeksa — tih usporedbi bi bilo $n(n-1)/2$, što je **previše**.

- **Dovoljno** je provjeriti samo **sve susjedne** parove indeksa, tj. možemo uzeti $k = j + 1$. Onda mora vrijediti

$$x_j \leq x_{j+1}, \quad \text{za sve } j = 0, \dots, n-2.$$

Provjera je li niz sortiran (nastavak)

Dakle, provjera “je li niz **sortiran**” odgovara ranijem predlošku za provjeru “**svi** članovi niza imaju neko svojstvo” — mora biti

$$(x_0 \leq x_1) \wedge (x_1 \leq x_2) \wedge \cdots \wedge (x_{n-2} \leq x_{n-1}).$$

Funkcija koja vraća **odgovor**, s **najviše** $n - 1$ usporedbi:

```
int sortiran(int x[], int n)
{
    int j;
    for (j = 0; j < n - 1; ++j)
        if (x[j] > x[j + 1])
            return 0;
    return 1;
}
```

Što učiniti ako niz *nije* sortiran?

Ako niz *nije* sortiran, onda postoji indeks $j \in \{0, \dots, n - 2\}$ takav da je

$$x_j > x_{j+1},$$

tj. *susjedni* elementi su u *pogrešnom* poretku. Funkcija za provjeru *prekida* rad čim naiđe na *prvo* takvo mjesto.

Ako želimo *sortirati* niz, onda je *prirodna* ideja:

- *zamijenti* poredak takvih *susjeda* koji su u *pogrešnom* poretku, tj. “*ispraviti*” njihov poredak,
- i, zatim, *nastaviti* provjeru kroz *cijeli* niz, uz *ispravak* poretka svih “*krivo* poredanih” *susjeda*.

Napomena. Odmah, da svima bude jasno,

- opći niz *nije moguće* sortirati u *jednom* prolazu kroz niz!

Sortiranje zamjenama susjeda

Sortiranje **zamjenama susjeda** (engl. **Bubble sort**, bubble = mjehurić) bazira se na **zamjenama susjednih** elemenata u nizu.

Ideja:

- Idemo kroz niz od **početka** do **kraja** (tj. unaprijed \longrightarrow).
- Ako **dva susjedna** člana niza x_j i x_{j+1} **nisu** u dobrom poretku, **zamijenimo** im mjesto (vrijednost): $x_j \leftrightarrow x_{j+1}$.
- Kad stignemo do **kraja** niza (u prvom prolazu), **ponovimo** postupak.
- **Nije** jasno kada ćemo **stati** (jer se stalno vraćamo na početak!) — to ćemo analizirati nakon primjera.

Pratite **najveći** element i **zamjene** u svakom prolazu — ako ih **nema**, taj dio niza je **sortiran**!

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

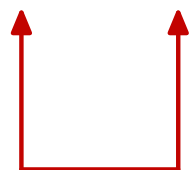
42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

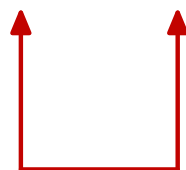
12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

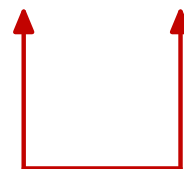


zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	94	44	67
----	----	----	----	----	----	----

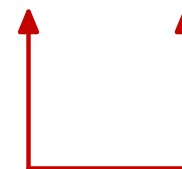


zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	94	67
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

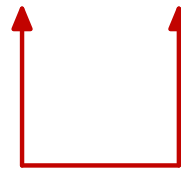
12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

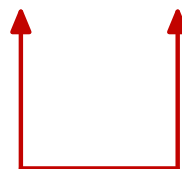


zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	55	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

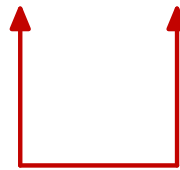
12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

Sortiranje zamjenama susjeda (nastavak)

Kada **stajemo**?

- Primijetimo da smo u **prvom** prolazu **najveći** element “odgurali” na **kraj** niza — na njegovo **pravo** mjesto.
- I drugi, veći elementi počeli su “**putovati**” prema **kraju** niza.

Zaključak: nakon **prvog** koraka

- niz možemo **skratiti** za **posljednji** element x_{n-1}
- i **nastaviti** postupak sa **skraćenim** nizom x_0, \dots, x_{n-2} .

Dakle, niz se **skraćuje straga**, isto kao kod “**najveći na kraj**”.

- **Stajemo** nakon $n - 1$ prolaza, na jednočlanom nizu x_0 .

Sortiranje zamjenama susjeda (nastavak)

```
void bubble_sort(int x[], int n)
{
    int i, j, temp;

    for (i = 1; i < n; ++i)
        for (j = 0; j < n - i; ++j)
            if (x[j] > x[j + 1]) {
                temp = x[j];
                x[j] = x[j + 1];
                x[j + 1] = temp;
            }

    return;
}
```

Složenost sortiranja zamjenama susjeda

Analiza složenosti algoritma:

- U prvom prolazu uspoređujemo $n - 1$ parova susjeda, u drugom $n - 2, \dots$, i tako redom.

Dakle, ukupan broj usporedbi je, kao i kod izbora ekstrema,

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

S druge strane, broj zamjena može drastično varirati:

- od 0 — ako je niz već sortiran, do najviše “svaka usporedba daje zamjenu” — ako je niz naopako sortiran.

Ukupan broj zamjena je najviše

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Složenost sortiranja zamjenama susjeda (nast.)

Složenost — sažetak:

- Broj usporedbi je jednak

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \in O(n^2).$$

- Broj zamjena je manji ili jednak (i to je loše)

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \in O(n^2).$$

Napomena. Promjena smjera prolaza u unatrag (\leftarrow) dovodi najmanji na početak. Za silazno sortiranje niza treba samo

- okrenuti znak usporedbe — veći ($>$) \leftrightarrow manji ($<$).

Sortiranje zamjenama susjeda (nastavak)

Dakle, ovakvo sortiranje zamjenama susjeda ne treba upotrebljavati, jer je loše — ima puno previše zamjena.

Može li se algoritam poboljšati?

- Možemo pamtiti koliko smo zamjena napravili u trenutnom prolazu nizom. Ako nismo napravili nijednu zamjenu — možemo stati, niz je sortiran.
 - Dovoljno je pamtiti: “ima — nema” zamjena u tom prolazu, kao u primjeru.
- Recimo, za ispravno sortiran niz, potreban je samo jedan prolaz da se ustanovi da je niz sortiran.
- U slučaju naopako (obratno) sortiranog niza, nismo uštedili ništa — nema spasa, treba svih $n - 1$ prolaza.

Sortiranje zamjenama susjeda (nastavak)

```
void bubble_sort(int x[], int n) {
    int i, j, temp, zamjena;
    i = n - 1;
    do {
        zamjena = 0;
        for (j = 0; j < i; ++j)
            if (x[j] > x[j + 1]) {
                temp = x[j];
                x[j] = x[j + 1];
                x[j + 1] = temp;
                zamjena = 1; }
        --i; /* smanji i za sljedeci prolaz. */
    } while (zamjena);
    return; }
```


Sortiranje zamjenama susjeda — zaključak

Zaključak: sortiranje zamjenama susjeda

- se **ne isplati** za **opće** nizove, jer ima **previše** zamjena.

Sjetite se da **izbor ekstrema** ima vrlo **malo** zamjena!

Možda se **Bubble sort** i može **isplatiti** za

- “**skoro sortirane**” nizove, ali **nije lako** definirati što to **je**, osim baš kao “**mali broj prolaza**” u **Bubble sortu**.

Gruba ideja: to je **sortirani** niz, u kojeg je “**slučajno**” ubačen (na razna mjesta) neki **mali broj novih** članova.

No, za to postoji puno bolji algoritam: **posebno** sortirati **nove** članove, a onda **sortirano spojiti dva** sortirana niza — ova operacija se zove **Merge** (v. drugi semestar).

Još o sortiranju

Slični algoritmi sortiranja:

- U **Bubble sortu** uvijek napredujemo od **početka** niza. Ako **jednom** krenemo od **početka**, pa **zatim unatrag**, pa opet **unaprijed**, ... , dobit ćemo tzv. (na engleskom)
 - **Shaker sort** — doslovni prijevod: “streseni sort”.
- Možemo sortirati na niz “**padajućih udaljenosti**”: prvo **daleke** elemente, pa **malo bliže**, ... , i, **na kraju**, **susjede**. Na pr., **4** grupe (razmak **4**), pa **dvije** (**2**) i susjedi (**1**).
 - Takav sort zove se **Shell sort** — **nije** “školjkasti sort”, već je ime dobio po **autoru**: **Donald L. Shell**, 1959. g. Analiza **složenosti** mu je **komplicirana**. Ovisno o izboru niza udaljenosti, algoritam može biti **brži** od **kvadratnog**.

Još o sortiranju (nastavak)

Donja ograda za složenost sortiranja uspoređivanjem:

- Može se pokazati da za bilo koji algoritam sortiranja, koji koristi usporedbe parova članova (binarne relacije $<$, $>$), mora biti

$$\text{broj usporedbi} \geq c \cdot n \log n,$$

gdje je c neka pozitivna konstanta,

- tj. broj usporedbi je reda veličine barem $n \log n$.

Dobra stvar: to je bitno brže nego n^2 usporedbi (za velike n).
Interesantno pitanje — koji algoritmi rade tako “brzo”?

Postoje i brži algoritmi sortiranja

- na pr. Radix sort ima linearnu složenost, ali za specijalne vrste podataka!

Još o sortiranju (nastavak)

Algoritmi za sortiranje koji se **koriste** u praksi:

- **QuickSort** — autor **C. A. R. (Tony) Hoare**, 1962. godine.
 - **Prosječna** složenost mu je reda veličine $n \log n$ — za slučajne, dobro “razbacane” nizove.
 - U **najgorem** slučaju, složenost je reda veličine n^2 .

Koristi se zbog dobre **prosječne** brzine i dio je **standardne C** biblioteke. Radimo ga na početku **Prog2**.

- **Heapsort** — autor **John W. J. Williams**, 1964. godine.
 - **Prosječna** i **najgora** složenost su reda veličine $n \log n$,
 - ali je, u **prosjeku**, **sporiji** od **Quicksorta**.

Detaljniji opis na SPA.

Još o sortiranju (nastavak)

U praksi se još koristi i

- MergeSort algoritam — sortiranje sortiranim spajanjem.
 - Najgora složenost je, također, reda veličine $n \log n$, tj. dostiže donju ogradu.
 - Lakše ga je napraviti na vezanoj listi, nego na polju, zbog dodatnih kopiranja kod polja.

Radimo ga na Prog2, kad dođemo na vezane liste.

- Autor je John von Neumann, 1945. godine.
- To je prvi program napisan za računalo koje sprema i programe (von Neumannov model). Računalo se zvalo EDVAC.

Grubi opis QuickSorta

QuickSort se temelji na principu **podijeli pa vladaj**.

- Uzmemo **jedan** element x_k iz niza i dovedemo ga na njegovo **pravo** mjesto u nizu.
- **Lijevo** od njega ostavimo elemente koji su **manji** ili **jednaki** njemu (u bilo kojem poretku).
- **Desno** od njega ostavimo elemente koji su **veći** od njega (u bilo kojem poretku).
- Ako smo **dobro** izabrali, tj. ako je **pravo** mjesto x_k blizu **sredine** niza, onda ćemo morati sortirati (rekurzivno)
 - **dva** manja niza, približno **polovične** duljine.
- U **najgorem** slučaju, ako smo izabrali “**krivi**” x_k , morat ćemo sortirati **jedan** niz duljine $n - 1$.

Ponavljjanje za kolokvij (primjeri i zadaci)

Sadržaj

- Završni primjeri (ponavljanje za kolokvij):
 - Zadatak 1.
 - Zadatak 2.

Zadatak 1

Zadatak 1. Napisati funkciju kojoj su argumenti

- polje (niz) a prirodnih brojeva (nenegativnih) i
- cijeli broj n , koji zadaje broj elemenata u polju a .

Funkcija mora sortirati polje a — silazno po

- broju različitih neparnih djelitelja elemenata u polju.

U ovom primjeru, uređaj na polju a nije određen elementima samog polja, već je

- zadan vrijednostima funkcije f na elementima polja,
- gdje je $f(x) =$ broj različitih neparnih djelitelja od x .

Dakle, po definiciji, smatramo da je x veći ili jednak y , ako i samo ako je $f(x) \geq f(y)$.

Zadatak 1 (nastavak)

To znači da polje **a** treba **sortirati** (poredati) tako da vrijedi

$$f(a[0]) \geq f(a[1]) \geq \dots \geq f(a[n-1]).$$

Bitni dio rješenja: kod sortiranja **uspoređujemo**

- vrijednosti **funkcije** od elemenata, tj. $f(x)$ -ove,
- a **ne same** vrijednosti elemenata (x -ove).

Na primjer, $x > y$ **prelazi** u $f(x) > f(y)$.

Ako želimo **brzo pronaći** neki element u **tako sortiranom** polju,

- analogno treba postupiti i u **binarnom pretraživanju**, tj.
- svagdje **uspoređujemo** vrijednosti **funkcije** elemenata, a **ne same** elemente!

Zadatak 1 (nastavak)

Prvi korak: treba napisati funkciju **f** koja **računa** vrijednost $f(x)$, za zadani x (uzimamo da su x i $f(x)$ tipa **unsigned**).

Lakše i **sporo** rješenje (pogledati **zad_1.c**):

- **modificiramo** algoritam za sortiranje (**ekstrem**) tako da **uspoređuje** vrijednosti funkcije **f** na elementima polja.

Mana: **puno** puta računa funkciju **f** za **isti** element polja.

Teže i **brže** rješenje (pogledati **zad_1a.c**):

- **prvo** izračunamo sve vrijednosti funkcije i **spremimo** ih u novo polje **fa**, tako da je $fa[i] = f(a[i])$.
- Zatim, sortiramo polje **fa silazno**, a **sve zamjene** radimo “**istovremeno**” u **oba** polja: **fa** i **a**.

Jedina **mana:** treba nam **dodatno** polje **fa**.

Zadatak 2

Zadatak 2. Napisati funkciju kojoj su argumenti

- polje (niz) a cijelih brojeva, cijeli (nenegativni) broj n ,
- i još dva cijela broja x_1 i x_2 .

Argumenti a i n zadaju polinom s neparnim potencijama oblika:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i+1}.$$

Funkcija mora vratiti

- cijeli broj x iz intervala $[x_1, x_2]$ u kojem se dostiže najmanja vrijednost $p(x)$.

Ako takvih brojeva ima više, dovoljno je vratiti jednog. Ako takvih brojeva nema ($x_1 > x_2$ na ulazu), treba vratiti $x_1 - 1$.

Zadatak 2 (nastavak)

Bitni dio rješenja: računanje **vrijednosti** polinoma u točki x radimo **modifikacijom Hornerovog** algoritma

🔴 za **neparne** potencije, prema formuli

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i+1} = x \cdot \sum_{i=0}^n a_i (x^2)^i = x \cdot \sum_{i=0}^n a_i y^i.$$

Dakle, stvari idu ovim redom:

- 🔴 na **početku**, napravimo supstituciju $y = x^2$,
- 🔴 **napravimo Hornerov** algoritam za polinom u varijabli y ,
- 🔴 dobivenu vrijednost, na **kraju**, pomnožimo s x .

Rješenje je u **zad_2.c**.

Za kraj

**Najljepše želje svima
za nadolazeće blagdane!**